

## НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ И АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКОВ

**Сизый Ю. А.**, докт. техн. наук, проф.

(Национальный технический университет «ХПИ», Харьков, Украина)

**Сталинский Д. В.**, докт. техн. наук, проф.

(ГП «УкрНТЦ «Энергосталь», Харьков, Украина)

**Ушаков А. Н.**, канд. техн. наук, доц.

(Национальный технический университет «ХПИ», Харьков, Украина)

*Приведено решение двух задач исследования динамики металлорежущих станков: применение метода пространства состояний для исследования крутильных колебаний привода вращения и исследование фрикционных автоколебаний визуальным моделированием.*

**Ключевые слова:** динамика металлорежущих станков, крутильные колебания, фрикционные автоколебания

*Наведено рішення двох завдань дослідження динаміки металорізальних верстатів: застосування методу простору станів для дослідження крутильних коливань приводу обертання і дослідження фрикційних автоколивань візуальним моделюванням.*

**Ключові слова:** динаміка металорізальних верстатів, крутильні коливання, фрикційні автоколивання

*The solution of the two objectives of the study of the dynamics of machine tools: application of the method the state space for the study of torsional rotation of the drive oscillation and study the frictional self-oscillations of visual modeling.*

**Keywords:** dynamics of machine tools, torsional vibrations, friction self-oscillation

В последние 1,5 года на кафедре ТМС НТУ «ХПИ» совместно с УкрНТЦ «Энергосталь» рассмотрено решение двух задач исследования динамики металлорежущих станков. Первая – применение метода пространства состояний для исследования крутильных колебаний привода вращения; вторая – исследование фрикционных автоколебаний визуальным моделированием.

### **1. Сравнительный анализ исследования крутильных колебаний по существующей и предлагаемой методике**

В настоящее время в практике исследования крутильных колебаний приводов вращения станков установилась следующая методика [1-3]: 1) упрощение привода, т.е. приведение его к системе содержащей только сосредоточение массы соединенные безинерционными валами; 2) приведение системы к одному приведенному валу; 3) при большом числе масс приведение системы к двух-, трех–массовой; 4) вычисление низших собственных частот и определение для них форм колебаний.

Недостатком этой методики является то, что собственные частоты колебаний вычисляются без учета рассеивания энергии в приводе, т.е. демпфирования, и невозможность оценить амплитуды колебаний элементов привода в резонансном режиме.

Сравнение существующей методики и предлагаемой выполнено на примере исследования крутильных колебаний привода вращения шлифовального круга станка 3М151.

В существующей методике собственные частоты колебаний вычисляются из системы однородных дифференциальных уравнений динамического равновесия сосредоточенных масс. При этом схема привода приведенного к валу ротора электродвигателя показана на рис. 1 и система уравнений (1), описывающая равенство моментов в динамике на массах, следующая:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 - \frac{1}{\ell_3} \varphi_1 + \frac{1}{\ell_1} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{\ell_1} (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{\ell_2} (\varphi_2 - \varphi_3) = 0; \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 - \frac{1}{\ell_2} (\varphi_2 - \varphi_3) + \frac{1}{\ell_3} (\varphi_3 - \varphi_4) = 0; \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 - \frac{1}{\ell_3} (\varphi_3 - \varphi_4) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  – углы закручивания масс  $J_1, J_2, J_3, J_4$ .

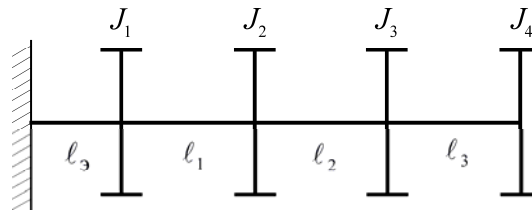


Рис.1 –  $J_1, J_2, J_3, J_4$  – моменты инерции масс: ротора, шкива на валу ротора, шкива шпинделя и самого шпинделя.  $\ell_3, \ell_1, \ell_2, \ell_3$  – податливости: электромагнитной связи статора с ротором, вала ротора, ременной передачи, шпинделя

Используя известное решение этой системы в виде гармонических функций  $\varphi_i = A_i \sin(\omega_{c,i} t + \varepsilon_i)$ , получается система уравнений, которую можно записать в матричной форме:  $\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{A}} = 0$ ,

$$\text{где } \underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}; \underline{\mathbf{M}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\ell_1} - \frac{1}{\ell_3} - J_1 \omega^2 & -\frac{1}{\ell_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\ell_1} & \frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} - J_2 \omega^2 & -\frac{1}{\ell_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\ell_2} & \frac{1}{\ell_2} + \frac{1}{\ell_3} - J_3 \omega^2 & -\frac{1}{\ell_3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\ell_3} & \frac{1}{\ell_3} - J_4 \omega^2 \end{vmatrix}.$$

Уравнение  $\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{A}} = 0$  будет иметь решение, если определитель матрицы  $\underline{\mathbf{M}}$  равен нулю. Раскрыв его, получаем алгебраическое уравнение в виде полинома четвертой степени относительно  $\omega^2$ . Решив его, получили собственные частоты:  $\omega_0 = 0$ ;  $\omega_1 = 7,47$  рад/с,  $\omega_2 = 231,4$  рад/с,  $\omega_3 = 804,82$  рад/с.

Определить амплитуды колебаний  $A_i$  из (1) с подстановкой в него  $\varphi_1 = A_i \sin(\omega_{c,i} t + \varepsilon_i)$  невозможно, т.к. уравнений недостаточно и тогда находят относительные амплитуды, принимая одну из амплитуд равной единице. Так, для первой собственной частоты получены относительные амплитуды:  $a_1 = \frac{A_1}{A_1} = 1$ ;  $a_2 = \frac{A_2}{A_1} = -1,87$ ;  $a_3 = \frac{A_3}{A_1} = -1,97$ ;  $a_4 = \frac{A_4}{A_1} = -1,98$ . Получены также относительные амплитуды и для прочих собственных частот.

Имея значения собственных частот  $\omega_i$ , исследователь сопоставляет их с возможными частотами внешнего воздействия (например, моментом резания) на привод и делает вывод о возможности резонанса. Однако следует отметить, что собственные частоты определены без учета демпфирования, т.е. с определенной погрешностью, а относительные амплитуды фактически не имеют практического значения, т.к. они не позволяют оценить величину амплитуды в резонансном режиме и сделать вывод о приемлемости или неприемлемости такого режима работы.

Уравнения пространства состояний описывают исследуемую систему неоднородными дифференциальными уравнениями не выше 1<sup>го</sup> порядка, для чего вводится в качестве параметра системы, в отличие от (1), скорость закручивания сосредоточенных масс. Это позволяет учесть рассеивания энергии колебаний через введение момента сопротивления закручиванию пропорционального относительной скорости закручивания масс. Кроме этого, в систему уравнений пространства состояний вместо податливости электромагнитной связи статора с ротором, вычисляемой приблизительно, можно ввести дифференциальное уравнение двигателя на линейном участке его механической характеристики.

В результате получена следующая система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{M} = -2M_{\kappa} P_{\pi} \omega_1 - \frac{1}{T_3} M; \\ \dot{\omega}_1 = \frac{1}{J_1} M - \frac{1}{J_1 \ell_1} (\varphi_1 - \varphi_2); \\ \dot{\omega}_2 = \frac{1}{J_2 \ell_2} (\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{J_2 \ell_2} (\varphi_2 - \varphi_3) - \frac{h}{J_2} (\omega_2 - \omega_3); \\ \dot{\omega}_3 = \frac{1}{J_3 \ell_2} (\varphi_2 - \varphi_3) + \frac{h}{J_3} (\omega_2 - \omega_3) - \frac{1}{J_3 \ell_3} (\varphi_3 - \varphi_4); \\ \dot{\omega}_4 = \frac{1}{J_4 \ell_3} (\varphi_3 - \varphi_4) - \frac{1}{J_4} M_c; \\ \frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt} = \omega_1 - \omega_2; \\ \frac{d(\varphi_2 - \varphi_3)}{dt} = \omega_2 - \omega_3; \\ \frac{d(\varphi_3 - \varphi_4)}{dt} = \omega_3 - \omega_4. \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь  $M$  – момент развиваемый двигателем,  $M_{\kappa}$  – критический момент двигателя;  $M_c$  – момент резания;  $P_{\pi}$  – число пар полюсов двигателя.

Эта система уравнений в теории автоматического управления называется системой пространства состояний [4]. Внешним воздействием на систему привода является момент сопротивления (шлифования)  $M_c$ .

Таким образом, система (3) описывает вынужденные колебания привода с воздействием на него моментом  $M_c$ .

Введя обозначения:  $x_1 = M$ ;  $x_2 = \omega_1$ ;  $x_3 = \omega_2$ ;  $x_4 = \omega_3$ ;  $x_5 = \omega_4$ ;  $x_6 = \varphi_1 - \varphi_2$ ;  $x_7 = \varphi_2 - \varphi_3$ ;  $x_8 = \varphi_3 - \varphi_4$ ; можно эту систему записать матричным уравнением состояния [4]:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U, \quad (4)$$

Из (4) получают передаточную функцию  $W(S)$ , как отношение изображения  $i^{-1}$  элемента системы (3) к изображению входного сигнала  $M_c(S)$  [4]:

$$W(S) = \mathbf{C}(\mathbf{S}\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B},$$

где  $\mathbf{C}$  – матрица связывающая выходную координату системы  $y_i(t)$  с параметрами  $x_i(t)$ .

Если нас интересует в качестве выходной координаты угол закручивания шпинделя, т.е.  $x_8 = \varphi_3 - \varphi_4$ , то  $y(t) = \mathbf{C}x_8(t) + \mathbf{D}U(t)$  и  $\mathbf{C} = |0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1|$ . Матрица  $\mathbf{D}$  обычно равна нулю.

Перейдя в частотную область, получаем частотную передаточную функцию  $W(\omega \cdot i)$ , из которой можно получить амплитудно-частотную характеристику вынужденных крутильных колебаний.

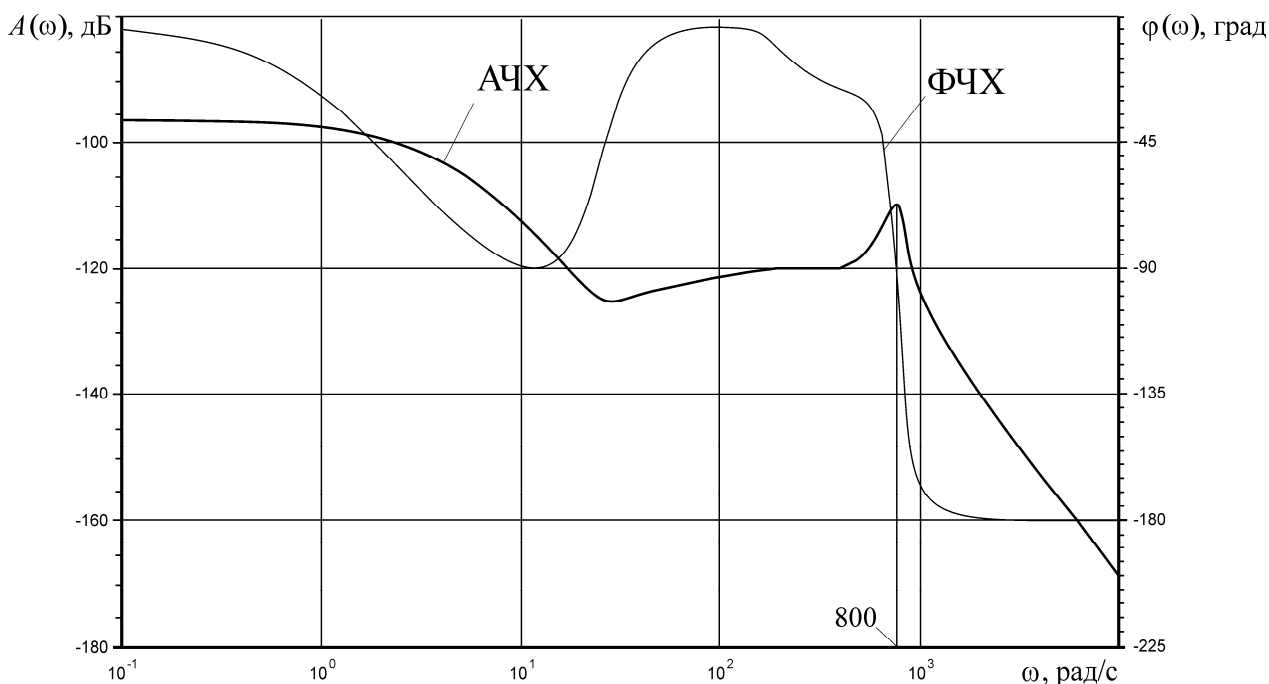


Рис. 2 – АЧХ в логарифмической системе координат

На рис. 2 показана АЧХ в логарифмической системе координат, которая несет важную информацию. По этой характеристике видно как амплитуда колебаний момента резания на частотах от 0 до 10000 рад/с преобразуется в амплитуду закручивания шпинделя, что нельзя сделать при существующей мето-

дике. На этой кривой виден один пик на частоте 800 рад/с и этот пик меньше чем закручивание шпинделя в статике ( $\omega=0$ ).

Таким образом, опасаться резкого возрастания угла закручивания шпинделя не приходится, что очевидно объясняется демпфированием ременной передачи (коэффициент демпфирования  $h$ , см. (3)) за счет упругого трения ремней о шкивы.

## 2. Моделирование фрикционных автоколебаний

При малых перемещениях в станках по направляющим скольжения возможно возбуждение фрикционных автоколебаний, что отрицательно сказывается на точности этих перемещений. Проблема фрикционных автоколебаний достаточно глубоко исследована аналитически в работах Пуша В.Э. [5,6].

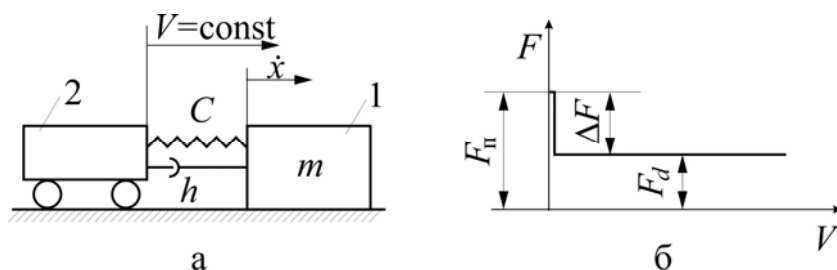


Рис. 3 – Привод (а) и нелинейная характеристика трения (б)

В этих работах рассматривается привод, показанный на рис. 3а, в котором задающий механизм 2, сообщает со скоростью  $V$  перемещение ползуну массой  $m$  через упруго – демпфирующую связь с жесткостью  $C$  и коэффициентом демпфирования  $h$ . При этом принимается нелинейная характеристика трения, показанная на рис. 3б, где  $Fп$  – сила трения покоя,  $Fд$  – сила трения движения.

При такой характеристике трения и при наличии силы демпфирования пропорциональной относительной скорости ползуна и задающего механизма, уравнение движения ползуна

$$\Delta F - C(x - Vt) = m\ddot{x} + h(\dot{x} - V), \quad (5)$$

$$\text{или } \ddot{x} + 2\xi\omega_0 \cdot \dot{x} = \omega_0^2 Vt + \frac{\Delta F}{m} + 2\xi\omega_0 V, \quad (6)$$

где  $\xi = \frac{h}{2\sqrt{C \cdot m}}$ ;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}$  – частота собственных колебаний ползуна на пружине.

Пушем В.Э. [5, 6] получены решения уравнения (6), т.е.  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$ , в котором введен параметр  $A = \frac{\Delta F}{V\sqrt{C \cdot m}}$ . Автор показывает, что существует критическая скорость  $V_k$ , ниже которой ползун движется скачками и предложена формула расчета  $V_k$ :

$$V_k = \frac{\Delta F}{A_k \sqrt{C \cdot m}}.$$

При малых значениях  $\xi$  зависимость  $A_k(\xi)$  можно аппроксимировать приближенно выражением

$$A_k \cong \sqrt{4\pi \cdot \xi},$$

и получить формулу расчета:

$$V_k = \frac{\Delta f \cdot N}{\sqrt{4\pi \cdot \xi \cdot C \cdot m}}, \quad (7)$$

где  $\Delta f = f_n - f_d$ ;  $f_n, f_d$  – коэффициенты трения покоя и движения;  $N$  – нормальная нагрузка на поверхность трения.

В [5,6] приведен характер изменения скорости ползуна  $\dot{x}(t)$  во времени согласно рис. 4, где  $t_1$  – время скачка;  $t_2$  – время выстоя.

Однако, график, представленный на рис. 4,  $\dot{x}(t)$  не является следствием его математического описания у автора. Он является субъективной интерпретацией этого решения.

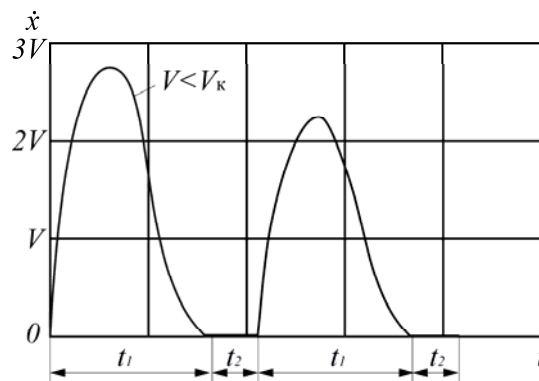


Рис. 4

Если взять пример, приведенный Пушем В.Э. [5], исследования привода тяжелого долбежного станка мод. 747, то используя его данные и математическое описание  $\dot{x}(t)$ , на рис. 5 приведены графики для различных скоростей  $V$ . Из этого рисунка видно, что при неравномерном движении ползуна фазы выстоя, т.е. остановки, не наблюдается в отличие от приведенного на рис. 4.

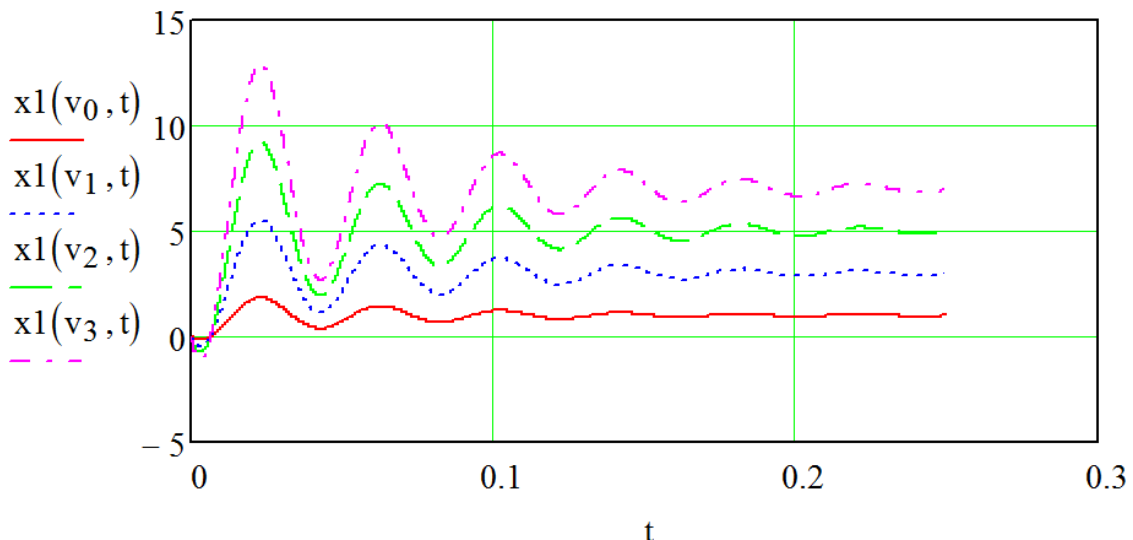


Рис. 5

Для данного примера рассчитано по (7) значение  $V_k = 5,5$  мм/с. Причем, для всего диапазона  $V = (1 \div 7)$  мм/с неравномерное перемещение через 0,2 с становится равномерным и определение  $V_k$  по этим графикам невозможно.

Из выполненного анализа следует, что описывая систему движения ползуна по неподвижной поверхности уравнением (1), закладывая в него логику скачкообразного движения с фазами «скачка» и «выстоя», реализовать её аналитически не удастся. Очевидно, её невозможно реализовать без приемов программирования, позволяющих управлять алгоритмом интегрирования периодически останавливая его и вновь возобновляя.

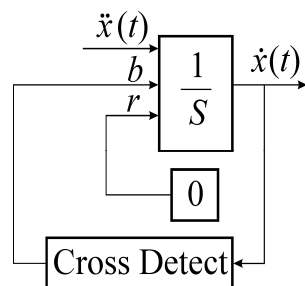


Рис. 6

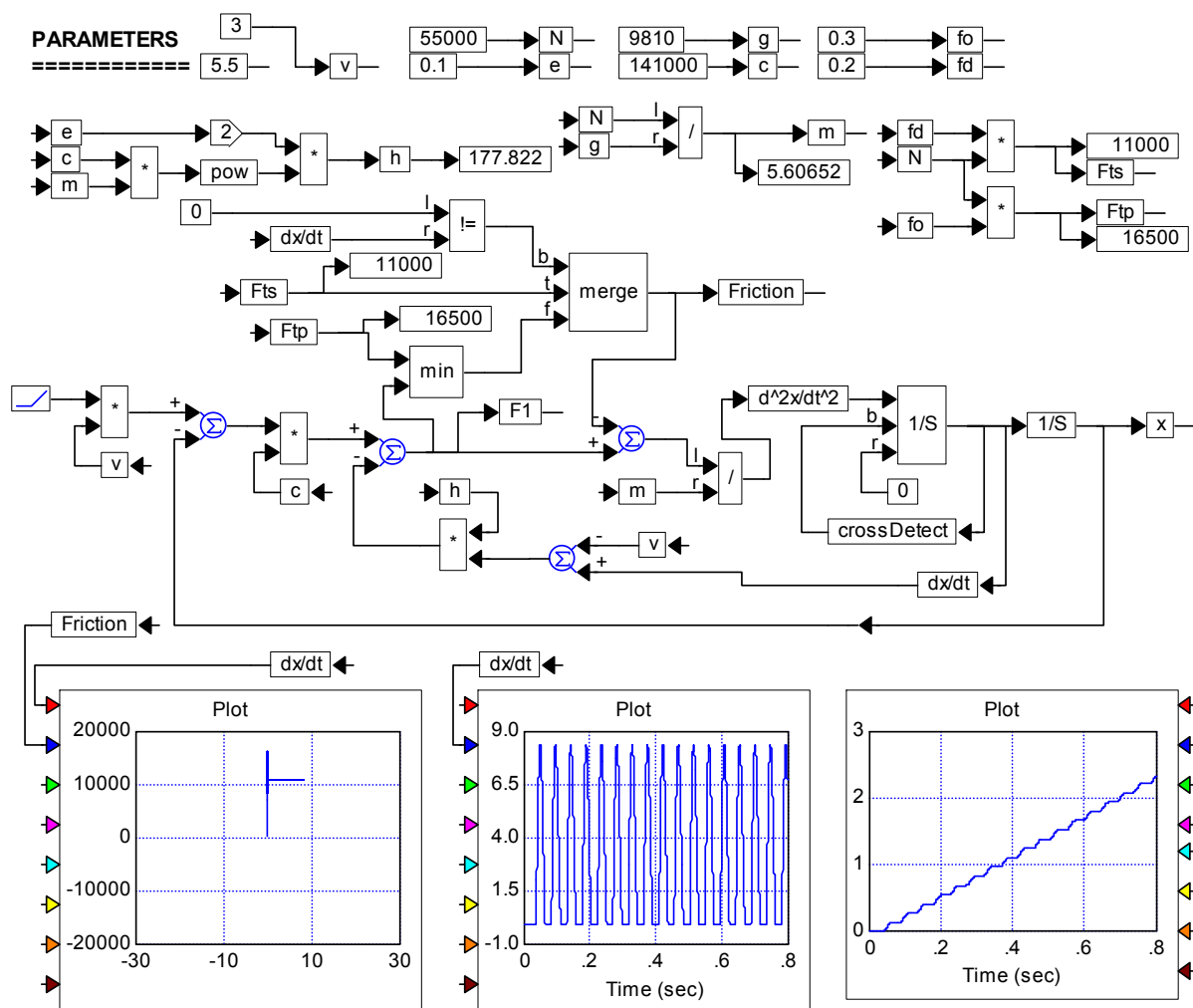


Рис. 7

Такую логику можно запрограммировать, пользуясь возможностями пакета «VisSim», т.е. сочетанием интегратора со сбросом «Reset Integrator» с детектором перехода «Cross Detect». Такое сочетание (рис. 6) указанных блоков позволяет останавливать интегрирование  $\ddot{x}(t)$ , когда  $\dot{x} = 0$ .

Используя уравнение (1) и сочетание блоков на рис. 6, разработана программа моделирования фрикционных релаксационных автоколебаний, приведенная на рис. 7, применительно к станку мод. 747 согласно данным Пуша В.Э. [5]. На нижнем графике показаны зависимости  $x(t)$  для различных значений скорости  $V$  задающего механизма. При скорости  $V < 5$  мм/с движение ползуна происходит скачками с явно выраженной фазой выстоя. При  $V \geq 5$  мм/с движение становится равномерным.

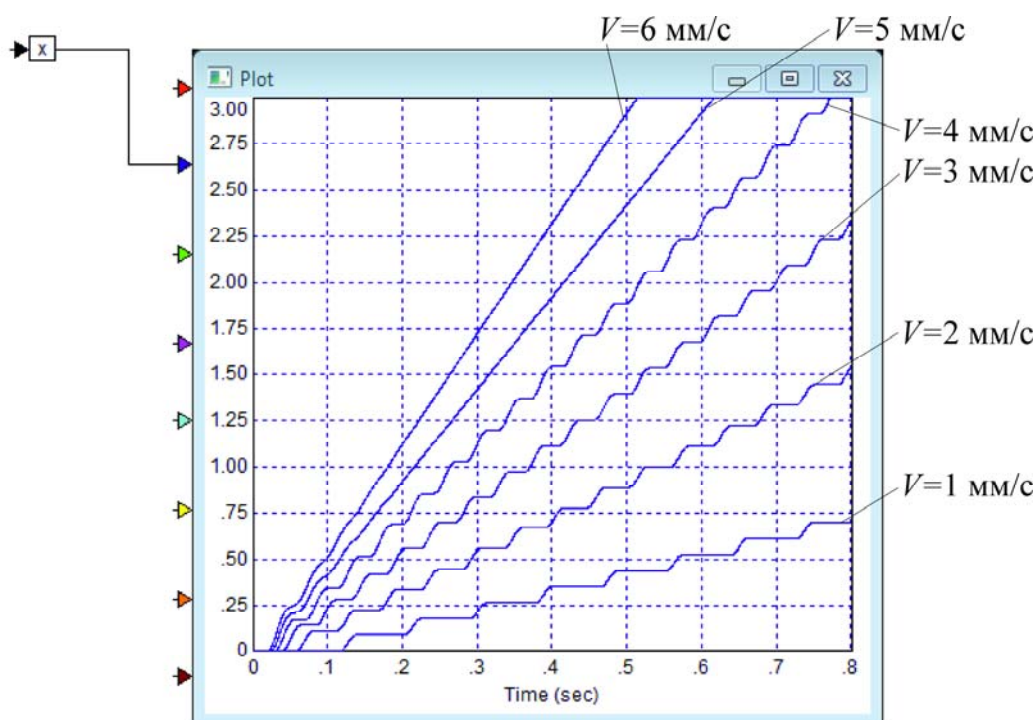


Рис. 8

Таким образом, разработана программа моделирования, позволяющая воспроизводить релаксационные фрикционные автоколебания, и по виду зависимости  $x(t)$  можно уверенно определять критическую скорость. При этом ограничение на относительный коэффициент демпфирования  $\xi$  не накладывается, как это делает Пуш В.Э. в формуле (7).

**Список литературы:** 1. Ривин Е.И. Динамика приводов станков / Е.И. Ривин. – М.: Машиностроение, 1966. – 203 с. 2. Вейц В. Л. Вынужденные колебания металлорежущих станков / В.Л. Вейц, В.К. Дондошанский, В.И. Чиряев. – М.: Машгиз, 1959. – 287 с. 3. Маслов Г.С. Расчет колебаний валов / Г.С. Маслов. – М.: Машиностроение, 1968. – 272 с. 4. Филлипс Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филлипс, Р. Харбор. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 815 с. 5. Пуш В.Э. Малые перемещения в станках / В.Э. Пуш. – М.: Гос. научн.-техн. изд-во машиностроит. лит-ры, 1961. – 123 с. 6. Пуш В.Э. Конструирование металлорежущих станков / В.Э. Пуш. – М.: Машиностроение, 1977. – 390 с.