

В.Л. Доброскок, д-р техн. наук, В.А. Фадеев, д-р техн. наук,
Л.Н. Абдурайимов, С.И. Чернышов, канд. техн. наук, Харьков, Украина

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТРИАНГУЛЯЦИОННЫХ 3D МОДЕЛЕЙ ИЗДЕЛИЙ

Розглянуті підходи до топологічного аналізу триангуляційних 3D моделей виробів. Аналіз заснований на визначенні диференціальних (поелементний аналіз суміжності граней, ребер і вершин) та інтегральних (ейлерова характеристика і рід поверхні) характеристик. Запропонований узагальнений підхід, що дозволяє виконувати топологічну верифікацію твердотільних триангуляційних моделей.

Рассмотрены подходы к топологическому анализу триангуляционных 3D моделей изделий. Анализ основан на определении дифференциальных (поэлементный анализ смежности граней, ребер и вершин) и интегральных (эйлерова характеристика и род поверхности) характеристик. Предложен обобщенный подход, позволяющий выполнять топологическую верификацию твердотельных триангуляционных моделей.

V.L. DOBROSKOK, V.A. FADEEV, L.N. ABDURAJIMOV, S.I. CHERNYSHOV
THE TOPOLOGICAL ANALYSIS TRIANGULABLE 3D MODELS OF PRODUCTS

The approaches to the topological analysis of triangulation of 3D models of products. The analysis is based on determining the differential (partial analysis of adjacency of faces, edges and vertices) and integral (Euler characteristic and genus of the surface) characteristics. A generalized approach that enables the verification of a topological triangulation of solid models.

Постановка проблемы

Существует проблема эффективного использования интегрированных технологий материализации 3D моделей. Каждая технология имеет свою рациональную область применения, определяемую конструктивными особенностями изделия. Автоматизация определения конструктивных особенностей изделия по его триангуляционной модели создаст основу для рационального выбора технологии материализации и тем самым повысит эффективность производства.

Большое количество элементов триангуляционной модели (обычно сотни тысяч треугольников) со специфическими взаимными связями требует использования топологической верификации твердотельного изделия. Известно, что топологические свойства триангуляционных моделей не изменяются при любых деформациях, производимых без разрывов или соединений. Применительно к твердотельным 3D моделям использование термина топологический может быть не таким строгим как в топологии. В этом случае топологическая модель определяется наличием и хранением совокупностей элементов и их взаимосвязей. В структуру топологической модели должны входить грани, ребра, вершины, инцидентность (взаимная принадлежность) ребер и вершин, связность элементов и др. Топологический анализ можно

рассматривать как создание топологической модели и ее исследование для верификации исходной триангуляционной модели и оценки интегральных топологических свойств.

Анализ литературы

Топологические свойства поверхностей и их связь с геометрическими характеристиками пространственных тел рассматриваются в различных работах по следующим направлениям:

- обзор систем геометрического моделирования, вопросы топологии оболочек и их эйлеровы характеристики приведены в [1, 4];
- вопросы геометрического моделирования изделий применительно к интегрированным генеративным технологиям с их последующей материализацией (CAD/CAM/CAE) рассматриваются в работе [2];
- формообразование поверхностей и их топология, системное исследование поверхностей деталей и инструмента, их относительная ориентация и параметры кинематики процесса рассматриваются в [3].

Актуальность данного исследования определяется отсутствием работ, посвященных топологическому анализу триангуляционных 3D моделей промышленных изделий на этапе предшествующем материализации интегрированными генеративными технологиями.

Цель статьи – рассмотреть подходы к топологическому анализу триангуляционных 3D моделей изделий и оценить применимость предлагаемых дифференциальных и интегральных характеристик.

Изложение основного материала

Геометрические модели в CAD-системах основаны на определенной структуре данных, которая обеспечивает топологическую целостность модели, т. е. сохраняет определенные отношения между элементами.

При моделировании геометрических объектов применяются различные их описания (рис. 1):

- Точечное (point modeling) – оперирующее достаточно плотным набором точек с атрибутами: положение, цвет и др. Топологическая размерность элементов моделирования в данном случае равна 0. Основной проблемой является восстановление поверхностей по заданным точкам.
- Каркасное (wireframe modeling) – описание объекта представляется в виде набора реперных точек (узлов) и линий проходящих через них. При данном подходе добавляется элемент – линия (топологическая размерность - 1). Основным недостатком является неоднозначность формы модели ввиду отсутствия сведений о внутренних и внешних поверхностях.
- Поверхностное (surface modeling) – описание объекта включает в себя сведения о связности поверхностей, т. е. как поверхности соединяются друг с другом и по каким кривым. При данном подходе добавляется элемент – поверхность (топологическая размерность - 2). Предназначено для создания моделей с достаточно сложными поверхностями.



Рисунок 1 – Основные подходы к моделированию геометрических объектов.

- Твердотельное (solid modeling) – описание объекта производится с использованием твердотельных примитивов (базовых элементов). При данном подходе добавляется элемент – тело (топологическая размерность - 3). Твердотельное моделирование обеспечивает максимальное подобие модели твердому телу.

- Гибридное (hybrid modeling) – позволяет сочетать каркасное, поверхностное, твердотельное описания и использовать комбинации жестко размерного и параметрического моделирования. При данном подходе в общем случае топологическая размерность элементов может иметь значения: 0, 1, 2, 3 в зависимости от структуры модели.

При моделировании промышленных изделий наибольшее распространение в машиностроении получили системы твердотельного и гибридного моделирования. Существует несколько подходов к описанию (представлению) твердотельных моделей [1, 2]:

- Полигональное моделирование (polygonal modeling) – это самая первая разновидность трехмерного моделирования, при котором модель описывается совокупностью многоугольников (полигонов) с заданными координатами вершин. Основной особенностью является необходимость применения большого количества полигонов для точного описания сложных поверхностей модели.

- Конструктивное представление объемной геометрии (Constructive Solid Geometry, CSG) – использует при моделировании комбинацию базовых геометрических тел (твердотельных примитивов): прямоугольная и треугольная

призмы, сфера, цилиндр, конус, тор (рис. 2) и др. При моделировании объекта применяются следующие булевы операции: объединения (union), пересечения (intersect) и вычитания (difference) тел. Для хранения истории трансформаций модели и применения булевых операций над телами используется специальная структура данных, называемая деревом построения CSG (CSG tree).

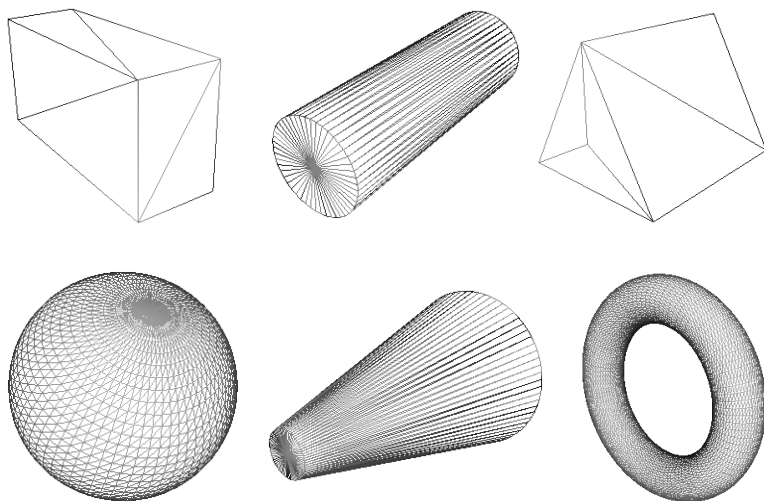


Рисунок 2 – Примеры базовых объектов, используемых при твердотельном моделировании изделий: прямоугольная и треугольная призмы, цилиндр, сфера, конус и тор.

- **Граничное представление (Bounded representation, B-rep)** – трехмерная граничная поверхность тела представлена в виде элементов: вершин, ребер и граней. При этом грань – часть граничной поверхности; ребра – криволинейные сегменты, ограничивающие грань; вершины – точки соединения соседних ребер. Данный подход позволяет моделировать объекты произвольной формы и сложности. Для хранения этой информации используется специальная структура данных B-rep.

Геометрическая форма CAD-моделей в системах твердотельного моделирования описывается достаточно сложными поверхностями различных типов, с учетом особенностей используемых CAD-систем. В целях унификации представления информации о поверхностях моделей для последующей их материализации интегрированными генеративными технологиями производится переход от CAD-моделей к триангуляционным. Триангуляционное представление модели изделия является приближенным. Точность приближения триангуляционной модели к исходной CAD-модели обеспечивается использованием достаточно большого количества треугольников.

Триангуляционная модель (triangulation model) – частный случай поли-

гональной модели, когда все грани представлены треугольниками. В триангуляционных моделях одновременно представлены элементы трех топологических порядков: точки (вершины), линии (ребра) и грани (плоские треугольники). Основные требования к триангуляционной модели твердотельного объекта – замкнутость и связность [1, 4]. Замкнутость поверхности триангуляционной модели – топологическое понятие, означающее отсутствие ребер с числом смежности $A_{Edge} \neq 2$ и вершин $A_{Vert} < 3$. Связность объекта (многогранника) означает то, что он не состоит из нескольких непересекающихся объектов, т. е. от любой вершины можно перейти к любой вершине по ребрам. Смежностью ребра называют количество его вхождений в треугольники триангуляционной модели. Числом смежности (степенью) вершины называют количество ее вхождений в ребра триангуляционной модели.

Переход от CAD-модели изделия к триангуляционному представлению осуществляется в современных системах твердотельного моделирования экспортом в STL-формат. Формат был разработан в целях унификации исходных данных для систем материализации интегрированными генеративными технологиями. STL-файл представляет собой структурированную информацию в виде множества треугольников, представленных координатами вершин с указанием значений направляющих косинусов нормалей.

Единичный элемент триангуляционной модели представлен на рис. 3. Представлены координаты вершин треугольника V_1, V_2, V_3 , ребра E_1, E_2, E_3 , единичный вектор нормали к поверхности треугольника \vec{N} и его направляющие косинусы N_x, N_y, N_z . Значения направляющих косинусов нормалей являются дополнительными (избыточными) и определяются по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned}
 nA &= y_2 - y_1 \quad z_3 - z_1 - y_3 - y_1 \quad z_2 - z_1 ; \\
 nB &= x_3 - x_1 \quad z_2 - z_1 - x_2 - x_1 \quad z_3 - z_1 ; \\
 nC &= x_2 - x_1 \quad y_3 - y_1 - x_3 - x_1 \quad y_2 - y_1 ; \\
 nABC &= \sqrt{nA^2 + nB^2 + nC^2} ; \\
 N_x &= \frac{nA}{nABC} ; \quad N_y = \frac{nB}{nABC} ; \quad N_z = \frac{nC}{nABC} ,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где nA, nB, nC – длины сторон треугольника ABC ; N_x, N_y, N_z – направляющие косинусы вектора нормали к треугольнику ABC .

STL-файлы могут иметь два формата: текстовый (ASCII) и двоичный (Binary). Структуры файлов приведены на рис. 4.

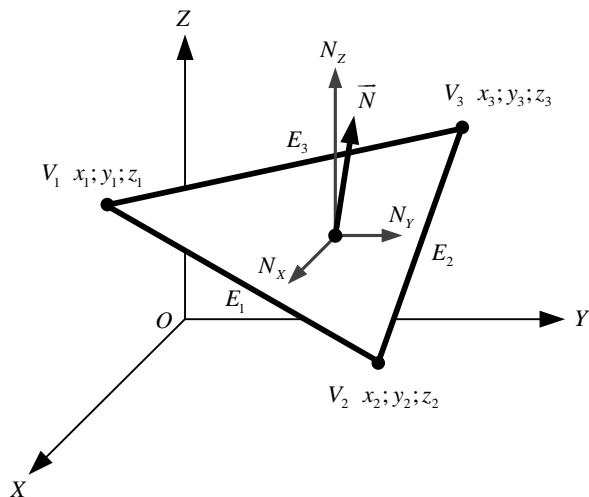


Рисунок 3 – Единичный элемент триангуляционной модели $V_1V_2V_3$:
 E_1, E_2, E_3 - ребра; \bar{N} - единичный нормальный вектор к грани;
 N_x, N_y, N_z - направляющие косинусы.

Для топологического анализа триангуляционных моделей исходные STL-файлы преобразуются (импортируются) в базу данных (DBF-представление) с заданной точностью округления координат вершин. Полученный файл представляет собой таблицу триангуляционных данных (STL_NNNN), содержащую информацию о треугольниках с координатами вершин $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$ и направляющими косинусами нормали (N_x, N_y, N_z) .

Для хранения данных триангуляционных 3D моделей изделий была предложена следующая структура (рис. 5). Каждой группе топологических элементов триангуляционной модели (вершины, ребра и грани) относится отдельная таблица данных – FaceNNNN, EdgeNNNN и VertNNNN:

- VertNNNN содержит координаты вершин триангуляционной модели и число смежности каждой вершины;
- EdgeNNNN содержит координаты концевых вершин ребер, их длины, номера инцидентных (концевых) вершин и число смежности каждого ребра;
- FaceNNNN содержит координаты вершин граней триангуляционной модели, направляющие косинусы нормалей, номера инцидентных ребер и вершин.

При переходе от таблицы триангуляционных данных (STL_NNNN) к одной из таблиц (FACE_NNNN) основных топологических объектов происходит следующая трансформация данных:

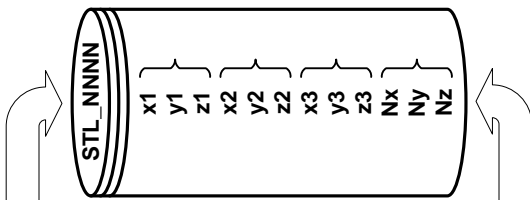
***.STL (ASCII - текстовый формат)**

```

solid Примечание ...
facet normal Nx(1) Ny(1) Nz(1)
outer loop
vertex x1(1) y1(1) z1(1)
vertex x2(1) y2(1) z2(1)
vertex x3(1) y3(1) z3(1)
endloop
endfacet
...
facet normal Nx(i) Ny(i) Nz(i)
outer loop
vertex x1(i) y1(i) z1(i)
vertex x2(i) y2(i) z2(i)
vertex x3(i) y3(i) z3(i)
endloop
endfacet
...
endsolid
    
```

**Таблица
триангуляционных
данных**

- координаты 1-й вершины
- координаты 2-й вершины
- координаты 3-й вершины
- направляющие косинусы нормали



**Структура двоичного
(Binary) STL-файла**

```

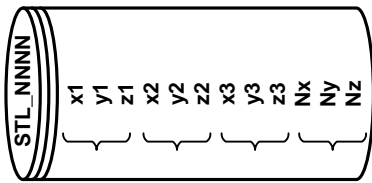
Примечание.....
.....
###Nx1.Ny1.Nz1.x11.y11.z11.x21.y21.z21.x31.y31.z31...
Nx1.Ny1.Nz1.x1i.y1i.z1i.x2i.y2i.z2i.x3i.y3i.z3i...
Nx1.Ny1.Nz1.x1n.y1n.z1n.x2n.y2n.z2n.x3n.y3n.z3n.RR
    
```

Кол-во байт	Тип переменных	Описание
80	Char (символьный)	Произвольный текст заголовка
4	Unsigned long integer (длинное целое без знака)	Общее количество треугольников (###)
		Треугольник #
48	Float (число с плавающей точкой)	Направляющие косинусы и координаты вершин (4×12)
2	—	Резерв

Рисунок 4 – Схема преобразования STL-файла в DBF-образ.

Таблица

триангуляционных данных



координаты 1-й вершины

координаты 2-й вершины

координаты 3-й вершины

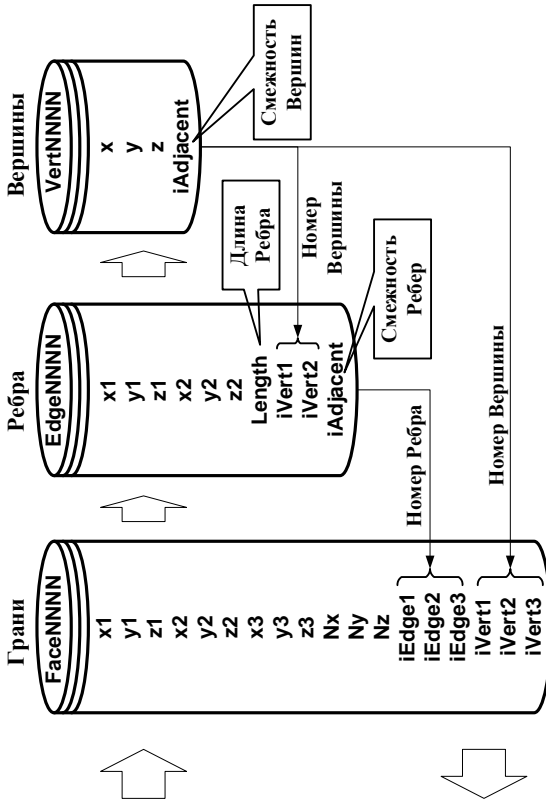
направляющие косинусы нормали

Таблица результатов контроля соответствия ТБ

STL_MNHN <-> FaceNNNN.

Создается при ANAL_VAR1_STLF_Dbf = .Т.

Записываются только отличающиеся данные.



Трансформация данных при переходе STL_MNHN -> FaceNNNN

- Округление координат вершин x1, y1, z1, x2, y2, z2, x3, y3, z3 до заданного количества десятичных знаков
- Пересчет направляющих косинусов нормалей:
 - $nA = (y2-y1)*(z3-z1) - (y3-y1)*(z2-z1)$;
 - $nB = (x3-x1)*(z2-z1) - (x2-x1)*(z3-z1)$;
 - $nC = (x2-x1)*(y3-y1) - (x3-x1)*(y2-y1)$;
 - $nABC = \text{SQRT}(nA^2 + nB^2 + nC^2)$;
 - $Nx = nA/nABC$; $Ny = nB/nABC$; $Nz = nC/nABC$

Рисунок 5 – Структура данных при топологическом анализе триангуляционных 3D моделей.

- округление координат вершин $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ до заданного количества десятичных знаков;
- пересчет направляющих косинусов нормалей на основании зависимостей (1).

При задании системе выполнения операции округления происходит контроль соответствия значений направляющих косинусов в таблице триангуляционных данных STL_NNNN и рассчитанных значений в таблице FaceNNNN. Результирующая информация записывается в таблицу результатов STLFNNNN, которая создается при установленном флаге ее создания (ANAL_VAR.1_STLF_Dbf).

Рассмотренный подход преобразования STL-файлов в DBF-образ и разработанные структуры данных использованы в подсистеме «Топологический анализ» системы морфологического анализа триангуляционных 3D моделей изделий. Система разработана в среде управления базами данных Visual FoxPro.

Экранная форма подсистемы топологического анализа представлена на рис. 6. На экранной форме расположены элементы управления (кнопки), позволяющие выполнять следующие задачи:

- топологический анализ триангуляционных моделей;
- визуализация STL-файлов с помощью внешних программ просмотра;
- округление координат вершин триангуляционной модели;
- создание баз данных вершин, ребер и граней в процессе топологического анализа;
- запуск подсистемы анализа данных по вершинам, ребрам и граням (специальный набор фильтров);
- создание базы данных соответствия координат вершин и нормалей (абсолютная погрешность);
- определение общего количества граней, вершин и ребер в модели;
- определение количества вершин со смежностью $A_{Vert} < 3$ и ребер $A_{Edge} \neq 2$;
- определение эйлеровой характеристики (характеристика Эйлера-Пуанкаре) χ ;
- определение рода поверхности g .

Топологический анализ триангуляционных моделей предполагает рассмотрение дифференциальных и интегральных характеристик.

Дифференциальные топологические характеристики определяют замкнутость поверхности модели. Замкнутость поверхностей является одним из важнейших требований, предъявляемым к 3D моделям. Определение дифференциальных топологических характеристик основывается на исследовании свойств элементов множеств граней, ребер и вершин триангуляционной модели. Результатом анализа являются:

- смежность ребер A_{Edge} и вершин A_{Vert} ;

Топологический анализ: Вар. № 0018

DBF-образ STL-файла
 STL_0018 .dbf

Round Окружение
 Количество десятичных знаков при округлении
 6

Контроль соответствия ТБ
 STL_0018 ↔ Face0018

STLF0018 .dbf

Данные и результаты

Вершины
 Vert0018 .dbf

Ребра
 Edge0018 .dbf

Грани
 Face0018 .dbf

Базы данных вершин, ребер, граней

Округление координат вершин

Топологический анализ модели

Визуализация модели

База данных соответствия координат вершин и вершин и нормалей (абсолютная погрешность)

Общее количество граней, вершин и ребер в модели

Количество вершин и ребер обеспечивающих замкнутую поверхность

Подсистема анализа данных по вершинам, ребрам и граням (специальный набор фильтров)

Эйлерова характеристика

Род поверхности

$$g = \frac{2 - \chi}{2}$$

Эйлерова характеристика (характеристика Эйлера-Пуанкаре) χ

Количество вершин со смежностью $A_{Vert} < 3$ и ребер $A_{Edge} \neq 2$

Грани: 4,820 +
 Вершины: 2,424 +
 Ребра: 7,266 -
 Эйлерова характеристика: -22 = 2 - 2

Вершины: 2,424
 Смежн. ≥ 3 : 0
 Смежн. < 3 : 0

Ребра: 7,266
 Смежн. = 2: 7194
 Смежн. $\neq 2$: 72

Род поверхности: 12

Рисунок 6 – Подсистема топологического анализа триангуляционных 3D моделей изделий.

- количество вершин со смежностью $A_{Vert} \geq 3$ и ребер $A_{Edge} = 2$;
- количество вершин со смежностью $A_{Vert} < 3$;
- количество ребер со смежностью $A_{Edge} \neq 2$.

Интегральные характеристики дают общую топологическую оценку триангуляционной модели и могут быть вычислены на базе дифференциальных характеристик. К ним относятся:

- общее количество вершин N_{Verts} , ребер N_{Edge} и граней N_{Face} ;
- эйлерова характеристика χ ;
- род поверхности g .

В триангуляционных твердотельных 3D моделях количество вершин со смежностью $A_{Vert} \geq 3$ должно совпадать с общим числом вершин, а количество ребер со смежностью $A_{Edge} = 2$ – с количеством ребер. Нарушение требований по вершинам и ребрам у триангуляционных моделей означает незамкнутость поверхности модели.

Топологические свойства поверхности триангуляционной 3D модели изделия выражаются с помощью ее эйлеровой характеристики χ :

$$\chi = N_{Face} - N_{Edge} + N_{Vert} , \quad (2)$$

где N_{Face} , N_{Edge} и N_{Vert} – соответственно количество граней, ребер и вершин.

Формула Эйлера для моделей изделий, не имеющих сквозных отверстий, определяется равенством:

$$N_{Face} - N_{Edge} + N_{Vert} = 2 . \quad (3)$$

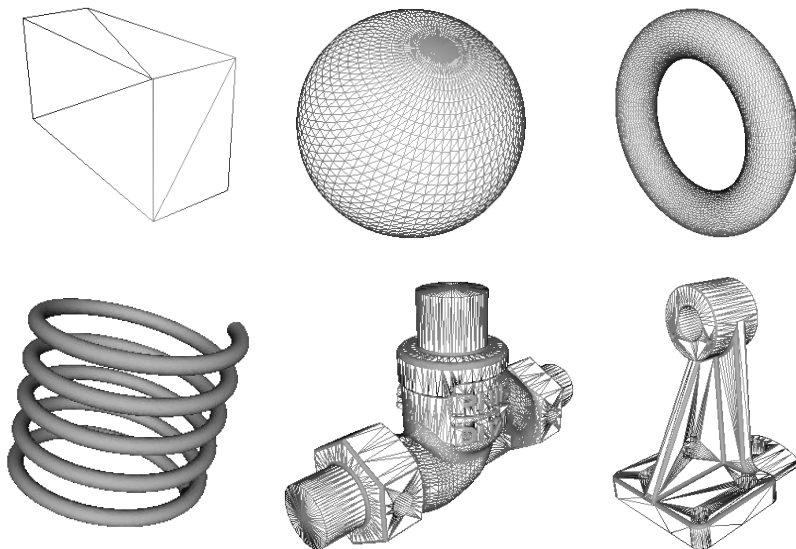


Рисунок 7 – Тестовые триангуляционные модели изделий: прямоугольная призма, сфера, тор, спираль, вентильная муфта, кронштейн.

Для моделей изделий, содержащие сквозные отверстия, эйлерова характеристика определяется зависимостью:

$$\chi = N_{Face} - N_{Edge} + N_{Vert} = 2 - 2g, \quad (4)$$

где g – число, называемое родом поверхности.

В топологии родом замкнутой и связной поверхности называется число равное количеству сквозных отверстий в теле. Для замкнутых полигональных поверхностей значения рода поверхности g лежат в интервале $[0, M]$, где M – множество всех натуральных чисел.

Род g поверхности триангуляционной модели может быть вычислен на основании эйлеровой характеристики χ [4]:

$$g = \frac{2 - (N_{Face} - N_{Edge} + N_{Vert})}{2} = 1 - \frac{\chi}{2}. \quad (5)$$

На основании зависимости (5) можно сделать вывод о том, что эйлерова характеристика поверхности должна быть целым числом $\chi \leq 2$ и кратным двум. Иначе род поверхности будет дробным, т. е. модель незамкнутая.

Таблица 1 – Топологические характеристики тестовых триангуляционных 3D моделей

Модель	Прямоугольная призма	Сфера	Тор	Спираль	Вентильная муфта	Кронштейн
Характеристики						
Число вершин N_{Vert} , шт.	8	2 382	23 296	61 380	35 928	8 176
Число ребер N_{Edge} , шт.	18	7 140	69 888	184 018	107 790	24 576
Число граней N_{Face} , шт.	12	4 760	46 592	122 640	71 860	16 384
Эйлерова характеристика $\chi = N_{Face} - N_{Edge} + N_{Vert}$	2	2	0	2	-2	-16
Род поверхности $g = 1 - \chi/2$	0	0	1	0	2	9

Рассмотрим использование предложенного топологического анализа на примере 6-ти тестовых триангуляционных 3D моделей (рис. 7): прямоугольная призма, сфера, тор, спираль, вентильная муфта и кронштейн. Для каждой мо-

дели определялись следующие характеристики (табл. 1): число вершин N_{Vert} , ребер N_{Edge} , граней N_{Face} , эйлерова характеристика χ и род поверхности g .

В табл. 1 представлены модели (прямоугольная призма, сфера и спираль), у которых эйлеровы характеристики совпадают и равны 2 ($g = 0$), т. е. модели, не имеют сквозных отверстий. У трех остальных моделей значения эйлеровой характеристики отличаются и соответствуют зависимости (5). Все рассмотренные модели являются замкнутыми, т. е. топологическая верификация подтвердила их твердотельность.

Выводы

Топологический анализ триангуляционных 3D моделей изделий, на базе предложенных дифференциальных и интегральных характеристик позволяет выполнять верификацию твердотельных моделей.

В качестве дифференциальных характеристик целесообразно использовать смежность ребер A_{Edge} и вершин A_{Vert} , а в качестве интегральных: общее количество вершин N_{Vert} , ребер N_{Edge} и граней N_{Face} ; эйлерову характеристику χ и род поверхности g .

Дифференциальные характеристики позволяют определить замкнутость поверхности модели, а интегральные – ее подтвердить и оценить топологические свойства.

Топологический анализ реализован в системе морфологического анализа триангуляционных 3D моделей изделий, разрабатываемой на кафедре «Интегрированные технологии машиностроения» им. М.Ф. Семко Национального технического университета «Харьковский политехнический институт».

Список использованных источников: 1. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование / Н.Н. Голованов. - М.: Изд-во Физ.-мат. лит., 2002. - 472 с. 2. Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE). - СПб.: Изд. дом ПИТЕР, 2004. - 560 с. 3. Радзевич С.П. Формообразование поверхностей деталей. Основы теории / Радзевич С.П. - К.: Растан, 2001. - 592 с. 4. Энциклопедия элементарной математики: В 5 т. / Физматгиз. - М., 1963. - Т.4: Геометрия. - 568 с.

Поступила в редколлегию 23.04.2011

Bibliography (transliterated): 1. Golovanov N.N. Geometrisheskoe modelirovanie / N.N. Golovanov. - M.: Izd-vo Fiz.-mat. lit., 2002. - 472 s. 2. Li K. Osnovy SAPR (CAD/CAM/CAE). - SPb.: Izd. dom PITER, 2004. - 560 s. 3. Radzevich S.P. Formoobrazovanie poverhnostej detalej. Osnovy teorii / Radzevich S.P. - K.: Rastan, 2001. - 592 s. 4. Jenciklopedija jelementarnoj matematiki: V 5 t. / Fizmatgiz. - M., 1963. - T.4: Geometrija. - 568 s.