

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПАРАМЕТРИЧНИМИ КУБІЧНИМИ КРИВИМИ

Адашевська Ірина Юріївна,

к.т.н., доцент

Краєвська Олена Олександрівна

доцент

Національний технічний університет «ХПІ»

м. Харків, Україна

Анотація: В роботі розглянуто способи опису параметричних кубічних кривих: Метод Ерміта, Метод Безьє. Застосовано алгоритм де Кастельє для побудови кривих Безьє на базі чотирьох контрольних точок, надано узагальнення алгоритму де Кастельє на довільну кількість точок.

Ключові слова: поліноміальні параметричні криві, параметричні кубічні криві, функції сполучення, крива Безьє, Метод Ерміта, Метод Безьє.

У сучасній літературі [1–3] можна знайти різні способи аналітичного визначення плоских кривих. При цьому існують способи, які однозначно описують криву. Сюди відносяться алгебраїчні та різноманітні трансцендентні криві, тобто такі криві, що мають певну аналітичну залежність, яка пов'язує ординату та абсцису будь-якої точки кривої в явному або неявному вигляді. Сюди відносяться також і параметричні криві. З появою обчислювальної техніки в справі геометричного моделювання кривих ліній широкого застосовуються такі методи, як метод Ерміта [4], метод Безьє [4] та інші.

• Параметричні кубічні криві.

Параметричною кубічною кривою є крива, в якій (x, y, z) - многочлени третього порядку (тобто кубічні) щодо деякого параметра t . Оскільки розглядаються кінцеві відрізки кривої, то без втрати спільності можемо обмежити діапазон зміни параметра t і вважати $0 \leq t \leq 1$. Відповідно,

$$\begin{aligned}x(t) &= a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x; \\y(t) &= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1) \\z(t) &= a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z.\end{aligned}$$

Похідні функцій $x(t), y(t), z(t)$ за параметром t мають один і той самий вигляд.

Розглянемо наступні способи опису параметричних кубічних кривих:

- Метод Ерміта, в якому задаються положення кінцевих точок кривої і дотичні вектори в них;
- Метод Безьє - задаються положення кінцевих точок кривої, а для неявного задання дотичних у цих точках використовуються дві інші точки, що зазвичай лежать не на кривій;

Форма Ерміта (Фергюсона).

Дано: точки P_1 і P_4 і дотичні вектори R_1 і R_4 .

Визначити: коефіцієнти a_x, b_x, c_x, d_x з виразу (1), що будуть відповідати умовам

$$x(0) = P_{1x}; \quad x(1) = P_{4x}; \quad x'(0) = R_{1x}; \quad x''(1) = R_{4x} \quad (2)$$

Індекс x використаний для посилання на x -компоненти точок і дотичних векторів.

$$x(t) = [t^3 t^2 t 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}_x, \Rightarrow x(t) = [t^3 t^2 t 1] C_x \Rightarrow x(t) = T C_x, \quad (3)$$

де T -вектор - рядок ступеня t , C_x - вектор-стовпець коефіцієнтів $x(t)$.

Запишемо умови (2), використовуючи рівняння (3):

$$\begin{aligned}x(0) = P_{1x} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] C_x, \\x(1) = P_{4x} &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] C_x.\end{aligned} \quad (4)$$

Щоб записати вирази для обмежень на дотичні вектори, продиференціюємо вираз (3) по t і отримаємо

$$x'(t) = [3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad 0] C_x$$

тоді

$$\begin{aligned}x'(0) = R_{1x} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] C_x, \\x'(1) = R_{4x} &= [3 \quad 2 \quad 1 \quad 0] C_x.\end{aligned} \quad (5)$$

Вираз (4) і (5) можна об'єднати в одне матричне рівняння

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} C_x$$

Перетворюючи матрицю 4×4 отримаємо шуканий вираз для C_x

$$C_x = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} = M_h G_{h_x} \quad (6)$$

Тут M_h - ермітова матриця,

G_{h_x} - геометричний вектор Ерміта.

Підставивши цей результат у вираз (2), отримаємо

$$\begin{aligned} x(t) &= TM_h G_{h_x}, \\ y(t) &= TM_h G_{h_y}, \quad (7) \\ z(t) &= TM_h G_{h_z}. \end{aligned}$$

Рівняння для $x(t), y(t), z(t)$ можна записати у вигляді

$$P(t) = TM_h G_n$$

Якщо задано P_1, P_4, R_1, R_4 , можна визначити $x(t), y(t), z(t)$ для $0 \leq t \leq 1$ і знайти всі точки на сегменті кубічної кривої від P_1 до P_4 , де дотичний вектор в початковій точці R_1 , а в кінцевій R_4 .

Знайдемо добуток TM_h :

$$TM_h = [(2t^3 - 3t^2 + 1)(-2t^3 + 3t^2)(t^3 - 2t^2 + t)(t^3 - t^2)].$$

Помноживши цей вислів праворуч на G_{h_x} , отримаємо

$$\begin{aligned} x(t) &= TM_h G_{h_x} \\ &= P_{1x}(2t^3 - 3t^2 + 1) + P_{4x}(-2t^3 + 3t^2) + R_{1x}(t^3 - 2t^2 + t) \\ &\quad + R_{4x}(t^3 - t^2) \end{aligned}$$

функції змінної t в добутку TM_h називають **функціями сполучення**, оскільки за допомогою перших двох функцій сполучаються точки P_1 і P_4 , а за допомогою двох інших - вектори R_1 і R_4 , в результаті чого отримуємо «згладжене» об'єднання $x(t)$

Алгоритм де Кастельє

Задана послідовність точок P_0, P_1, \dots, P_n .

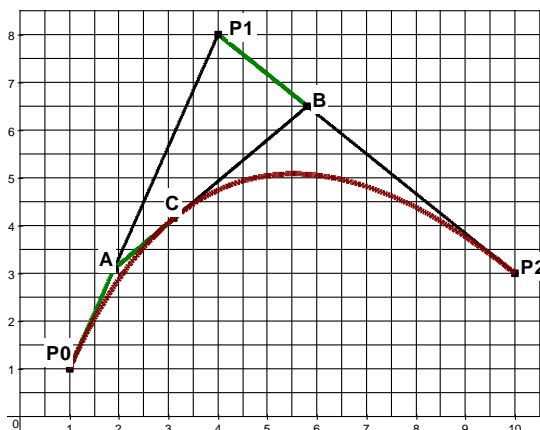


Рис. 1. Триточкова крива

Необхідно визначити положення точки $P(t)$ для кожного значення t від 0 до 1. Крива повинна проходити через задані точки P_0 і P_n . Почнемо з трьох точок P_0, P_1, P_2 , виберемо деяке значення параметра t в інтервалі від 0 до 1 (наприклад, $t = 0,3$) (рис. 1). Визначимо положення точки A , що розміщується в t -тій частині прямої P_0P_1 . Аналогічно визначимо положення точки B на прямій P_1P_2 (з тим самим значенням t). Тоді

$$A(t) = (1 - t)P_0 + P_1$$

$$B(t) = (1 - t)P_1 + P_2t \quad (8)$$

Повторимо для отриманих точок A і B процес лінійної інтерполяції (з тим самим t) і знайдемо точку $P(t)$, що лежить між точками A і B :

$$P(t) = (1 - t)A + tB$$

Виконавши цей процес для кожного t в діапазоні від 0 до 1, сформуємо криву $P(t)$. Визначимо параметричну форму цієї кривої, підставивши у вираз (8) формули (7)

$$P(t) = (1 - t)^2P_0 + 2t(1 - t)P_1 + t^2P_2 \quad (9)$$

Параметрична форма $P(t)$ квадратична стосовно t . Отже, отримана крива буде параболою, причому вона залишається параболою і за умови зміни t від $-\infty$ до $+\infty$. Якщо $t = 0$, вона проходить через точку P_0 , а якщо $t = 1$, через точку P_2 .

Отже, маємо коректно визначений процес для генерації плавної параболічної кривої на базі трьох заданих точок.

Криві Безьє. Безьє (1970) перегрупував члени параметричного кубічного многочлена Ерміта-Фергюсона так, що фізичний зміст векторних коефіцієнтів став більш зрозумілим.

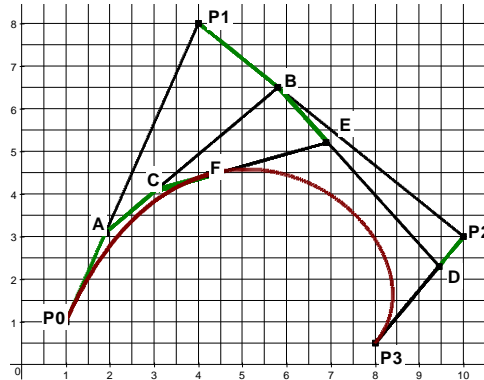


Рис. 2. Чотириточкова крива

Це особливо важливо під час конструювання кривої, а не її підгонки.

Застосуємо алгоритм де Кастельє для побудови кривих Безьє на базі чотирьох контрольних точок (рис. 2).

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= (1-t)P_0 + P_1t \\ B(t) &= (1-t)P_1 + P_2t \\ C(t) &= (1-t)P_2 + P_3t \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} D(t) &= (1-t)A + Bt \\ E(t) &= (1-t)B + Ct \end{aligned} \right\}$$

Для точки F отримаємо:

$$F(t) = (1-t)D + E$$

Підставимо в останній вираз формули для точок A, B, C, D, E

$$F(t) = (1-t)D + Et =$$

$$(1-t)[(1-t)A + Bt] + t[(1-t)B + Ct] = (1-t)^2A + 2t(1-t)B + t^2C = (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3.$$

Чотириточкова крива Безьє має таку параметричну форму:

$$P(t) = (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3,$$

яка є кубічним поліномом щодо t . Члени, що входять в цей поліном, носять назву поліномів Бернштейна.

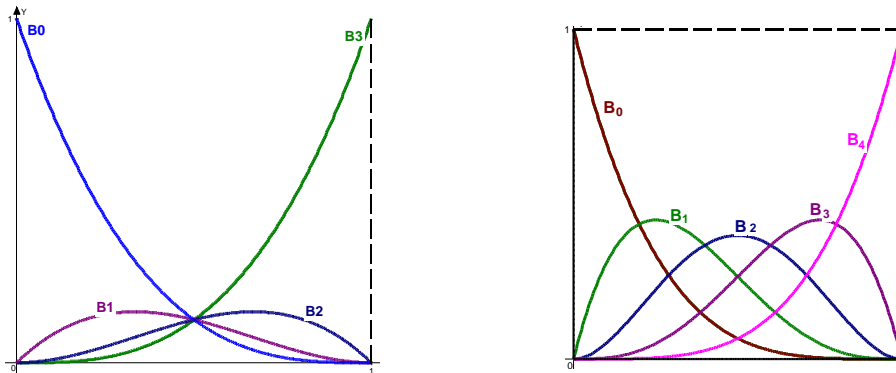


Рис. 3. Поліноми Бернштейна

Чотири кубічних полінома Бернштейна (рис.3) мають вигляд:

$$\begin{aligned} B_0^3(t) &= (1 - t)^3 \\ B_1^3(t) &= 3t(1 - t)^2 \\ B_2^3(t) &= 3t^2(1 - t) \\ B_3^3(t) &= t^3 \end{aligned}$$

Тут верхній індекс B_s^k k – вказує на ступінь полінома. Кубічні поліноми Бернштейна можна отримати з розкладання такого виразу:

$$[(1 - t) + t]^3 = (1 - t)^3 + 3t(1 - t)^2 + 3t^2(1 - t) + t^3$$

$$\sum_{i=0}^3 B_n^3(t) = 1. \quad (10)$$

Точка $P(t)$ є афінною комбінацією точок i , отже, ці зважені точки можна складати. На (рис. 3) наведено поліноми Бернштейна третього порядку, та четвертого порядку.

Узагальнення алгоритму де Кастельє на довільну кількість точок.

Узагальнимо цей алгоритм на випадок $(L + 1)$ контрольної точки P_0, P_1, \dots, P_L . для кожного значення t будується послідовність «поколінь», для формування кожного з яких використовується твінінг сусідніх точок, створених в попередньому поколінні.

$$\begin{aligned} P_i^k(t) &= (1 - t) \overset{\dots}{P_i^{k-1}}(t) + t \overset{\dots}{P_{i+1}^{k-1}}(t) \\ P_i^L(t) &= (1 - t) \overset{\dots}{P_i^{L-1}}(t) + t \overset{\dots}{P_{i+1}^{L-1}}(t) \\ &\dots \end{aligned}$$

де $i = 0, 1, \dots, L$.

Верхній індекс k у виразі $P_i^k(t)$ позначає номер покоління. Процес починається з $P_i^0(t) = P_i$ і закінчується готовою кривою Безьє $P(t) = P_i^L(t)$ (рис. 4). Криву Безьє можна записати в термінах поліномів Бернштейна:

$$P(t) = \sum_{i=0}^L P_i B_i^L(t)$$

де i -тий поліном Бернштейна ступеня L має вигляд:

$$B_i^L(t) = C_L^k (1-t)^{L-k} t^k,$$

а $C_L^k = \frac{L!}{k!(L-k)!}$ для $L \geq k$ (з $L > k$ цей коефіцієнт дорівнює 0),

$[(1-t) + t]^L$ -біном Ньютона.

$$\sum_{i=0}^L B_i^L(t) = 1.$$

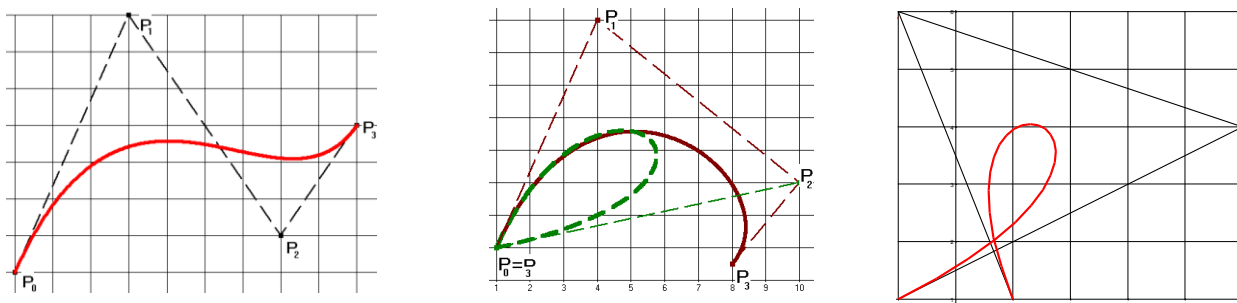


Рис. 4. Криві Безьє

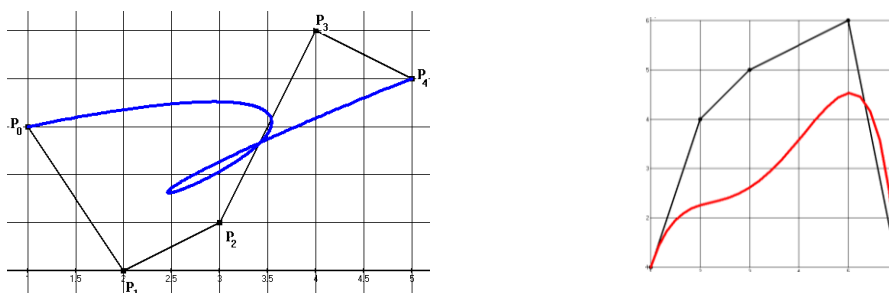


Рис. 5. П'ятиточкова крива Безьє

Нехай задано такі п'ять точок: $P_0(1,1.5)$, $P_1(2,0)$, $P_2(3,0.5)$, $P_3(4,2.5)$, $P_4(5,2)$. Побудуємо на їхній базі криву Безьє (рис. 5):

$$P(t) = P_0(t)(1-t)^4 + 4P_1(t)t(1-t)^3 + 6P_2(t)t^2(1-t)^2 + 4P_3(t)t^3(1-t) + P_4(t)t^4$$

$$P(t) = P_0(t)(1-t)^2 + 2P_1(t)t(1-t) + P_2(t)t^2$$

$$P(t) = P_2(t)(1-t)^2 + 2P_3(t)t(1-t) + P_4(t)t^2$$

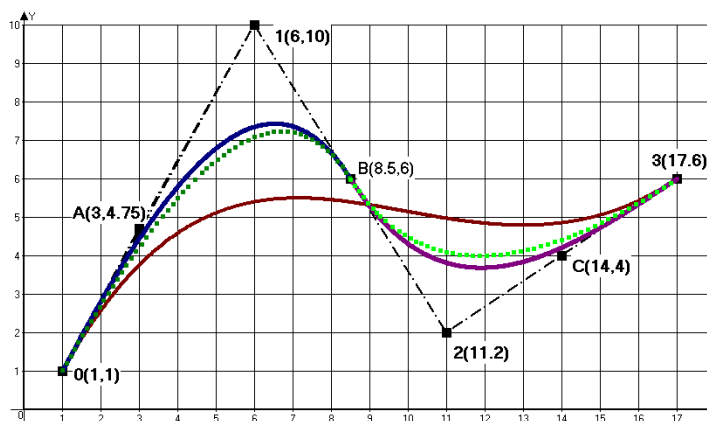


Рис. 6. Складові дво- і триточкові криві

Крива Безьє 3-го порядку: $P(t) = t^3P_0 + 3(1-t)t^2P_1 + 3t(1-t)^2P_2 + (1-t)^3P_3$.

Заміна складової кривої:

- з двох кривих Безьє другого порядку (введені дві допоміжні точки B і C)

- з двох кривих Безьє третього порядку (введені три допоміжні точки A , B і C) (рис. 6).

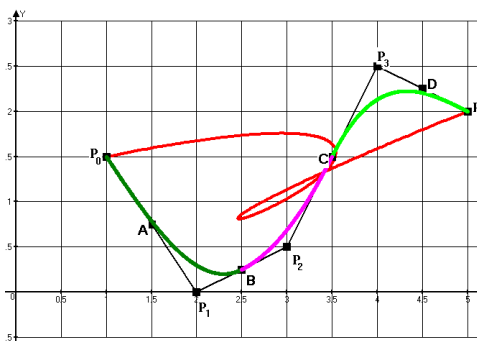


Рис. 7. Крива Безьє 4-го порядку.

Заміна складової кривої: 2-3-го і 1-2-го порядку.

Щоб складова крива Безьє була геометрично безперервною, необхідно, щоб кожні три точки в місці стикування сегментів лежали на одній прямій. Наприклад, нехай є п'ять базових точок P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 . Для побудови геометрично-безперервної складеної кривої доповнимо цей набір допоміжними точками P_5, P_6 , взятими на середині відрізків P_1P_2 і P_2P_3 (рис. 7). Складову криву побудуємо з трьох сегментів елементарних квадратичних кривих Безьє для трійок вершин P_0, P_1, P_5 ; P_5, P_2, P_6 и P_6, P_3, P_4 .

У формі Безьє використовуються чотири точки. Дотичні вектори в

кінцевих точках задаються відрізками P_1P_2 і P_3P_4 . Зокрема, дотичні вектори R_1 і R_4 , введені вище, визначалися так, щоб відповідати чотирьом точкам Безьє P_1, P_2, P_3, P_4 :

$$R_1 = 3(P_2 - P_1) = P_1'(0), \quad R_4 = 3(P_4 - P_3) = P_3'(1).$$

Тому, співвідношення між геометричною матрицею G_h і геометричною матрицею Безьє G_b записується в такий спосіб:

$$G_h = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = M_{hb}G_b$$

Підставляючи отримане співвідношення в формулу (8), отримаємо

$$x(t) = TM_hG_{hx} = TM_hM_{hb}G_{bx}.$$

Позначимо добуток M_hM_{hb} через M_b , отримаємо вираз

$$x(t) = TM_bG_{bx},$$

яке має тепер форму Безьє, де

$$M_b = M_hM_{hb} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 10 \\ 3 & -6 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Щоб краще зрозуміти властивість опуклої оболонки форми Безьє, візьмемо добуток TM_bG_b (рис. 8):

$$(1-t)^3P_1 + 3t(1-t)^2P_2 + 3t^2(1-t)P_3 + t^3P_4$$

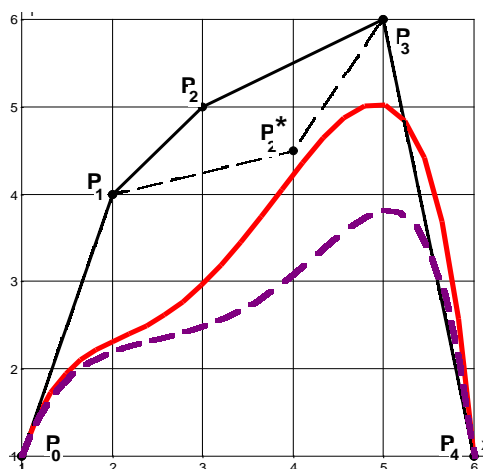


Рис. 8. Використання добутку

Досліджуючи коефіцієнти многочлена при чотирьох точках, знаходимо,

що кожен з них змінюється в діапазоні 0-1, а їхня сума дорівнює 1 для всіх $0 \leq t \leq 1$. Цей вислів описує зважене середнє значення для 4 керівних точок.

Основний недолік кривих Безьє полягає в тому, що вони не надають достатнього локального контролю - зміна будь-якої контрольної точки призводить до зміни всієї кривої. Проблема вирішується за допомогою необхідного набору стикувальних функцій $R_0(t), R_1(t) \dots R_5(t)$, які повинні бути знайдені, але які мають підтримку тільки на частині інтервалу $[0,1]$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Борисенко В. Д. Геометричне моделювання плоских кривих із застосуванням лінійного елемента кривини [Текст] / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, В. Є. Спіцин // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – К. : КНУБА, 2006. – Вип. 76. – С. 43–49.

2. Устенко С. А. Геометрична теорія моделювання криволінійних форм лопаткових апаратів турбомашин з оптимізацією їх параметрів : автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка» / Сергій Анатолійович Устенко; КНУБА. – К., 2013. – 40

3. Adams J. A. The intrinsic method for curve definition [Text] / J. A. Adams // Computer Aided Design. – 1975. – Vol. 7, No 4. – P. 243–249

4. Романюк О.Н. Комп'ютерна графіка. Навчальний посібник/ Вінниця: ВДТУ, 1999-с. 130.