МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О.Б. Ахієзер, О.А. Геляровська, О.І. Дунаєвська,
О.А. Галуза, Н. В. Москалець

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ЗА ТЕМОЮ «КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ»

з вищої математики для студентів
заочної та дистанційної форм навчання

Затверджено
редакціоно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 25.06.2015 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2016

Методичні вказівки до індивідуальних завдань за темою «Криволінійні інтеграли» з вищої математики для студентів заочної та дистанційної форм навчання : навч. посіб. / укл. О. Б. Ахієзер, О. А. Геляровська, О. І. Дунаєвська, О. А. Галуза, Н. В. Москалець – Х. : НТУ «ХПІ», 2016. – 56 с.

Укладачі: О. Б. Ахієзер
О. А. Геляровська
О. І. Дунаєвська
О. А. Галуза
Н. В. Москалець

Рецензент: Г. Н. Жолткевич

Автори: О. Б. Ахієзер, О. А. Геляровська, О. І. Дунаєвська, О. А. Галуза, Н. В. Москалець

Кафедра комп’ютерної матерматики та математичного моделювання

ЗМІСТ

ВСТУП

Останні роки в технічних університетах відбуваються зрушення у методиці викладання вищої математики, яку намагаються наблизити до інженерних дисциплін та ліквідувати відстань між абстрактними математичними теоріями і прикладними задачами через тлумачення формальних теорій в категоріях реальних завдань. Особливо гострою є проблема актуалізації складу заочної та дистанційної математичної освіти, де відсутній постійний контакт студента з викладачем. Тому актуальним стало створення нового методичного забезпечення, яке б відповідало цим трендам.

Методичні вказівки входять до складу серії посібників «Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання».

Пропоновані методичні вказівки містять приклади розв’язання типових задач і вправ, виконання яких сприяє засвоєнню фундаментальних понять вищої математики. Мінімально необхідна кількість теорії та велика кількість прикладів відповідає особливостям самостійного навчання. Досить дрібне розбиття на теми дозволяє використовувати його з різними навчальними програмами та при побудові індивідуальних траєкторій навчання.

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

1. Криволінійні інтеграли по довжині дуги (першого роду)

Крива називається гладкою, якщо в кожній її точці існує дотична, яка неперервно змінюється вздовж кривої.

Нехай функція $f(M) = f(x, y, z)$ неперервна в кожній точці $M(x, y, z)$ гладкої кривої L. Розіб'ємо криву L довільним способом на n елементарних частин довжиною

$$\Delta l_1,\ \Delta l_2,\ \ldots,\ \Delta l_n\,.$$

Виберемо в кожній з них довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ і складемо інтегральну суму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta l_i\,.$$

Якщо при наближенні $\max \Delta l_i \to 0$ інтегральна сума має скінченну границю, яка не залежить ані від способу розбиття кривої L, ані від вибору точок M_i на елементарних дугах Δl_i, то вона називається криволінійним інтегралом по довжині дуги або криволінійним інтегралом першого роду від функції $f(x, y, z)$ вздовж кривої L і позначається

$$\int_L f(x, y, z)\,dl = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta l_i\,. \tag{1.1}$$

У випадку плоскої кривої L криволінійний інтеграл визначається аналогічно:

$$\int_L f(x, y)\,dl = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta l_i\,. \tag{1.2}$$

1.1. Основні властивості криволінійних інтегралів першого роду

1) криволінійний інтеграл не залежить від напряму шляху інтегрування, тобто

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)dl = \int\limits_{L_{BA}} f(x,y,z)dl\,; \tag{1.3}$$

2) якщо криву інтегрування L_{AB} розбито на дві частини L_{AC} і L_{CB}, де $C \in AB$, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)dl = \int\limits_{L_{AC}} f(x,y,z)dl + \int\limits_{L_{CA}} f(x,y,z)dl\,; \tag{1.4}$$

3) сталий множник можна виносити за знак інтеграла

$$\int\limits_{L_{AB}} C\cdot f(x,y,z)dl = C\cdot \int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)dl \quad (C=\text{const}); \tag{1.5}$$

4) криволінійний інтеграл першого роду від суми функцій, неперервних на кривій L, дорівнює сумі інтегралів від усіх доданків

$$\int\limits_{L_{AB}} \left(f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)\right)dl = \int\limits_{L_{AB}} f_1(x,y,z)dl + \int\limits_{L_{AB}} f_2(x,y,z)dl\,. \tag{1.6}$$

1.2. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду залежить від того, яким чином було задано криву інтегрування L.

У випадку, коли гладку криву L задано параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, і параметр t змінюється монотонно на відрізку $[t_1,t_2]$ $(t_1 < t_2)$ при переміщенні вздовж кривої L з точки A в точку B, є справедливою формула для обчислення криволінійного інтеграла

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt\,, \tag{1.7}$$

де вираз $dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt$ називається диференціалом довжини дуги.

Аналогічно обчислюється криволінійний інтеграл першого роду від функцій двох змінних $f(x,y)$ вздовж плоскої кривої. Тобто, коли параметричними рівняннями задано плоску криву L, формула обчислення криволінійного інтеграла першого роду (1.7) приймає вигляд:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl=\int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt\,, \tag{1.8}$$

де вираз $dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$ − диференціал довжини дуги.

Якщо рівняння плоскої кривої $\rho=\rho(\varphi)$ задано в полярних координатах, функція $\rho(\varphi)$ та її похідна $\rho'(\varphi)$ є неперервними, то має місце окремий випадок формули для обчислення криволінійного інтеграла першого роду, коли як параметр t взято полярний кут φ:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi\,, \tag{1.9}$$

де φ_1 і φ_2 $\left(\varphi_1<\varphi_2\right)$ − значення полярного кута φ $\left(\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\right)$, які визначають на кривій точки A і B відповідно, а вираз $dl=\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$ − диференціал довжини дуги.

У випадку, коли плоску криву L задано в декартовій системі координат неперервною і неперервно диференційовною на проміжку $[a,b]$ функцією $y=y(x)$, де a і b − абсциси точок A і B, то криволінійний інтеграл першого роду обчислюється за формулою:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1+\big(y'(x)\big)^2}\,dx\,, \qquad (1.10)$$

де вираз $dl = \sqrt{1+\big(y'(x)\big)^2}\,dx$ − диференціал довжини дуги.

Приклад **1.1.** Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \left(5z - 2\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де L − дуга кривої, яку задано параметрично: $x = t\cdot\cos t$, $y = t\cdot\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le \pi$.

Розв'язання. За умовами задачі підінтегральний вираз дорівнює $f(x,y,z) = \left(5z - 2\sqrt{x^2+y^2}\right)$, крива L − $\begin{cases} x(t) = t\cdot\cos t, \\ y(t) = t\cdot\sin t, \\ z(t) = t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$. Отже, для обчислення даного криволінійного інтеграла першого роду скористаємося формулою (1.7), тобто

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\cdot\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt\,.$$

Знайдемо диференціал дуги dl для даної кривої, зробивши наступні обчислення:

$$x'(t) = \cos t - t\cdot\sin t\,, \qquad y'(t) = \sin t + t\cdot\cos t\,, \qquad z'(t) = 1\,,$$

$$\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z(t)\big)^2 = \big(\cos t - t\cdot\sin t\big)^2 + \big(\sin t + t\cdot\cos t\big)^2 + 1 =$$

$$= \cos^2 t - \cancel{2t\cos t\sin t} + t^2\cdot\sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2t\sin t\cos t} + t^2\cdot\cos^2 t + 1 =$$

$$= \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t + 1}_{2} + t^2\cdot\sin^2 t + t^2\cdot\cos^2 t = 2 + t^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) =$$

$$= 2 + t^2,$$

$$dl = \sqrt{2+t^2}\,dt\,.$$

Перетворимо підінтегральну функцію, підставляючи замість змінних x, y, z відповідно $x = t\cdot\cos t$, $y = t\cdot\sin t$, $z = t$. Маємо:

$$f(x,y,z) = \left(5z - 2\sqrt{x^2+y^2}\right) = 5t - 2\sqrt{t^2\cdot\cos^2 t + t^2\cdot\sin^2 t} =$$

$$= 5t - 2\sqrt{t^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} = 5t - 2\sqrt{t^2} = 5t - 2t = 3t,$$

$$f\left(x(t), y(t), z(t)\right) = 3t.$$

В початковий інтеграл $\int\limits_L \left(5z - 2\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$ підставимо підінтегральну функцію $f(x,y,z)$ і dl, таким чином, перетворимо криволінійний інтеграл першого роду у визначений інтеграл по змінній t і обчислимо його:

$$\int\limits_L \left(5z - 2\sqrt{x^2+y^2}\right)dl = \int\limits_0^{\pi} 3t\sqrt{2+t^2}\,dt = \left\| \begin{array}{l} d\left(2+t^2\right) = 2t\,dt \\ \frac{1}{2}d\left(2+t^2\right) = t\,dt \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(2+t^2\right)^{1/2} d\left(2+t^2\right) = \frac{3}{2}\cdot\left.\frac{\left(2+t^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^{\pi} = \left.\sqrt{\left(2+t^2\right)^3}\right|_0^{\pi} =$$

$$= \sqrt{\left(2+\pi^2\right)^3} - \sqrt{(2+0)^3} = \sqrt{\left(2+\pi^2\right)^3} - 2\sqrt{2}.$$

***Приклад* 1.2.** Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, де L − дуга циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ $(a>0)$, $0 \le t \le \pi$.

Розв'язання. За умовами задачі підінтегральний вираз дорівнює $f(x,y) = \sqrt{2y}$, крива L − дуга циклоїди $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$ (рис. 1.1).

При обчисленні даного криволінійного інтеграла скористаємося формулою (1.8):

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt\,.$$

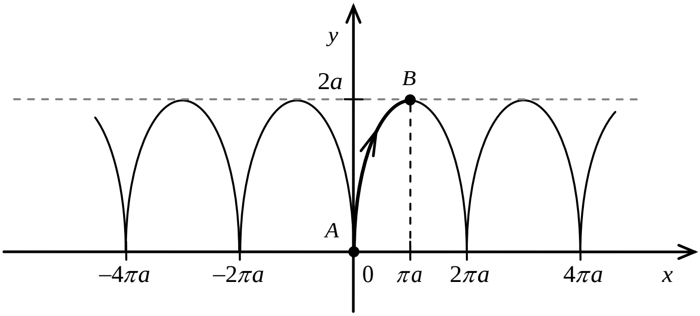

Рисунок 1.1

Знайдемо диференціал дуги dl для даної кривої. Маємо:

$$x'(t)=a(1-\cos t)\,, \qquad y'(t)=a\sin t\,,$$

$$\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2 = a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t =$$

$$=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)=a^2\left(\underbrace{1+\cos^2 t+\sin^2 t}_{2}-2\cos t\right)=$$

$$=a^2(2-2\cos t)=2a^2(1-\cos t)\,,$$

$$dl=\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt\,.$$

Підставляючи вираз для $y=y(t)$, $x=x(t)$ і dl, перетворимо криволінійний інтеграл $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$ у визначений інтеграл по змінній t і обчислимо його:

$$\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{2a\left(1-\cos t\right)}\,dl =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sqrt{2a\left(1-\cos t\right)} \cdot \sqrt{2a^2\left(1-\cos t\right)}\ dt =$$

$$= 2a\sqrt{a}\int\limits_0^{\pi}\left|1-\cos t\right|\,dt = \left\| 0 \le t \le \pi \Rightarrow 0 \le 1-\cos t \le 2 \right\| =$$

$$= 2a\sqrt{a}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\cos t\right)dt = 2a\sqrt{a}\left(t-\sin t\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 2a\sqrt{a}\left(\pi - \underbrace{\sin\pi - 0 + \sin 0}_{0}\right) = 2\pi a\sqrt{a}\ .$$

Зауваження:

1) рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в параметричній формі має вигляд $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$

2) рівняння кола $x^2+y^2=R^2$ в параметричній формі має вигляд $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$

***Приклад* 1.3.** Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \frac{x}{x^2+y^2}\,dl$, де L − дуга кола $\left(x-3\right)^2+y^2=9$ від точки $A\left(3,3\right)$ до точки $B\left(6,0\right)$.

Розв'язання. Побудуємо криву L на площині xOy (рис. 1.2).

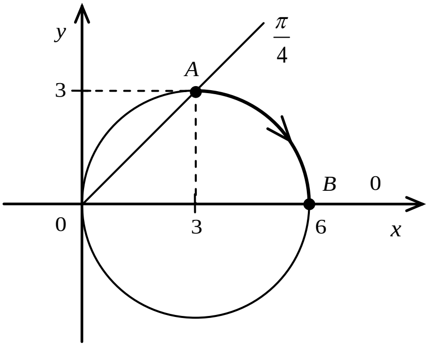

Рисунок 1.2

Оскільки крива L − це дуга кола $(x-3)^2+y^2=9$ від точки $A(3,3)$ до точки $B(6,0)$, то зручно перейти від декартових координат до полярних. За допомогою формул переходу $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ перетворимо рівняння кола:

$$(x-3)^2+y^2=9 \;\Rightarrow\; x^2-6x+9+y^2=9 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x^2+y^2=6x \;\Rightarrow\; \rho^2=6\rho\cos\varphi .$$

Отримаємо $\rho=6\cos\varphi$.

Оскільки рівняння плоскої кривої $\rho=\rho(\varphi)$ задано в полярних координатах, то для обчислення даного криволінійного інтеграла першого роду застосуємо формулу (1.9):

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi .$$

Знайдемо зміну полярного кута φ за допомогою підстановки координат точки A $(x_A=3,\ y_A=3)$ в рівняння прямої OA $(y=x)$, а координати точки B $(x_B=6,\ y_B=0)$ – в рівняння прямої OB $(y=0)$.

$$y_A = x_A \;\Rightarrow\; \frac{y_A}{x_A} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{\rho\sin\varphi_A}{\rho\cos\varphi_A} = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}\,\varphi_A = 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \varphi_A = \mathrm{arctg}\,1 \;\Rightarrow\; \varphi_A = \frac{\pi}{4} \;\left(x_A > 0,\ y_A > 0 \Rightarrow \varphi_A \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right);$$

$$y_B = 0 \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi_B = 0 \;\Rightarrow\; \sin\varphi_B = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \varphi_B = \arcsin 0 \;\Rightarrow\; \varphi_B = 0 \;\left(x_B > 0,\ y_B > 0 \Rightarrow \varphi_B \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від вибору напряму обходу кривої $(\varphi_1 < \varphi_2)$, тому $\varphi_1 = \varphi_B = 0$, а $\varphi_2 = \varphi_A = \frac{\pi}{4}$ $\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right)$.

Перетворимо підінтегральний вираз $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$:

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho} = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi).$$

Знайдемо диференціал дуги dl для кривої $\rho = 6\cos\varphi$. Маємо:

$$\rho' = -6\sin\varphi,$$

$$\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2 = (6\cos\varphi)^2 + (-6\sin\varphi)^2 = 6^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 6^2,$$

$$dl = \sqrt{6^2}\, d\varphi \;\Rightarrow\; dl = 6\, d\varphi.$$

Підставляючи вирази для $f(x, y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ і dl, перетворимо початковий криволінійний інтеграл у визначений інтеграл по змінній φ і обчислимо його:

$$\int_L \frac{x}{x^2 + y^2}\, dl = \int_{L_{AB}} \frac{x}{x^2 + y^2}\, dl = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\varphi}{\rho} \cdot 6\, d\varphi = \left\| \rho = 6\cos\varphi \right\| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\varphi}{6\cos\varphi} \cdot 6\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi = \varphi\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}.$$

***Приклад* 1.4.** Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{L} \frac{\left(x^2-3\right)ye^y}{\sqrt{27x^2+9xy+82}}dl$, де $L-$ дуга кубічної параболи $y=x^3-9x$, яка лежить між точками A і B з абсцисами, які дорівнюють -3 і -2 відповідно.

Розв'язання. Побудуємо криву L на площині xOy (рис. 1.3).

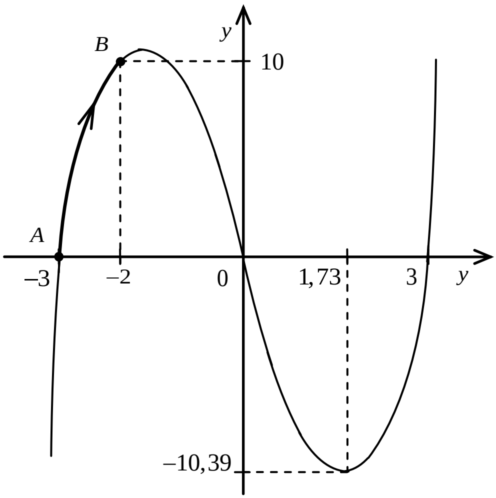

Рисунок 1.3

Оскільки за умовами задачі плоску криву L_{AB} задано явно в декартовій системі координат, то криволінійний інтеграл першого роду обчислюється за формулою (1.10):

$$\int\limits_{L_{AB}} f\left(x,y\right)dl = \int\limits_{a}^{b} f\left(x,y\left(x\right)\right)\sqrt{1+\left(y'\left(x\right)\right)^2}\,dx\,.$$

Знайдемо диференціал дуги dl для кривої $y=x^3-9x$. Маємо:

$$y'=3x^2-9\,, \qquad 1+\left(y'\left(x\right)\right)^2=1+\left(3x^2-9\right)^2=9x^4-54x^2+82\,,$$

$$dl = \sqrt{9x^4 - 54x^2 + 82}\,dx.$$

Підставляючи вирази для y і dl, перетворимо криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{\left(x^2-3\right)ye^y}{\sqrt{27x^2+9xy+82}}\,dl$ у визначений інтеграл по змінній x і обчислимо його:

$$\int\limits_L \frac{\left(x^2-3\right)ye^y}{\sqrt{27x^2+9xy+82}}\,dl = \int\limits_{L_{AB}} \frac{\left(x^2-3\right)ye^y}{\sqrt{27x^2+9xy+82}}\,dl =$$

$$= \int\limits_{-3}^{-2} \frac{\left(x^2-3\right)\left(x^3-9x\right)e^{x^3-9x}}{\sqrt{27x^2+9x\left(x^3-9x\right)+82}}\sqrt{9x^4-54x^2+82}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{-2} \frac{\left(x^2-3\right)\left(x^3-9x\right)e^{x^3-9x}}{\cancel{\sqrt{9x^4-54x^2+82}}}\cancel{\sqrt{9x^4-54x^2+82}}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{-2} \left(x^2-3\right)\left(x^3-9x\right)e^{x^3-9x}\,dx = \left\| \begin{array}{l} \text{обчислимо інтеграл методом} \\ \text{інтегрування частинами} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ u = \left(x^3-9x\right),\ du = \left(3x^2-9\right)dx,\ du = 3\left(x^2-3\right)dx \\ dv = \left(x^2-3\right)e^{x^3-9x}\,dx, \\ v = \int \left(x^2-3\right)e^{x^3-9x}\,dx = \left\| d\left(x^3-9x\right) = 3\left(x^2-3\right)dx \right\| = \\ = \frac{1}{3}\int e^{x^3-9x}\,d\left(x^3-9x\right) = \frac{1}{3}e^{x^3-9x} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3-9x\right)e^{x^3-9x}\Big|_{-3}^{-2} - \frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{-2} 3\left(x^2-3\right)e^{x^3-9x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3-9x\right)e^{x^3-9x}\Big|_{-3}^{-2} - \frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{-2} e^{x^3-9x}\,d\left(x^3-9x\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(x^3 - 9x\right)e^{x^3-9x} - e^{x^3-9x}\right)\Bigg|_{-3}^{-2} = \frac{1}{3}e^{x^3-9x}\left(x^3 - 9x - 1\right)\Bigg|_{-3}^{-2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{(-2)^3-9(-2)}\left((-2)^3 - 9(-2) - 1\right) - e^{(-3)^3-9(-3)}\left((-3)^3 - 9(-3) - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{-8+18}\left(-8+18-1\right) - e^{-27+27}\left(-27+27-1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(9e^{10} - e^{0}\left(-1\right)\right) = \frac{1}{3}\left(9e^{10} + 1\right).$$

***Приклад* 1.5.** Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \left(2x + 5xy\right) dl$, де L − контур трикутника ABC з вершинами $A(1,2)$, $B(3,6)$ і $C(3,2)$.

Розв'язання. Побудуємо контур трикутника ABC (рис. 1.4).

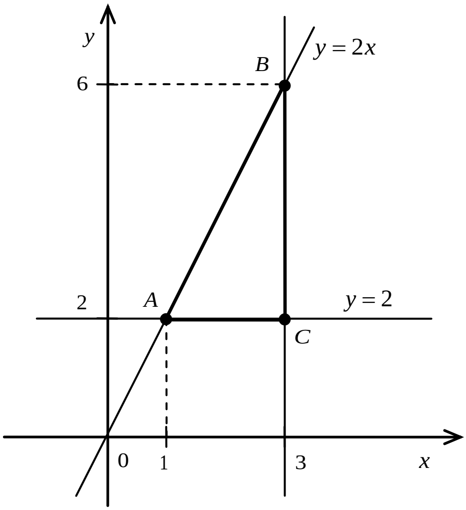

Рисунок 1.4

Оскільки, згідно з властивістю адитивності

$$\int\limits_{L}(2x+5xy)\,dl=\int\limits_{L_{AB}}(2x+5xy)\,dl+\int\limits_{L_{BC}}(2x+5xy)\,dl+\int\limits_{L_{CA}}(2x+5xy)\,dl\,,$$

то залишається обчислити криволінійний інтеграл по кожному з відрізків AB, BC і CA (рис. 1.4).

1) (AB): знайдемо рівняння прямої AB. Скористаємося рівнянням прямої, яка проходить через дві точки

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\,,$$

де $A(x_A,y_A)=(1,2)$, $B(x_B,y_B)=(3,6)$. Тоді

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{6-2}\;\Rightarrow\;\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}\;\Rightarrow\;\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}\,.$$

Скористаємося властивістю пропорцій:

$$2(x-1)=1(y-2)\;\Rightarrow\;2x-2=y-2\,.$$

В результаті рівняння прямої AB має вигляд $y=2x$.

Знайдемо диференціал dl для даної прямої:

$$y'=2\,,\qquad 1+\left(y'(x)\right)^2=1+2^2=5\,,$$

$$dl=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx\,,\;dl=\sqrt{5}\,dx\,.$$

Звідси, враховуючи, що x змінюється від 1 до 3, отримаємо:

$$\int\limits_{L_{AB}}(2x+5xy)\,dl=\int_1^3(2x+5x\cdot 2x)\sqrt{5}\,dx=\sqrt{5}\int_1^3\left(2x+10x^2\right)dx=$$

$$=\sqrt{5}\left(x^2+\frac{10x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3=\frac{\sqrt{5}}{3}\left(3x^2+10x^3\right)\Bigg|_1^3=\frac{\sqrt{5}}{3}\left(3\left(3^2-1\right)+10\left(3^3-1\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{3}\left(3(9-1)+10(27-1)\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}\left(3\cdot 8+10\cdot 26\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}\left(24+260\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot 284=\frac{284\sqrt{5}}{3}.$$

2) (BC): пряма BC паралельна осі Oy, отже, рівняння прямої BC має вигляд $x=3$.

Диференціал dl в даному випадку дорівнює

$$dl=\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy,$$

а, оскільки $x(y)=3=\text{const}$, то $x'(y)=0$, отже, $dl=dy$. Враховуючи, що y змінюється від 2 до 6, отримаємо:

$$\int\limits_{L_{BC}}(2x+5xy)\,dl=\int\limits_2^6(2\cdot 3+5\cdot 3y)\,dy=3\int\limits_2^6(2+5y)\,dy=3\left(2y+\frac{5y^2}{2}\right)\Bigg|_2^6=$$

$$=\frac{3}{2}\left(4y+5y^2\right)\Big|_2^6=\frac{3}{2}\left(4(6-2)+5\left(6^2-2^2\right)\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\left(4\cdot 4+5\cdot 32\right)=\frac{3}{2}\left(16+160\right)=\frac{3}{2}\cdot 176=264.$$

3) (CA): пряма CA паралельна осі Ox, отже, рівняння прямої CA має вигляд $y=2$. Для даної прямої $dl=dx$, оскільки $dl=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$, де $y=2$, $y'=0$. Тоді, враховуючи, що x змінюється від 1 до 3, отримаємо:

$$\int\limits_{L_{CA}} (2x+5xy)\,dl = \int\limits_1^3 (2x+5x\cdot 2)\,dx = 12\int\limits_1^3 x\,dx = \left.\frac{12x^2}{2}\right|_1^3 = 6x^2\Big|_1^3 =$$

$$= 6\left(3^2-1\right) = 6\cdot 8 = 48\,.$$

Остаточно маємо:

$$\int\limits_L (2x+5xy)\,dl = \int\limits_{L_{AB}} (2x+5xy)\,dl + \int\limits_{L_{BC}} (2x+5xy)\,dl + \int\limits_{L_{CA}} (2x+5xy)\,dl =$$

$$= \frac{284\sqrt{5}}{3} + 264 + 48 = \frac{284\sqrt{5}+936}{3}\,.$$

1.3. Деякі застосування криволінійних інтегралів першого роду

1. Довжина дуги AB плоскої або просторової лінії обчислюється за формулою:

$$l = \int\limits_{L_{AB}} dl\,. \qquad (1.11)$$

2. Маса дуги AB плоскої або просторової лінії обчислюється за формулою:

$$m = \int\limits_{L_{AB}} \mu\,dl\,, \qquad (1.12)$$

де $\mu = \mu(x,y)$ − лінійна густина плоскої лінії,

$\mu = \mu(x,y,z)$ − лінійна густина просторової лінії.

***Приклад* 1.6.** Обчислити довжину дуги кривої L за допомогою криволінійного інтеграла першого роду, де L − дуга кардіоїди $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$, $0 \le t \le \pi$.

Розв'язання. Для обчислення довжини дуги AB плоскої лінії застосуємо формулу (1.11): $l = \int\limits_{L_{AB}} dl$.

Перетворимо даний криволінійний інтеграл у визначений інтеграл по змінній t, виходячи з даних параметричних рівнянь кардіоїди і формули для диференціала дуги плоскої кривої, яку задано в параметричній формі.

$$x'(t) = -2a\sin t + 2a\sin 2t = 2a(\sin 2t - \sin t),$$

$$y'(t) = 2a\cos t - 2a\cos 2t = 2a(\cos t - \cos 2t),$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 2^2 a^2 (\sin 2t - \sin t)^2 + 2^2 a^2 (\cos t - \cos 2t)^2 =$$

$$= 2^2 a^2 \left(\sin^2 2t - 2\sin 2t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2\cos t \cos 2t + \cos^2 2t\right) =$$

$$= 2^2 a^2 \left(\underbrace{\sin^2 2t + \cos^2 2t + \sin^2 t + \cos^2 t}_{2} - 2\left(\underbrace{\sin 2t \sin t + \cos t \cos 2t}_{\cos(2t-t)} \right) \right) =$$

$$= 2^2 a^2 (2 - 2\cos t) = 2^3 a^2 (1 - \cos t) = 2^4 a^2 \sin^2 \frac{t}{2};$$

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt,$$

$$dl = \sqrt{2^4 a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt \;\Rightarrow\; dl = 2^2 a \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt .$$

Тоді

$$l = \int\limits_{L_{AB}} dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int\limits_0^{\pi} 2^2 a \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt =$$

$$= \left\| 0 \le t \le \pi \Rightarrow 0 \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \sin \frac{t}{2} \le 1 \right\| = 4a \int\limits_0^{\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 4a \cdot \left(-2\cos\frac{t}{2} \right)\Bigg|_0^{\pi} = 8a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_{\pi}^{0} = 8a\left(\underbrace{\cos 0}_{1} - \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} \right) = 8a \quad (\text{лін.од.})$$

***Приклад* 1.7.** Обчислити масу дуги кривої L за допомогою криволінійного інтеграла першого роду, де L − лемніската Бернуллі $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, лінійна густина $\mu(x, y) = k\rho$, де $k > 0$.

Розв'язання. Лемніскату Бернуллі $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ зображено на рисунку 1.5.

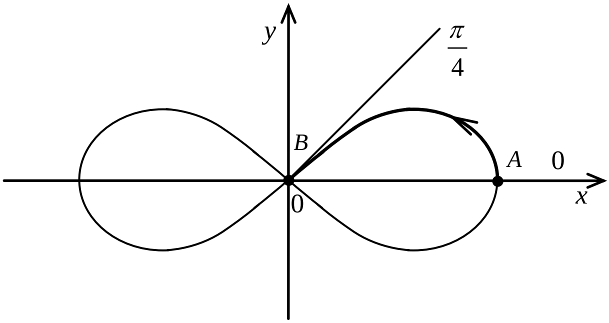

Рисунок 1.5

Маса дуги AB плоскої лінії обчислюється за формулою (1.12):

$$m = \int\limits_{L_{AB}} \mu\, dl\,,$$

де $\mu = \mu(x, y)$ − лінійна густина плоскої лінії.

Перетворимо даний криволінійний інтеграл у визначений інтеграл по змінній φ, виходячи з даного рівняння кривої і формули для диференціала дуги плоскої кривої, яку задано в полярной системі координат.

$$\rho^2(\varphi) = 2a^2\cos 2\varphi \;\Rightarrow\; \rho(\varphi) = \sqrt{2a^2\cos 2\varphi} = |a|\sqrt{2\cos 2\varphi},$$

$$\rho'(\varphi) = \frac{|a|\sqrt{2}\,(-2\sin 2\varphi)}{2\sqrt{\cos 2\varphi}} = -\frac{|a|\sqrt{2}\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

$$\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2 = 2a^2\cos 2\varphi + \left(-\frac{|a|\sqrt{2}\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2 =$$

$$= 2a^2\cos 2\varphi + \frac{2a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = 2a^2\left(\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right) =$$

$$= 2a^2\,\frac{\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = 2a^2\,\frac{1}{\cos 2\varphi} = \frac{2a^2}{\cos 2\varphi};$$

$$dl = \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi,$$

$$dl = \sqrt{\frac{2a^2}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi \;\Rightarrow\; dl = \frac{|a|\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi;$$

$$\mu(x, y) = k\rho = k|a|\sqrt{2\cos 2\varphi} = k|a|\sqrt{2}\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

З рисунка 1.5 видно, що лемніската Бернуллі симетрична відносно осі Ox і осі Oy. З'ясуємо, як змінюється кут φ, коли радіус-вектор точки на лемніскаті описує чверть шуканої довжини дуги, яка лежить в першому квадранті.

При $\varphi = 0$ $\rho = a\sqrt{2}$. Визначимо, чому дорівнює полярний кут φ, коли радіус-вектор буде дорівнювати нулю. Підставляючи $\rho = 0$ в рівняння лемніскати, отримаємо $0 = 2a^2\cos 2\varphi$, звідки $\cos 2\varphi = 0$, $2\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$\left(2\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Таким чином, на одній чверті дуги полярний кут змінюється в межах від 0 до $\frac{\pi}{4}$, а маса чверті шуканої дуги дорівнює

$$m_1 = \int\limits_{L_{AB}} \mu(x,y)\,dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} k\,|a|\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot\frac{|a|\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{\cos 2\varphi}}}\,d\varphi =$$

$$= 2ka^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi = 2ka^2\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2ka^2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi\,ka^2}{2} \ \left(\text{усл. од. маси}\right).$$

В результаті маса всієї дуги кривої $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ буде дорівнювати

$$m = 4m_1 = 4\cdot\frac{\pi\,ka^2}{2} = 2\pi\,ka^2 \ \left(\text{усл. од. маси}\right).$$

2. Криволінійні інтеграли по координатах (другого роду)

Нехай функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$ визначені і неперервні в кожній точці $M(x,y,z)$ дуги AB гладкої кривої L. Розіб'ємо цю дугу довільним чином на n елементарних частин довжиною Δl_1, Δl_2, …, Δl_n, і складемо інтегральну суму для функцій $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$ по координатах:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\Big(P(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta x_i + Q(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta y_i + R(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta z_i\Big),$$

де Δx_i, Δy_i, Δz_i – довжини проекцій часткових дуг Δl_i $(i=1,2,...,n)$, на відповідні координатні осі.

Якщо при наближенні $\max\Delta x_i \to 0$, $\max\Delta y_i \to 0$ і $\max\Delta z_i \to 0$ інтегральна сума має скінченну границю, яка не залежить ані від способу розбиття гладкої кривої L, ані від вибору точок M_i на елементарних дугах Δl_i, то вона називається криволінійним інтегралом другого роду від виразу $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ по напрямленій дузі AB і позначається

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \tag{2.1}$$

$$= \lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_i\to 0\\ \max\Delta z_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\Big(P(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta x_i + Q(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta y_i + R(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta z_i\Big).$$

У випадку плоскої кривої L криволінійний інтеграл другого роду визначається аналогічно:

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \left(P(x_i, y_i)\cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i)\cdot \Delta y_i \right). \qquad (2.2)$$

Криволінійний інтеграл другого роду іноді називають лінійним інтегралом вектора

$$\vec{a} = P(x,y,z)\cdot\vec{i} + Q(x,y,z)\cdot\vec{j} + R(x,y,z)\cdot\vec{k} \qquad (2.3)$$

вздовж орієнтованої кривої L і позначають

$$\int_L \left(\vec{a}, d\vec{l}\right) = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\ , \qquad (2.4)$$

де в лівій частині вираз $\left(\vec{a}, d\vec{l}\right)$ – скалярний добуток $\vec{a}$ и $d\vec{l}$.

Інтеграл від вектора $\vec{a}$ вздовж плоскої кривої L визначається відповідно, виразом

$$\int_L \left(\vec{a}, d\vec{l}\right) = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy\ . \qquad (2.5)$$

Якщо крива замкнена, то інтеграл позначають

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\ . \qquad (2.6)$$

2.1. Властивості криволінійних інтегралів другого роду

1) Криволінійний інтеграл другого роду змінює знак на протилежний при зміні напряму шляху інтегрування:

$$\int_{L_{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int_{L_{BA}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\ . \qquad (2.7)$$

Сказане є вірним і для замкненої кривої, при цьому вибір точки початку обходу може бути довільним. Додатним напрямом вважається такий, при якому область, обмежена цією кривою, залишається зліва (для плоскої кривої це рух проти годинникової стрілки (рис. 2.1)).

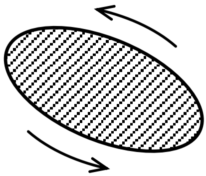

Рисунок 2.1

2) сума інтегралів позначається як криволінійний інтеграл

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_L P\,dx + \int_L Q\,dy + \int_L R\,dz\,. \tag{2.8}$$

Решта властивостей є аналогічною властивостям криволінійного інтеграла першого роду.

2.2. Обчислення криволінійних інтегралів другого роду

Нехай гладку просторову криву L задано параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, де $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ − неперервно диференційовні функції. Нехай також A і B, відповідно, початкова і кінцева точки цієї кривої, причому значення параметра $t = t_1$ відповідає точці A, а значення параметра $t = t_2$ відповідає точці B. Тоді криволінійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\int_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \tag{2.9}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot z'(t)\Big)dt\,.$$

Слід зауважити, що t_1 може бути більшим за t_2, оскільки криволінійний інтеграл другого роду залежить від вибору напряму обходу кривої.

Якщо крива L лежить в площині xOy і задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $x(t)$, $y(t)$ − неперервно диференційовні функції; A, B − відповідно початкова і кінцева точки цієї кривої, причому значення параметра $t = t_1$ відповідає точці A, значення параметра $t = t_2$ відповідає точці B, то

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(P\big(x(t), y(t)\big) \cdot x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big) \cdot y'(t) \Big) dt \,. \qquad (2.10)$$

Якщо крива L лежить в площині xOy і задана рівнянням $y = f(x)$, де A, B − відповідно початкова і кінцева точки цієї кривої, причому значення $x = a$ відповідає точці A, значення $x = b$ відповідає точці B, а похідна $f'(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \Big(P\big(x, f(x)\big) + Q\big(x, f(x)\big) \cdot f'(x) \Big) dx \,. \qquad (2.11)$$

***Приклад* 2.1.** Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{L} x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)dz$, де L − відрізок прямої AB, $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої AB в параметричному вигляді. Скористаємося рівнянням прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \,,$$

де $A(x_A, y_A, z_A) = (1,1,1)$, $B(x_B, y_B, z_B) = (2,3,4)$. Тоді

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{4-1} \;\Rightarrow\; \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \,.$$

Потім зрівняємо отримані канонічні рівняння прямої AB з параметром t:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}=t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=t, \\ \dfrac{y-1}{2}=t, \\ \dfrac{z-1}{3}=t. \end{cases}$$

В результаті перетворень отримаємо рівняння прямої в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x=t+1, \\ y=2t+1, \\ z=3t+1. \end{cases}$$

Згідно з формулою (2.9)

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot x'(t)+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot y'(t)+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot z'(t)\Big)dt\ ,$$

знайдемо диференціали змінних x, y, z та функцій $P\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, $Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, $R\big(x(t),y(t),z(t)\big)$:

$$\begin{cases} x(t)=t+1, \\ y(t)=2t+1, \\ z(t)=3t+1; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x'(t)=1, \\ y'(t)=2, \\ z'(t)=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(x,y,z)=x, \\ Q(x,y,z)=y, \\ R(x,y,z)=x+y-1; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} P\big(x(t),y(t),z(t)\big)=t+1, \\ Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)=2t+1, \\ R\big(x(t),y(t),z(t)\big)=3\text{t}+1. \end{cases}$$

Оскільки точки A і B, відповідно, початкова і кінцева точки відрізка AB, то значення параметра $t=t_1$ відповідає точці A, а значення параметра $t=t_2$ відповідає точці B. Знайдемо значення параметрів t_1 і t_2 за допомогою підстановки координат точки A $\left(x_A=1,\ y_A=1,\ z_A=1\right)$ і точки B $\left(x_B=2,\ y_B=3,\ z_B=4\right)$ в параметричні рівняння прямої $x(t)=t+1$, $y(t)=2t+1$, $z(t)=3t+1$ наступним чином:

$$x_A=1\ ,\ x_A=t_1+1\ \Rightarrow\ 1=t_1+1\ \Rightarrow\ t_1=0\ ,$$
$$x_B=2\ ,\ x_B=t_2+1\ \Rightarrow\ 2=t_2+1\ \Rightarrow\ t_2=1,$$

або $y_A=1\ ,\ y_A=2t_1+1\ \Rightarrow\ 1=2t_1+1\ \Rightarrow\ t_1=0\ ,$

$$y_B=3\ ,\ y_B=2t_2+1\ \Rightarrow\ 3=2t_2+1\ \Rightarrow\ t_2=1,$$

або $z_A=1\ ,\ z_A=3t_1+1\ \Rightarrow\ 1=3t_1+1\ \Rightarrow\ t_1=0\ ,$

$$z_B=4\ ,\ z_B=3t_2+1\ \Rightarrow\ 4=3t_2+1\ \Rightarrow\ t_2=1.$$

Отже, параметр t буде змінюватися від 0 до 1.

Далі, підставляючи всі отримані вирази в початковий криволінійний інтеграл, обчислимо визначений інтеграл:

$$\int\limits_{L_{AB}} x\,dx+y\,dy+\left(x+y-1\right)dz=\int\limits_0^1\left(\left(t+1\right)\cdot 1+\left(2t+1\right)\cdot 2+\left(3t+1\right)\cdot 3\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^1\left(t+1+4t+2+9t+3\right)dt=\int\limits_0^1\left(14t+6\right)dt=\left(\frac{14t^2}{2}+6t\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(7t^2+6t\right)\Big|_0^1=7+6=13\,.$$

Приклад **2.2.** Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L\left(2a-y\right)dx-\left(a-y\right)dy$ вздовж першої арки циклоїди $x=a\left(t-\sin t\right)$, $y=a\left(1-\cos t\right)$.

Розв'язання. Плоску криву L (циклоїду) зображено на рисунку 2.2.

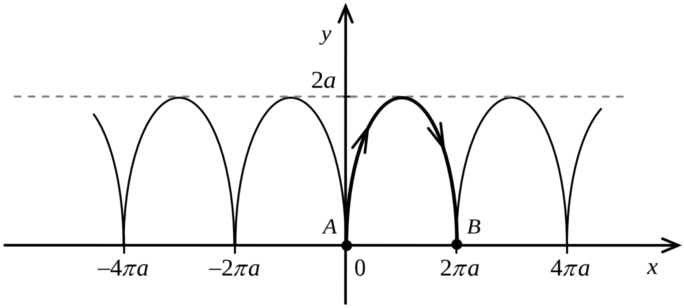

Рисунок 2.2

Оскільки в даному прикладі, плоска крива задана параметричними рівняннями, виразимо $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ через параметр t.

$$P(x,y)=(2a-y),$$

$$P\big(x(t),y(t)\big)=2a-a(1-\cos t)=a(2-1+\cos t)=a(1+\cos t);$$

$$Q(x,y)=-(a-y)=(y-a),$$

$$Q\big(x(t),y(t)\big)=a(1-\cos t)-a=a(1-\cos t-1)=-a\cos t\ .$$

Підставляючи перетворені вирази $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ до початкового інтеграла і переходячи від криволінійного інтеграла до визначеного інтеграла по змінній t за формулою (2.10)

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(P\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)dt\ ,$$

де t змінюється від 0 до 2π (рис. 2.2), отримаємо:

$$\int\limits_{L}(2a-y)dx-(a-y)dy=\int\limits_{L_{AB}}(2a-y)dx+(y-a)dy=$$

$$= \left\| \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t); \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t), \\ y'(t) = a \sin t. \end{cases} \right\| =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[a(1 + \cos t) \cdot a(1 - \cos t) + (-a \cos t) \cdot a \sin t \right] dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 t - \sin t \cos t\right) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) - \frac{1}{2} \sin 2t \right) dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t - \sin 2t)\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{4} \left(2t - \sin 2t + \cos 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a^2}{4} \left[2 \cdot (2\pi - 0) - \left(\underset{0}{\sin 4\pi} - \underset{0}{\sin 0} \right) + \left(\underbrace{\cos 4\pi}_{1} - \underset{1}{\cos 0} \right) \right] = \frac{a^2}{4} \cdot 4\pi = \pi a^2 .$$

2.3. Формула Гріна

Інтеграл по замкненому контуру L можна перетворити у подвійний інтеграл по області G, обмеженій цим контуром і навпаки, використовуючи формулу Гріна:

$$\oint_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy , \tag{2.12}$$

де функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ та їхні частинні похідні першого порядку повинні бути неперервними в області G і на контурі L .

При цьому обхід контура L вибирається таким чином, що область G залишається зліва.

***Приклад* 2.3.** Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint_L \left(x^3 - 2y + x^2 \sin\left(x^3 + y^3\right) \right) dx + \left(2xy + y^2 \sin\left(x^3 + y^3\right) \right) dy$ за допомогою формули Гріна, де L − коло $x^2+y^2=2x$, яке перебігається проти годинникової стрілки.

Розв'язання. За допомогою елементарних перетворень приведемо рівняння кола $x^2+y^2=2x$ до вигляду $(x-1)^2+y^2=1$. Звідси випливає, що центр кола знаходиться в точці $(1,0)$, а радіус дорівнює $R=1$ (рис. 2.3).

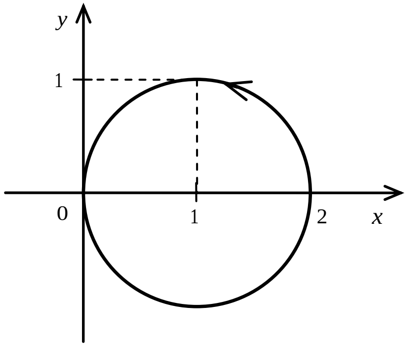

Рисунок 2.3

Для даного інтеграла:

$$P(x,y)=x^3-2y+x^2\sin\left(x^3+y^3\right),$$

$$Q(x,y)=2xy+y^2\sin\left(x^3+y^3\right).$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2+x^2\cos\left(x^3+y^3\right)\cdot 3y^2=-2+3x^2y^2\cos\left(x^3+y^3\right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y+y^2\cos\left(x^3+y^3\right)\cdot 3x^2=2y+3x^2y^2\cos\left(x^3+y^3\right);$$

отже,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2y+3x^2y^2\cos\left(x^3+y^3\right)-\left(-2+3x^2y^2\cos\left(x^3+y^3\right)\right)=$$

$$=2y+\cancel{3x^2y^2\cos\left(x^3+y^3\right)}+2-\cancel{3x^2y^2\cos\left(x^3+y^3\right)}=2y+2.$$

Оскільки крива L − це коло $x^2+y^2=2x$, то зручно перейти від декартових координат до полярних координат. За допомогою формул переходу

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi$$

$$\left(dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi,\ x^2+y^2=\rho^2\right)$$

перетворимо рівняння кола:

$$x^2+y^2=2x\ \Rightarrow\ \rho^2=2\rho\cos\varphi.$$

Отримаємо $\rho=2\cos\varphi$.

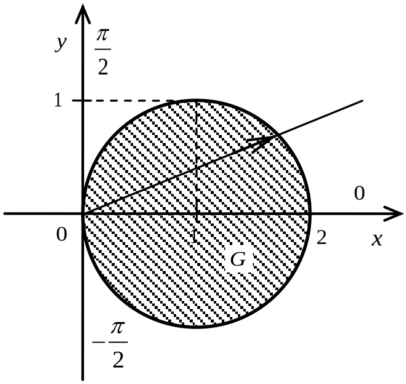

Рисунок 2.4

Область G (рис. 2.4) лежить між променями $\varphi_1=-\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_2=\dfrac{\pi}{2}$. Полюс лежить на межі області, $\rho_1(\varphi)=0$, $\rho_2(\varphi)=2\cos\varphi$.

Отже, область G в полярній системі координат задається нерівностями:

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le \rho \le 2\cos\varphi. \end{cases}$$

Таким чином, використовуючи формулу Гріна (2.12), обчислимо початковий інтеграл:

$$\oint_L \left(x^3 - 2y + x^2 \sin\left(x^3 + y^3\right)\right)dx + \left(2xy + y^2 \sin\left(x^3 + y^3\right)\right)dy =$$

$$= \iint_G \left(2y + 2\right)dx\,dy = \iint_G \left(2\rho\sin\varphi + 2\right)\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \left(2\rho\sin\varphi + 2\right)\rho\, d\rho =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \left(2\rho^2\sin\varphi + 2\rho\right) d\rho =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2\rho^3}{3}\sin\varphi + \frac{2\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}\cdot 2^3\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi + 2^2\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{3}\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi + 4\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi + 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$=\frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos2\varphi\right)d\varphi=\left\|\begin{matrix}d\left(\cos\varphi\right)=-\sin\varphi\,d\varphi\\-d\left(\cos\varphi\right)=\sin\varphi\,d\varphi\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\left(\cos\varphi\right)+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2+2\cos2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\left(-\frac{16}{3}\frac{\cos^4\varphi}{4}+2\varphi+2\cdot\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(2\varphi+\sin2\varphi-\frac{4}{3}\cos^4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=2\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\left(\underbrace{\sin\frac{2\cdot\pi}{2}}_{0}-\underbrace{\sin\frac{-\pi\cdot2}{2}}_{0}\right)-\frac{4}{3}\left(\underbrace{\cos^4\frac{\pi}{2}}_{0}-\underbrace{\cos^4\frac{-\pi}{2}}_{0}\right)=$$

$$=2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2\pi\ .$$

2.4. Умови незалежності криволінійних інтегралів від шляху інтегрування

Для того, щоб криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{L_{AB}}P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy$ не залежав від шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\ . \qquad (2.13)$$

Зауваження:

1) якщо ж, крім того, L є замкненою кривою, то

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0\,; \tag{2.14}$$

2) для того, щоб криволінійний інтеграл другого роду

$$\int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \tag{2.15}$$

по просторовій кривій L не залежав від шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб підінтегральний вираз

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

був у деякій області повним диференціалом деякої функції $u(x,y,z)$. Для цього необхідно виконання умов:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{2.16}$$

Якщо відомий повний диференціал функції двох змінних $du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, де $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то її можна знайти, інтегруючи du по будь-якій лінії між довільною фіксованою точкою $M_0(x_0, y_0)$ і змінною точкою $M(x,y)$:

$$u(x,y) = \int_{M_0M} du + C = \int_{M_0M} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + C\,. \tag{2.17}$$

Зазвичай як лінію інтегрування M_0M можна використовувати ламану M_0M_1M (M_0M_2M) з ланками, паралельними осям координат (рис. 2.5). Оскільки інтеграл не залежить від порядку інтегрування, то замість відрізку M_0M доцільно використовувати ломану M_0M_1M (M_0M_2M).

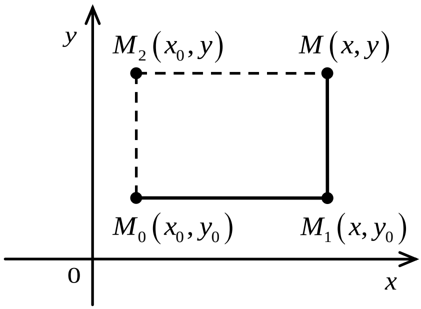

Рисунок 2.5

При цьому криволінійний інтеграл $\int\limits_{M_0M} du$ найбільш просто виражається через визначені інтеграли, і формула (2.17) перетворюється до вигляду

$$u(x,y) = \int\limits_{M_0M} du + C = \begin{cases} \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy + C, \\ \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C. \end{cases} \tag{2.18}$$

***Приклад* 2.4.** Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L (xy - y)dx + (-xy + x)dy$ вздовж прямої $y = 2x - 1$, яка з'єднує точку $A(1,1)$ з точкою $B(2,3)$. Чи зміниться результат інтегрування, якщо замість прямої взяти гіперболу, яка проходить через ці точки.

Розв'язання. Випишемо $P(x,y)$, $Q(x,y)$:

$$P(x,y) = xy - y, \qquad Q(x,y) = (-xy + x),$$

і знайдемо $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x - 1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -y + 1.$$

Отже, $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Виходячи з цього, вираз, який знаходиться під знаком інтеграла, не є повним диференціалом. Тому стверджувати, що результати обчислення криволінійного інтеграла

$$\int\limits_{L_{AB}} (xy - y)dx + (-xy + x)dy$$

вздовж гіперболи або прямої, яка з'єднує точки A та B, будуть однаковими, не можна.

Обчислимо криволінійний інтеграл вздовж відрізка прямої $y = 2x - 1$, яка з'єднує точку $A(1,1)$ з точкою $B(2,3)$ (рис. 2.6).

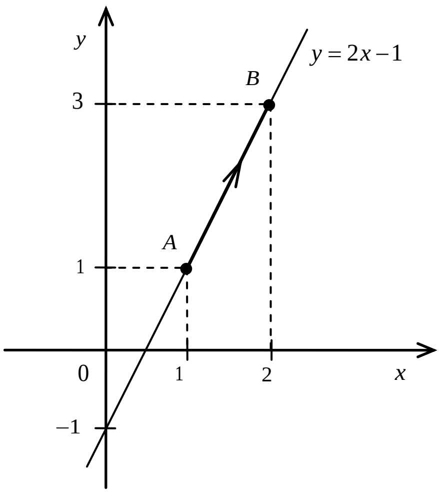

Рисунок 2.6

На даній прямій x змінюється від 1 до 2. Тоді, використовуючи формулу (2.11)

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \Big(P\big(x, f(x)\big) + Q\big(x, f(x)\big)\cdot f'(x) \Big) dx ,$$

отримаємо:

$$\int\limits_{L_{AB}} (xy - y)\,dx + (-xy + x)\,dy = \int\limits_{L_{AB}} y(x-1)\,dx + x(-y+1)\,dy =$$

$$= \left\| \begin{matrix} a = 1,\ b = 2 \\ f(x) = 2x - 1 \Rightarrow\ f'(x) = 2 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int\limits_1^2 \Big[(2x-1)(x-1) + x(-2x+1+1)\cdot 2 \Big] dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(2x^2 - 3x + 1 - 4x^2 + 4x\right) dx = \int\limits_1^2 \left(-2x^2 + x + 1\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right)\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{6}\left(4x^3 - 3x^2 - 6x\right)\Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{6}\Big(4\left(2^3 - 1\right) - 3\left(2^2 - 1\right) - 6(2-1)\Big) = -\frac{1}{6}\Big(4(8-1) - 3(4-1) - 6\cdot 1\Big) =$$

$$= -\frac{1}{6}(4\cdot 7 - 3\cdot 3 - 6) = -\frac{1}{6}(28 - 9 - 6) = -\frac{1}{6}\cdot 13 = -\frac{13}{6} = -2\frac{1}{6} .$$

Приклад **2.5.** Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\,dx + x^2\,dy$ вздовж: а) відрізка прямої, б) дуги параболи $y = x^2$, в) дуги параболи $y^2 = x$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз є повним диференціалом, оскільки $P(x,y) = 2xy$, $Q(x,y) = x^2$ і $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$. Отже, криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, а визначається розташуванням початкової та кінцевої точок інтегрування. Обчислимо інтеграл по кожній з трьох ліній (рис. 2.7).

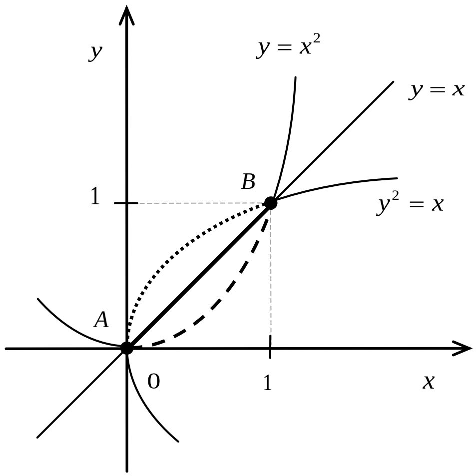

Рисунок 2.7

а) з рисунка 2.7 ми бачимо, що рівняння прямої, яка проходить через точки $A(0,0)$ і $B(1,1)$, має вигляд $y = x$. Тоді, застосовуючи наступну формулу (23):

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, f(x)\right) + Q\left(x, f(x)\right)\cdot f'(x)\right]dx\ ,$$

маємо

$$\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\,dx + x^2dy = \left\| \begin{matrix} f(x) = x,\ f'(x) = 1 \\ x:\ 0 \to 1 \end{matrix} \right\| = \int\limits_0^1 \left(2x\cdot x + x^2\cdot 1\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2x^2 + x^2\right)dx = \int\limits_0^1 3x^2dx = \left.\frac{3x^3}{3}\right|_0^1 = \left.x^3\right|_0^1 = 1;$$

б) застосовуючи цю ж формулу, обчислимо криволінійний інтеграл вздовж дуги параболи $y = x^2$:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\,dx + x^2dy = \left\| \begin{matrix} f(x) = x^2,\ f'(x) = 2x \\ x:\ 0 \to 1 \end{matrix} \right\| = \int_0^1 \left(2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^3 + 2x^3\right)dx = \int_0^1 4x^3dx = \left.\frac{4x^4}{4}\right|_0^1 = \left.x^4\right|_0^1 = 1;$$

в) обчислюючи початковий інтеграл вздовж дуги параболи $y^2 = x$, зручно скористатися наступною формулою:

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_c^d \left[P\left(x(y),y\right) \cdot x'(y) + Q\left(x(y),y\right)\right]dy.$$

Тоді

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\,dx + x^2dy = \left\| \begin{matrix} x(y) = y^2,\ x'(y) = 2y \\ y:\ 0 \to 1 \end{matrix} \right\| = \int_0^1 \left(2y^2y \cdot 2y + \left(y^2\right)^2\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(4y^4 + y^4\right)dy = \int_0^1 5y^4dy = \left.\frac{5y^5}{5}\right|_0^1 = \left.y^5\right|_0^1 = 1.$$

***Приклад* 2.6.** Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L (2xy - 2x)\,dx + x^2dy$ безпосередньо і за допомогою формули Гріна, де L − контур фігури, обмеженої лініями $y = 2x^2$, $y = 8$, який перебігається проти годинникової стрілки.

Розв'язання. Обчислимо спочатку даний криволінійний інтеграл безпосередньо.

Оскільки, згідно з властивістю адитивності

$$\oint_L (2xy - 2x)\,dx + x^2dy = \int_{L_{AOB}} (2xy - 2x)\,dx + x^2dy + \int_{L_{BA}} (2xy - 2x)\,dx + x^2dy,$$

то залишається обчислити криволінійний інтеграл по кожній з ділянок AOB і BA (рис. 2.8).

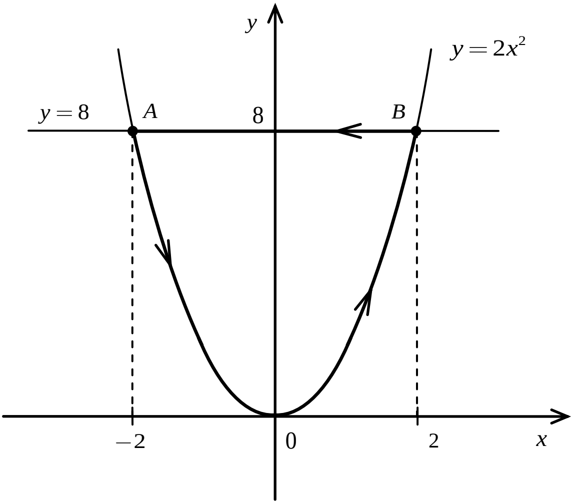

Рисунок 2.8

Криву AOB для замкненого контура L задано рівнянням параболи $y = 2x^2$, де x змінюється від -2 до 2. Застосовуючи формулу (2.11):

$$\int\limits_{L_{AOB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_a^b \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x) \right] dx ,$$

маємо:

$$\int\limits_{L_{AOB}} (2xy - 2x)dx + x^2 dy = \left\| f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x \right\| =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} \left(2x \cdot 2x^2 - 2x + x^2 \cdot 4x \right) dx = \int\limits_{-2}^{2} \left(4x^3 - 2x + 4x^3 \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} \left(8x^3 - 2x \right) dx = \left(\frac{8x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} \right) \Bigg|_{-2}^{2} = \left(2x^4 - x^2 \right) \Big|_{-2}^{2} =$$

$$= 2\left(2^4 - (-2)^4 \right) - \left(2^2 - (-2)^2 \right) = 2(16 - 16) - (4 - 4) = 0 .$$

Криву BA для замкненого контура L задано рівнянням прямої $y=8$. Враховуючи, що x змінюється від 2 до -2, отримаємо:

$$\int\limits_{L_{BA}}(2xy-2x)dx+x^2dy=\left\| f(x)=8\Rightarrow f'(x)=0\right\|=$$

$$=\int\limits_{2}^{-2}\left(2x\cdot 8-2x+x^2\cdot 0\right)dx=\int\limits_{2}^{-2}(16x-2x)dx=\int\limits_{2}^{-2}14x\,dx=\left.\frac{14x^2}{2}\right|_{2}^{-2}=$$

$$=7x^2\Big|_{2}^{-2}=7\cdot\left((-2)^2-2^2\right)=7\cdot(4-4)=7\cdot 0=0\,.$$

Остаточно маємо:

$$\oint\limits_{L}(2xy-2x)dx+x^2dy=$$

$$=\int\limits_{L_{AOB}}(2xy-2x)dx+x^2dy+\int\limits_{L_{BA}}(2xy-2x)dx+x^2dy=0\,.$$

Обчислимо початковий криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, застосовуючи формулу Гріна (2.12):

$$\oint\limits_{L}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\,.$$

Для цього знайдемо $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і під знак подвійного інтеграла підставимо їхню різницю: $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$. В даному прикладі $P(x,y)=(2xy-2x)$, $Q(x,y)=x^2$. Тому $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x$. Підставляючи вирази $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ до формули Гріна, отримаємо

$$\oint\limits_{L}(2xy-2x)dx+x^2dy=\iint\limits_{G}(2x-2x)dx\,dy=\iint\limits_{G}0\,dx\,dy=0\,.$$

Що даний інтеграл дорівнює нулю можливо було встановити з першого зауваження і формули (2.14):

$$\oint_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0\,.$$

***Приклад* 2.7.** Переконатися, що даний вираз є повним диференціалом функції $u(x,y)$. Знайти цю функцію.

$$\left(3e^{3x}\operatorname{tg}y-\frac{1}{x^4}\right)dx+\left(\frac{e^{3x}}{\cos^2 y}-3y^2\right)dy\,.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання в області G рівності

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\,,$$

де

$$P(x,y)=3e^{3x}\operatorname{tg}y-\frac{1}{x^4}\,,\qquad Q(x,y)=\frac{e^{3x}}{\cos^2 y}-3y^2\,.$$

Для цього знайдемо $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3e^{3x}}{\cos^2 y}\,,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{3e^{3x}}{\cos^2 y}\,.$$

Оскільки необхідна і достатня умова $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{3e^{3x}}{\cos^2 y}$ виконується, то вираз $\left(3e^{3x}\operatorname{tg}y-\dfrac{1}{x^4}\right)dx+\left(\dfrac{e^{3x}}{\cos^2 y}-3y^2\right)dy$ є повним диференціалом функції двох змінних $u(x,y)$, тобто

$$du(x,y)=\left(3e^{3x}\operatorname{tg}y-\frac{1}{x^4}\right)dx+\left(\frac{e^{3x}}{\cos^2 y}-3y^2\right)dy\ .$$

Знайдемо функцію $u(x,y)$, використавши формулу (2.18):

$$u(x,y)=\int\limits_{M_0M}du+C=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C\ .$$

Тоді

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\left(3e^{3x}\operatorname{tg}y_0-\frac{1}{x^4}\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\left(\frac{e^{3x}}{\cos^2 y}-3y^2\right)dy+C=$$

$$=\left\|\begin{array}{l} x\neq 0;\quad \cos^2 y\neq 0,\ y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}. \\ \text{Нехай } M_0(x_0,y_0)=(1,0),\ \text{тобто } x_0=1,\ y_0=0. \\ \text{Якщо б точка } O(0,0) \text{ не була точкою розриву,} \\ \text{доцільніше було б взяти } x_0=0,\ y_0=0. \end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_{1}^{x}\left(3e^{3x}\cdot\underbrace{\operatorname{tg}0}_{0}-\frac{1}{x^4}\right)dx+\int\limits_{0}^{y}\left(\frac{e^{3x}}{\cos^2 y}-3y^2\right)dy+C=$$

$$=\int\limits_{1}^{x}\left(-\frac{1}{x^4}\right)dx+\int\limits_{0}^{y}\left(\frac{e^{3x}}{\cos^2 y}-3y^2\right)dy+C=\left.\frac{1}{3x^3}\right|_1^x+\left.\left(e^{3x}\operatorname{tg}y-y^3\right)\right|_0^y+C=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+e^{3x}\operatorname{tg}y-y^3-\frac{1}{3\cdot 1}-e^{3x}\cdot\underbrace{\operatorname{tg}0}_{0}+0+C=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+e^{3x}\operatorname{tg}y-y^3+C\ .$$

Результат обчислень є вірним, якщо

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y),\qquad\qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)\ .$$

Зробимо перевірку:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+e^{3x}\operatorname{tg}y-y^3+C\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{-3}{x^4}+3e^{3x}\operatorname{tg}y=$$

$$=3e^{3x}\operatorname{tg}y-\frac{1}{x^4}=P(x,y),$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+e^{3x}\operatorname{tg}y-y^3+C\right)=\frac{e^{3x}}{\cos^2 y}-3y^2=Q(x,y).$$

Отже,

$$u(x,y)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+e^{3x}\operatorname{tg}y-y^3+C.$$

2.5. Деякі застосування криволінійних інтегралів другого роду

1. З формули Гріна випливає, що площа S плоскої фігури (G), розташованої в площині xOy і обмеженої замкненим контуром L, який перетинає координатні лінії не більш, ніж у двох точках, можна обчислити за допомогою криволінійного інтеграла другого роду за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\oint_L x\,dy-y\,dx, \tag{2.19}$$

де інтегрування вздовж цього контура відбувається в додатному напрямі, тобто такому, щоб область G при обході контура L залишалася зліва.

Зауваження.

Для обчислення площі за допомогою криволінійного інтеграла застосовуються також і такі формули:

$$S=-\oint_L y\,dx, \tag{2.20}$$

$$S=\oint_L x\,dy. \tag{2.21}$$

2. Робота A, яку здійснює змінна сила

$$\vec{F}=\left\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\right\},$$

прикладена до матеріальної точки $M(x,y,z)$ при переміщенні її по дузі AB з точки A в точку B просторової кривої L, визначається за формулою

$$A=\int_{L_{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz, \tag{2.22}$$

де $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ − проекції змінної сили $\vec{F}$ на координатні осі Ox, Oy і Oz, відповідно.

Аналогічно обчислюється робота A, яку здійснює змінна сила $\vec{F}=\left\{P(x,y),\ Q(x,y)\right\}$, прикладена до матеріальної точки $M(x,y)$ при переміщенні її по дузі AB з точки A в точку B кривої L, яка лежить в площині xOy. В цьому випадку робота визначається за формулою

$$A=\int_{L_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy, \tag{2.23}$$

де $P(x,y)$, $Q(x,y)$ − проекції змінної сили $\vec{F}$ на координатні осі.

***Приклад* 2.8.** За допомогою криволінійного інтеграла другого роду обчислити площу, обмежену петлею декартова листа $x^3+y^3=3axy$.

Розв'язання. Оскільки в даному прикладі в алгебраїчному рівнянні кривої маємо дві однорідні групи членів, степені яких відрізняються на одиницю, то скористаємося підстановкою $y=tx$ $\left(x=\dfrac{y}{t}\right)$. Підставляючи даний вираз до рівняння петлі й виключаючи послідовно одну зі змінних, знайдемо параметричні рівняння цієї кривої, тобто

$$x^3+y^3=3axy\ ,\ \ y=tx\ \Rightarrow\ x^3+(tx)^3=3ax\cdot tx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^3\left(1+t^3\right)=3atx^2\ \Rightarrow\ \frac{x^3}{x^2}=\frac{3at}{1+t^3}\ \Rightarrow\ x=\frac{3at}{1+t^3}\ ;$$

$$x^3+y^3=3axy\ ,\ \ x=\frac{y}{t}\ \Rightarrow\ \left(\frac{y}{t}\right)^3+y^3=3ay\cdot\frac{y}{t}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y^3\left(\frac{1}{t^3}+1\right)=\frac{3a}{t}y^2\ \Rightarrow\ \frac{y^3}{y^2}=\frac{3a}{t}\cdot\frac{t^3}{1+t^3}\ \Rightarrow\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}\ .$$

В результаті рівняння петлі декартова листа $x^3+y^3=3axy$ в параметричному вигляді наступне:

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y(t)=\dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

Знайдемо $x'(t)$ і $y'(t)$:

$$x'(t)=3a\frac{1\cdot\left(1+t^3\right)-t\cdot 3t^2}{\left(1+t^3\right)^2}=3a\frac{1+t^3-3t^3}{\left(1+t^3\right)^2}=3a\frac{1-2t^3}{\left(1+t^3\right)^2}\ ,$$

$$y'(t)=3a\frac{2t\cdot\left(1+t^3\right)-t^2\cdot 3t^2}{\left(1+t^3\right)^2}=3a\frac{2t+2t^4-3t^4}{\left(1+t^3\right)^2}=3a\frac{2t-t^4}{\left(1+t^3\right)^2}\ .$$

Відповідно диференціали dx і dy дорівнюють:

$$dx=3a\frac{1-2t^3}{\left(1+t^3\right)^2}dt\ ,$$

$$dy=3a\frac{2t-t^4}{\left(1+t^3\right)^2}dt\ .$$

Геометричний параметр $t=\dfrac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi$ є угловим коефіцієнтом полярного радіуса (рис. 2.9) при зміні φ від 0 до $\dfrac{\pi}{2}$, при цьому параметр t змінюється від 0 до ∞.

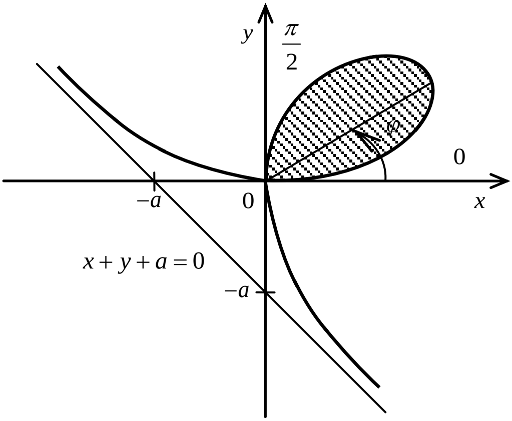

Рисунок 2.9

Отже, використовуючи формулу (2.19)

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{L} x\,dy-y\,dx$$

и формулу (2.10)

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(P\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)dt\ ,$$

знайдемо площу шуканої фігури:

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{L} x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{3at}{1+t^3}\cdot 3a\,\frac{2t-t^4}{\left(1+t^3\right)^2}-\frac{3at^2}{1+t^3}\cdot 3a\,\frac{1-2t^3}{\left(1+t^3\right)^2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} 9a^2\left(\frac{t\left(2t-t^4\right)}{\left(1+t^3\right)^3}-\frac{t^2\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^3}\right)dt=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2\left(2-t^3-1+2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^3}dt=$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2\left(1+t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^3}dt=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2dt}{\left(1+t^3\right)^2}=\left\|\begin{matrix} d\left(1+t^3\right)=3t^2dt \\ \frac{1}{3}d\left(1+t^3\right)=t^2dt \end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{9a^2}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{d\left(1+t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}=-\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{1+t^3}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{1+t^3}\Bigg|_{\infty}^{0}=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{1+0}}_{1}-\underbrace{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+t^3}}_{0}\right)=\frac{3a^2}{2}\ \text{(кв. од.)}$$

***Приклад* 2.9.** Знайти роботу сили $\vec{F}=-yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж дуги кривої L від точки $A(a,0,0)$ до точки $B(a,0,2\pi h)$, де L − перший звій гвинтової лінії $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ht$.

Розв'язання. Оскільки в даному прикладі просторову криву задано параметричними рівняннями, виразимо $\vec{F}$ через параметр t, а також знайдемо зміну цього параметра, враховуючи, що точки A і B, відповідно, початкова і кінцева точки дуги кривої L_{AB}. Тоді значення параметра $t=t_1$ відповідає точці A, а значення параметра $t=t_2$ відповідає точці B.

$$\vec{F}=\left\{P(x,y,z),\,Q(x,y,z),\,R(x,y,z)\right\}=\left\{-yz,\,xz,\,xy\right\},$$

$P(x,y,z)=-yz$, $\qquad P\big(x(t),y(t),z(t)\big)=-a\sin t\cdot ht=-aht\sin t$,

$Q(x,y,z)=xz$, $\qquad Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)=a\cos t\cdot ht=aht\cos t$,

$R(x,y,z)=xy$, $\qquad R\big(x(t),y(t),z(t)\big)=a^2\cos t\sin t$,

$$\vec{F}=\left\{P\left(x(t),y(t),z(t)\right),\ Q\left(x(t),y(t),z(t)\right),\ R\left(x(t),y(t),z(t)\right)\right\}=$$

$$=\left\{-aht\sin t,\ aht\cos t,\ a^2\cos t\sin t\right\}.$$

Підставляючи послідовно координати точок A і B в параметричне рівняння кривої L, отримаємо в точці $A(a,0,0)$ параметр $t=t_1=0$, а в точці B параметр $t=t_2=2\pi$.

Обчислимо роботу сили $\vec{F}$ за формулою (2.22), переходячи від криволінійного інтеграла до визначеного інтеграла по змінній t:

$$A=\int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[P\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot x'(t)+Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot y'(t)+R\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot z'(t)\right]dt=$$

$$=\left\|\begin{cases}x(t)=a\cos t,\\ y(t)=a\sin t,\\ z(t)=ht;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=-a\sin t,\\ y'(t)=a\cos t,\\ z'(t)=h.\end{cases}\right\|=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(-aht\sin t\cdot(-a\sin t)+aht\cos t\cdot a\cos t+a^2\cos t\sin t\cdot h\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2ht\sin^2 t+a^2ht\cos^2 t+a^2h\cos t\sin t\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2ht\Big(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1}\Big)+a^2h\cdot\underbrace{\cos t\sin t}_{\frac{1}{2}\sin 2t}\right)dt=\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2ht+\frac{a^2h}{2}\sin 2t\right)dt=$$

$$=\frac{a^2h}{2}\int\limits_0^{2\pi}(2t+\sin 2t)dt=\frac{a^2h}{2}\left(t^2-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{a^2h}{2}\left(2^2\pi^2-\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\cos 4\pi}_{1}-\underbrace{\cos 0}_{1}\Big)\right)=2\pi^2a^2h\ \text{(умов. од. роботи)}$$

***Приклад* 2.10.** В кожній точці M еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ прикладено силу $\vec{F}$, яка дорівнює за величиною відстані від точки M до центра еліпса і напрямлена до центра еліпса. Знайти роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж дуги еліпса, яка лежить в першому квадранті.

Розв'язання. Еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ зображено на рисунку 2.10.

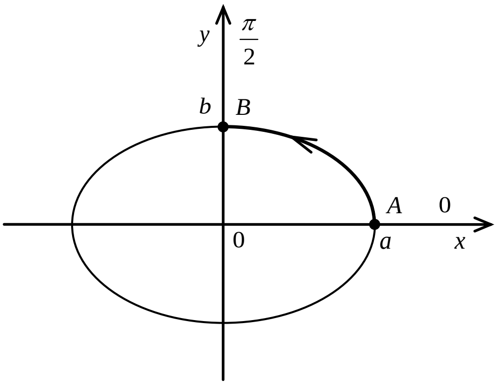

Рисунок 2.10

За умовою сила, яку прикладено до точки M дуги еліпса, яка лежить в першому квадранті, напрямлена до його центра, а величина сили дорівнює відстані від точки M до центра. Тоді її можна зобразити у вигляді $\vec{F}=-x\vec{i}-y\vec{j}$ (знаки мінус вказують на те, що напрями проекцій вектора сили протилежні напрямам координатних осей). Для параметричних рівнянь еліпса величини проекцій сили будуть мати вигляд $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

Підставляючи проекції сили $\vec{F}$, $P(x,y)=-x$ і $Q(x,y)=-y$, у формулу роботи (2.23) і переходячи від криволінійного інтеграла до визначеного інтеграла по змінній t, де t змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$, отримаємо:

$$A=\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[P\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)\ \right]dt=-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\,dx+y\,dy=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\begin{cases}x(t)=a\cos t,\\ y(t)=b\sin t;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=-a\sin t,\\ y'(t)=b\cos t.\end{cases}\\ \vec{F}=\big\{P(x,y),Q(x,y)\big\}=\{-x,-y\}\\ \begin{cases}P(x,y)=-x,\\ Q(x,y)=-y;\end{cases}\qquad\begin{cases}P\big(x(t),y(t)\big)=-a\cos t,\\ Q\big(x(t),y(t)\big)=-b\sin t.\end{cases}\\ \vec{F}=\Big\{P\big(x(t),y(t)\big),Q\big(x(t),y(t)\big)\Big\}=\{-a\cos t,-b\sin t\}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\big(-a\cos t\cdot(-a\sin t)-b\sin t\cdot b\cos t\big)dt=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^2}{2}\sin 2t-\frac{b^2}{2}\sin 2t\right)dt=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2-b^2}{4}\cdot\cos 2t\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{4}\cdot\left(\underset{1}{\cos 0}-\underbrace{\cos\frac{2\pi}{2}}_{-1}\right)=\frac{a^2-b^2}{4}\cdot 2=\frac{a^2-b^2}{2}\ \text{(умов. од. роботи).}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособ. для вузов / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 384 с.
2. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 1. / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 343 с.
3. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 2. / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 336 с.
4. Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. I. / / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. – М. : Наука, 1971. –600 с.
5. Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. II. / / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. – М. : Наука, 1973. – 448 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 1. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 712 с.
7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 2. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 576 с.
8. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 3. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1989. – 352 с.
9. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1984. – 592 с.
10. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. Функции нескольких переменных / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1986. – 528 с.
11. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. Интегралы. Ряды / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1994. – 496 с.

Навчальне видання

Ахієзер Олена Борисівна, **Геляровська** Оксана Анатоліївна,
Дунаєвська Ольга Ігорівна, **Галуза** Олексій Анатолійович,
Москалець Наталя Василівна

Методичні вказівки до індивідуальних завдань з вищої математики за темою «Криволінійні інтеграли» для студентів заочної та дистанційної форм навчання

для студентів усіх спеціальностей
вищих технічних навчальних закладів

За загальною редакцією **Ахієзер** Олена Борисівна

Роботу до видання рекомендував М.І. Безменов

Редактор М. П. Ефремова

План 2015 р., поз. 171

Підп.до друку 2016 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 3,0
Наклад 50 прим. Зам. № Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.