

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
“ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”**

**Киркач Б.М.**

**Конохов В.І.**

**Хавін В.Л.**

**Шергін С.Ю.**

**АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В  
ТОЧЦІ І РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ОБОЛОНОК  
ОБЕРТАННЯ ПРИ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

Навчально – методичний посібник з розділу курсу “Опір матеріалів”  
для студентів машинобудівних спеціальностей

**ЗАТВЕРДЖЕНО**  
редакційно – видавничою  
радою університету,  
протокол №2  
від „26” червня 2025 р.

Харків НТУ “ХПІ”

ББК 30.121  
К64  
УДК 620.17

*Рецензенти:*

*О. А. Пермяков*, д-р техн. наук, професор НТУ «ХП»

*І. В. Міщенко*, канд. техн. наук, доцент ХНАДУ

Киркач Б.М., Конохов В.І., Хавін В.Л., Шергін С.Ю.

Аналіз напружено-деформованого стану в точці і розрахунок на міцність оболонок обертання при складному навантаженні. Навчально – методичний посібник з розділу курсу “Опір матеріалів” для студентів машинобудівних спеціальностей. – Харків: НТУ “ХП”, 2025 – 86 с.

В посібнику розглядаються напружено-деформований стан в точці та безмоментна теорія розрахунку оболонок обертання.

Посібник призначений для студентів машинобудівних спеціальностей. Може бути корисним для викладачів, а також для аспірантів та наукових працівників, які у своїй практичній діяльності зустрічаються з необхідністю розрахунків конструкцій при різних видах деформації.

Іл. 26. Бібліогр. 3 назв.

ББК 30.121

ISBN

Б.М. Киркач, В.І. Конохов,  
© В.Л. Хавін, С.Ю. Шергін

2025р.

## ВСТУП

У різних галузях сучасної промисловості – хімічному машинобудуванні, енергомашинобудуванні, суднобудуванні, авіабудуванні, будівництві та ін. знайшли широке застосування тонкостінні оболонкові конструкції. Підвищені вимоги до міцності та жорсткості цих конструкцій з одночасною умовою зниження їх матеріаломісткості призводить до необхідності проводити аналіз напружено-деформованого стану тонкостінних оболонок обертання при складному навантаженні з подальшою оптимізацією конструкції. В процесі експлуатації оболонкові конструкції піддаються впливу різних видів зовнішнього навантаження. При цьому, в небезпечних точках цих конструкцій виникають різноманітні поєднання механічних напружень (різні види напружено-деформованого стану). Тому, інженер-конструктор має вміти проводити аналіз напруженого стану в будь-яких точках оболонкової конструкції з метою оцінки міцності.

Цей посібник присвячено елементам аналізу напружено-деформованого стану в точці тонкостінної оболонки конструкції і оцінюванню її міцності при складному напруженому стані.

Посібник складається з трьох розділів. У першому розділі посібника розглядаються основи теорії оболонок, які розраховуються за безмоментною теорією, наводяться залежності для визначення напружень в оболонках різної геометрії.

У другому розділі посібника розглянуті основи теорії напружено-деформованого стану в точці. Формулюється узагальнений закон Гука, що зв'язує компоненти напружень та деформацій при складному навантаженні, формулюються гіпотези граничних напружених станів

У третьому розділі посібника приведені порядок і приклади виконання двох задач розрахунково-проектувального завдання.

# 1. ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНОК ЗА БЕЗМОМЕНТНОЮ ТЕОРІЄЮ

**Оболонка** – це тверде тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими мала в порівнянні з двома іншими його розмірами.

Поверхня, що ділить навпіл товщину оболонки, називається **серединною поверхнею**.

**Оболонкою обертання** називається оболонка, серединна поверхня якої утворена обертанням будь-якої плоскої кривої навколо осі, що лежить в її площині і не перетинає її.

**Меридіанами** називаються криві, утворені перетином серединної поверхні площинами, що проходять через вісь симетрії оболонки.

**Паралелями** (паралельними колами або кільцевими перетинами) називаються кола, утворені перетином серединної поверхні площинами, які перпендикулярні осі оболонки.

**Полюсом** оболонки називається точка перетину серединної поверхні з віссю симетрії оболонки.

Для визначення напружень в тонкостінних оболонкових конструкціях переважно використовується безмоментна (мембранна) теорія оболонок [1]. За цією теорією тонкі оболонки обертання розглядаються як такі, що не сприймають згинальних моментів.

Оболонки обертання, що розраховуються за безмоментною теорією, мають задовольняти обов'язковим умовам:

- 1) мають бути тонкостінними (відношення товщини стінки  $h$  до радіуса кривизни  $R$  має бути  $h/R \leq 1/20$ ;
- 2) форма оболонки обов'язково має бути тілом обертання;
- 3) навантаження має бути розподіленим (наприклад, газовий або гідростатичний тиск), вісесиметричним (відносно осі обертання), плавно змінюватись і не мати різких стрибків;
- 4) закріплення оболонки має бути таким, щоб кути повороту і нормальні переміщення на краях оболонки не обмежувались. Сукупність цих умов дозволяє

прийняти гіпотезу рівномірного розподілу напружень по товщині стінки оболонки, тобто стінка оболонки працює тільки на розтягання або стискання.

Оболонку обертання називають вісесиметричною, якщо вона має вісесиметричну геометрію та навантажена плавно розподіленими вісесиметричним навантаженнями. Прикладами вісесиметричних оболонок можуть служити сферична, циліндрична, конічна і еліптична оболонки обертання, навантажені внутрішнім або зовнішнім гідростатичним тиском  $P$ .

На рис. 1.1 зображена симетрична оболонка товщиною  $h$ , з якої двома парами меридіональних та нормальних до них перерізів виділено безкінечно малий елемент поверхні  $abcd$ . Тут  $\rho_m$  – радіус кривизни дуги меридіана серединної поверхні оболонки ( $\rho_m = bO_1$ ),  $\rho_\theta$  – радіус кривизни перерізу, перпендикулярного дузі меридіану ( $\rho_\theta = bO$ ). Позначимо відрізки:  $ab = ds_2$ ,  $ac = ds_1$ .

Оболонка знаходиться під дією внутрішнього тиску  $P$ , який може змінюватись по координаті уздовж осі обертання, але буде однаковим у всіх точках площини, перпендикулярної до осі оболонки (осесиметричний тиск).

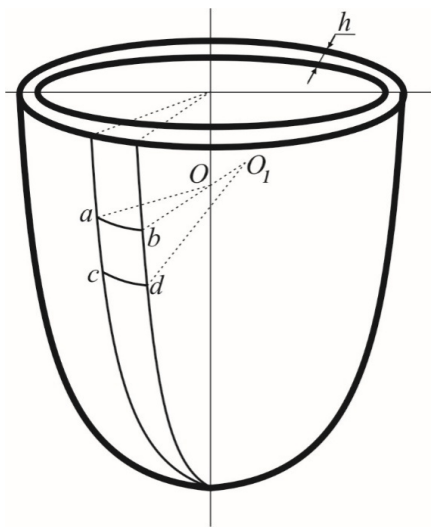


Рисунок 1.1

Розглянемо напружений стан виділеного елемента  $abcd$  (рис.1.2).

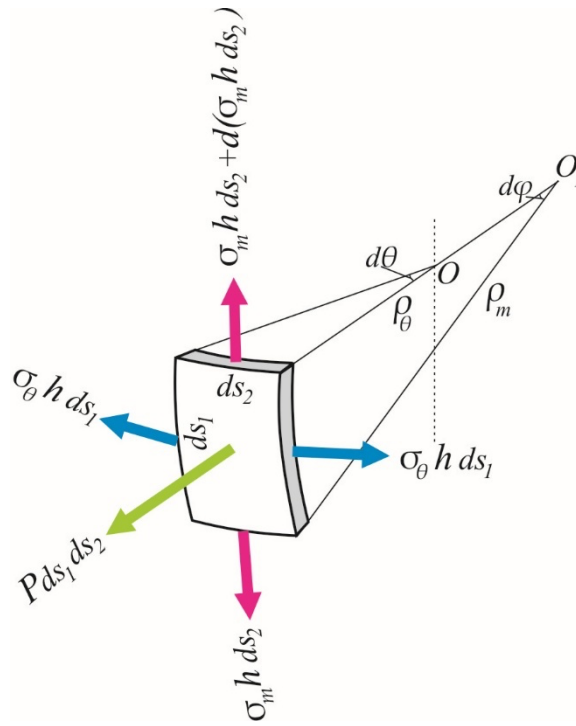


Рисунок 1.2

На гранях елемента  $abcd$  виникають меридіональні ( $\sigma_m$ ) та колові (широтні) напруження ( $\sigma_\theta$ ). Добуток цих напружень на площі граней елемента, дає сили, сума проекції яких на нормаль до поверхні є рівнянням рівноваги елемента оболонки:

$$P \cdot ds_1 \cdot ds_2 - \sigma_m \cdot h \cdot ds_2 \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - [\sigma_m \cdot h \cdot ds_2 + d(\sigma_m \cdot h \cdot ds_2)] \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - 2 \cdot \sigma_\theta \cdot h \cdot ds_1 \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0.$$

В цьому рівнянні рівноваги нехтуємо нескінченно малими вищого порядку, а синуси малих кутів замінюємо самими кутами, які дорівнюють:  $d\varphi = ds_1/\rho_m$ ,  $d\theta = ds_2/\rho_\theta$ . Тоді остаточно отримуємо:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = \frac{P}{h}$$

Це співвідношення називається **рівнянням Лапласа**.

Напруження  $\sigma_\theta$  і  $\sigma_m$  для елемента  $abcd$  є головними напруженнями. Третє головне напруження, що діє по нормалі до поверхні оболонки і дорівнює тиску  $P$ , значно менше перших двох і їм нехтують (тобто вважають його рівним нулю).

Приклади визначення напружень в оболонках, які перебувають під дією внутрішнього тиску  $P$ .

### 1.1. Циліндрична оболонка

Існує два можливих варіанти: оболонка з днищами або без них.

1) Оболонка без днища (рис. 1.3).

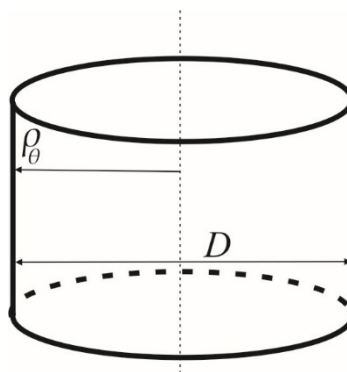


Рисунок 1.3

оскільки  $\sigma_m = 0, \rho_m \rightarrow \infty$  (радіус кривизни меридіана), то  $\sigma_m / \rho_m \rightarrow 0$ ,

$\rho_\theta = D/2$ , ( $D$  – діаметр серединної поверхні оболонки),

З рівняння Лапласа маємо:

$$\frac{2\sigma_\theta}{D} = \frac{P}{h}, \quad \text{звідси колове напруження дорівнює: } \sigma_\theta = \frac{P \cdot D}{2h}.$$

2) Оболонка з днищами (рис. 1.4).

Рівнодіюча від внутрішнього тиску, що припадає на днище дорівнює:

$$F = P \cdot \frac{\pi D^2}{4}. \quad \text{Форма днища несуттєва (плоска, конічна, сферична).}$$

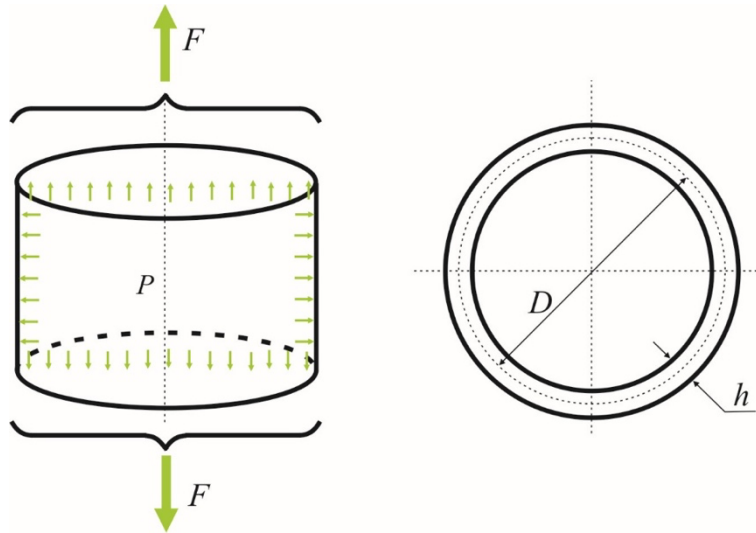


Рисунок 1.4

Площа поперечного перерізу оболонки:

$A = h \cdot \pi \cdot D$ , рівнодіюча  $F$  в напрямку осі оболонки може бути визначена

як:

$$F = \sigma_m \cdot A = \sigma_m \cdot h\pi D$$

Прирівнюючи вирази для  $F$ , отримуємо  $P \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \sigma_m \cdot h\pi D$ .

Звідси меридіональні напруження дорівнюють:  $\sigma_m = \frac{PD}{4h}$ , а колові, як показано в попередньому прикладі:  $\sigma_\theta = \frac{PD}{2h}$ .

## 1.2. Сферична оболонка (рис. 1.5)

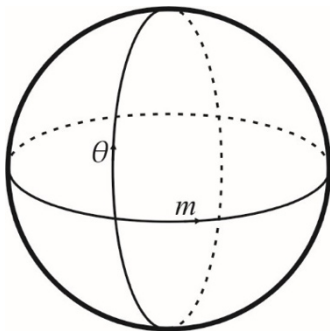


Рисунок 1.5

В цьому випадку  $\rho_m = \rho_\theta = \frac{D}{2}$ ;  $\sigma_m = \sigma_\theta$ .

З рівняння Лапласа маємо:

$$\sigma_m = \sigma_\theta = \frac{PD}{4h}$$

Залежності отримані при дії внутрішнього тиску. Для зовнішнього тиску необхідно поміняти знак  $P$ .

### 1.3. Конічна оболонка (рис. 1.6)

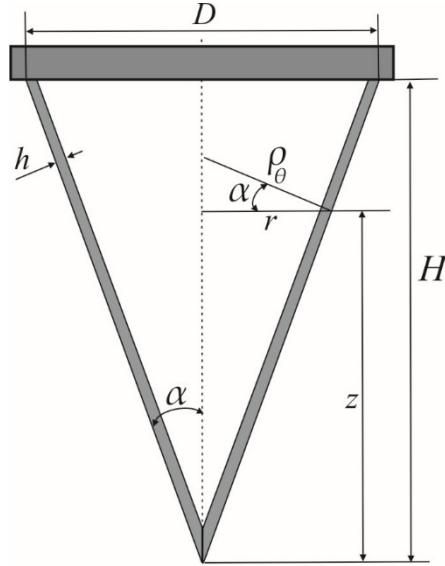


Рисунок 1.6

Оболонка знаходиться під дією внутрішнього тиску  $P$ . Тут

$$\rho_m = \infty, \quad \rho_\theta = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{z \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Записавши рівняння рівноваги (рівнодіюча  $F$  в напрямку осі оболонки дорівнює нулю), ( $\sum Z = 0$ ), отримаємо:  $\sigma_m = \frac{PDz}{4hN\cos\alpha}$  З рівняння Лапласа

отримаємо:  $\sigma_\theta = \frac{PDz}{2hN\cos\alpha}.$

Зауважимо, що в конічній оболонці, як і в циліндричній, виконується співвідношення між коловим і меридіональним напруженнями:  $\sigma_\theta = 2\sigma_m.$

## 2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ

### 2.1. Поняття про напружений стан і компоненти тензора напружень в точці

*Напружений стан в точці тіла* – це сукупність нормальних та дотичних напружень на площинах, що проходять через дану точку тіла.

Для повного аналізу напруженого стану в точці достатньо знати нормальні та дотичні напруження на трьох довільних взаємно перпендикулярних площадках.

Розглянемо нескінченно малий паралелепіпед, який вирізано в досліджуваній точці трьома парами взаємно перпендикулярних координатних площин і покажемо напруження, що діють на його гранях (рис.2.1).

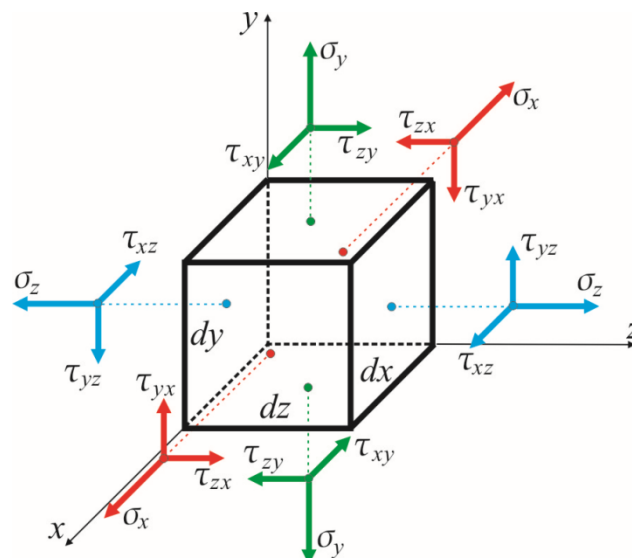


Рисунок 2.1

Нормальні напруження  $\sigma$  мають індекс осі, що співпадає з нормаллю до площадки, дотичні напруження  $\tau$  – два індекси: перший вказує на напрям осі, вздовж якої діє напруження, а другий – це індекс нормалі до площадки, на якій розташовано напруження.

Нормальні напруження  $\sigma$  вважаються позитивними, якщо вони спрямовані в бік зовнішньої нормалі до площадки, на якій вони діють.

Дотичні напруження  $\tau$  вважаються позитивними, якщо вони дають на відповідну вісь проекції такого ж знака, як і позитивні нормальні, що діють на цій площадці.

Загальна кількість компонент напружень, що описують напружений стан в точці на обраних площадках, – шість, бо відповідно закону парності дотичних напружень [2]:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy};$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Для компактного опису напруженого стану в точці вводиться математичне поняття *тензора напружень*, що задається матрицею:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

## 2.2. Приклад формування матриці тензора напружень.

Розглянемо формування матриці тензора напружень в точках  $B$  і  $C$  бруса квадратного перерізу при спільній дії розтягання та кручення (рис. 2.2).

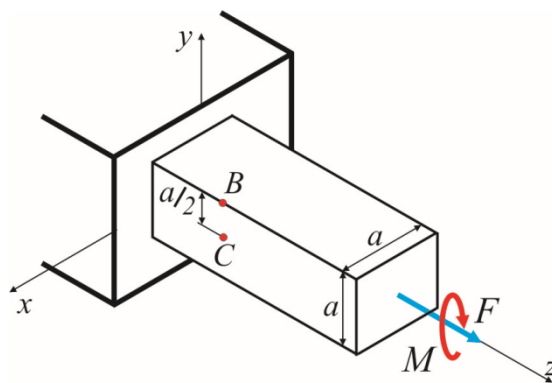


Рисунок 2.2

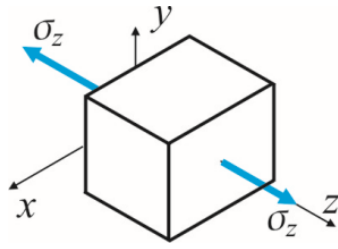


Рисунок 2.3

Компоненти напруженого стану в точці  $B$  показані на рис. 2.3.

Дотичні напруження точці  $B$  відсутні, а нормальні напруження  $\sigma_z$  обчислюються як:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{F}{a^2}.$$

Тензор напружень в точці  $B$  має наступний вигляд:

$$T_{\sigma B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{a^2} \end{pmatrix}$$

Компоненти напруженого стану в точці  $C$  показані на рис. 2.4.

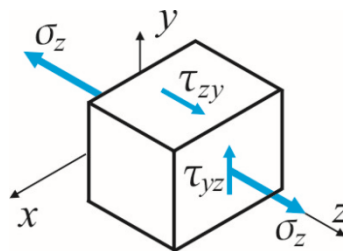


Рисунок 2.4

Дотичні напруження визначаються за формулою:

$$\tau_{yz} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M}{0,208a^3},$$

нормальні напруження

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{F}{a^2},$$

а тензор напружень для точки  $C$  виглядає наступним чином:

$$T_{\sigma C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{0,208a^3} \\ 0 & \frac{M}{0,208a^3} & \frac{F}{a^2} \end{pmatrix}.$$

### 3. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ НА ДОВІЛЬНІЙ ПОХИЛІЙ ПЛОЩАДЦІ

За відомими компонентами напруженого стану, які діють в точці на трьох взаємно перпендикулярних координатних площадках ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ) можна однозначно визначити компоненти  $p_x, p_y, p_z$  вектора повного напруження на довільній похилій площадці (рис. 3.1).

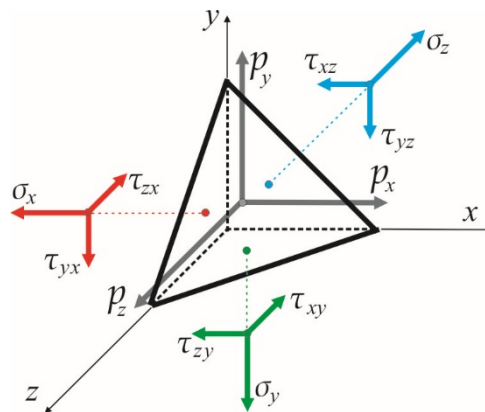


Рисунок 3.1

Орієнтація похилої площадки задана напрямними косинусами між осями координат і вектором  $v$  нормалі до площадки:

$$l = \cos(x, v),$$

$$m = \cos(y, v),$$

$$n = \cos(z, v).$$

При цьому, має місце залежність:  $l^2 + n^2 + m^2 = 1$ .

Зв'язок між площею похилої площадки  $A$  і площами координатних площадок, до яких нормальми є осі  $x, y, z$ , задається співвідношеннями:

$$A_x = A \cdot l,$$

$$A_y = A \cdot m,$$

$$A_z = A \cdot n.$$

З рівнянь рівноваги елементарного тетраедра ( див. рис. 3.1)

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0$$

отримуємо зв'язок між компонентами напруженого стану на координатних площадках і компонентами вектора повного напруження на похилій площадці [2]:

$$\begin{cases} p_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n \\ p_y = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n \\ p_z = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n \end{cases} \quad (3.1)$$

#### 4. ПОНЯТТЯ О ГОЛОВНИХ НАПРУЖЕННЯХ. КЛАСИФІКАЦІЯ ТИПІВ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ

Слід зазначити, що серед всієї множини площадок в точці можуть бути площадки, на яких відсутні дотичні напруження [2]. Такі площадки називаються *головними площадками*, а нормальні напруження, які діють на них, – *головними напруженнями*.

Нумерація головних напружень з врахуванням їх знаків (рис. 4.1) здійснюється відповідно правилу:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Осі 1, 2, 3 – головні осі.

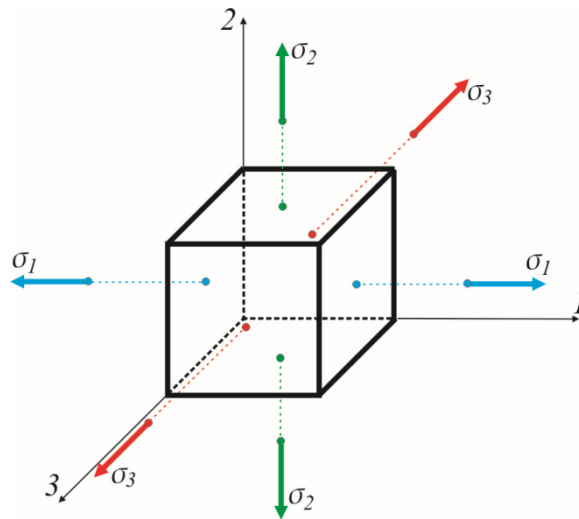


Рисунок 4.1

Розрізняють 3 типи напруженого стану в точці:

- 1) **одновісний (лінійний)** напружений стан. (Одне з головних напружень відмінне від нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , або  $\sigma_3 \neq 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ );
- 2) **двовісний (плоский)** напружений стан. (Два головних напруження відмінні від нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$ , або  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ , або  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$ );
- 3) **тривісний (об'ємний)** напружений стан. (Всі три головних напруження відмінні від нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ ).

Лінійний напружений стан називають простим напруженим станом, а плоский та об'ємний – складними напруженими станами.

Припустимо, що похила площадка (рис. 3.1) є головною площиною, тоді компоненти вектора повного напруження  $S$  на цій площадці мають вигляд:

$$\begin{aligned} p_x &= S_x = S \cdot l, \\ p_y &= S_y = S \cdot m, \\ p_z &= S_z = S \cdot n, \end{aligned}$$

а система рівнянь (3.1) дозволяє визначити напрямні косинуси  $l, m, n$ , які визначають положення цієї головної площадки з рівнянь

$$\begin{cases} (\sigma_x - S) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n = 0; \\ \tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - S) \cdot m + \tau_{yz} \cdot n = 0; \\ \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + (\sigma_z - S) \cdot n = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

При цьому виконується залежність  $l^2 + n^2 + m^2 = 1$ .

Для того, щоб система рівнянь (4.1) мала нетривіальне рішення, відмінне від нульового, необхідно, щоб визначник системи дорівнював нулю [3]:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - S & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - S & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - S \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, перейдемо до кубічного рівняння

$$S^3 - S^2 I_1 + S I_2 - I_3 = 0,$$

рішення якого дозволяє вирахувати головні напруження в точці  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Коефіцієнти  $I_1, I_2, I_3$  – інваріанти тензора напружень, тобто постійні для даної точки величини, які не залежать від орієнтації координатних площадок [2]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \\ &\quad - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2, \end{aligned}$$

За відомими головними напруженнями можна визначити максимальні дотичні напруження:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Площадка, на якій діє дотичне напруження  $\tau_{max}$ , паралельна до головного напруження  $\sigma_2$  і рівно нахилена до напрямків напружень  $\sigma_1$  та  $\sigma_3$  (рис. 4.2).

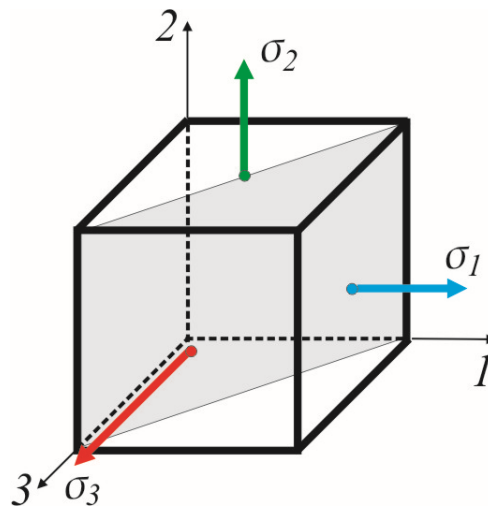


Рисунок 4.2

## 5. ЗАКОН ГУКА ПРИ ОБ'ЄМНОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ (УЗАГАЛЬНЕНИЙ ЗАКОН ГУКА)

### 5.1. Формулювання закону Гука

Для лінійного напруженого стану ( $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ), формула закону Гука має вигляд  $\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$ . Деформації  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  визначаються відомими залежностями:  $\varepsilon_2 = -\mu \cdot \varepsilon_1, \varepsilon_3 = -\mu \cdot \varepsilon_1$ , де  $E$  – модуль поздовжньої пружності,  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона.

При складному (тривісному) напруженому стані закон Гука пов'язує компоненти напруженого і деформованого стану в точці, в якій має місце лінійно-пружне деформування. Нехай відомі головні площадки (головні напрямки) і головні напруження. Напрямки головних відносних деформацій  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  співпадають з головними напрямками для напружень  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

За принципом суперпозиції

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3) = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогічні співвідношення маємо для  $\varepsilon_2$  і  $\varepsilon_3$ . В цьому випадку узагальнений закон Гука для ізотропного тіла для головних напрямків має вигляд:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{cases}$$

Для довільно орієнтованих координатних площадок маємо:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{cases}$$

До залежностей закону Гука, що пов'язують  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  та  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , слід додати залежності, що пов'язують  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  та  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  [3]:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{cases}$$

де  $G$  – модуль зсуву;  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  – кутові деформації. При цьому існує залежність між модулем пружності  $E$  та модулем зсуву  $G$  [2]:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

## 5.2. Приклад визначення компонент напруженого і деформованого стану із застосуванням узагальненого закону Гука

У масивній плиті, що не деформується, вирізано наскрізний паз завширшки і завглибшки по 1 см (рис. 5.1). В цей паз без зазору вставлений куб з дюралюмінію розміром  $1 \times 1 \times 1$  см, який навантажується силою 8 кН. Для дюралюмінію коефіцієнт Пуассона  $\mu=0,33$ , модуль пружності  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа.

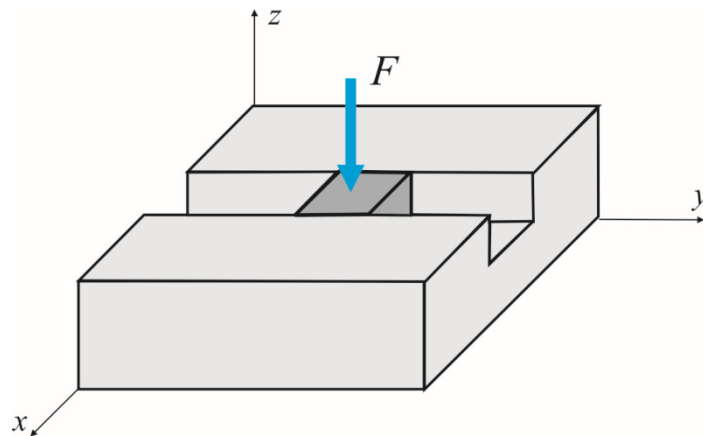


Рисунок 5.1

Оскільки процесу деформування куба вздовж осі  $y$  ніщо не заважає, а в напрямку осі  $x$  деформування практично неможливе, то  $\varepsilon_x = 0, \sigma_y = 0$ .

Нормальне напруження на площадці з нормаллю  $z$  обчислюємо за формулою:

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} = -\frac{8 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-4}} = -8 \cdot 10^7 \text{ Па} = -80 \text{ МПа}.$$

Закон Гука для об'ємного напруженого стану має вигляд:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{cases}$$

звідси можна отримати напруження  $\sigma_x$  і деформації  $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ :

$$\sigma_x = \mu(\sigma_y + \sigma_z) = 0,33(-80) = -26,4\text{МПа},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[-\mu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{7 \cdot 10^4}[-0,33 \cdot (-80 - 26,4)] = 5 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu\sigma_x] = \frac{1}{7 \cdot 10^4}[-80 - 0,33(-26,4)] = -10,2 \cdot 10^{-4}.$$

Для формування рішення треба змінити індекси для головних напружень та головних деформацій:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_y = 0 & & \varepsilon_1 = \varepsilon_y = 5 \cdot 10^{-4}; \\ \sigma_2 = \sigma_x = -26,4\text{МПа}, & & \varepsilon_2 = \varepsilon_x = 0; \\ \sigma_3 = \sigma_z = -80\text{МПа}, & & \varepsilon_3 = \varepsilon_z = -10,2 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

## 6. ПИТОМА ПОТЕНЦІЙНА ЕНЕРГІЯ ПРУЖНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ В ТОЧЦІ

*Потенційна енергія деформації* – це енергія, що накопичується в тілі при його пружному деформуванні. Наприклад, в результаті розтягання консольного стержня силою  $F$  процес пружного деформування здійснюється в заштрихованій області діаграми розтягання, (рис. 6.1, а, б).

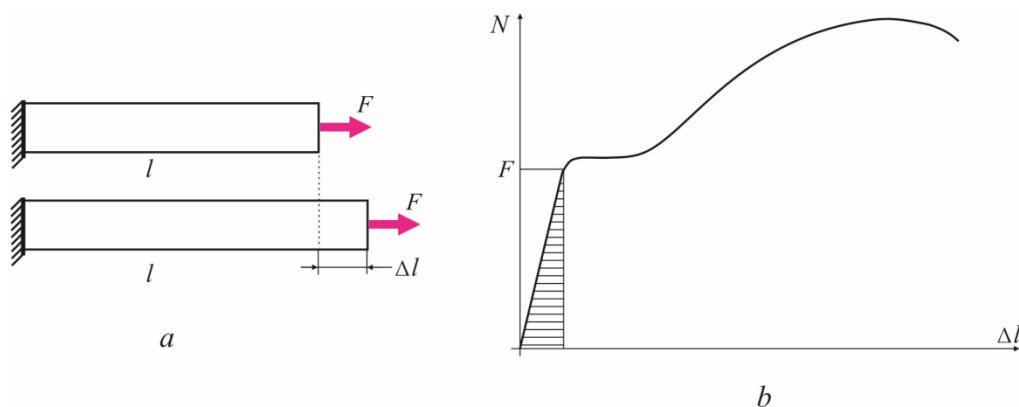


Рисунок 6.1

Потенційна енергія деформації чисельно дорівнює роботі внутрішніх зусиль, яка витрачена в процесі пружного деформування тіла (заштрихована область діаграми):

$$U_n = \frac{1}{2} N \cdot \Delta l = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$$

Підстановка залежності [2]

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{Fl}{EA}$$

дозволяє отримати:

$$U_n = \frac{1}{2} F \cdot \frac{Fl}{EA} = \frac{1}{2} \frac{F^2 \cdot l}{EA}$$

Питома потенційна енергія, тобто енергія, що припадає на одиницю об'єму, обчислюється як:

$$u = \frac{U_n}{V} = \frac{1}{2} \frac{F^2 \cdot l}{EA} \cdot \frac{1}{A \cdot l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{F}{AE} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon.$$

У випадку об'ємного напруженого стану питома потенційна енергія згідно принципу суперпозиції може бути визначена наступним чином:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3 = \\ &= \frac{1}{2E} [\sigma_1(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) + \sigma_2(\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)) + \sigma_3(\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1))] = \\ &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \end{aligned}$$

При деформуванні нескінченно малого елемента (рис.4.1) змінюється не тільки його об'єм, але й форма. Тому питому потенційну енергію деформування можна представити у вигляді суми двох складових [2]:

$$u = u_v + u_\phi,$$

де  $u_v$  – питома потенційна енергія зміни об'єму

$$u_v = \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2,$$

$u_\phi$  – питома потенційна енергія формозміни

$$u_\phi = \frac{1 + \mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1).$$

## 7. ГІПОТЕЗИ ГРАНИЧНИХ НАПРУЖЕНИХ СТАНІВ (ГІПОТЕЗИ МІЦНОСТІ)

Найважливішим завданням інженерного розрахунку є оцінювання працездатності конструкції при трьох можливих варіантах стану матеріалу в процесі деформування: пружний стан, пластичний стан і руйнування.

Поява пластичного стану при одновісному напруженому стані (розтягання – стискання) характеризується тим, що діючі напруження сягають границі текучості  $\sigma_T$ , мить руйнування – тим, що напруження сягають границі міцності  $\sigma_M$  (тимчасового опору  $\sigma_{T.0}$ ). Зростання діючого напруження до величини  $\sigma_T$  або  $\sigma_M$  при одновісному напруженому стані визначається як вичерпання відповідного ресурсу по зростанню напруження, тому напружені стани, що відповідають умовам  $\sigma = \sigma_T$  або  $\sigma = \sigma_M$  є неприпустимими і об'єднуються назвою *граничного стану*.

При одновісному напруженому стані експериментально визначаються значення граничних напружень, що відповідають початку руйнування ( $\sigma_M$ ) або появи неприпустимих залишкових пластичних деформацій ( $\sigma_T$ ).

Безпечними є напружені стани, для яких виконуються умови:  $\sigma < \sigma_T$  (за критерієм накопичення залишкових деформацій) або  $\sigma < \sigma_M$  (за критерієм руйнування).

Для складного напруженого стану експериментальний шлях оцінювання досягнення граничного стану в точці (текучості або руйнування) практично важко реалізувати через технічні труднощі, що виникають при проведенні таких іспитів і значного їх обсягу.

Інший шлях оцінювання досягнення граничного стану – це введення гіпотез про переважний вплив на міцність (текучість) матеріалу того чи іншого фактора, при цьому вважають, що граничний стан матеріалу при будь-якому напруженому стані настане тільки тоді, коли величина цього фактора досягне певного граничного значення.

Оскільки напружений стан може мати нескінченну кількість комбінацій  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , вводиться поняття еквівалентного одновісного напруженого стану (еквівалентних напружень). При цьому застосування гіпотези для оцінки появи граничного стану дозволяє математично формалізувати перехід від складного напруженого стану до *еквівалентного одновісного напруженого стану* (одновісного розтягання).

*Еквівалентне напруження*  $\sigma_{екв}$  – це таке розтяжне напруження, яке слід створити в матеріалі, щоб цей напружений стан був рівнонебезпечним до вихідного складного напруженого стану.

*Коефіцієнт запасу* при складному напруженому стані - це число, яке показує, у скільки разів слід одночасно збільшити всі компоненти напруженого стану, щоб він став граничним.

Наразі відомо кілька таких, що хронологічно з'явилися одна за одною, гіпотез граничних напружених станів, які називаються гіпотезами міцності (граничного стану).

### **7.1. Гіпотеза найбільших нормальних напружень. (Перша гіпотеза міцності)**

Згідно цієї гіпотезі, яку висунув Галілей (XVII ст.), переважний вплив на міцність конструкції має величина найбільшого нормального напруження  $\sigma_1$  (або  $\sigma_3$ ), а два інших головних напруження не враховуються.

Експериментальна перевірка показала, що ця гіпотеза міцності є непридатною для більшості матеріалів і напружених станів, і дає задовільні

результати лише для вельми крихких матеріалів (камінь, цегла). Вважається застарілою і не використовується.

## **7.2. Гіпотеза найбільших лінійних деформацій (Друга гіпотеза міцності)**

Згідно цієї гіпотези, запропонованої Маріоттом у 1682 р., за критерій настання граничного стану приймається найбільша за абсолютною величиною лінійна деформація.

Експериментальна перевірка цієї гіпотези також показала, що вона є неприйнятною для більшості матеріалів і дає задовільні результати лише для крихких матеріалів.

Вважається застарілою і не використовується.

## **7.3. Гіпотеза найбільших дотичних напружень. (Третя гіпотеза міцності)**

Відповідно до третьої гіпотези міцності, запропонованої Треска та Сен-Венаном, за критерій граничного стану у вигляді настання текучості приймається величина найбільшого дотичного напруження. Вважається, що поява текучості в загальному випадку напруженого стану має місце тоді, коли найбільше дотичне напруження  $\tau_{max}$  досягає свого граничного значення  $\tau_T$ , яке визначається в момент досягнення текучості при простому розтяганні.

Умова міцності в цьому випадку має вигляд:

$$\tau_{max} \leq [\tau] = \tau_T / n_T.$$

Оскільки  $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ ,  $\tau_T = \frac{1}{2}\sigma_T$ , то умову міцності можна виразити через головні напруження:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad [\sigma] = \sigma_T / n_T.$$

Еквівалентне напруження за третьою гіпотезою має вигляд:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3,$$

а умова міцності:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Третя гіпотеза міцності, взагалі, при плоскому стані добре підтверджується експериментами для пластичних матеріалів, які однаково працюють при розтяганні та стисканні.

Недолік третьої гіпотези полягає в тому, що вона не враховує середнього за величиною головного напруження  $\sigma_2$ , яке може бути значним і чинити вплив на граничний стан матеріалу.

#### **7.4. Гіпотеза питомої потенційної енергії формозміни. (Четверта гіпотеза міцності)**

Автори цієї гіпотези – М. Хубер, Р. Мізес, Г. Генке – в якості критерію граничного стану (втрати міцності) запропонували використовувати величину питомої потенційної енергії формозміни.

Припускається, що граничний стан (текучість) настає тоді, коли питома потенційна енергія формозміни досягає свого граничного значення. Це значення можна визначити при простому розтяганні в момент початку текучості.

Умова настання текучості:  $u_\phi = (u_\phi)_T$  Питома потенційна енергія  $u_\phi$  формозміни при складному напруженому стані:

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1).$$

При одновісному напруженому стані (розтяганні) в момент настання текучості ( $\sigma_1 = \sigma_m$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) маємо:  $(u_\phi)_m = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_T^2$ . Отже, умову виникнення текучості можна записати у вигляді:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \sigma_T.$$

Тоді еквівалентне напруження вираховується по залежності:

$$\begin{aligned}\sigma_{екв}^{IV} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]},\end{aligned}$$

а умова міцності за четвертою гіпотезою міцності має вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_{екв}^{IV} \leq [\sigma] &= \sigma_T/n_T, \quad \text{або} \\ \sigma_{екв}^{IV} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]\end{aligned}$$

Експерименти при складному напруженому стані добре підтверджують четверту гіпотезу для пластичних матеріалів, які однаково працюють на розтягання та стискання.

### 7.5. Гіпотеза міцності Мора. (П'ята гіпотеза міцності)

Ця гіпотеза була запропонована Мором на початку ХХ ст. і ґрунтується на припущенні, що руйнування матеріалів в загальному випадку напруженого стану залежить, головним чином, від величини та знаку найбільшого  $\sigma_1$  і найменшого  $\sigma_3$  головних напружень, а середнє за величиною головне напруження  $\sigma_2$  лише несуттєво впливає на міцність. Еквівалентне напруження за гіпотезою Мора обчислюється так:

$$\sigma_{екв}^V = \sigma_1 - m\sigma_3 \leq \frac{\sigma_M^+}{n} = [\sigma],$$

де  $m = \sigma_M^+ / \sigma_M^-$ ,  $\sigma_M^+$ ,  $\sigma_M^-$  – межа міцності матеріалу на розтягання та стискання відповідно,  $n$  – коефіцієнт запасу міцності.

Для пластичних матеріалів з однаковим опором розтягання та стискання ( $\sigma_M^+ = \sigma_M^-$ ,  $m = 1$ ) розрахункова формула збігається з формулою, отриманою за третьою теорією міцності. Гіпотеза придатна як для крихких, так і для пластичних матеріалів.

*Для практичних розрахунків слід використовувати:*

а) четверту гіпотезу (або третю) для оцінки настання текучості – для пластичних матеріалів, які однаково опираються розтягання та стискання;

б) гіпотезу Мора – для оцінки настання руйнування чи текучості матеріалів, що по-різному чинять опір розтягання та стискання (як правило, крихких).

Перша і друга гіпотези міцності дають значні похибки і в даний час не застосовуються.

## **8. РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ**

При вивченні розділів «Основи напруженого стану в точці» та «Основи теорії безмоментних оболонок» в курсі «Опір матеріалів» ставиться мета навчити студентів проводити аналіз напружено-деформованого стану в небезпечних точках і на цій основі розв'язувати задачі оцінки міцності, підбору матеріалів і знаходження геометричних параметрів елементів конструкцій.

Згідно з вимогами курсу «Опір матеріалів» студентам пропонується виконати розрахунково-проектувальне завдання (РПЗ) за темами: «Основи напруженого стану в точці» та «Основи теорії безмоментних оболонок». При виконанні цього завдання, студент вчиться визначати положення небезпечних точок, знаходити параметри напружено-деформованого стану (НДС) в них, оцінювати тип напруженого стану в точці, знаходити головні площадки і головні напруження,

обирати і застосовувати одну з гіпотез міцності. Застосовуючи навички аналізу НДС в точці, студентом проводиться оцінка міцності циліндричної оболонки.

### 8.1. Склад розрахунково-проектувального завдання

Розрахунково-проектувальне завдання складається з трьох етапів:

1. Рішення двох задач, оформлення їх відповідно до вимог кафедри "Теоретичної механіки та опору матеріалів".
2. Тестування за тематикою завдання.
3. Захист роботи, який полягає в бесіді студента з викладачем по темі РПЗ і відповідях на контрольні питання.

**Мета завдання** – проведення аналізу НДС в точці і оцінка міцності циліндричної оболонки при складному навантаженні.

#### **РПЗ складається з двох задач:**

1. *Аналіз НДС в точці.* За заданими компонентами напруженого стану в точці необхідно знайти величини головних напружень і головних деформацій, обчислити еквівалентні напруження і підібрати матеріал конструкції [2].

Варіанти вихідних даних наведені в додатку 1.

2. *Оцінка міцності циліндричної оболонки.* Для циліндричної оболонки з днищами, що мають діаметр серединної поверхні  $D$  і товщину стінки  $h$ , яка навантажена внутрішнім або зовнішнім тиском  $P$ , поздовжньою силою  $F$ , крутним ( $M_K$ ) і згинальним ( $M_{3Г}$ ) моментами потрібно:

- побудувати розрахункову схему оболонки, відповідно вихідним даним,
- знайти внутрішні зусилля в небезпечному перерізі,
- визначити максимальні напруження в небезпечних точках перерізу
- обчислити еквівалентні напруження і визначити коефіцієнт запасу.

Чисельні дані до задачі наведені в додатку 2.

## 8.2. Порядок виконання завдання

**Задача 1. Провести аналіз напруженого стану в точці, дотримуючись плану.**

1. Виписати для даного варіанту чисельні дані.
2. Подати напружений стан у вигляді тензора напружень та графічно.
3. Обчислити інваріанти тензора напружень.
4. Скласти і вирішити характеристичне рівняння тензора напружень, знайти головні напруження, перевірити рішення за інваріантами.
5. Обчислити еквівалентні напруження.
6. Підібрати матеріал при заданому коефіцієнті запасу з текучості ( $n = 1,5$ ).
7. Знайти величини головних деформацій.

**Задача 2. Оцінити міцність циліндричної оболонки.**

1. Виписати для заданого варіанта чисельні дані.
2. Побудувати графічно розрахункову схему оболонки.
3. Визначити геометричні характеристики кільцевого перерізу оболонки.
4. Визначити компоненти напруженого стану в небезпечному перерізі.
5. Провести аналіз напруженого стану в небезпечних точках.
6. Обчислити головні напруження.
7. Визначити еквівалентні напруження.
8. Знайти коефіцієнти запасу міцності.
9. Визначити небезпечну точку.

### 8.3. Приклади розв'язання задач

#### 8.3.1. Зразок розв'язання задачі 1

Дано:

$$\sigma_x = -100 \text{ МПа}, \quad \sigma_y = -150 \text{ МПа}, \quad \sigma_z = 30 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = -107,2 \text{ МПа}, \quad n_T = 1,5,$$

**Необхідно:** провести аналіз напружено-деформованого стану в точці, підібрати матеріал та проаналізувати деформований стан.

**Рішення:**

1. Представляємо заданий напружений стан (рис. 8.1) в вигляді тензора напружень:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & -107,2 \\ 0 & -107,2 & 30 \end{pmatrix}$$

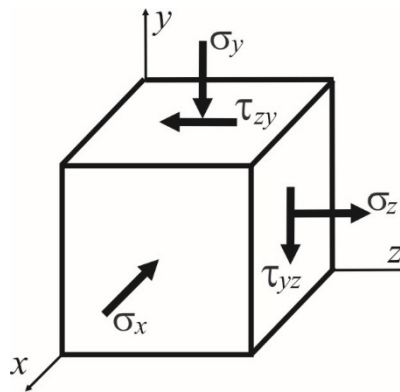


Рисунок 8.1

2. Обчислюємо інваріанти тензора напружень:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -100 - 150 + 30 = -220 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= (-100)(-150) + (-150)30 + 30(-100) - (-107,2)^2 \approx \\ &\approx 3,992 \cdot 10^3 \text{ (МПа)}^2; \end{aligned}$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 =$$

$$= (-100)(-150)30 - (-100)(-107,2)^2 = 15,99 \cdot 10^5 \text{ (МПа)}^3.$$

3. Складаємо та розв'язуємо характеристичне рівняння тензора напружень, перевіряємо рішення за інваріантами.

Аналізуючи вихідний напружений стан (рис.8.1) можна побачити, що площадка  $x$  є головною площадкою. Тоді характеристичне рівняння (кубічне) приймає вигляд:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - S & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y - S & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z - S \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{або } (\sigma_x - S)[S^2 - (\sigma_z + \sigma_y)S + (\sigma_z \sigma_y - \tau_{zy}^2)] = 0.$$

Тоді корні рівняння будуть:

$$S_1 = \sigma_x = -100 \text{ МПа,}$$

$$S_{2,3} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_y + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_y + \sigma_z)^2 - 4(\sigma_y \sigma_z - \tau_{zy}^2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ (-150 + 30) \pm \sqrt{(-150 + 30)^2 - 4((-150)30 - (-107,2)^2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (-120 \pm 280).$$

$$S_2 = 80 \text{ МПа; } S_3 = -200 \text{ МПа.}$$

Індекси головних напружень (згідно з умовою  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) мають вигляд:

$$\sigma_1 = S_2 = 80 \text{ МПа; } \sigma_2 = S_1 = -100 \text{ МПа; } \sigma_3 = S_3 = -200 \text{ МПа.}$$

Обчислимо інваріанти тензора напружень через головні напруження:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 80 - 100 - 200 = -220 \text{ МПа.}$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = 80(-100) + (-100)(-200) + (-200)80 =$$

$$= 4 \cdot 10^3 \text{ (МПа}^2\text{)}.$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 80(-100)(-200) = 16 \cdot 10^5 \text{ (МПа)}^3.$$

Величини інваріантів добре збігаються з розрахованими по початковому напруженому стану:

$$220 = 220; \quad 3,99 \cdot 10^3 \cong 4 \cdot 10^3; \quad 15,99 \cdot 10^5 \cong 16 \cdot 10^5$$

Таким чином, головні напруження знайдені правильно.

4. Знайдемо еквівалентні напруження.

Так, в точці, що розглядається, має місце складний напружений стан. Перевірку міцності та визначення коефіцієнту запасу по текучості треба вести по еквівалентним напруженням, використовуючи гіпотези граничних станів:

а) по гіпотезі найбільших дотичних напружень:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 80 - (-200) = 280 \text{ МПа.}$$

б) по гіпотезі питомої потенціальної енергії формозмінювання:

$$\begin{aligned} \sigma_{екв}^{IV} &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} [(80 - (-100))^2 + ((-100) - (-200))^2 + ((-200) - 80)^2]} = 246 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

5. Обираємо матеріал по заданому коефіцієнту запасу текучості.

Коефіцієнт запасу по текучості  $n_T = 1,5$ .

З умови міцності витікає:  $\sigma_T \geq \sigma_{екв} \cdot n_T$ .

Використовуючи гіпотезу найбільших дотичних напружень, отримаємо  $\sigma_T = 280 \cdot 1,5 = 420$  МПа. Обираємо сталь (дані з таблиці у закінченні додатку 1) Ст 60 ( $\sigma_T = 420$  МПа,  $E = 2,04 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,28$ ).

Використовуючи гіпотезу питомої потенціальної енергії формозмінювання, отримаємо  $\sigma_T = 246 \cdot 1,5 = 369$  МПа. Обираємо сталь (дані з таблиці у закінченні додатку 1) Ст 50 ( $\sigma_T = 380$  МПа,  $E = 2,16 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,35$ ).

6. Знаходимо величини головних деформацій.

Узагальнений закон Гука для ізотропного тіла для головних напрямків має вигляд:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{cases}$$

Для Ст 60 знаходимо чисельні значення головних деформацій:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{2,04 \cdot 10^5} [80 - 0,28(-100 - 200)] = 8,04 \cdot 10^{-4}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2,04 \cdot 10^5} [-100 - 0,28(80 - 200)] = -3,26 \cdot 10^{-4}, \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{2,04 \cdot 10^5} [-200 - 0,28(80 - 100)] = -9,53 \cdot 10^{-4}. \end{cases}$$

Для Ст 50 знаходимо чисельні значення головних деформацій:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{2,16 \cdot 10^5} [80 - 0,35(-100 - 200)] = 8,56 \cdot 10^{-4}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2,16 \cdot 10^5} [-100 - 0,35(80 - 200)] = -2,69 \cdot 10^{-4}, \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{2,16 \cdot 10^5} [-200 - 0,35(80 - 100)] = -8,93 \cdot 10^{-4}. \end{cases}$$

Знаходимо чисельні значення деформації, яка орієнтовно відповідає границі текучості:

$$\text{Ст 60 } (\sigma_T = 420 \text{ МПа}), \varepsilon = \sigma_T / E = 420 / 2 \cdot 10^5 = 21 \cdot 10^{-4}.$$

$$\text{Ст 50 } (\sigma_T = 380 \text{ МПа}), \varepsilon = \sigma_T / E = 380 / 2 \cdot 10^5 = 19 \cdot 10^{-4}.$$

Результати розрахунків показують, що отримані значення деформацій для обох матеріалів достатню близькі (різниця в значеннях 6 – 15%) і будуть пружними, бо вони менші ніж деформації, які відповідають границі текучості ( $\varepsilon = 21 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon = 19 \cdot 10^{-4}$ ).

### 8.3.2. Зразок виконання задачі 2 (варіант №1)

Дано:

Зовнішня сила  $F = 300$  кН.

Зовнішній згинальний момент  $M_{зг} = -50$  кНм.

Зовнішній крутний момент  $M_{кр} = -30$  кНм.

Внутрішній тиск  $P = 3$  МПа.

Діаметр серединної поверхні оболонки  $D = 500$  мм.

Товщина оболонки  $h = 7$  мм.

Границя текучості при розтяганні і стисканні:

$\sigma_M^+ = 350$  МПа;  $\sigma_M^- = 400$  МПа.

Необхідно:

Визначити коефіцієнт запасу з текучості для циліндричної оболонки.

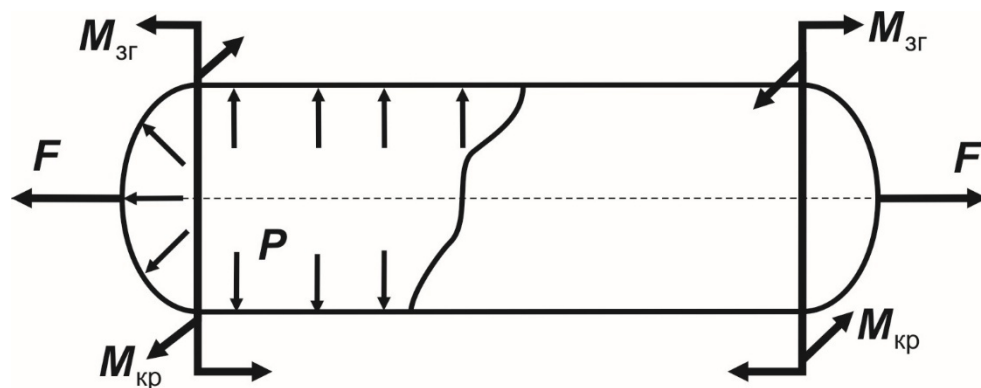


Рисунок 8.2

Рішення:

1. Будуємо розрахункову схему оболонки, згідно з правилами знаків зовнішніх силових факторів для простих видів деформування (рис. 8.2).

**Поздовжня сила  $F$**  (зовнішня або внутрішня) вважається додатною, якщо вона утворює деформації розтягання і направлена «від перерізу». Поздовжня сила вважається від'ємною, якщо вона утворює деформації стискання і направлена «до перерізу».

**Внутрішній крутний момент  $M_k(z)$**  вважається додатним, якщо при спостереганні з перерізу відсіченої частини (з боку координати  $z$ ) він намагається обертати розглянуту область (відсічену частину) за годинниковою стрілкою. (При цьому, **зовнішній крутний момент  $M_{кр}$** , прикладений до відсіченої частини, направлений проти годинникової стрілки).

**Згинальний момент  $M_{зг}$**  вважається позитивним (додатним), якщо при закріпленні балки в перерізі, відсічена частина згинається опуклістю вниз (стиснуте волокно вгорі, розтягнуте вниз), та негативним (від'ємним) якщо навпаки.

**Внутрішній тиск  $P$**  при позитивному значенні імітує тиск зсередини оболонки. При негативному значенні може означати створення вакууму всередині оболонки або зовнішній тиск на поверхню оболонки.

2. Визначаємо геометричні характеристики кільцевого перерізу оболонки:

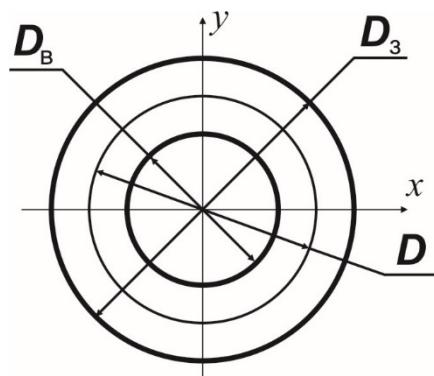


Рисунок 8.3

Внутрішній діаметр (рис. 8.3) кільця:

$$D_B = D - h = 500 - 7 = 493 \text{ мм} = 0,493 \text{ м.}$$

Зовнішній діаметр кільця:

$$D_3 = D + h = 500 + 7 = 507 \text{ мм} = 0,507 \text{ м.}$$

Коефіцієнт співвідношення діаметрів:

$$c = \frac{D_B}{D_3} = \frac{493}{507} = 0,972.$$

Площа поперечного перерізу:

$$A = \frac{\pi D_3^2}{4} (1 - c^2) = \frac{\pi \cdot 0,507^2}{4} (1 - 0,972^2) = 1,114 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

Осьовий момент опору:

$$W_x = \frac{\pi D_3^3}{32} (1 - c^4) = \frac{\pi \cdot 0,507^3}{32} (1 - 0,972^4) = 1,373 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Полярний момент опору:

$$W_p = \frac{\pi D_3^3}{16} (1 - c^4) = 2 \cdot W_x = 2,746 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

3. Визначаємо компоненти напруженого стану в небезпечному перерізі.

Спочатку визначимо внутрішні силові фактори:

- $\sum F_z = 0; N(z) = F - const;$
- $\sum M_x = 0; M_x(z) = -M_{зг} - const;$
- $\sum M_z = 0; M_k(z) = -M_{кр} - const.$

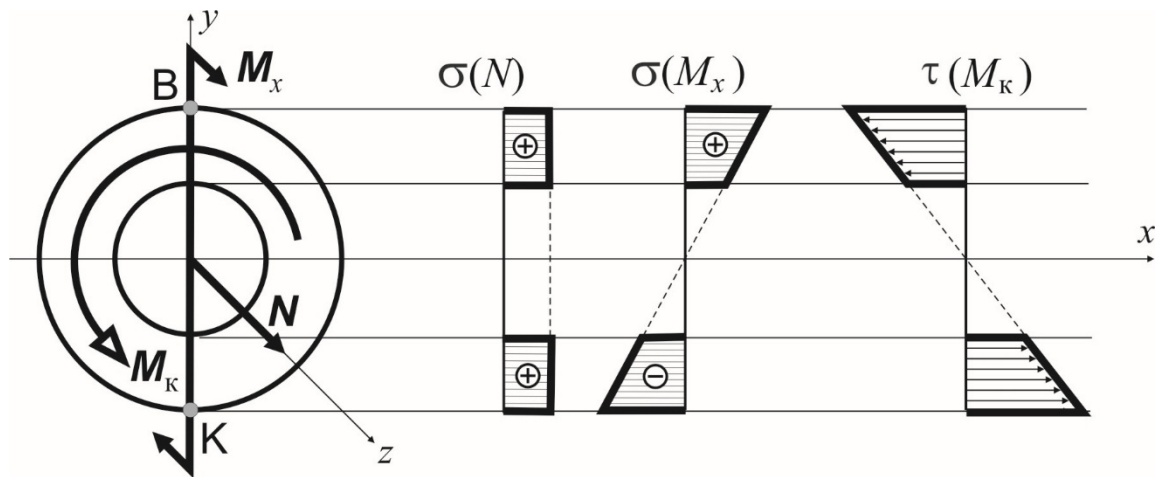


Рисунок 8.4

Нормальні напруження від дії поздовжньої сили:

$$\sigma(N) = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{300 \cdot 10^{-3}}{1,114 \cdot 10^{-2}} = 26,9 \text{ МПа.}$$

Максимальні нормальні напруження від згинального моменту:

$$\sigma_{max}(M_x) = \frac{M_x}{W_x} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{1,373 \cdot 10^{-3}} = 36,4 \text{ МПа.}$$

Максимальні дотичні напруження від крутного моменту:

$$\tau_{max}(M_k) = \frac{M_k}{W_p} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{2,746 \cdot 10^{-3}} = 10,9 \text{ МПа.}$$

Внутрішній тиск в оболонці приводить до появи меридіональних  $\sigma_m$  та окружних  $\sigma_\theta$  напружень:

$$\sigma_m = \frac{PD}{4h} = \frac{3 \cdot 500}{4 \cdot 7} = 53,6 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{PD}{2h} = \frac{3 \cdot 500}{2 \cdot 7} = 107,2 \text{ МПа};$$

4. Проаналізуємо напруженій стан в небезпечних точках перерізу.

Небезпечними точками в перерізі будуть точки  $K$  та  $B$ .

На рис. 8.5 зображена **небезпечна точка B** і напруження, що діють на її гранях.

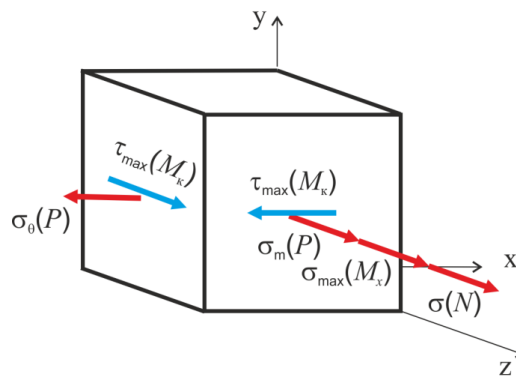


Рисунок 8.5

Визначимо компоненти напруженого стану:

$$\sigma_x = \sigma_{\theta}(P) = 107,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y = 0;$$

$$\sigma_z = \sigma_m(P) + \sigma_{max}(M_x) + \sigma(N) = 53,6 + 36,4 + 26,9 = 116,9 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\tau_{max}(M_k) = -10,9 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0.$$

Тензор напружень у точці  $B$ :

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107,2 & 0 & -10,9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10,9 & 0 & 116,9 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що площадка  $y$  буде головною, а характеристичне рівняння має вигляд:

$$(0 - S)[(\sigma_x - S)(\sigma_z - S) - \tau_{zx}^2] = 0, \text{ або}$$
$$(0 - S)[S^2 - S(\sigma_x + \sigma_z) + (\sigma_x \sigma_z - \tau_{zx}^2)] = 0.$$

Коренями цього рівняння є:

$$S_1 = 0; \quad S_2 = 100 \text{ МПа}; \quad S_3 = 124 \text{ МПа}.$$

Враховуючи правило  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , отримаємо:

$$\sigma_1 = 124 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 100 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = 0.$$

Обчислюємо еквівалентне напруження по теорії Мора ( $\sigma_M^- \neq \sigma_M^+$ ):

$$\sigma_{\text{екв}}^V = \sigma_1 - m\sigma_3, \text{ де } m = \sigma_M^+ / \sigma_M^- = 350 / 400 = 0,875, \text{ тоді,}$$
$$\sigma_{\text{екв}}^V = \sigma_1 - m\sigma_3 = 124 - 0,875 \cdot 0 = 124 \text{ МПа}.$$

Коефіцієнт запасу міцності:

$$n = \sigma_M^+ / \sigma_{\text{екв}}^V = 350 / 124 = 2,82$$

На рис. 8.6 зображена **небезпечна точка K** та напруження, що діють на її гранях.

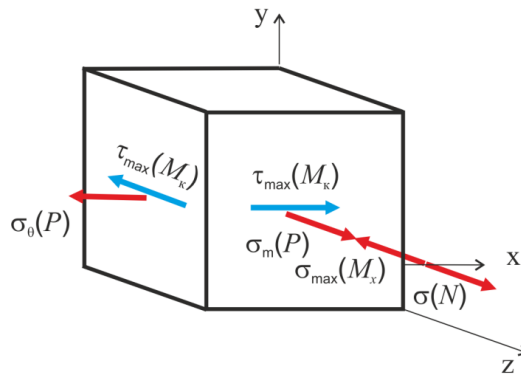


Рисунок 8.6

Визначимо компоненти напруженого стану:

$$\sigma_x = \sigma_\theta(P) = 107,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y = 0;$$

$$\sigma_z = \sigma_m(P) - \sigma_{max}(M_x) + \sigma(N) = 53,6 - 36,4 + 26,9 = 44,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{max}(M_k) = 10,9 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0.$$

Тензор напружень у точці  $K$ :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107,2 & 0 & 10,9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10,9 & 0 & 44,1 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що площадка  $y$  буде головною, а характеристичне рівняння має вигляд:

$$(0 - S)[(\sigma_x - S)(\sigma_z - S) - \tau_{zx}^2] = 0, \text{ або}$$

$$(0 - S)[S^2 - S(\sigma_x + \sigma_z) + (\sigma_x \sigma_z - \tau_{zx}^2)] = 0.$$

Коренями цього рівняння є:

$$S_1 = 0; \quad S_2 = 42 \text{ МПа}; \quad S_3 = 109 \text{ МПа}.$$

Враховуючи правило  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , отримаємо:

$$\sigma_1 = 109 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 42 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = 0.$$

Обчислюємо еквівалентне напруження по теорії Мора ( $\sigma_M^- \neq \sigma_M^+$ ):

$$\sigma_{\text{екв}}^V = \sigma_1 - m\sigma_3, \text{ де } m = \sigma_M^+ / \sigma_M^- = 350 / 400 = 0,875, \text{ тоді,}$$

$$\sigma_{\text{екв}}^V = \sigma_1 - m\sigma_3 = 109 - 0,875 \cdot 0 = 109 \text{ МПа.}$$

Коефіцієнт запасу міцності:

$$n = \sigma_M^+ / \sigma_{\text{екв}}^V = 350 / 109 = 3,21.$$

Найбільш небезпечною точкою оболонки є точка *B* з коефіцієнтом запасу  $n=2,82$ .

### 8.3.3. Зразок виконання задачі 2 (варіант №2)

**Дано:**

Зовнішня сила  $F = -2$  МН.

Зовнішній згинальний момент  $M_{зг} = 5$  МНм.

Зовнішній крутний момент  $M_{кр} = 1,5$  МНм.

Внутрішній тиск  $P = -3$  МПа.

Діаметр середньої поверхні оболонки  $D = 1500$  мм.

Товщина оболонки  $h = 20$  мм.

Границя міцності при розтяганні і стисканні:

$\sigma_M^+ = 300$  МПа;  $\sigma_M^- = 400$  МПа.

**Необхідно:**

Визначити коефіцієнт запасу з текучості для циліндричної оболонки.

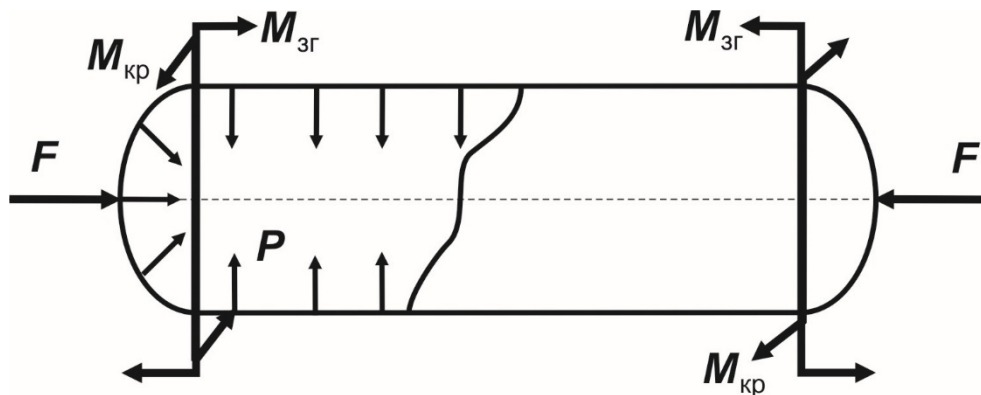


Рисунок 8.7

**Рішення:**

1. Будуємо розрахункову схему оболонки, згідно з правилами знаків зовнішніх силових факторів для простих видів деформування (рис. 8.7).

**Поздовжня сила  $F$**  (зовнішня або внутрішня) вважається додатною, якщо вона утворює деформації розтягання і направлена «від перерізу». Поздовжня сила

вважається від'ємною, якщо вона утворює деформації стискання і направлена «до перерізу».

**Внутрішній крутний момент  $M_k(z)$**  вважається додатним, якщо при спостережанні з перерізу відсіченої частини (з боку координати  $z$ ) він намагається обертати розглянуту область (відсічену частину) за годинниковою стрілкою. (При цьому, **зовнішній крутний момент  $M_{кр}$** , прикладений до відсіченої частини, направлений проти годинникової стрілки).

**Згинальний момент  $M_{зг}$**  вважається позитивним (додатним), якщо при закріпленні балки в перерізі, відсічена частина згинається опуклістю вниз (стиснуте волокно вгорі, розтягнуте внизу), та негативним (від'ємним) якщо навпаки.

**Внутрішній тиск  $P$**  при позитивному значенні імітує тиск зсередини оболонки. При негативному значенні може означати створення вакууму всередині оболонки або зовнішній тиск на поверхню оболонки.

2. Визначаємо геометричні характеристики кільцевого перерізу оболонки:

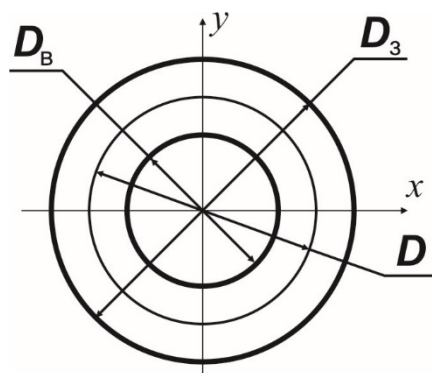


Рисунок 8.8

Внутрішній діаметр (рис. 8.8) кільця:

$$D_g = D - h = 1500 - 20 = 1480 \text{ мм} = 1,480 \text{ м.}$$

Зовнішній діаметр кільця:

$$D_3 = D + h = 1500 + 20 = 1520 \text{ мм} = 1,520 \text{ м.}$$

Коефіцієнт співвідношення діаметрів:

$$c = \frac{D_g}{D_3} = \frac{1480}{1520} \approx 0,974.$$

Площа поперечного перерізу:

$$A = \frac{\pi D_3^2}{4} (1 - c^2) = \frac{\pi \cdot 1,520^2}{4} (1 - 0,974^2) = 93,13 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Осьовий момент опору:

$$W_x = \frac{\pi D_3^3}{32} (1 - c^4) = \frac{\pi \cdot 1,520^3}{32} (1 - 0,974^4) = 34,48 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Полярний момент опору:

$$W_p = \frac{\pi D_3^3}{16} (1 - c^4) = 2 \cdot W_x = 68,96 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

3. Визначаємо компоненти напруженого стану в небезпечному перерізі.

Спочатку визначимо внутрішні силові фактори:

- $\sum F_z = 0; N(z) = -F - const;$
- $\sum M_x = 0; M_x(z) = M_{3z} - const;$
- $\sum M_z = 0; M_\kappa(z) = M_{\kappa p} - const.$

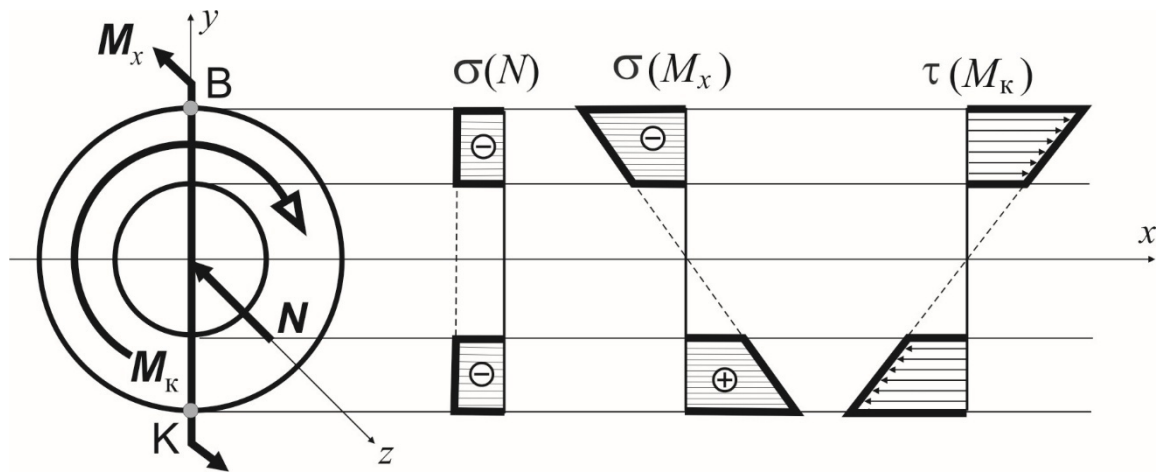


Рисунок 8.9

Нормальні напруження від дії поздовжньої сили:

$$\sigma(N) = -\frac{N}{A} = -\frac{F}{A} = -\frac{2}{93,13 \cdot 10^{-3}} = -21,5 \text{ МПа.}$$

Максимальні нормальні напруження від згинального моменту:

$$\sigma_{max}(M_x) = \frac{M_x}{W_x} = \frac{5}{34,48 \cdot 10^{-3}} = 145 \text{ МПа.}$$

Максимальні дотичні напруження від крутного моменту:

$$\tau_{max}(M_k) = \frac{M_k}{W_p} = \frac{1,5}{68,96 \cdot 10^{-3}} = 21,8 \text{ МПа.}$$

Зовнішній тиск, або вакуум, в оболонці приводить до появи меридіональних  $\sigma_m$  та окружних  $\sigma_\theta$  напружень:

$$\sigma_m = -\frac{PD}{4h} = -\frac{3 \cdot 1500}{4 \cdot 20} = -56,25 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{PD}{2h} = -\frac{3 \cdot 1500}{2 \cdot 20} = -112,5 \text{ МПа;}$$

4. Проаналізуємо напружений стан в небезпечних точках перерізу.

Небезпечними точками в перерізі будуть точки  $K$  та  $B$ .

На рис.8.10 зображена **небезпечна точка  $B$**  та напруження, що діють на її гранях.

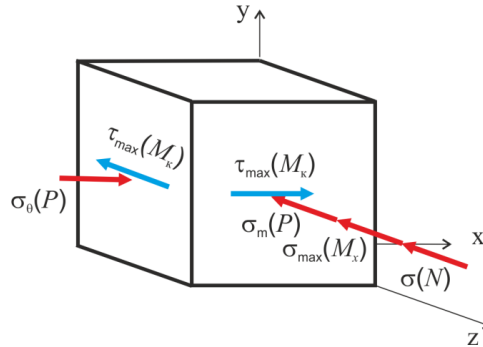


Рисунок 8.10

Визначимо компоненти напруженого стану:

$$\sigma_x = \sigma_\theta(P) = -112,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y = 0;$$

$$\sigma_z = -\sigma_m(P) - \sigma_{max}(M_x) - \sigma(N) = -56,25 - 145 - 21,5 = -222,75 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{max}(M_k) = 21,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0.$$

Тензор напружень у точці  $B$ :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -112,5 & 0 & 21,8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 21,8 & 0 & -222,75 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що площадка  $y$  буде головною, а характеристичне рівняння має вигляд:

$$(0 - S)[(\sigma_x - S)(\sigma_z - S) - \tau_{zx}^2] = 0, \text{ або}$$

$$(0 - S)[S^2 - S(\sigma_x + \sigma_z) + (\sigma_x\sigma_z - \tau_{zx}^2)] = 0.$$

Коренями цього рівняння є:

$$S_1 = 0; \quad S_2 = -108,4 \text{ МПа}; \quad S_3 = -226,9 \text{ МПа}.$$

Враховуючи правило  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , отримаємо:

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = -108,4 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -226,9 \text{ МПа}.$$

Обчислюємо еквівалентне напруження по теорії Мора ( $\sigma_M^- \neq \sigma_M^+$ ):

$$\sigma_{\text{екв}}^V = \sigma_1 - m\sigma_3, \quad \text{де } m = \frac{\sigma_M^+}{\sigma_M^-} = \frac{300}{400} = 0,75, \quad \text{тоді,}$$

$$\sigma_{\text{екв}}^V = \sigma_1 - m\sigma_3 = 0 - 0,75 \cdot (-226,9) = 170,2 \text{ МПа}.$$

Коефіцієнт запасу міцності:

$$n = \frac{\sigma_M^+}{\sigma_{\text{екв}}^V} = \frac{300}{170,2} \approx 1,76$$

На рис. 8.11 зображена **небезпечна точка К** та напруження, що діють на її гранях.

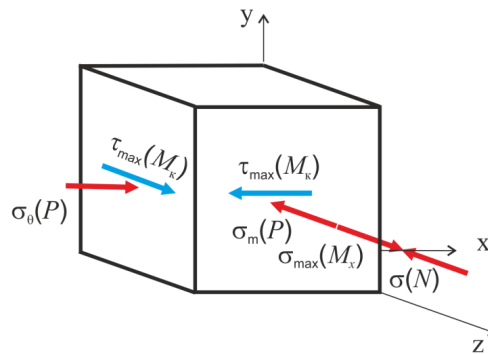


Рисунок 8.11

Визначимо компоненти напруженого стану:

$$\sigma_x = \sigma_\theta(P) = -112,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y = 0;$$

$$\sigma_z = -\sigma_m(P) + \sigma_{\max}(M_x) - \sigma(N) = -56,25 + 145 - 21,5 \approx 67,3 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\tau_{\max}(M_k) = -21,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0.$$

Тензор напружень у точці  $K$ :

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -112,5 & 0 & -21,8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -21,8 & 0 & 67,3 \end{pmatrix}$$

Звідси випливає, що площадка  $y$  буде головною, а характеристичне рівняння має вигляд:

$$(0 - S)[(\sigma_x - S)(\sigma_z - S) - \tau_{zx}^2] = 0, \text{ або}$$

$$(0 - S)[S^2 - S(\sigma_x + \sigma_z) + (\sigma_x\sigma_z - \tau_{zx}^2)] = 0.$$

Коренями цього рівняння є:

$$S_1 = 0; \quad S_2 \approx 69,9 \text{ МПа}; \quad S_3 \approx -115,1 \text{ МПа}.$$

Враховуючи правило  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , отримаємо:

$$\sigma_1 = 69,9 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -115,1 \text{ МПа}$$

Обчислюємо еквівалентне напруження по теорії Мора ( $\sigma_M^- \neq \sigma_M^+$ ):

$$\sigma_{\text{екв}}^V = \sigma_1 - m\sigma_3, \text{ де } m = \frac{\sigma_M^+}{\sigma_M^-} = \frac{300}{400} = 0,75, \text{ тоді,}$$
$$\sigma_{\text{екв}}^V = \sigma_1 - m\sigma_3 = 69,9 - 0,75 \cdot (-115,1) = 156,2 \text{ МПа}$$

Коефіцієнт запасу міцності:

$$n = \frac{\sigma_M^+}{\sigma_{\text{екв}}^V} = \frac{300}{156,2} \approx 1,92$$

Найбільш небезпечною точкою оболонки є точка  $B$  з коефіцієнтом запасу  $n=1,76$ .

**Вихідні дані до задачі 1. Додаток 1.**

**Варіант m/n**

**n – номер варіанту (номер таблиці);**

**m – строка в таблиці необхідного варіанту.**

I вар.	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}(\tau_{yx})$	$\tau_{xz}(\tau_{zx})$	$\tau_{yz}(\tau_{zy})$
1	-40,0	51,2	88,8	0,0	0,0	6,8
2	41,8	-50,0	98,2	0,0	10,3	0,0
3	79,5	-19,5	-100,0	-49,5	0,0	0,0
4	-40,0	32,4	107,6	0,0	0,0	13,7
5	23,0	-50,0	117,0	0,0	17,1	0,0
6	-17,1	-42,9	80,0	-15,3	0,0	0,0
7	-60,0	13,6	126,4	0,0	0,0	20,5
8	41,2	-130,0	78,8	0,0	-6,8	0,0
9	44,1	15,9	60,0	-14,1	0,0	0,0
10	-110,0	31,8	88,2	0,0	0,0	-10,3
11	22,4	-60,0	97,6	0,0	-13,7	0,0
12	-9,5	-50,5	60,0	-56,4	0,0	0,0
13	-50,0	13,0	107,0	0,0	0,0	-17,1
14	-5,8	-80,0	125,8	0,0	23,9	0,0
15	-16,3	-43,7	120,0	-37,6	0,0	0,0
16	-100,0	43,2	56,8	0,0	0,0	18,8
17	39,7	-80,0	60,3	0,0	28,2	0,0
18	15,0	-75,0	70,0	-53,6	0,0	0,0
19	-60,0	36,3	63,7	0,0	0,0	37,6
20	29,5	-80,0	70,5	0,0	56,4	0,0
21	12,4	-72,4	80,0	-42,4	0,0	0,0
22	-100,0	26,1	73,9	0,0	0,0	65,8
23	33,2	-100,0	46,8	0,0	-18,8	0,0
24	75,7	24,3	-80,0	-30,6	0,0	0,0
25	-80,0	19,5	60,5	0,0	0,0	-56,4
26	16,1	-100,0	63,9	0,0	65,8	0,0
27	69,3	30,7	-60,0	-23,0	0,0	0,0
28	130,0	23,2	36,8	0,0	0,0	-18,8
29	12,9	170,0	47,1	0,0	47,0	0,0
30	62,9	37,1	-70,0	15,3	0,0	0,0

II вар.	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}(\tau_{yx})$	$\tau_{xz}(\tau_{zx})$	$\tau_{yz}(\tau_{zy})$
1	-60,0	52,7	87,3	0,0	0,0	10,0
2	44,0	-100,0	96,0	0,0	15,0	0,0
3	80,0	60,0	-60,0	17,3	0,0	0,0
4	-90,0	35,4	104,6	0,0	0,0	20,0
5	26,7	-50,0	113,3	0,0	25,0	0,0
6	85,0	55,0	-80,0	26,0	0,0	0,0
7	-50,0	18,0	122,0	0,0	0,0	30,0
8	42,7	-120,0	77,3	0,0	-10,0	0,0
9	90,0	50,0	-60,0	-34,6	0,0	0,0
10	-100,0	34,0	86,0	0,0	0,0	-15,0
11	25,4	-70,0	94,6	0,0	-20,0	0,0
12	95,0	45,0	-60,0	43,3	0,0	0,0
13	-60,0	16,7	103,3	0,0	0,0	-25,0
14	36,1	-80,0	83,9	0,0	65,8	0,0
15	100,0	40,0	-70,0	52,0	0,0	0,0
16	-120,0	40,0	60,0	0,0	0,0	-17,3
17	50,0	-60,0	65,0	0,0	26,0	0,0
18	75,0	45,0	-80,0	26,0	0,0	0,0
19	-70,0	30,0	70,0	0,0	0,0	34,6
20	20,0	-90,0	80,0	0,0	52,0	0,0
21	80,0	40,0	-80,0	-34,6	0,0	0,0
22	-100,0	15,0	85,0	0,0	0,0	60,6
23	30,0	-80,0	50,0	0,0	-17,3	0,0
24	85,0	35,0	-70,0	-43,3	0,0	0,0
25	-90,0	10,0	70,0	0,0	0,0	-52,0
26	-20,6	-70,0	100,6	0,0	35,0	0,0
27	57,3	22,7	-60,0	10,0	0,0	0,0
28	120,0	20,0	40,0	0,0	0,0	17,3
29	-13,3	140,0	73,3	0,0	25,0	0,0
30	82,9	57,1	-90,0	15,3	0,0	0,0

III вар.	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}(\tau_{yx})$	$\tau_{xz}(\tau_{zx})$	$\tau_{yz}(\tau_{zy})$
1	-50,0	54,7	85,3	0,0	0,0	12,9
2	47,0	-90,0	93,0	0,0	19,3	0,0
3	89,3	50,7	-70,0	23,0	0,0	0,0
4	-80,0	39,4	100,6	0,0	0,0	25,7
5	31,7	-90,0	108,3	0,0	32,2	0,0
6	95,7	44,3	-60,0	-30,6	0,0	0,0
7	-100,0	24,0	116,0	0,0	0,0	38,6
8	44,7	-110,0	75,3	0,0	-12,9	0,0
9	102,2	37,8	-70,0	38,3	0,0	0,0
10	-90,0	37,0	83,0	0,0	0,0	-19,3
11	29,4	-80,0	90,6	0,0	25,7	0,0
12	108,6	31,4	-80,0	-46,0	0,0	0,0
13	-100,0	21,7	98,3	0,0	0,0	-32,2
14	25,0	-70,0	95,0	0,0	60,6	0,0
15	72,9	47,1	-90,0	-15,3	0,0	0,0
16	-60,0	32,7	67,3	0,0	0,0	10,0
17	24,0	-100,0	76,0	0,0	15,0	0,0
18	79,3	40,7	-70,0	-23,0	0,0	0,0
19	-100,0	15,4	84,6	0,0	0,0	20,0
20	-82,0	80,0	22,0	0,0	30,0	0,0
21	85,7	34,3	-100,0	-30,6	0,0	0,0
22	120,0	-90,6	30,6	0,0	0,0	35,0
23	-83,7	110,0	13,7	0,0	25,6	0,0
24	92,2	27,8	-80,0	-38,3	0,0	0,0
25	-140,0	-12,0	92,0	0,0	0,0	-30,0
26	-47,3	140,0	-12,7	0,0	-10,0	0,0
27	105,0	15,0	-80,0	53,6	0,0	0,0
28	140,0	-30,6	90,6	0,0	0,0	-35,0
29	-22,0	150,0	82,0	0,0	30,0	0,0
30	64,1	35,9	-60,0	14,1	0,0	0,0

IV вар.	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}(\tau_{yx})$	$\tau_{xz}(\tau_{zx})$	$\tau_{yz}(\tau_{zy})$
1	-80,0	55,9	84,1	0,0	0,0	14,1
2	48,8	-80,0	91,2	0,0	21,2	0,0
3	71,2	28,8	-100,0	21,2	0,0	0,0
4	-70,0	41,7	98,3	0,0	0,0	28,3
5	34,6	-80,0	105,4	0,0	35,4	0,0
6	78,3	21,7	-80,0	28,3	0,0	0,0
7	-90,0	27,6	112,4	0,0	0,0	42,4
8	45,9	-100,0	74,1	0,0	-14,1	0,0
9	16,0	-76,0	100,0	38,6	0,0	0,0
10	-60,0	38,8	81,2	0,0	0,0	-21,2
11	31,7	-90,0	88,3	0,0	-28,3	0,0
12	-120,0	30,0	180,0	100,0	0,0	0,0
13	-90,0	24,6	95,4	0,0	0,0	-35,4
14	10,5	-60,0	109,5	0,0	49,5	0,0
15	19,5	-79,5	160,0	-49,5	0,0	0,0
16	-60,0	34,7	65,3	0,0	0,0	12,9
17	27,0	-90,0	73,0	0,0	19,3	0,0
18	-10,0	-50,0	110,0	34,6	0,0	0,0
19	-100,0	19,4	80,6	0,0	0,0	25,7
20	11,4	-80,0	88,6	0,0	46,0	0,0
21	0,0	-60,0	170,0	52,0	0,0	0,0
22	170,0	-83,6	23,6	0,0	0,0	45,0
23	-47,1	100,0	-12,9	0,0	47,0	0,0
24	42,9	17,1	130,0	15,3	0,0	0,0
25	120,0	-68,6	8,6	0,0	0,0	46,0
26	-13,6	-60,0	93,6	0,0	45,0	0,0
27	-15,9	-44,1	160,0	14,1	0,0	0,0
28	150,0	-45,3	-14,7	0,0	0,0	12,9
29	-68,3	90,0	8,3	0,0	32,2	0,0
30	83,6	-23,6	110,0	45,0	0,0	0,0

V вар.	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}(\tau_{yx})$	$\tau_{xz}(\tau_{zx})$	$\tau_{yz}(\tau_{zy})$
1	-90,0	57,1	82,9	0,0	0,0	15,3
2	50,7	-70,0	89,3	0,0	23,0	0,0
3	88,8	51,2	-80,0	6,8	0,0	0,0
4	-60,0	44,3	95,7	0,0	0,0	30,6
5	37,8	-70,0	102,2	0,0	38,3	0,0
6	98,2	41,8	-60,0	10,3	0,0	0,0
7	-80,0	31,4	108,6	0,0	0,0	46,0
8	47,1	-90,0	72,9	0,0	-15,3	0,0
9	107,6	32,4	-40,0	13,7	0,0	0,0
10	-70,0	40,7	79,3	0,0	0,0	23,0
11	34,3	-100,0	85,7	0,0	-30,6	0,0
12	117,0	23,0	-50,0	-17,1	0,0	0,0
13	-80,0	27,8	92,2	0,0	0,0	-38,3
14	15,0	-100,0	105,0	0,0	53,6	0,0
15	126,4	13,6	-60,0	20,5	0,0	0,0
16	-130,0	35,9	64,1	0,0	0,0	14,1
17	28,8	-180,0	71,2	0,0	21,2	0,0
18	78,8	41,2	-130,0	-6,8	0,0	0,0
19	-90,0	21,7	78,3	0,0	0,0	28,3
20	-76,0	100,0	16,0	0,0	38,6	0,0
21	88,2	31,8	-110,0	10,3	0,0	0,0
22	180,0	-79,5	19,5	0,0	0,0	49,5
23	-50,0	110,0	-10,0	0,0	34,6	0,0
24	147,8	-117,8	100,0	-79,9	0,0	0,0
25	170,0	-60,0	0,0	0,0	0,0	52,0
26	17,1	130,0	42,9	0,0	15,3	0,0
27	107,0	13,0	-50,0	-17,1	0,0	0,0
28	160,0	-44,1	-15,9	0,0	0,0	-14,1
29	-23,6	110,0	83,6	0,0	45,0	0,0
30	125,8	-5,8	-80,0	23,9	0,0	0,0

VI вар.	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}(\tau_{yx})$	$\tau_{xz}(\tau_{zx})$	$\tau_{yz}(\tau_{zy})$
1	-100,0	60,0	80,0	0,0	0,0	17,3
2	55,0	-60,0	85,0	0,0	26,0	0,0
3	56,8	43,2	-80,0	18,8	0,0	0,0
4	-50,0	50,0	90,0	0,0	0,0	34,6
5	45,0	-60,0	95,0	0,0	43,3	0,0
6	60,3	39,7	-90,0	28,2	0,0	0,0
7	-70,0	40,0	100,0	0,0	0,0	52,0
8	50,0	-80,0	70,0	0,0	-17,3	0,0
9	63,7	36,3	-70,0	-37,6	0,0	0,0
10	-80,0	45,0	75,0	0,0	0,0	26,0
11	40,0	-80,0	80,0	0,0	-34,6	0,0
12	70,5	29,5	-80,0	56,4	0,0	0,0
13	-70,0	35,0	85,0	0,0	0,0	-43,3
14	22,7	-90,0	57,3	0,0	10,0	0,0
15	73,9	26,1	-100,0	65,8	0,0	0,0
16	-70,0	37,1	62,9	0,0	0,0	15,3
17	30,7	-80,0	69,3	0,0	23,0	0,0
18	46,8	33,2	-60,0	18,8	0,0	0,0
19	-80,0	24,3	75,7	0,0	0,0	30,6
20	-72,4	80,0	12,4	0,0	42,4	0,0
21	60,5	19,5	-80,0	56,4	0,0	0,0
22	70,0	-75,0	15,0	0,0	0,0	53,6
23	-43,7	120,0	-16,3	0,0	37,6	0,0
24	63,9	16,1	-80,0	-65,8	0,0	0,0
25	60,0	-50,5	-9,5	0,0	0,0	56,4
26	15,9	100,0	44,1	0,0	14,1	0,0
27	36,8	23,2	100,0	18,8	0,0	0,0
28	170,0	-42,9	-17,1	0,0	0,0	15,3
29	-19,5	130,0	79,5	0,0	49,5	0,0
30	47,1	12,9	150,0	-47,0	0,0	0,0

VII вар.	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}(\tau_{yx})$	$\tau_{xz}(\tau_{zx})$	$\tau_{yz}(\tau_{zy})$
1	-80,0	55,0	85,0	0,0	0,0	26,0
2	-50,0	20,0	125,0	0,0	53,4	0,0
3	-120,0	40,0	70,0	41,2	0,0	0,0
4	-60,0	50,0	90,0	0,0	0,0	34,6
5	-120,0	30,0	90,0	0,0	46,9	0,0
6	-100,0	55,0	80,0	28,3	0,0	0,0
7	-60,0	45,0	85,0	0,0	0,0	28,7
8	-80,0	40,0	60,0	0,0	-38,7	0,0
9	-50,0	50,0	90,0	33,2	0,0	0,0
10	-60,0	45,0	95,0	0,0	0,0	16,6
11	-45,0	50,0	90,0	0,0	-38,1	0,0
12	-50,0	45,0	90,0	40,6	0,0	0,0
13	-100,0	-19,5	79,5	0,0	0,0	49,5
14	-40,0	30,0	110,0	0,0	40,0	0,0
15	-50,0	25,0	110,0	50,0	0,0	0,0
16	-90,0	37,0	83,0	0,0	0,0	32,7
17	-80,0	30,0	90,0	0,0	77,5	0,0
18	-80,0	30,0	100,0	51,0	0,0	0,0
19	-100,0	21,7	98,3	0,0	0,0	58,6
20	-70,0	25,0	95,0	0,0	52,0	0,0
21	160,0	-80,0	20,0	105,8	0,0	0,0
22	-60,0	34,7	65,3	0,0	0,0	25,8
23	-90,0	20,0	75,0	0,0	68,9	0,0
24	110,0	-50,0	-10,0	60,0	0,0	0,0
25	-100,0	19,4	80,6	0,0	0,0	51,6
26	-80,0	30,0	85,0	0,0	52,0	0,0
27	-100,0	15,0	110,0	72,5	0,0	0,0
28	-60,0	13,6	126,4	0,0	0,0	70,1
29	-130,0	40,0	65,0	0,0	74,2	0,0
30	-180,0	30,0	70,0	-67,8	0,0	0,0

VIII вар.	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}(\tau_{yx})$	$\tau_{xz}(\tau_{zx})$	$\tau_{yz}(\tau_{zy})$
1	55,0	-80,0	85,0	0,0	0,0	52,0
2	20,0	-50,0	125,0	0,0	57,0	0,0
3	40,0	-120,0	70,0	-60,0	0,0	0,0
4	50,0	-60,0	90,0	0,0	0,0	58,3
5	30,0	-120,0	90,0	0,0	63,3	0,0
6	55,0	-100,0	80,0	67,1	0,0	0,0
7	45,0	-60,0	85,0	0,0	0,0	65,2
8	40,0	-80,0	60,0	0,0	-17,3	0,0
9	50,0	-50,0	90,0	49,0	0,0	0,0
10	45,0	-60,0	95,0	0,0	0,0	67,1
11	50,0	-45,0	90,0	0,0	-56,6	0,0
12	45,0	-50,0	90,0	54,8	0,0	0,0
13	-20,0	-100,0	80,0	0,0	0,0	63,3
14	30,0	-40,0	110,0	0,0	30,0	0,0
15	25,0	-50,0	110,0	84,6	0,0	0,0
16	40,0	-90,0	85,0	0,0	0,0	53,4
17	30,0	-80,0	90,0	0,0	40,0	0,0
18	30,0	-80,0	100,0	77,5	0,0	0,0
19	20,0	-100,0	95,0	0,0	0,0	89,7
20	25,0	-70,0	95,0	0,0	35,7	0,0
21	-80,0	160,0	20,0	90,0	0,0	0,0
22	35,0	-60,0	65,0	0,0	0,0	45,9
23	20,0	-90,0	75,0	0,0	44,7	0,0
24	-50,0	110,0	-10,0	41,2	0,0	0,0
25	20,0	-100,0	80,0	0,0	0,0	63,3
26	30,0	-80,0	85,0	0,0	38,7	0,0
27	15,0	-100,0	110,0	96,7	0,0	0,0
28	15,0	-60,0	125,0	0,0	0,0	54,8
29	40,0	-130,0	65,0	0,0	35,4	0,0
30	30,0	-180,0	70,0	-46,9	0,0	0,0

ІХ вар.	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}(\tau_{yx})$	$\tau_{xz}(\tau_{zx})$	$\tau_{yz}(\tau_{zy})$
1	80,0	60,0	-100,0	0,0	0,0	41,2
2	85,0	-60,0	55,0	0,0	37,1	0,0
3	-80,0	40,0	55,0	52,9	0,0	0,0
4	90,0	50,0	-50,0	0,0	0,0	49,0
5	95,0	-60,0	45,0	0,0	31,2	0,0
6	-90,0	40,0	60,0	54,8	0,0	0,0
7	100,0	40,0	-70,0	0,0	0,0	64,8
8	70,0	-80,0	50,0	0,0	-33,5	0,0
9	-70,0	35,0	65,0	-42,4	0,0	0,0
10	75,0	45,0	-80,0	0,0	0,0	61,2
11	80,0	-80,0	40,0	0,0	-22,4	0,0
12	-80,0	30,0	70,0	51,0	0,0	0,0
13	85,0	35,0	-70,0	0,0	0,0	-82,2
14	57,3	-90,0	22,7	0,0	46,9	0,0
15	-73,9	23,9	75,0	56,9	0,0	0,0
16	60,0	37,1	-77,1	0,0	0,0	40,5
17	69,3	-80,0	30,7	0,0	56,8	0,0
18	-63,2	33,2	45,0	43,6	0,0	0,0
19	75,0	24,3	-84,3	0,0	0,0	71,8
20	12,4	80,0	-72,4	0,0	42,5	0,0
21	-80,0	20,0	60,0	62,5	0,0	0,0
22	15,0	-75,0	70,0	0,0	0,0	39,4
23	-16,3	120,0	-43,7	0,0	32,2	0,0
24	-86,1	16,1	65,0	-40,2	0,0	0,0
25	-10,0	-50,0	60,0	0,0	0,0	77,5
26	44,1	100,0	15,9	0,0	42,7	0,0
27	76,8	23,2	35,0	29,7	0,0	0,0
28	-15,0	-42,9	107,9	0,0	0,0	76,6
29	79,5	130,0	-19,5	0,0	33,9	0,0
30	137,1	12,9	45,0	-84,7	0,0	0,0

Х вар.	Напруження, МПа					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}(\tau_{yx})$	$\tau_{xz}(\tau_{zx})$	$\tau_{yz}(\tau_{zy})$
1	60,0	80,0	-100,0	0,0	0,0	54,1
2	-60,0	85,0	55,0	0,0	52,0	0,0
3	40,0	-80,0	55,0	60,2	0,0	0,0
4	50,0	90,0	-50,0	0,0	0,0	48,2
5	-60,0	95,0	45,0	0,0	63,6	0,0
6	40,0	-90,0	60,0	62,3	0,0	0,0
7	40,0	100,0	-70,0	0,0	0,0	69,8
8	-80,0	70,0	50,0	0,0	-88,7	0,0
9	35,0	-70,0	65,0	-63,6	0,0	0,0
10	45,0	75,0	-80,0	0,0	0,0	59,2
11	-80,0	80,0	40,0	0,0	-92,2	0,0
12	30,0	-80,0	70,0	58,1	0,0	0,0
13	35,0	85,0	-70,0	0,0	0,0	-50,5
14	-90,0	60,0	20,0	0,0	71,2	0,0
15	23,9	-73,9	75,0	34,8	0,0	0,0
16	35,0	60,0	-75,0	0,0	0,0	77,1
17	-80,7	70,0	30,7	0,0	83,1	0,0
18	33,2	-63,2	45,0	70,0	0,0	0,0
19	25,0	75,0	-85,0	0,0	0,0	68,0
20	80,0	15,0	-75,0	0,0	67,1	0,0
21	20,0	-80,0	60,0	80,8	0,0	0,0
22	-75,0	15,0	70,0	0,0	0,0	44,7
23	120,0	-15,0	-45,0	0,0	60,8	0,0
24	16,1	-86,1	65,0	-61,6	0,0	0,0
25	-50,0	-10,0	60,0	0,0	0,0	66,3
26	100,0	45,0	15,0	0,0	64,8	0,0
27	23,2	76,8	35,0	48,0	0,0	0,0
28	-45,0	-15,0	110,0	0,0	0,0	68,2
29	130,0	80,0	-20,0	0,0	80,5	0,0
30	12,9	137,1	45,0	-65,1	0,0	0,0

## Механічні характеристики сталей

№ п/п	Марка сталі	Модуль пружності $E \cdot 10^{-5}$ , МПа	Границя текучості $\sigma_T$ , МПа	Коефіцієнт Пуассона $\mu$
1	Ст 10	2,10	210	0,31
2	Ст 20	2,13	250	0,33
3	Ст 25	1,98	280	0,24
4	Ст 30	2,00	300	0,25
5	Ст 35	2,06	320	0,29
6	Ст 40	2,13	340	0,33
7	Ст 45	2,00	360	0,25
8	Ст 50	2,16	380	0,35
9	Ст 55	2,10	390	0,31
10	Ст 60	2,04	420	0,28
11	Ст 20Г	2,04	280	0,28
12	Ст 30Г	2,04	320	0,28
13	Ст 50Г	2,16	400	0,35
14	Ст 20Х	2,16	650	0,35
15	Ст 40Х	2,14	800	0,34
16	Ст 45Х	2,06	850	0,29
17	Ст 30ХМ	2,03	750	0,27
18	Ст 35ХМ	2,04	850	0,28
19	Ст 40ХН	2,00	800	0,25
20	Ст 50ХН	2,00	900	0,25
21	Ст 15ХФ	2,06	550	0,29
22	Ст 40ХФА	2,00	750	0,25
23	Ст 20ХГСА	1,96	650	0,23
24	Ст 30ХГС	1,94	850	0,21

**Вихідні дані до задачі 2. Додаток 2.**

**Варіант  $m/n$**

**$n$  – номер варіанту (номер таблиці);**

**$m$  – строка в таблиці необхідного варіанту.**

<b>I вар.</b>	$D,$ мм	$h,$ мм	$F,$ МН	$M_{зг},$ МНм	$M_{кр},$ МНм	$P,$ МПа	$\sigma_M^+,$ МПа	$\sigma_M^-,$ МПа
1.	900	12	0,8	0,36	0,48	-1,3	300	400
2.	900	12	-0,8	0,36	0,48	1,3	300	400
3.	1000	13	1,0	0,44	0,60	-1,5	230	330
4.	1000	13	-1,0	0,44	0,60	1,5	230	330
5.	1100	14	-1,2	0,64	0,84	1,6	230	370
6.	1100	14	1,2	0,64	0,84	-1,6	230	370
7.	1200	15	1,5	0,84	1,16	-1,7	300	450
8.	1200	15	-1,5	0,84	1,16	1,7	300	450
9.	1300	16	1,7	1,00	1,36	-1,8	250	360
10.	1300	16	-1,7	1,00	1,36	1,8	250	360
11.	1400	18	-2,0	1,32	1,80	1,9	240	350
12.	1400	18	2,0	1,32	1,80	-1,9	240	350
13.	1500	19	2,3	1,68	2,20	-2,0	310	470
14.	1500	19	-2,3	1,68	2,20	2,0	310	470
15.	1600	20	2,5	1,92	2,60	-2,1	350	490
16.	1600	20	-2,5	1,92	2,60	2,1	350	490
17.	1700	22	-2,9	2,36	3,16	2,2	400	520
18.	1700	22	2,9	2,36	3,16	-2,2	400	520
19.	1800	23	3,4	2,88	3,80	-2,3	250	330
20.	1800	23	-3,4	2,88	3,80	2,3	250	330
21.	1900	25	3,8	3,48	4,60	-2,4	275	370
22.	1900	25	-3,8	3,48	4,60	2,4	275	370
23.	2000	26	4,1	3,84	5,12	-2,5	300	460
24.	2000	26	-4,1	3,84	5,12	2,5	300	460
25.	2100	28	4,6	4,60	6,08	-2,6	450	550
26.	2100	28	-4,6	4,60	6,08	2,6	450	550
27.	2200	29	5,2	5,40	7,00	-2,7	350	430
28.	2200	29	-5,2	5,40	7,00	2,7	350	430
29.	2300	31	5,4	5,80	7,80	-2,8	400	470
30.	2300	31	-5,4	5,80	7,80	2,8	400	470

П вар.	$D$ , мм	$h$ , мм	$F$ , МН	$M_{32}$ , МНм	$M_{кр}$ , МНм	$P$ , МПа	$\sigma_M^+$ , МПа	$\sigma_M^-$ , МПа
1.	950	12	-0,9	0,40	0,56	-1,4	300	400
2.	950	12	0,9	0,40	0,56	1,4	300	400
3.	1050	13	1,1	0,56	0,76	1,5	230	330
4.	1050	13	-1,1	0,56	0,76	-1,5	230	330
5.	1150	14	1,3	0,68	0,92	1,6	230	370
6.	1150	14	-1,3	0,68	0,92	-1,6	230	370
7.	1250	16	1,6	0,92	1,24	1,7	300	450
8.	1250	16	-1,6	0,92	1,24	-1,7	300	450
9.	1350	17	1,9	1,20	1,60	1,8	250	360
10.	1350	17	-1,9	1,20	1,60	-1,8	250	360
11.	1450	18	2,1	1,44	1,88	1,9	240	350
12.	1450	18	-2,1	1,44	1,88	-1,9	240	350
13.	1550	20	2,4	1,80	2,40	2,0	310	470
14.	1550	20	-2,4	1,80	2,40	-2,0	310	470
15.	1650	21	2,7	2,20	2,96	2,1	350	490
16.	1650	21	-2,7	2,20	2,96	-2,1	350	490
17.	1750	22	3,0	2,52	3,36	2,2	400	520
18.	1750	22	-3,0	2,52	3,36	-2,2	400	520
19.	1850	24	3,5	3,04	4,00	2,3	250	330
20.	1850	24	-3,5	3,04	4,00	-2,3	250	330
21.	1950	25	4,0	3,68	4,92	2,4	275	370
22.	1950	25	-4,0	3,68	4,92	-2,4	275	370
23.	2050	27	4,5	4,40	5,80	2,5	300	460
24.	2050	27	-4,5	4,40	5,80	-2,5	300	460
25.	2150	28	4,8	4,80	6,40	2,6	450	550
26.	2150	28	-4,8	4,80	6,40	-2,6	450	550
27.	2250	30	5,3	5,60	7,40	2,7	350	430
28.	2250	30	-5,3	5,60	7,40	-2,7	350	430
29.	2350	32	5,7	6,60	8,40	2,8	400	470
30.	2350	32	-5,7	6,60	8,40	-2,8	400	470

III вар.	$D$ , мм	$h$ , мм	$F$ , МН	$M_{32}$ , МНм	$M_{кр}$ , МНм	$P$ , МПа	$\sigma_M^+$ , МПа	$\sigma_M^-$ , МПа
1.	900	12	0,8	-0,36	0,48	-1,3	300	400
2.	900	12	-0,8	-0,36	0,48	1,3	300	400
3.	1000	13	1,0	-0,44	0,60	-1,5	230	330
4.	1000	13	-1,0	-0,44	0,60	1,5	230	330
5.	1100	14	-1,2	-0,64	0,84	1,6	230	370
6.	1100	14	1,2	-0,64	0,84	-1,6	230	370
7.	1200	15	1,5	-0,84	1,16	-1,7	300	450
8.	1200	15	-1,5	-0,84	1,16	1,7	300	450
9.	1300	16	1,7	-1,00	1,36	-1,8	250	360
10.	1300	16	-1,7	-1,00	1,36	1,8	250	360
11.	1400	18	-2,0	-1,32	1,80	1,9	240	350
12.	1400	18	2,0	-1,32	1,80	-1,9	240	350
13.	1500	19	2,3	-1,68	2,20	-2,0	310	470
14.	1500	19	-2,3	-1,68	2,20	2,0	310	470
15.	1600	20	2,5	-1,92	2,60	-2,1	350	490
16.	1600	20	-2,5	-1,92	2,60	2,1	350	490
17.	1700	22	-2,9	-2,36	3,16	2,2	400	520
18.	1700	22	2,9	-2,36	3,16	-2,2	400	520
19.	1800	23	3,4	-2,88	3,80	-2,3	250	330
20.	1800	23	-3,4	-2,88	3,80	2,3	250	330
21.	1900	25	3,8	-3,48	4,60	-2,4	275	370
22.	1900	25	-3,8	-3,48	4,60	2,4	275	370
23.	2000	26	4,1	-3,84	5,12	-2,5	300	460
24.	2000	26	-4,1	-3,84	5,12	2,5	300	460
25.	2100	28	4,6	-4,60	6,08	-2,6	450	550
26.	2100	28	-4,6	-4,60	6,08	2,6	450	550
27.	2200	29	5,2	-5,40	7,00	-2,7	350	430
28.	2200	29	-5,2	-5,40	7,00	2,7	350	430
29.	2300	31	5,4	-5,80	7,80	-2,8	400	470
30.	2300	31	-5,4	-5,80	7,80	2,8	400	470

<b>IV вар.</b>	$D,$ мм	$h,$ мм	$F,$ МН	$M_{32},$ МНм	$M_{кр},$ МНм	$P,$ МПа	$\sigma_M^+,$ МПа	$\sigma_M^-,$ МПа
1.	950	12	-0,9	-0,40	0,56	-1,4	300	400
2.	950	12	0,9	-0,40	0,56	1,4	300	400
3.	1050	13	1,1	-0,56	0,76	1,5	230	330
4.	1050	13	-1,1	-0,56	0,76	-1,5	230	330
5.	1150	14	1,3	-0,68	0,92	1,6	230	370
6.	1150	14	-1,3	-0,68	0,92	-1,6	230	370
7.	1250	16	1,6	-0,92	1,24	1,7	300	450
8.	1250	16	-1,6	-0,92	1,24	-1,7	300	450
9.	1350	17	1,9	-1,20	1,60	1,8	250	360
10.	1350	17	-1,9	-1,20	1,60	-1,8	250	360
11.	1450	18	2,1	-1,44	1,88	1,9	240	350
12.	1450	18	-2,1	-1,44	1,88	-1,9	240	350
13.	1550	20	2,4	-1,80	2,40	2,0	310	470
14.	1550	20	-2,4	-1,80	2,40	-2,0	310	470
15.	1650	21	2,7	-2,20	2,96	2,1	350	490
16.	1650	21	-2,7	-2,20	2,96	-2,1	350	490
17.	1750	22	3,0	-2,52	3,36	2,2	400	520
18.	1750	22	-3,0	-2,52	3,36	-2,2	400	520
19.	1850	24	3,5	-3,04	4,00	2,3	250	330
20.	1850	24	-3,5	-3,04	4,00	-2,3	250	330
21.	1950	25	4,0	-3,68	4,92	2,4	275	370
22.	1950	25	-4,0	-3,68	4,92	-2,4	275	370
23.	2050	27	4,5	-4,40	5,80	2,5	300	460
24.	2050	27	-4,5	-4,40	5,80	-2,5	300	460
25.	2150	28	4,8	-4,80	6,40	2,6	450	550
26.	2150	28	-4,8	-4,80	6,40	-2,6	450	550
27.	2250	30	5,3	-5,60	7,40	2,7	350	430
28.	2250	30	-5,3	-5,60	7,40	-2,7	350	430
29.	2350	32	5,7	-6,60	8,40	2,8	400	470
30.	2350	32	-5,7	-6,60	8,40	-2,8	400	470

<b>V вар.</b>	$D,$ мм	$h,$ мм	$F,$ МН	$M_{32},$ МНм	$M_{кр},$ МНм	$P,$ МПа	$\sigma_M^+,$ МПа	$\sigma_M^-,$ МПа
1.	900	11	0,8	0,36	0,48	-1,3	300	400
2.	900	11	-0,8	0,36	0,48	1,3	300	400
3.	1000	12	1,0	0,44	0,60	-1,5	230	330
4.	1000	12	-1,0	0,44	0,60	1,5	230	330
5.	1100	13	-1,2	0,64	0,84	1,6	230	370
6.	1100	13	1,2	0,64	0,84	-1,6	230	370
7.	1200	14	1,5	0,84	1,16	-1,7	300	450
8.	1200	14	-1,5	0,84	1,16	1,7	300	450
9.	1300	15	1,7	1,00	1,36	-1,8	250	360
10.	1300	15	-1,7	1,00	1,36	1,8	250	360
11.	1400	16	-2,0	1,32	1,80	1,9	240	350
12.	1400	16	2,0	1,32	1,80	-1,9	240	350
13.	1500	18	2,3	1,68	2,20	-2,0	310	470
14.	1500	18	-2,3	1,68	2,20	2,0	310	470
15.	1600	19	2,5	1,92	2,60	-2,1	350	490
16.	1600	19	-2,5	1,92	2,60	2,1	350	490
17.	1700	20	-2,9	2,36	3,16	2,2	400	520
18.	1700	20	2,9	2,36	3,16	-2,2	400	520
19.	1800	22	3,4	2,88	3,80	-2,3	250	330
20.	1800	22	-3,4	2,88	3,80	2,3	250	330
21.	1900	23	3,8	3,48	4,60	-2,4	275	370
22.	1900	23	-3,8	3,48	4,60	2,4	275	370
23.	2000	25	4,1	3,84	5,12	-2,5	300	460
24.	2000	25	-4,1	3,84	5,12	2,5	300	460
25.	2100	26	4,6	4,60	6,08	-2,6	450	550
26.	2100	26	-4,6	4,60	6,08	2,6	450	550
27.	2200	28	5,2	5,40	7,00	-2,7	350	430
28.	2200	28	-5,2	5,40	7,00	2,7	350	430
29.	2300	29	5,4	5,80	7,80	-2,8	400	470
30.	2300	29	-5,4	5,80	7,80	2,8	400	470

VI вар.	$D$ , мм	$h$ , мм	$F$ , МН	$M_{32}$ , МНм	$M_{кр}$ , МНм	$P$ , МПа	$\sigma_M^+$ , МПа	$\sigma_M^-$ , МПа
1.	950	11	-0,9	0,40	0,56	-1,4	300	400
2.	950	11	0,9	0,40	0,56	1,4	300	400
3.	1050	12	1,1	0,56	0,76	1,5	230	330
4.	1050	12	-1,1	0,56	0,76	-1,5	230	330
5.	1150	13	1,3	0,68	0,92	1,6	230	370
6.	1150	13	-1,3	0,68	0,92	-1,6	230	370
7.	1250	14	1,6	0,92	1,24	1,7	300	450
8.	1250	14	-1,6	0,92	1,24	-1,7	300	450
9.	1350	16	1,9	1,20	1,60	1,8	250	360
10.	1350	16	-1,9	1,20	1,60	-1,8	250	360
11.	1450	17	2,1	1,44	1,88	1,9	240	350
12.	1450	17	-2,1	1,44	1,88	-1,9	240	350
13.	1550	18	2,4	1,80	2,40	2,0	310	470
14.	1550	18	-2,4	1,80	2,40	-2,0	310	470
15.	1650	20	2,7	2,20	2,96	2,1	350	490
16.	1650	20	-2,7	2,20	2,96	-2,1	350	490
17.	1750	21	3,0	2,52	3,36	2,2	400	520
18.	1750	21	-3,0	2,52	3,36	-2,2	400	520
19.	1850	22	3,5	3,04	4,00	2,3	250	330
20.	1850	22	-3,5	3,04	4,00	-2,3	250	330
21.	1950	24	4,0	3,68	4,92	2,4	275	370
22.	1950	24	-4,0	3,68	4,92	-2,4	275	370
23.	2050	25	4,5	4,40	5,80	2,5	300	460
24.	2050	25	-4,5	4,40	5,80	-2,5	300	460
25.	2150	27	4,8	4,80	6,40	2,6	450	550
26.	2150	27	-4,8	4,80	6,40	-2,6	450	550
27.	2250	28	5,3	5,60	7,40	2,7	350	430
28.	2250	28	-5,3	5,60	7,40	-2,7	350	430
29.	2350	29	5,7	6,60	8,40	2,8	400	470
30.	2350	29	-5,7	6,60	8,40	-2,8	400	470

<b>VII вар.</b>	$D,$ мм	$h,$ мм	$F,$ МН	$M_{32},$ МНм	$M_{кр},$ МНм	$P,$ МПа	$\sigma_M^+,$ МПа	$\sigma_M^-,$ МПа
1.	900	11	0,8	-0,36	-0,48	-1,3	300	400
2.	900	11	-0,8	-0,36	0,48	1,3	300	400
3.	1000	12	1,0	-0,44	-0,60	-1,5	230	330
4.	1000	12	-1,0	-0,44	0,60	1,5	230	330
5.	1100	13	-1,2	-0,64	0,84	1,6	230	370
6.	1100	13	1,2	-0,64	-0,84	-1,6	230	370
7.	1200	14	1,5	-0,84	-1,16	-1,7	300	450
8.	1200	14	-1,5	-0,84	1,16	1,7	300	450
9.	1300	16	1,7	-1,00	-1,36	1,8	250	360
10.	1300	16	-1,7	-1,00	1,36	-1,8	250	360
11.	1400	17	-2,0	-1,32	1,80	-1,9	240	350
12.	1400	17	2,0	-1,32	-1,80	1,9	240	350
13.	1500	18	2,3	-1,68	-2,20	2,0	310	470
14.	1500	18	-2,3	-1,68	2,20	-2,0	310	470
15.	1600	20	2,5	-1,92	2,60	2,1	350	490
16.	1600	20	-2,5	-1,92	2,60	2,1	350	490
17.	1700	21	-2,9	-2,36	3,16	-2,2	400	520
18.	1700	21	2,9	-2,36	3,16	2,2	400	520
19.	1800	22	3,4	-2,88	3,80	-2,3	250	330
20.	1800	22	-3,4	-2,88	3,80	2,3	250	330
21.	1900	24	3,8	-3,48	4,60	2,4	275	370
22.	1900	24	-3,8	-3,48	4,60	-2,4	275	370
23.	2000	25	4,1	-3,84	5,12	-2,5	300	460
24.	2000	25	-4,1	-3,84	5,12	2,5	300	460
25.	2100	27	4,6	-4,60	6,08	-2,6	450	550
26.	2100	27	-4,6	-4,60	6,08	2,6	450	550
27.	2200	28	5,2	-5,40	7,00	2,7	350	430
28.	2200	28	-5,2	-5,40	7,00	-2,7	350	430
29.	2300	29	5,4	-5,80	7,80	2,8	400	470
30.	2300	29	-5,4	-5,80	7,80	2,8	400	470

<b>VIII вар.</b>	$D,$ мм	$h,$ мм	$F,$ МН	$M_{32},$ МНм	$M_{кр},$ МНм	$P,$ МПа	$\sigma_M^+,$ МПа	$\sigma_M^-,$ МПа
1.	950	11	-0,9	-0,40	0,56	1,4	300	400
2.	950	11	0,9	-0,40	-0,56	1,4	300	400
3.	1050	12	1,1	-0,56	0,76	-1,5	230	330
4.	1050	12	-1,1	-0,56	-0,76	-1,5	230	330
5.	1150	13	1,3	-0,68	0,92	1,6	230	370
6.	1150	13	-1,3	-0,68	-0,92	1,6	230	370
7.	1250	14	1,6	-0,92	1,24	1,7	300	450
8.	1250	14	-1,6	-0,92	-1,24	1,7	300	450
9.	1350	16	1,9	-1,20	1,60	-1,8	250	360
10.	1350	16	-1,9	-1,20	-1,60	1,8	250	360
11.	1450	17	2,1	-1,44	1,88	1,9	240	350
12.	1450	17	-2,1	-1,44	1,88	1,9	240	350
13.	1550	18	2,4	-1,80	2,40	-2,0	310	470
14.	1550	18	-2,4	-1,80	-2,40	2,0	310	470
15.	1650	20	2,7	-2,20	2,96	2,1	350	490
16.	1650	20	-2,7	-2,20	2,96	2,1	350	490
17.	1750	21	3,0	-2,52	3,36	-2,2	400	520
18.	1750	21	-3,0	-2,52	-3,36	2,2	400	520
19.	1850	22	3,5	-3,04	4,00	2,3	250	330
20.	1850	22	-3,5	-3,04	4,00	2,3	250	330
21.	1950	24	4,0	-3,68	-4,92	2,4	275	370
22.	1950	24	-4,0	-3,68	4,92	2,4	275	370
23.	2050	25	4,5	-4,40	5,80	-2,5	300	460
24.	2050	25	-4,5	-4,40	5,80	2,5	300	460
25.	2150	27	4,8	-4,80	-6,40	2,6	450	550
26.	2150	27	-4,8	-4,80	-6,40	-2,6	450	550
27.	2250	28	5,3	-5,60	7,40	2,7	350	430
28.	2250	28	-5,3	-5,60	7,40	2,7	350	430
29.	2350	29	5,7	-6,60	-8,40	2,8	400	470
30.	2350	29	-5,7	-6,60	8,40	-2,8	400	470

<b>IX вар.</b>	$D,$ мм	$h,$ мм	$F,$ МН	$M_{32},$ МНм	$M_{кр},$ МНм	$P,$ МПа	$\sigma_M^+,$ МПа	$\sigma_M^-,$ МПа
1.	900	11	0,8	-0,36	0,48	1,5	300	400
2.	900	11	-0,8	-0,36	-0,48	-1,5	300	400
3.	1000	12	1,0	-0,44	0,60	1,6	230	330
4.	1000	12	-1,0	-0,44	-0,60	-1,6	230	330
5.	1100	13	-1,2	-0,64	-0,84	-1,7	230	370
6.	1100	13	1,2	-0,64	0,84	1,7	230	370
7.	1200	14	1,5	-0,84	1,16	1,8	300	450
8.	1200	14	-1,5	-0,84	-1,16	-1,8	300	450
9.	1300	16	1,7	-1,00	1,36	1,9	250	360
10.	1300	16	-1,7	-1,00	-1,36	-1,9	250	360
11.	1400	17	-2,0	-1,32	-1,80	-2,0	240	350
12.	1400	17	2,0	-1,32	1,80	2,0	240	350
13.	1500	18	2,3	-1,68	2,20	2,1	310	470
14.	1500	18	-2,3	-1,68	-2,20	-2,1	310	470
15.	1600	20	2,5	-1,92	2,60	2,2	350	490
16.	1600	20	-2,5	-1,92	-2,60	-2,2	350	490
17.	1700	21	-2,9	-2,36	-3,16	-2,3	400	520
18.	1700	21	2,9	-2,36	3,16	2,3	400	520
19.	1800	22	3,4	-2,88	3,80	2,4	250	330
20.	1800	22	-3,4	-2,88	-3,80	-2,4	250	330
21.	1900	24	3,8	-3,48	4,60	2,5	275	370
22.	1900	24	-3,8	-3,48	-4,60	-2,5	275	370
23.	2000	25	4,1	-3,84	5,12	2,6	300	460
24.	2000	25	-4,1	-3,84	-5,12	-2,6	300	460
25.	2100	27	4,6	-4,60	6,08	2,7	450	550
26.	2100	27	-4,6	-4,60	-6,08	-2,7	450	550
27.	2200	28	5,2	-5,40	7,00	2,8	350	430
28.	2200	28	-5,2	-5,40	-7,00	-2,8	350	430
29.	2300	29	5,4	-5,80	7,80	3,0	400	470
30.	2300	29	-5,4	-5,80	-7,80	-3,0	400	470

<b>X вар.</b>	$D,$ мм	$h,$ мм	$F,$ МН	$M_{32},$ МНм	$M_{кр},$ МНм	$P,$ МПа	$\sigma_M^+,$ МПа	$\sigma_M^-,$ МПа
1.	950	11	-0,9	-0,40	0,56	1,5	300	400
2.	950	11	0,9	-0,40	0,56	1,5	300	400
3.	1050	12	1,1	-0,56	0,76	-1,6	230	330
4.	1050	12	-1,1	-0,56	0,76	1,6	230	330
5.	1150	13	1,3	-0,68	0,92	1,7	230	370
6.	1150	13	-1,3	-0,68	0,92	1,7	230	370
7.	1250	14	1,6	-0,92	1,24	-1,8	300	450
8.	1250	14	-1,6	-0,92	1,24	1,8	300	450
9.	1350	16	1,9	-1,20	1,60	1,9	250	360
10.	1350	16	-1,9	-1,20	1,60	1,9	250	360
11.	1450	17	2,1	-1,44	1,88	2,0	240	350
12.	1450	17	-2,1	-1,44	1,88	-2,0	240	350
13.	1550	18	2,4	-1,80	2,40	2,1	310	470
14.	1550	18	-2,4	-1,80	2,40	2,1	310	470
15.	1650	20	2,7	-2,20	2,96	2,2	350	490
16.	1650	20	-2,7	-2,20	2,96	2,2	350	490
17.	1750	21	3,0	-2,52	3,36	-2,3	400	520
18.	1750	21	-3,0	-2,52	3,36	2,3	400	520
19.	1850	22	3,5	-3,04	4,00	2,4	250	330
20.	1850	22	-3,5	-3,04	4,00	2,4	250	330
21.	1950	24	4,0	-3,68	4,92	2,5	275	370
22.	1950	24	-4,0	-3,68	4,92	-2,5	275	370
23.	2050	25	4,5	-4,40	5,80	2,6	300	460
24.	2050	25	-4,5	-4,40	5,80	2,6	300	460
25.	2150	27	4,8	-4,80	6,40	2,7	450	550
26.	2150	27	-4,8	-4,80	6,40	2,7	450	550
27.	2250	28	5,3	-5,60	7,40	2,8	350	430
28.	2250	28	-5,3	-5,60	7,40	2,8	350	430
29.	2350	29	5,7	-6,60	8,40	-3,0	400	470
30.	2350	29	-5,7	-6,60	8,40	3,0	400	470

### Додаток 3 Тести для самоперевірки.

1. Що є мірою інтенсивності внутрішніх сил в точці деформованого тіла?

- а) деформації; б) напруження; в) переміщення; г) кути повороту.

2. Що називається середнім напруженням на елементарній площадці в перерізі?

а)  $\sigma = \frac{\Delta P}{\Delta A}$       б)  $p_\nu = \frac{\Delta F}{\Delta A}$       в)  $\sigma_\nu = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$       г)  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

3. Що називається повним напруженням в точці заданого перерізу?

а)  $\sigma = \frac{\Delta P}{\Delta A}$       б)  $p_\nu = \frac{\Delta F}{\Delta A}$       в)  $\sigma_\nu = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$       г)  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

4. Як позначаються проекції повного напруження на довільно орієнтованій площадці?

- а)  $p_{x\nu}, p_{y\nu}, p_{z\nu}$ ;      б)  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ;      в)  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;      г)  $u, v, w$ .

5. Які напруження називаються нормальними?

- а) ті, що діють під кутом до елементарної площадки;  
б) ті, що діють по нормалі до елементарної площадки;  
в) ті, що діють по дотичній до елементарної площадки;  
г) ті, що діють по колу в елементарної площадки.

**6. Яку напруження називаються дотичними?**

- а) ті, що діють під кутом до елементарної площадки;
- б) ті, що діють по нормалі до елементарної площадки;
- в) ті, що діють по дотичній до елементарної площадки;
- г) ті, що діють по колу в елементарної площадки.

**7. Які площадки називаються головними?**

- а) ті, на яких діють дотичні напруження;
- б) ті, на яких відсутні нормальні напруження;
- в) ті, на яких відсутні дотичні напруження;
- г) ті, на яких діють нормальні напруження.

**8. Які напруження називаються головними?**

- а) ті, що діють на координатних площадках;
- б) ті, що діють в поперечних перерізах;
- в) ті, що діють на головних площадках;
- г) ті, що діють на похилих площадках.

**9. Скільки головних площадок можна провести через точку деформованого тіла?**

- а) п'ять;            б) чотири;            в) шість;            г) три.

**10. Як головні площадки орієнтовані по відношенню одна до одної?**

- а) під кутом  $45^\circ$  одна до одної;
- б) під кутом  $30^\circ$  одна до одної;
- в) перпендикулярно одна до одної;
- г) під кутом  $60^\circ$  одна до одної.

**11. Які властивості головних напружень?**

- а) вони середні;
- б) вони мінімальні;
- в) вони екстремальні;
- г) вони максимальні.

**12. Які правила індексації головних напружень?**

- а)  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ,      б) довільно;      в)  $\sigma_{ij}, \sigma_v, \sigma_w$       г)  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

**13. Який тип напруженого стану в точці тіла є неможливим?**

- а) лінійний;      б) плоский;      в) об'ємний;      г) шестивимірний.

**14. Вкажіть закон парності дотичних напружень у випадку, коли всі грані елемента не є головними:**

- а)  $\tau_{xy} = \tau_{zy}$ ;      б)  $\tau_{max} = \tau_{xz}$ ;      в)  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ;      г)  $\tau_{yx} = \tau_{xz}$ .

**15. Як позначаються лінійні деформації в напрямку координатних осей?**

- а)  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ;      б)  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;      в)  $U, V, W$ ;      г)  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

**16. Як позначаються лінійні деформації в напрямку головних осей?**

- а)  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ;      б)  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;      в)  $U, V, W$ ;      г)  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

**17. Що називається деформованим станом у точці?**

- а) сукупність  $U, V, W$ ;      б) сукупність  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;  
в) сукупність  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;      г) сукупність  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

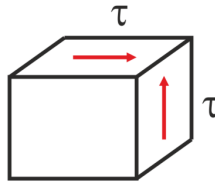
**18. Під напруженим станом у довільній точці деформованого тіла слід розуміти ...**

- а) сукупність нормальних та дотичних напружень в будь-якому перерізі стержня;  
б) сукупність нормальних та дотичних напружень на будь-яких трьох елементарних площадках, що проходять через цю точку;  
в) сукупність нормальних та дотичних напружень, які діють на множині елементарних площадок, що проходять через цю точку;  
г) сукупність нормальних та дотичних напружень в поперечному перерізі стержня.

**19. Тензор напружень – це...**

- а) сукупність нормальних та дотичних напружень на будь-яких трьох елементарних площадках, що проходять через цю точку;  
б) сукупність нормальних та дотичних напружень в будь-якому перерізі стержня;  
в) сукупність нормальних та дотичних напружень в поперечному перерізі стержня;  
г) сукупність нормальних та дотичних компонентів напружень на трьох взаємно перпендикулярних елементарних площадках, що проходять через точку тіла.

20. При чистому зсуві головні напруження дорівнюють



а)  $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$ ;

в)  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau$ ;

б)  $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = \sigma_3 = -\tau$ ;

г)  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\tau$ .

21. Площадка, на якій немає дотичних напружень, називається...

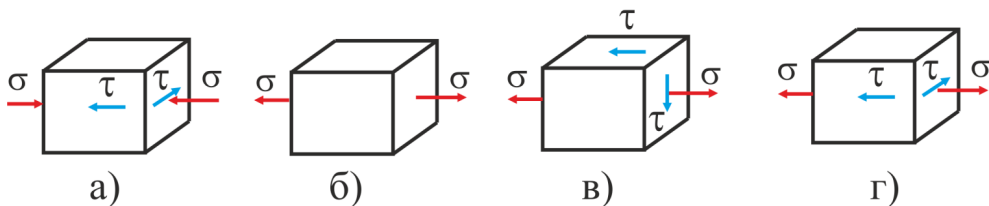
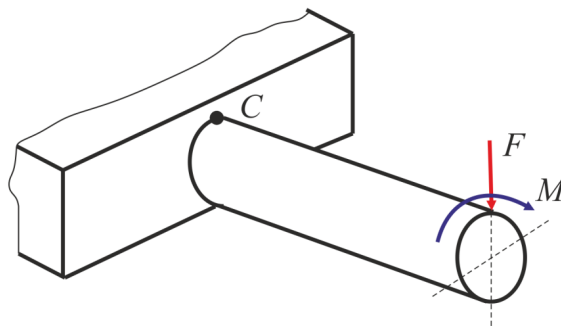
а) головною;

б) першою;

в) основною;

г) чистою.

22. Напружений стан в точці С має вигляд ...



23. Вид (тип) напруженого стану в довільній точці деформованого тіла підрозділяється на...

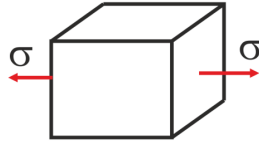
а) об'ємне, плоске, лінійне;

б) косе згинання, згинання з розтяганням, згинання з крученням;

в) розтягання, стискання, згинання;

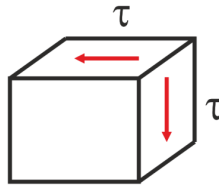
г) розтягання, кручення, зсув.

24. Такий напружений стан називається...



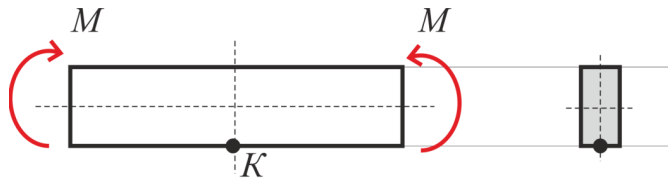
- |                           |                          |
|---------------------------|--------------------------|
| а) об'ємним;              | в) чистим зсувом;        |
| б) лінійним (одновісним); | г) плоским (двохвісним). |

25. Такий напружений стан називається...



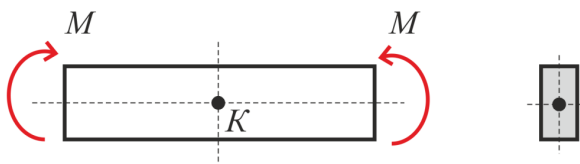
- |                           |                                   |
|---------------------------|-----------------------------------|
| а) лінійним (розтягання); | в) лінійним (стискання);          |
| б) плоским (чистий зсув); | г) плоским (двовісне розтягання). |

26. Вид (тип) напруженого стану в точці К ...



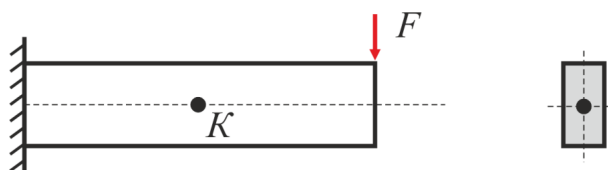
- |                           |                                   |
|---------------------------|-----------------------------------|
| а) лінійний (розтягання); | в) лінійний (стискання);          |
| б) плоский (чистий зсув); | г) плоский (двовісне розтягання). |

27. Вид (тип) напруженого стану в точці К ...



- |                           |                                      |
|---------------------------|--------------------------------------|
| а) лінійний (розтягання); | в) лінійний (стискання);             |
| б) плоский (чистий зсув); | г) "нульовий" (напруження відсутні). |

28. Вид (тип) напруженого стану в точці К...



- а) лінійний (розтягання); в) лінійний (стискання);  
б) плоский (чистий зсув); г) "нульовий" (напруження відсутні).

29. Два напружених стани називаються рівнонебезпечними, якщо вони мають...

- а) однакові знаки нормальних напружень;  
б) однакові знаки максимальних дотичних напружень;  
в) однакові знаки головних напружень;  
г) однакові коефіцієнти запасу.

30. Сукупність нормальних і дотичних напружень, які діють на множині елементарних площадок, що проходять через точку, називається...

- а) станом напруження; в) напруженим станом;  
б) повним напруженням; г) тривісним напруженням.

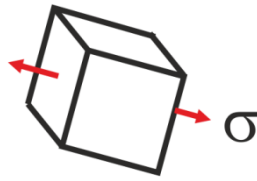
31. Напружений стан у точці, де два головних напруження дорівнюють нулю, називається...

- а) просторовим; б) лінійним; в) особливим; г) плоским.

32. Напружений стан у точці, де одно головне напруження дорівнює нулю...

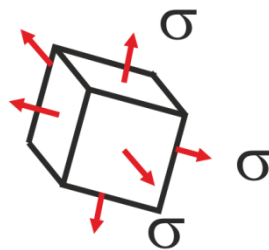
- а) просторовим; б) лінійним; в) особливим; г) плоским.

33. Напружений стан у точці, зображений на рисунку, називається...



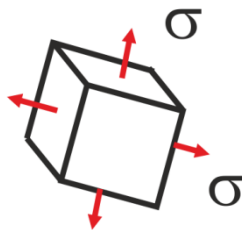
- а) просторовим; б) лінійним; в) особливим; г) плоским.

34. Напружений стан у точці, зображений на рисунку, називається...



- а) просторовим; б) лінійним; в) особливим; г) плоским.

35. Напружений стан у точці, зображений на рисунку, називається...



- а) просторовим; б) лінійним; в) особливим; г) плоским.

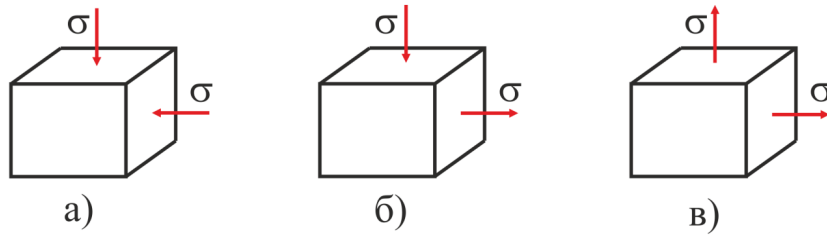
36. Напружений стан у точці, де три головних напруження відмінні від нуля, називається...

- а) просторовим напруженим станом;  
б) лінійним напруженим станом;  
в) особливим напруженим станом;  
г) плоским напруженим станом.

37. В лінійному напруженому стані закон Гука виражається залежністю...

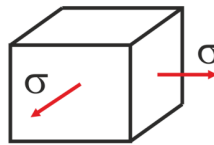
a)  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ;      б)  $\sigma = E\varepsilon$ ;      в)  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ ;      г)  $\tau = G\gamma$ .

38. З трьох напружених станів найнебезпечнішим (відповідно до гіпотези найбільших дотичних напружень ( $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3$ )) буде...



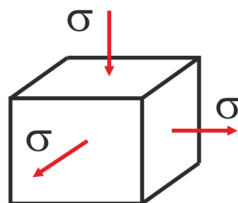
a), б), в), г) всі напружені стани є рівнонебезпечними.

39. Обчисліть еквівалентне напруження відповідно до гіпотези найбільших дотичних напружень ( $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3$ ):



- a) 0;      б)  $2\sigma$ ,      в)  $\sigma$ ;      г)  $-\sigma$ .

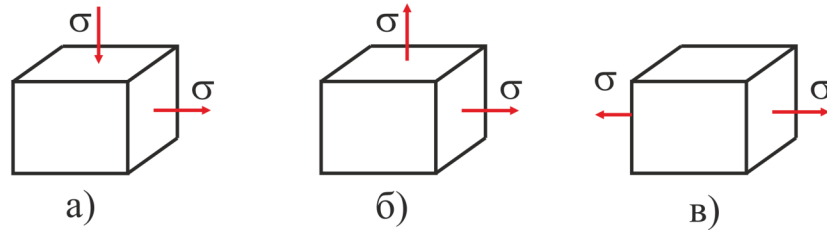
40. Обчисліть еквівалентне напруження відповідно до гіпотези міцності Мора (матеріал сірий чавун,  $m = 0,2$ ,  $\sigma_{\text{екв}}^{\text{V}} = \sigma_1 - m\sigma_3$ ):



- a)  $0,8\sigma$ ,      б)  $2,2\sigma$ ,      в)  $1,2\sigma$ ,      г)  $1,8\sigma$ .

41. У якому напруженому стані питома потенційна енергія зміни об'єму дорівнює нулю? ( $E$  – модуль пружності,  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона)

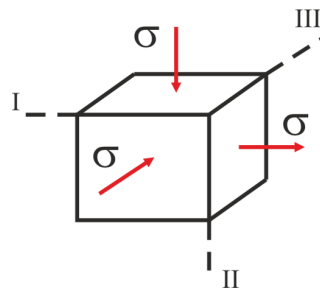
$$u_V = \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$



42. Компоненти тензора деформацій  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  визначають...

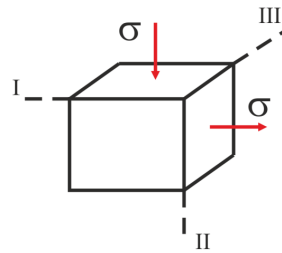
- а) деформований стан в точці;
- б) напружений стан в точці;
- в) напружений стан тіла;
- г) деформований стан тіла.

43. По трьом гранях елементарного паралелепіпеда діють нормальні напруження  $\sigma$ . Однакову деформацію  $\epsilon$  мають ребра...



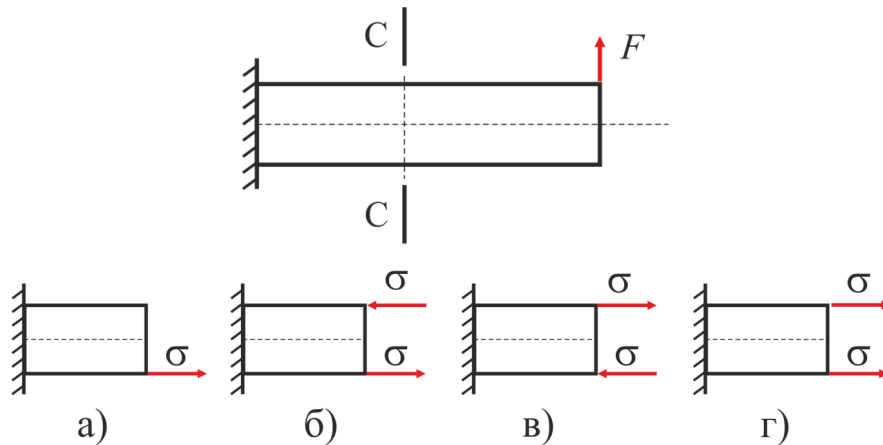
- а) I, II;
- б) всі ребра деформуються однаково;
- в) II, III;
- г) I, III.

44. По двом граням елементарного паралелепіеда діють нормальні напруження  $\sigma$ . Однакову по модулю деформацію  $\varepsilon$  мають ребра...

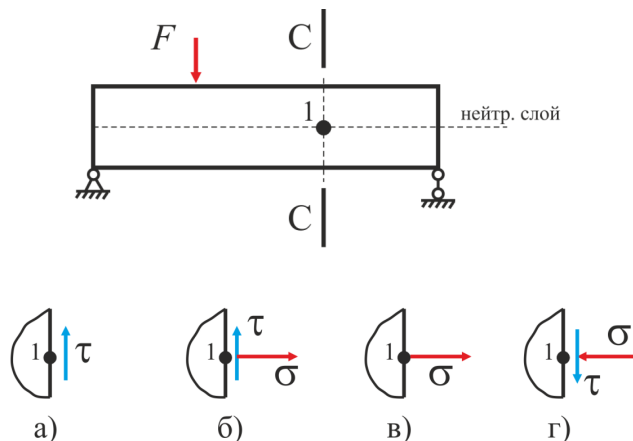


- а) I, II;      б) I, II, III;      в) II, III;      г) I, III.

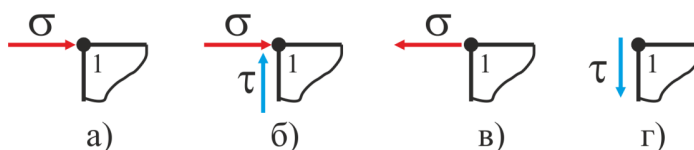
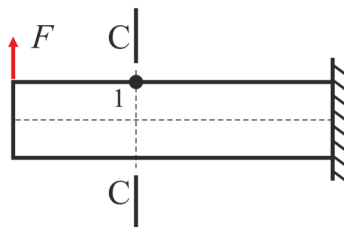
45. Вірні напрямки нормальних напружень в точках 1, 2 перерізу  $C-C$  мають вигляд...



46. Якщо відкинути праву частину стержня, то в точці 1 перерізу  $C-C$  необхідно показати напруження ...



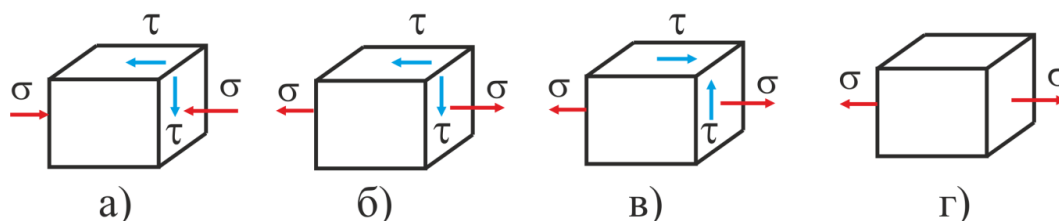
47. Якщо відкинути ліву частину стержня, то в точці 1 перерізу  $C-C$  необхідно показати напруження ...



48. Відносні лінійні деформації  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  ( $\epsilon_1 = \epsilon_{max}, \epsilon_3 = \epsilon_{min}$ ) називаються...

- а) головними деформаціями;
- б) екстремальними деформаціями;
- в) максимальними деформаціями;
- г) граничними деформаціями.

49. При сумісній дії згинання і кручення стержня прямокутного перерізу в кутовій точці перерізу може бути напружений стан...



**50. Який закон характеризує зв'язок між компонентами напруженого і деформованого стану в точці?**

- а) закон Бойля- Маріотта;
- б) закон Ньютона;
- в) узагальнений закон Гука;
- г) закон Коші.

**51. Який напружений стан називається граничним?**

- а) той, що відповідає переходу механічного стану матеріалу від твердого до рідкого;
- б) той, що відповідає переходу механічного стану матеріалу від твердого до м'якого;
- в) той, що відповідає переходу механічного стану матеріалу від пружного до пружно-пластичного;
- г) той, що відповідає переходу механічного стану матеріалу від пружного до повзучості.

**52. Що називається коефіцієнтом запасу для даного напруженого стану?**

- а)  $n = \frac{\tau_{max}}{\sigma_{екв}}$ ;
- б)  $n = \frac{\sigma_{неб}}{\sigma_{екв}}$  (неб – небезпечне);
- в)  $n = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ ;
- г)  $n = \frac{\sigma_{екв}^{max}}{\varepsilon_{екв}}$ .

**53. Який напружений стан обирається як еталон (еквівалент) для порівняння з тривісним напруженим станом?**

- а) лінійний;      б) плоский;      в) об'ємний;      г) шестивісний.

**54. Вкажіть формулу для розрахунку еквівалентних напружень за гіпотезою пластичності – гіпотезою найбільших дотичних напружень:**

- а)  $\sigma_{\text{екв}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_T$ ;      б)  $\sigma_{\text{екв}}^{III} = \sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_T$ ;  
 в)  $\sigma_{\text{екв}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$ ;      г)  $\sigma_{\text{екв}}^{III} = \sigma_3 - \sigma_4 = \sigma_T$ .

**55. Вкажіть формулу для розрахунку еквівалентних напружень за гіпотезою пластичності – гіпотезою питомої потенційної енергії формозміни:**

- а)  $\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$ ;  
 б)  $\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \sqrt{\frac{3}{7}[(\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$ ;  
 в)  $\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \sigma_3 - \sigma_2$ ;  
 г)  $\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \sqrt{\frac{2}{3}[(\sigma_3 - \sigma_4)^2]}$ .

**56. Умова міцності за теорією Мора має вигляд ...**

- а)  $\sigma_{\text{екв}}^V = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ ;      б)  $\sigma_{\text{екв}}^V = \sigma_3 - \sigma_2 \leq [\sigma]$ ;  
 в)  $\sigma_{\text{екв}}^V = \sigma_1 - \frac{\sigma_M^+}{\sigma_M^-} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_M^+]$ ;      г)  $\sigma_{\text{екв}}^V = \sigma_3 - \sigma_1 \leq [\sigma]$ .

**57. Які одиниці виміру механічних напружень?**

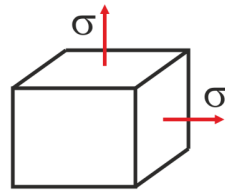
- а)  $\text{Н} \cdot \text{М}/\text{с}$ ;      б)  $\text{Н}/\text{м}$ ;      в)  $\text{Н} \cdot \text{М}/\text{М}^2$  Н;      г)  $\text{Н}/\text{М}^2$ .

**58. Узагальнений закон Гука для ізотропного матеріалу в головній системі координат має вигляд:**

а)  $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3))$ ;      б)  $\sigma_1 = E\varepsilon_1$ ;

в)  $\sigma_2 = \frac{G}{\tau_{12}}$ ;      г)  $\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \right|$

**59. Для напруженого стану в точці умова міцності (відповідно до гіпотези питомої потенційної енергії формозміни) має вигляд:**



а)  $\sigma^{IV}\sqrt{3} \leq [\sigma]$ ;    б)  $\sigma^{IV}\sqrt{2} \leq [\sigma]$ ;    в)  $\sigma^{IV} \leq [\sigma]$ ;    г)  $1,3\sigma^{IV} \leq [\sigma]$ .

**60. Направляючі косинуси – це:**

а) косинуси кутів між нормаллю до площадки та координатними осями;

б) косинуси кутів між координатними осями;

в) косинуси кутів між дотичною до площадки та координатними осями;

г) косинуси кутів між нормаллю до площадки та дотичною до площадки.

**61. Визначте тип напруженого стану в точці, якщо відомі інваріанти тензора напружень ( $I_1 = 0, I_2 \neq 0, I_3 = 0$ ):**

а) лінійне;    б) плоске;    в) об'ємне;    г) квадроосьове.

**62. Визначте тип напруженого стану в точці, якщо відомі інваріанти тензора напружень ( $I_1 \neq 0, I_2 = 0, I_3 = 0$ ):**

а) лінійне; б) плоске; в) об'ємне; г) квадроосьове.

**63. Умовою застосовності безмоментної теорії розрахунку оболонок є відношення діаметра оболонки до товщини її стінки не менш ніж:**

а) 5; б) 10; в) 15; г) 20.

**64. Рівняння Лапласа для розрахунку оболонок за безмоментною теорією має вигляд:**

а)  $\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = \frac{P}{h}$ ; б)  $\sigma_m + \sigma_\theta = P$ ; в)  $\frac{\sigma_m}{\rho_\theta} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_m} = \frac{P}{h}$ ; г)  $\frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta}$ .

## Список літератури

1. Пискунов, С. О. Пластини і оболонки. Основи розрахунків на міцність і жорсткість [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Динаміка і міцність машин» спеціальності 131 Прикладна механіка / С. О. Пискунов, Є. Є. Онищенко, С. І. Трубачев ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,22 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022.– 117 с.

2. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.

3. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1978. – 832 с.

## Зміст

<b>ВСТУП .....</b>	<b>2</b>
<b>1. ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНОК ЗА БЕЗМОМЕНТНОЮ ТЕОРІЄЮ.....</b>	<b>4</b>
1.1. Циліндрична оболонка.....	7
1.2. Сферична оболонка (рис. 1.5). ....	8
1.3. Конічна оболонка (рис. 1.6).....	9
<b>2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ .....</b>	<b>10</b>
2.1. Поняття про напружений стан і компоненти тензора напружень в точці ....	10
2.2. Приклад формування матриці тензора напружень. ....	11
<b>3. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ НА ДОВІЛЬНІЙ ПОХИЛІЙ ПЛОЩАДЦІ .....</b>	<b>13</b>
<b>4. ПОНЯТТЯ О ГОЛОВНИХ НАПРУЖЕННЯХ. КЛАСИФІКАЦІЯ ТИПІВ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ.....</b>	<b>14</b>
<b>5. ЗАКОН ГУКА ПРИ ОБ'ЄМНОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ (УЗАГАЛЬНЕНИЙ ЗАКОН ГУКА) .....</b>	<b>17</b>
5.1. Формулювання закону Гука.....	17
5.2. Приклад визначення компонент напруженого і деформованого стану із застосуванням узагальненого закону Гука. ....	19
<b>6. ПИТОМА ПОТЕНЦІЙНА ЕНЕРГІЯ ПРУЖНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ В ТОЧЦІ .....</b>	<b>20</b>
<b>7. ГІПОТЕЗИ ГРАНИЧНИХ НАПРУЖЕНИХ СТАНІВ (ГІПОТЕЗИ МІЦНОСТІ).....</b>	<b>22</b>
7.1. Гіпотеза найбільших нормальних напружень. (Перша гіпотеза міцності)...	23
7.2. Гіпотеза найбільших лінійних деформацій (Друга гіпотеза міцності). ....	24
7.3. Гіпотеза найбільших дотичних напружень. (Третя гіпотеза міцності).....	24
7.4. Гіпотеза питомої потенційної енергії формозміни. (Четверта гіпотеза міцності). ....	25
7.5. Гіпотеза міцності Мора. (П'ята гіпотеза міцності). ....	26
<b>8. РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ .....</b>	<b>27</b>
8.1. Склад розрахунково-проектувального завдання.....	28
8.2. Порядок виконання завдання .....	29
Задача 1. Провести аналіз напруженого стану в точці, дотримуючись плану.....	29
Задача 2. Оцінити міцність циліндричної оболонки. ....	29

8.3. Приклади розв'язання задач.....	30
8.3.1. Зразок розв'язання задачі 1 .....	30
8.3.2. Зразок виконання задачі 2 (варіант №1) .....	34
8.3.3. Зразок виконання задачі 2 (варіант №2) .....	42
Вихідні дані до задачі 1. Додаток 1. ....	49
Вихідні дані до задачі 2. Додаток 2. ....	60
Додаток 3 Тести для самоперевірки. ....	70
<b>Список літератури .....</b>	<b>85</b>
<b>Зміст.....</b>	<b>86</b>

Навчальне видання

КИРКАЧ Борис Миколайович  
КОНОХОВ Володимир Іванович  
ХАВІН Валерій Львович  
ШЕРГІН Сергій Юрійович

**АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ І  
РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ ПРИ  
СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

Навчально-методичний посібник з курсу “Опір матеріалів  
для студентів машинобудівних спеціальностей.

Відповідальний за випуск проф. Лавінський Д. В.

Роботу до друку рекомендував проф. Бреславський Д. В.

В авторській редакції

План 2025 р., поз. 70

Підп. до друку .20. Формат 60x84 1/16. Папір Могра.

Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Ум.друк. арк. 3,1

Обл.-вид. арк. \_\_\_\_ Наклад 100. Зам. № \_\_\_\_\_ Ціна \_\_\_\_\_.

---

Видавничий центр НТУ “ХП”.

61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

---

Самостійне електронне видання