

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«Харківський політехнічний інститут»

**НЕЛІНІЙНІ РЕГРЕСІЙНІ МОДЕЛІ В ДОСЛІДЖЕННЯХ  
ЕКОНОМІЧНИХ ЯВИЩ ТА ПРОЦЕСІВ**

**Конспект лекції**

**з курсу «Сучасні проблеми і методи математичного комп'ютерного  
моделювання в економіці і менеджменті»**

для студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання спеціальностей

6.030601 «Менеджмент», 6.030501 «Економіка підприємства»,

6.030509 «Облік та аудит», 6.030507 «Маркетинг»,

6.030507 «Інтелектуальна власність»

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № \_\_ від \_\_\_\_\_ 2016 р.

Харків  
НТУ «ХПІ»  
2016

Нелінійні регресійні моделі в дослідженнях економічних явищ та процесів. Конспект лекції з курсу «Сучасні проблеми і методи математичного комп'ютерного моделювання в економіці і менеджменті» для студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання спеціальностей 6.030601 «Менеджмент», 6.030501 «Економіка підприємства», 6.030509 «Облік та аудит», 6.030507 «Маркетинг», 6.030507 «Інтелектуальна власність» / уклад. О.Є. Скворчевський. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – 18 с.

Укладач доц. Скворчевський О.Є.

Кафедра організації виробництва та управління персоналом

## Вступ

Традиційна структура дисципліни «Економетрія», що входить до базової економічної підготовки бакалавра, акцентує свою увагу передусім на побудові та дослідженні лінійних регресійних моделей. Такий підхід дозволяє студентам зрозуміти основні теоретичні положення економетрії та навчитись використовувати стандартні комп'ютерні засоби, такі як надбудова «Аналіз даних» та статистичні функції Microsoft Excel. Тверді знання лінійного кореляційно-регресійного аналізу дозволяє майбутнім спеціалістам-практикам оцінювати тісноту лінійних зв'язків між економічними величинами, представленими вибірками статистичних даних, аналітично описувати ці взаємозв'язки та із певною вірогідністю прогнозувати розвиток економічних явищ та процесів.

Однак класичний математичний апарат парного та множинного кореляційно-регресійного аналізу не завжди дозволяє адекватно аналітично описати, а також дати відносно достовірний прогноз розвитку економічних та соціально-економічних процесів. Це пов'язано із тим, що на практиці лінійні взаємозв'язки є скоріше виключенням із правил, чим закономірністю. Використання лінійних моделей, зокрема і економетричних, викликане в першу чергу їх простістю. При цьому адекватність моделі знижується. У випадку, якщо залежність носить суттєво нелінійний характер застосування лінійної моделі взагалі не має жодного сенсу. Метод кусочно-лінійних наближень також в цьому випадку не вирішує проблеми повною мірою.

Для адекватного дослідження нелінійних економічних явищ та процесів, що представлені вибірками статистичних спостережень, розроблені відповідні розділи економетрії. Стандартних алгоритмів досліджень, як у випадку лінійних регресійних моделей, тут бути не може через складність та суттєву відмінність різних нелінійних функцій. Дана тема курсу «Сучасні проблеми і методи математичного комп'ютерного моделювання в економіці і менеджменті» дає магістрантам основні концептуальні підходи до специфікації, побудови, перевірці адекватності та прогностичної сили нелінійних регресійних моделей. Тим не менш, при застосуванні нелінійного регресійного аналізу в наукових та науково-практичних дослідженнях, якість моделювання буде визначатися також досвідом, інтуїцією та творчими якостями дослідників.

## 1. Типові приклади суттєво нелінійних залежностей в економіці

Необхідність застосування нелінійних регресійних моделей скоріше за все виникне на етапі її специфікації. Ознаками, що вказують на доцільність застосування саме моделей нелінійної регресії можуть бути наступні:

- виявлення відсутності тісного лінійного зв'язку між економічними величинами при проведенні кореляційного аналізу;
- низька якість лінійної моделі за коефіцієнтом детермінації або статистична незначущість параметрів моделі;
- висновки, що витікають із положень економічної теорії про необхідність застосування саме нелінійних регресійних моделей тощо.

Теоретичні передумови та особливості практичної реалізації перших двох пунктів детально описані в [1, 2]. В рамках даної роботи розглянемо деякі важливі нелінійні залежності, прийняті більшістю шкіл та напрямків сучасної економічної теорії.

Залежність податкових надходжень від ставки податку має суттєво нелінійний характер (рис. 1 а). Концепція має на увазі наявність оптимального рівня ставки податку за якої досягається максимум податкових надходжень. В сучасному розумінні залежність відображена на рис. 1 а була запропонована американським економістом Артуром Лаффером, однак подібні ідеї висказувались і до нього. Конкретні числові характеристики моделі, зокрема оптимальне значення ставки податку, різняться від країни, конкретної сфери господарчої діяльності, соціально-політичної ситуації тощо. В даному випадку нас цікавить лише форма кривої Лаффера, як прикладу суттєво-нелінійної залежності в економіці.

В деяких соціально-економічних умовах графічне відображення залежності інфляції і безробіття може бути представлене у вигляді кривої зображеної на рис. 1 б. Така залежність була запропонована англійським економістом Олбаном Філіпсом в 1958 р., який вивів її на основі емпіричних даних по Великобританії за 1861-1957 г. Крива Філіпса теоретично обґрунтовується тим, що чим більше безробіття тим менші доходи населення, а от же ріст цін (інфляція). Навпаки, чим менше безробіття, тим більші доходи населення, а от же, за логікою Філіпса, інфляція має рости. Крива Філіпса також являє собою класичний приклад нелінійної залежності в економіці. Однак її адекватність ставиться під сумнів багатьма сучасними економістами.

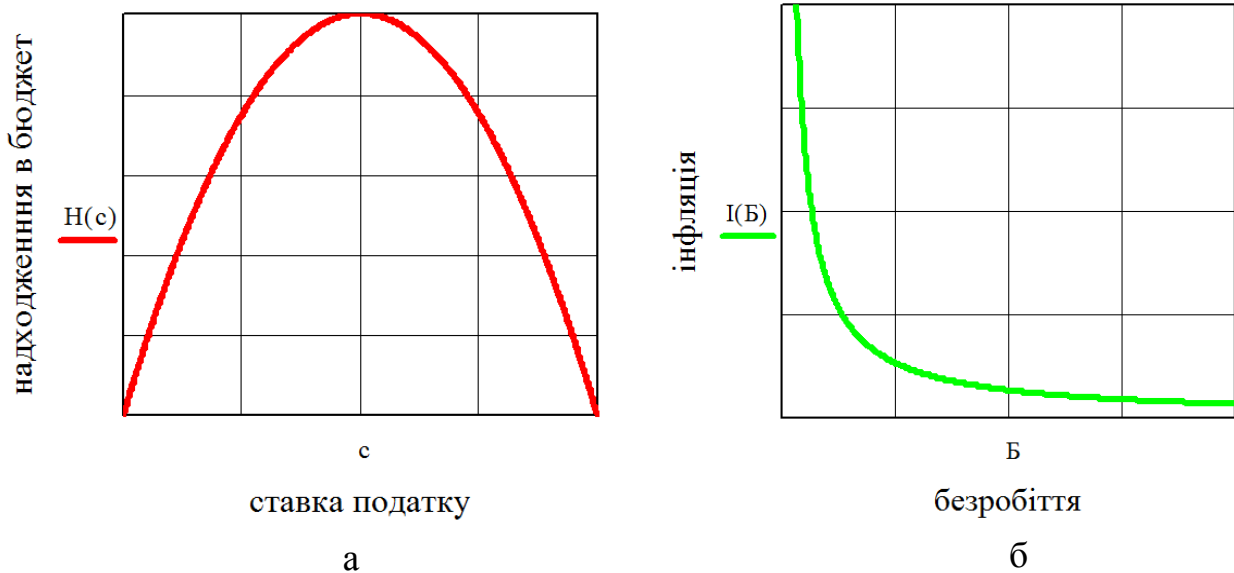


Рисунок 1 – Нелінійні залежності в економіці:  
а – крива Лафера, б – крива Філіпса

Іншим прикладом нелінійної залежності в економіці є залежність собівартості одиниці продукції від кількості в якій вона виробляється. Конкретний вид графіка тут може відрізнятися в залежності від виду продукції, виробничих та економічних умов в яких воно здійснюється тощо. Один із типів такого графіку представлений на рис. 2.

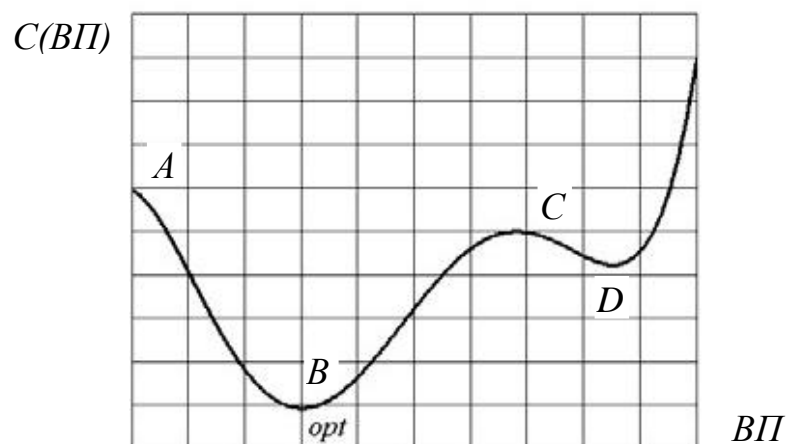


Рисунок 2 – Залежність собівартості  $C(VП)$  одиниці продукції від кількості виробленої продукції  $VП$

Суттєва нелінійність такого графіку обумовлена позитивним та негативним ефектами від масштабу діяльності. Зменшення собівартості одиниці продукції  $C(BП)$  на ділянках кривої  $A-B$ ,  $B-D$  зумовлено позитивним ефектом від масштабу (економією на масштабі). Позитивний ефект від масштабу визначається, в основному, розподіленням умовно-постійних витрат на більшу кількість виробленої продукції, а от же зменшенням собівартості одиниці продукції.

Негативний ефект від масштабу (відрізок  $B-C$  та частина кривої після точки  $D$ ) полягає вичерпанні найбільш доступних та дешевих виробничих та природних ресурсів. Негативний ефект від масштабу особливо яскраво виражається в сировинних галузях економіки.

Позитивні та негативні аспекти ефекту від масштабу створюють нелінійну залежність собівартості одиниці виробленої продукції від її кількості (рис. 2). Окрім виробничої сфери ефекти від масштабу мають місце в торгівлі, маркетингу, банківській справі тощо.

Усі вищенаведені функції є прикладом парних нелінійних регресійних моделей. Типовим прикладом множинних нелінійних моделей регресії можуть слугувати виробничі функції. Виробничі функції – економіко-математичні моделі, що виражають залежність між кількістю виробленої продукції та факторами виробництва, а саме природними ресурсами, працею, капіталом, технологіями тощо.

Однією із найбільш відомих виробничих функцій є функція Кобба-Дугласа (1), яка характеризує залежність обсягу  $Q$  виробництва продукції від витрат праці  $L$  та капіталу  $K$ :

$$Q(L, K) = A \cdot L^\alpha \cdot K^\beta \quad (1)$$

де  $A$  – технологічний коефіцієнт;

$\alpha$  – коефіцієнт еластичності по праці;

$\beta$  – коефіцієнт еластичності по капіталу.

Один із можливих варіантів графічної інтерпретації функції Кобба-Дугласа зображений на рис. 3. Функція (1) є найбільш відомою, але не

єдиною із виробничих функцій. Наприклад за статистичними даними можна отримати функції, що відображають залежність кількості сільськогосподарської продукції від площі посівів та кількості внесених добрив.

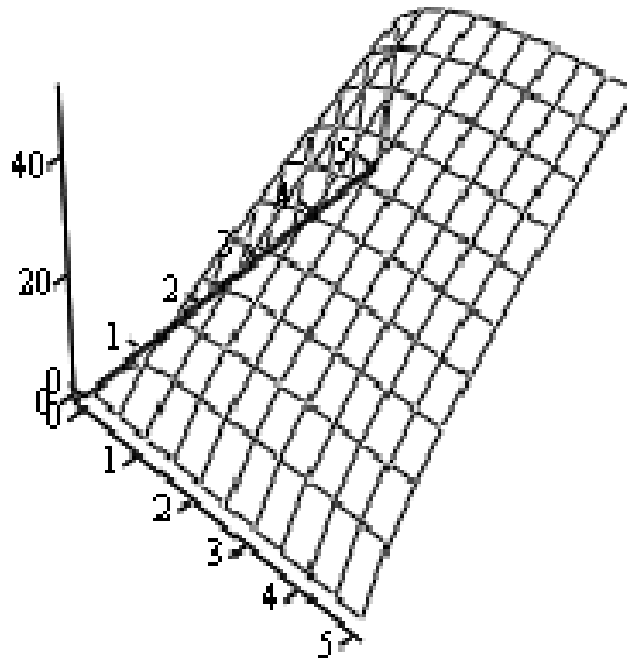


Рисунок 3 – Функція Кобба-Дугласа

В рамках даного пункту ми розглянули одні із найбільш яскравих прикладів суттєво нелінійних моделей парної та множинної регресії. Перейдемо до принципів побудови таких моделей.

## 2. Регресійні моделі нелінійні за змінними

Регресійні моделі нелінійні за змінними – моделі, що можуть бути приведені до лінійних шляхом заміни наявних змінних на нові.

Типовим розповсюдженим прикладом нелінійної за змінними регресійної моделі є поліноміальна регресія.

*Поліноміальна регресія* – модель парної нелінійної регресії, котра описує взаємозв'язок двох економічних величин, представлених вибірками статистичних даних, залежністю виду:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \beta_2 \cdot x^2 + \dots + \beta_k \cdot x^k + \varepsilon \quad (2)$$

де  $\beta_0, \beta_1 \cdot x, \beta_2 \cdot x^2, \beta_k \cdot x^k$  – члени полінома;

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  – корні полінома;

$k$  – ступінь полінома.

В економетричних дослідженнях, як правило, використовуються поліноми 2-го та 3-го ступенів. Поліноми ступінь котрих перевищує 6, в економетричних дослідженнях використовуються вкрай рідко. Це пов'язане із тим, що, як правило, кожний наступний член поліному, вносить в значення залежної змінної менший вклад, ніж попередній член. Однак, кожний наступний член поліному ускладнює побудову та практичне використання поліноміальної регресії.

Корні поліноміальної регресії оцінюються, як правило, за допомогою перетворення моделі (2) в модель множинної лінійної регресії, шляхом введення нових змінних, а саме:  $x_1 = x, x_2 = x^2, \dots, x_k = x^k$ . У результаті отримаємо модель виду:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + \dots + \beta_k \cdot x_k + \varepsilon, \quad (3)$$

Так, задача пошуку корнів поліноміальної регресії (2), зводиться до задачі пошуку параметрів множинної лінійної регресії (1), які можуть бути знайдені, наприклад, із застосуванням методу найменших квадратів.

Вищенаведений алгоритм пошуку корнів поліному наведений в більшості підручників по економетрії [4, 5 та ін.], а також реалізований багатьма комп'ютерними програмами наприклад Microsoft Excel та Mathcad. Однак, при виростанні даного алгоритму пошуку корнів поліному часто забувають, що модель множинної лінійної регресії (3) будується в умовах мультиколінеарності. Це може призвести до нестійкості оцінок корнів поліному та нереалістичних прогнозів на основі такої моделі. Виходом із такої ситуації може слугувати відмова від методу найменших квадратів на користь оригінальної функції незв'язності.

Поліноміальна регресія (2) може бути застосована, наприклад, до опису залежності собівартості  $C(ВП)$  одиниці продукції від кількості виробленої продукції  $ВП$ , також дуже корисним буває її застосування для отримання поліноміального тренду часових рядів.

Перевагою поліноміальної регресії є можливість аналітичного опису складних нелінійних залежностей. Недоліком є можлива нестійка оцінка корнів поліному, а також недоцільність екстраполяції такого рівняння регресії.

У якості іще одного прикладу нелінійної за змінними регресійної моделі розглянемо зворотну залежність:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{x} + \varepsilon. \quad (4)$$

Введемо нову змінну  $x_1 = \frac{1}{x}$ . У результаті отримаємо модель парної лінійної регресії:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \varepsilon. \quad (5)$$

Параметри рівняння парної лінійної регресії (5) можна легко оцінити, наприклад із застосуванням методу найменших квадратів.

На представлених вище прикладах показано, що нелінійна за змінними модель легко приводиться до лінійної, шляхом введення нових, незалежних змінних. Параметри отриманих лінійних моделей легко оцінити, наприклад, із застосуванням методу найменших квадратів або шляхом формування іншої функції незв'язності. Нелінійні за змінними моделі є найпростішим прикладом нелінійної регресії. Розглянемо більш складні випадки.

### **3. Нелінійні за параметрами регресійні моделі**

Регресійні моделі нелінійні за параметрами – моделі, що не можуть бути приведені до лінійних шляхом заміни наявних змінних на нові. Оцінка

параметрів таких моделей проводиться або шляхом зміни структури моделі за допомогою спеціальних математичних процедур, або шляхом ітераційної підгонки моделі до емпіричних статистичних даних.

Розглянемо нелінійні регресійні моделі, що можуть бути приведені до лінійних шляхом символічних перетворень. Найпростішим прикладом тут буде ступенева функція виду:

$$\hat{y} = \beta_0 \cdot x^{\beta_1} \cdot \varepsilon. \quad (6)$$

Необхідно звернути увагу, на те, що похибка  $\varepsilon$  тут не додається до рівняння регресії, як зазвичай, а береться її добуток із рівнянням регресії. В протилежному випадку, якщо б похибка  $\varepsilon$  додавалася до рівняння регресії, то модель (6) відносилась до регресії які неможливо привести до лінійних за допомогою спеціальних математичних символічних перетворень.

Логарифмуємо праву та ліву частину рівняння (6):

$$\ln(\hat{y}) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \cdot \ln(x) + \ln(\varepsilon). \quad (7)$$

Шляхом логарифмування кожного із спостережень у вибірках вихідних статистичних даних, перейдемо до нових змінних  $\hat{y}_1 = \ln(\hat{y})$ ,  $x_1 = \ln(x)$ . Окрім того введемо новий параметр  $\alpha = \ln(\beta_0)$  та нову похибку  $u = \ln(\varepsilon)$ . У результаті такої заміни отримаємо модель парної лінійної регресії:

$$\hat{y}_1 = \alpha + \beta_1 \cdot x_1 + u. \quad (8)$$

Параметри  $\alpha$  та  $\beta_1$  можна оцінити, наприклад за допомогою методу найменших квадратів. Параметр  $\beta_0 = e^\alpha$ .

Вищевикладений алгоритм можна також використовувати із метою побудови множинної нелінійної регресії для ступеневих функцій, наприклад виробничої функції Кобба-Дугласа (1). Припустимо маємо статистичні вибірки значень витрат праці  $L$  та капіталу  $K$  для виробництва продукції, що

визначається вибіркою  $Q$ . Тоді взаємозв'язок між цими величинами може бути представлений у вигляді моделі множинної регресії виду:

$$Q(L, K) = A \cdot L^\alpha \cdot K^\beta \cdot \varepsilon. \quad (9)$$

Взявши логарифм від обох частин рівняння (9) отримаємо:

$$\ln(Q) = \ln(A) + \alpha \cdot \ln(L) + \beta \cdot \ln(K) + \ln(\varepsilon). \quad (10)$$

Введемо нові змінні  $Q_1 = \ln(Q)$ ,  $L_1 = \ln(L)$ ,  $K_1 = \ln(K)$  та новий параметр  $A_1 = \ln(A)$ , а також нові випадкові відхилення  $u = \ln(\varepsilon)$ . В результаті перейдемо до моделі множинної лінійної регресії:

$$Q_1(L_1, K_1) = A_1 + \alpha \cdot L_1 + \beta \cdot K_1 + u. \quad (11)$$

де  $Q_1$  – залежна змінна;

$L_1, K_1$  – незалежні змінні;

$A_1, \alpha, \beta$  – параметри;

$u$  – випадкові відхилення.

Параметр  $A = e^{A_1}$ .

В багатьох вітчизняних та іноземних джерелах до внутрішньолінійних моделей відносять нелінійні по змінним регресійні моделі та нелінійні по параметрам регресійні моделі, що можуть бути приведені до лінійних за допомогою спеціальних процедур символічної математики.

Дійсно нелінійними моделями вважають нелінійні за параметрами регресійні моделі, що не можуть бути приведені до лінійних за допомогою перетворень символічної математики. Побудова таких регресійних моделей здійснюється, як правило, шляхом ітераційної підгонки рівняння регресії до емпіричних статистичних даних. На сучасному етапі розвитку прикладної математики розроблена значна кількість програмних продуктів для побудови нелінійних за параметрами регресійних моделей.

При побудові нелінійних регресійних моделей один і той же економічний процес чи явище можуть бути описані декількома аналітичними залежностями, які в такому випадку будуть називатися *конкуруючими*. Через складність та різноманітність нелінійних функцій єдиного загальноприйнятого принципу вибору однієї моделі із декількох конкуруючих немає. Однак є певні підходи та критерії, орієнтовані на які тут можна зробити вдалий вибір та оцінити якість регресійної моделі.

#### **4. Кількісна оцінка якості регресійних моделей**

Очевидно, що на відміну від лінійних регресійних моделей, побудованих із застосуванням методу найменших квадратів, стандартного загальноприйнятого алгоритму аналізу якості нелінійних моделей немає. Це пов'язано зі складністю та різноманітністю моделей нелінійної регресії. Із питанням оцінки якості моделі тісно пов'язане питання вибору найбільш адекватної моделі із декількох конкуруючих. Згадаємо, що під адекватністю розуміють здатність моделі із достатнім ступенем точності описувати об'єкт досліджень, в нашому випадку спостерігаємо економічне явище чи процес.

Серед графічних методів оцінки адекватності моделі та вибору однієї із декількох конкуруючих можна використати побудову кореляційного поля та ліній регресії. За отриманим графіком обрати ту модель, яка найкраще графічно описує кореляційне поле. Недоліками такого методу є його суб'єктивність та складність застосування у випадку більш ніж двох керованих змінних.

Для більш точної та об'єктивної оцінки якості моделей застосовуються аналітичні кількісні критерії.

Абсолютне значення величини відхилення фактичних спостережень  $y_i$  залежної змінної від розрахункових  $\hat{y}_i$ , отриманих за моделлю називається *помилкою апроксимації*. Ця величина  $|y_i - \hat{y}_i|$  є мірою якості опису моделлю конкретного статистичного спостереження. Очевидно, що кількість помилок апроксимації дорівнює кількості спостережень у вибірці, причому абсолютні помилки апроксимації не можуть бути співставлені між собою. Це пов'язано із тим, що значення співвідносяться до різних за величиною значенням

залежної змінної, які в даному випадку не співставні.

Необхідно зауважити, що *апроксимацією* називається процедура аналітичного і (або) графічного опису емпіричних спостережень, так щоб вони з більшою або меншою точністю описувались гладкою кривою або, якщо є можливість, прямою лінією.

Для порівняння точності із якою із якою регресійна модель описує різні спостереження використовують *відносну помилку апроксимації*, яка визначається за формулою:

$$A_i = \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i} \cdot 100\% \quad (12)$$

Відносні помилки апроксимації уже спів ставні між собою.

Мірою якості побудови регресійної моделі, а також кількісним критерієм порівняння конкуруючих моделей є *середня помилка апроксимації*, яка обчислюється за формулою:

$$A_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i} \cdot 100\% \quad (13)$$

де  $n$  – кількість спостережень у вибірці.

Аналогом та доповненням середньої помилки апроксимації є індекс кореляції. На відміну від лінійного регресійного аналізу де коефіцієнт кореляції є мірою тісноти лінійного зв'язку двох випадкових величин представлених двома вибірками статистичних даних, в нелінійному регресійному аналізі індекс кореляції є мірою якості моделі.

*Індекс кореляції* – міра порівняння регресійної моделі зі статистичними даними, які вона описує, обчислюється за формулою:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{зал.}^2}{\sigma_{виб.}^2}} \quad (14)$$

де  $\sigma_{зал.}^2$  – дисперсія залишків;

$\sigma_{виб.}^2$  – вибіркова дисперсія.

Як відомо дисперсія залишків та вибіркова дисперсія визначаються за наступними формулами:

$$\sigma_{зал.}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (15)$$

$$\sigma_{виб.}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (16)$$

де  $\bar{y}$  – середнє значення залежної змінної.

Враховуючи формули (15) та (16) перепишемо рівняння (14) у наступному вигляді:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (17)$$

Величина індексу кореляції може змінюватись від 0 до 1. Чим більше індекс кореляції тим краще регресійна модель описує вихідні статистичні дані.

Вищеперераховані кількісні критерії оцінки якості побудови моделей можуть бути узагальнені під назвою критерії *максимальної відповідності* моделі об'єкту досліджень.

Із декількох конкуруючих моделей необхідно обирати ту для якої середня помилка апроксимації найменша, а індекс кореляції найбільший. Однак це правило діє тільки при інших рівних умовах за якими оцінюється модель. Розглянемо ці додаткові важливі умови оцінки якості та порівняння конкуруючих моделей.

## 5. Якісні критерії оцінки та порівняння конкуруючих моделей

Важливим критерієм оцінки якості моделі є її *простість*. Як відомо, модель, відображає лише важливі, відомі досліднику властивості об'єкта-оригінала. Тому, там де не потрібна надлишкова точність використовують більш прості моделі.

Критерій простоти моделі часто входить в суперечку із критерієм максимальної відповідності об'єкту досліджень. Саме тому в кожному конкретному випадку досліднику потрібно знайти компроміс між максимальною відповідністю моделі та її простістю. Критерій простоти моделі не є самодостатнім, а лише наслідком однієї із наступних причин:

- мінімізації часу, необхідного для побудови моделі;
- доступність моделі для обраної цільової аудиторії;
- можливість використання моделі спеціалістами-практиками;
- можливість використання моделі, як складової частини більш крупних моделей тощо.

Якщо рівняння регресії, що зв'язує декілька економічних величин, не піддається принциповим змінам при його оцінці за різними вибірками статистичних даних, які характеризують зазначені величини, то кажуть, що модель регресії має властивість *єдиності*. Цей критерій передбачає, що модель, яка із високим ступенем точності описує певний економічний або соціально-економічний процес повинна із достатнім ступенем точності описувати аналогічний процес, тобто аналітична залежність має залишитись такою ж. Змінам піддаються лише параметри моделі, при чому ступінь зміни цих параметрів має знаходитись у відповідності зі ступенем зміни вихідних статистичних даних. Якщо незначні зміни вихідних статистичних даних приводить до суттєвої зміни оцінок параметрів моделі, то кажуть, що такі оцінки *не стійкі*.

В літературі [5] у якості важливого критерію оцінки та порівняння конкуруючих регресійних моделей наводиться їх *відповідність положенням економічної теорії*. Однак відносно такого критерію може виникати наступне питання: положенням якої самої зі шкіл та напрямків економічної теорії має вповідати модель? Тим не менш, регресійна модель повинна відповідати загальноприйнятим положенням економічної теорії та практичним міркуванням.

Якщо, прогноз отриманий за рівнянням регресії більш-менш співпадає із реальними значеннями досліджуємої величини, то така модель може бути визнана якісною. Кажуть, що її *прогнознi якостi*, як один із критеріїв оцінки та порівняння конкуруючих моделей, високі.

Кількісним критерієм прогнозних якостей моделі може слугувати наступне співвідношення [5]:

$$V = \frac{s}{\bar{y}}, \quad (18)$$

де  $s$  – стандартна помилка регресії, що обчислюється за формулою:

$$s = \sqrt{\frac{\sigma_{зал.}^2}{n - m - 1}}. \quad (19)$$

де  $m$  – кількість незалежних змінних.

Якщо величина  $V$  мала, а саме вона визначає відносну помилку прогнозу у відсотках, та відсутня автокореляція залишків, то прогнознi якостi моделі є високими.

Якщо рівняння регресії використовується для прогнозування, то величина  $V$  зазвичай розраховується не для того періоду, на котрому оцінювалось рівняння, а для певного слідуючого за ним інтервалу, для котрого відомі значення залежної та незалежної змінних. Таким чином на практиці перевіряються прогнознi якостi моделі. У випадку позитивного рішення, якщо можна спрогнозувати значення пояснюючих змінних на деякий наступний період, побудована модель обґрунтовано може бути використана для прогнозу значень залежної змінної. При цьому необхідно пам'ятати, що період прогнозування має бути, принаймні, в 3 рази коротше за період, за яким оцінювалось рівняння регресії.

Враховуючи складність та неоднозначність економічних явищ та процесів дослідник сам має обирати найбільш важливі критерії обрання однієї моделі із декількох конкуруючих.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Методичні вказівки до розрахунково-графічного завдання «Парний кореляційно-регресійний аналіз» за розділом «Економетрія» дисципліни «Економіко-математичне моделювання» для студентів заочної форми навчання спеціальностей 8.030601 «Менеджмент організацій», 8.050106 «Облік та аудит», 8.050107 «Маркетинг» / Уклад. О.Є. Скворчевський, В.Л. Товажнянський, Р.О. Побережний. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – 52 с.

2. Методичні вказівки до розрахункового завдання «Множинний лінійний кореляційний аналіз як інструмент прийняття управлінського рішення» за курсом «Сучасні проблеми і методи математичного комп'ютерного моделювання в економіці і менеджменті» для студентів очної та заочної форми навчання спеціальностей 6.030601 «Менеджмент», 6.030501 «Економіка підприємства», 6.030509 «Облік та аудит», 6.030507 «Маркетинг», 6.030507 «Інтелектуальна власність» / уклад. О.Є. Скворчевський, В.Л. Товажнянський. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – 28 с.

3. Щербаков С.М. Математическая экономика: Учебное пособие. – Ростов-на-Дону: РГЭУ «РИНХ», 2004. – 116 с.

4. Елисеєва И.И. Эконометрика : учеб. / И.И. Елисеєва ; под ред. И.И. Елисеєвой. – М. : Финансы и статистика, 2004. – 344 с.

5. Бородич Эконометрика

6. Магнус Я.Р. Эконометрика. Начальный курс : учеб. / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. – 6-е изд., перераб. и доп. – М. : Дело, 2004. – 576 с.

7. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 432 с.

8. Лещинський О.Л. Економетрія : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Л. Лещинський, В.В. Рязанцева, О.О. Юнькова. – К. : МАУП, 2000. – 208 с.

9. Доугерти К. Введение в эконометрику / К. Доугерти ; пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 1999. – 402 с.

10. Джонстон Дж. Эконометрические методы / Дж. Джонстон ; пер. с англ. – М.: Статистика, 1980. – 444 с.

Навчальне видання

НЕЛІНІЙНІ РЕГРЕСІЙНІ МОДЕЛІ В  
ДОСЛІДЖЕННЯХ ЕКОНОМІЧНИХ ЯВИЩ ТА ПРОЦЕСІВ

Конспект лекції з курсу «Сучасні проблеми і методи математичного комп'ютерного моделювання в економіці і менеджменті» для студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання спеціальностей 6.030601 «Менеджмент», 6.030501 «Економіка підприємства», 6.030509 «Облік та аудит», 6.030507 «Маркетинг», 6.030507 «Інтелектуальна власність»

Укладач: СКВОРЧЕВСЬКИЙ Олександр Євгенович

Редактор \_\_\_\_\_

План 2016 р., поз. \_\_\_\_

Підп. до друку \_\_. \_\_. \_\_. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.  
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 2,2.  
Обл.-вид. арк. 1,41. Наклад 100 пр. Зам. № \_\_\_\_\_. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХПІ».  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №3657 від 24.12.2009 р.  
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

---

Друкарня НТУ «ХПІ».  
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.