УДК 513.88

С. Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО

КРИТЕРИЙ СОХРАНЕНИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ОТ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Статья посвящена изучению связи между непрерывностью функции и ее второй производной, заданных на оси в некоторой топологии $\Im$, которая слабее естественной топологии $\Im_0$. Рассматриваются дважды дифференцируемые абстрактные непрерывные на оси в некоторой более слабой топологии (в частности почти автоморфные или почти периодические) функции со значениями в банаховом пространстве. В работе представлены критерии $\Im$ – непрерывности (почти периодичности, почти автоморфности) второй производной в зависимости от $\Im$ – непрерывности (почти периодичности, почти автоморфности) самой функции. Для первой производной предполагается только ее существование, обеспечивающее существование второй производной в естественной топологии на оси.

Ключевые слова: непрерывность, равномерная непрерывность, квазиравномерная непрерывность, компактность, почти периодичность, почти автоморфность, дифференцируемость функции, абстрактная функция.

С. Д. ДІМІТРОВА-БУРЛАЄНКО

КРИТЕРІЙ ЗБЕРЕЖЕННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОСТІ ДРУГОЇ ПОХІДНОЇ ВІД МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Стаття присвячена вивченню зв'язку між неперервністю функції і її другої похідної, заданих на осі в деякій топології $\Im$, яка є слабкішою за природну топологію $\Im_0$. Розглядаються абстрактні неперервні на осі в деякій слабкішій топології (зокрема майже автоморфні або майже періодичні) функції зі значеннями в банаховому просторі, які мають другу похідну. В роботі представлені критерії $\Im$ – неперервності (майже періодичності, майже автоморфності) другої похідної в залежності від $\Im$ – неперервності (майже періодичності, майже автоморфності) самої функції. Для першої похідної передбачається тільки її існування, що забезпечує існування другої похідної в природній топології на осі.

Ключові слова: неперервність, рівномірна неперервність, квазірівномірна неперервність, компактність, майже періодичність, майже автоморфність, друга похідна, абстрактна функція.

S. D. DIMITROVA-BURLAYENKO

CRITERION FOR PRESERVING ALMOST PERIODICITY OF THE SECOND DERIVATIVE OF AN ALMOST PERIODIC FUNCTION

A question on preserving the continuity of a function in the given topology plays an important role in the theory of almost periodic and almost automorphic functions. As known, the almost periodic, almost automorphic functions are respectively uniformly continuous, compact continuous functions in some weaker topology $\Im$ than the natural topology $\Im_0$ defined on the numerical axis. The present work belongs to this field and is devoted to the study of the relationship between the continuity of a function and its second derivative, defined on an axis in a certain topology, which is weaker than the natural topology. We consider a twice-differentiable abstract continuous function on the axis in some weaker topology (in particular, an almost automorphic or almost periodic function) with values in a Banach space. This study presents the criteria of $\Im$ – continuity (almost periodicity, almost automorphicity) of the second derivative depending on $\Im$ – continuity (almost periodicity, almost automorphicity) of the function itself. If a function is continuous in a weaker topology, then the second derivative is continuous in this topology if and only if it is locally uniformly continuous. Let a continuous almost automorphic function be given and its second derivative exists for any shift and compact. If the second derivative of the limit shift is equal to the limit shift of the second derivative, then the first and second derivatives are continuous almost automorphic functions.

Key words: continuity, uniform continuity, quasi-uniform continuity, compactness, almost periodicity, almost automorphic, second derivative, abstract function.

Введение. Настоящая работа является продолжением исследований автора в области *дифференцирования абстрактных функций*, начатых в статьях [1 – 3]. В этих работах автором рассмотрены критерии сохранения непрерывности производной функции, заданной на числовой оси, со значениями в *банаховом пространстве*, которая непрерывна как в *естественной топологии*, так и в некоторой более слабой топологии на оси. Получены условия, при которых производная непрерывной почти *автоморфной* (асимптотически почти автоморфной, почти периодической, асимптотически почти периодической) функции остается функцией того же класса.

В теории почти периодических и почти автоморфных функций важную роль играет вопрос о сохранении непрерывности функции в некоторой заданной топологии. Как известно, почти периодические, *Левитановские почти периодические*, почти автоморфные функции являются соответственно равномерно непрерывными, непрерывными, непрерывными и компактными функциями в некоторой более слабой топологии $\Im$, чем естественная топология $\Im_0$, заданная на числовой оси [4 – 11]. Этому направлению принадлежит и настоящая работа, которая посвящена изучению связи между непрерывностью функции и ее второй производной, заданных на оси в некоторой топологии $\Im$, слабее естественной топологии $\Im_0$. К этой тематике относятся так же результаты об интегрировании почти периодических, Левитановских почти периодических, почти автоморфных функций, о непрерывности решения разностного уравнения $x(t+h)-x(t)=\varphi_h(t)$ ([12 – 15], [4], [5], [6]). В этих работах было показано, что при определенных условиях из непрерывности первой производной функции f' в топологии $\Im$ следует непрерывность самой функции f в топологии $\Im$. В обратном направлении долгое время был использован *результат Бохнера* ([16], с. 29) – *если производная почти периодической функции равномерно непрерывна на оси, то она почти периодична.* Для L – почти периодичности (почти автоморфности) производной L – почти периодической (почти автоморфной) функции также требовалась ее равномерная непрерывность в топологии $\Im_0$. В работах ([17], [1], [3]) были найдены критерии $\Im$ – непрерывности (почти периодичности, почти автоморфности) первой производной $\Im$ – непрерывной (почти периодической, почти автоморфной) функции. Равномерная непрерывность в *теореме Бохнера* была заменена на $(\Im, \Im_0)$ –*локальную равномерную непрерывность*.

В настоящей статье представлены критерии $\Im$ – непрерывности (почти периодичности, почти автоморфности) второй производной в зависимости от $\Im$ – непрерывности (почти периодичности, почти автоморфности) самой функции. Для первой производной предполагается только ее существование, обеспечивающее существование второй производной в естественной топологии на оси.

Основные обозначения, определения и вспомогательные результаты. Для более ясного понимания рассуждений сформулируем некоторые определения и результаты, на которые опирается изложение. Многие из них вводились для числовых функций, обобщались на абстрактные функции со значениями в пространствах Банаха. Все рассмотренные функции заданы на числовой оси и принимают значения в *сепарабельном банаховом пространстве* Y.

Аддитивную группу вещественных чисел будем обозначать через $\Re$. Естественную топологию, определенную множеством открытых интервалов (p, q), $p, q \in \Re$, обозначим через $\Im_0$. Через $\Im$ будем обозначать топологию на $\Re$, которая слабее $\Im_0$ ($\Im \prec \Im_0$). Через Y обозначим сепарабельное пространство Банаха, Y^* – его сопряженное, $\langle y^*, y \rangle$ – линейная непрерывная форма на Y, $y \in Y$, $y^* \in Y^*$, $\|y\|$ – норма элемента $y \in Y$.

Введем понятие сдвига функции: если a – число, то $f(t+a) = f_a(t)$ будем называть сдвигом функции $f(t)$. Пусть задана числовая последовательность $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой поточечно сходится последовательность $\left\{f\left(t + a_{n_k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ к некоторой функции. Этот предел условимся обозначать также через $f_a(t)$, то есть $f_a(t)$ – предельный сдвиг, соответствующий последовательности $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если дано равенство $f_a(t) = g_a(t)$, то будем предполагать, что с обеих сторон существует одна и та же подпоследовательность, на которой достигается равенство, то есть

$$\lim_k f\left(t + a_{n_k}\right) = \lim_k g\left(t + a_{n_k}\right), \quad \forall t.$$

Определение **1** [18 – 20]. Последовательность функций $\left\{f_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(t): \Re \to Y$ квазиравномерно сходится (то есть *по Арцела*) к функции $f(t): \Re \to Y$, если сходится поточечно к функции $f(t)$ и для любых $\varepsilon > 0$ и индекса K существуют индексы M, N $(N > M > K)$ такие, что для любого $t \in \Re$

$$\min_{M \le n \le N} \left\| f_n(t) - f(t) \right\| < \varepsilon.$$

Определение **2** ([20]). Последовательность функций $\left\{f_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(t)$ почти равномерно, если она квазиравномерно сходится вместе с каждой своей подпоследовательностью.

Термин *почти равномерно* предложен *Г. М. Фихтенгольцем*.

Определение **3** ([21]). Поточечная сходимость последовательности отображений $\left\{f_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ к отображению $f(t)$, заданных на топологическом пространстве X со значениями в банаховом пространстве Y, называется *квазиравномерной сходимостью по Александрову*, если для всякого натурального числа K существует не более чем счетное открытое покрытие $\{\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_k, ...\}$ пространства X и такая последовательность $n_1, n_2, ..., n_k, ...$ натуральных чисел, больших K, что $\left\| f(t) - f_{n_k}(t) \right\| < \varepsilon$ для всякого $t \in \Gamma_k$.

Предложение **1** ([21]). Пусть задана последовательность непрерывных отображений $\left\{f_n\left(t\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, заданных на топологическом пространстве X и со значениями в банаховом пространстве Y, поточечно сходящаяся к отображению $f(t)$. Для того чтобы отображение $f(t)$ было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы сходимость была квазиравномерной согласно определению 3 (то есть квазиравномерной *по Александрову*).

Определение почти периодической функции введем с помощью *критерия Бохнера* [22].

Определение 4. Непрерывная функция $f(t)$ называется почти периодической (п.п.ф.), если для любой последовательности $\left\{h_i\right\}_{i=1}^{\infty}$, $-\infty < h_i < \infty$ семейство функций $\left\{f\left(t+h_i\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ компактно в смысле равномерной сходимости на всей вещественной оси.

Определение 5 ([11], [23], [7], [3]) . Непрерывная функция $f\left(t\right):\Re \to Y$ называется (непрерывной) *почти автоморфной* (п.а.ф.), если из любой последовательности $\left\{x_n'\right\}_{n=1}^{\infty} \subset R$ можно извлечь подпоследовательность $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \left\{x_n'\right\}_{n=1}^{\infty}$ так, что существует (непрерывная) функция $g\left(t\right):\Re \to Y$ и

$$\lim_n f\left(t+x_n\right) = g\left(t\right) \quad \forall t \in \Re\,, \ \lim_m g\left(t-x_m\right) = f\left(t\right) \quad \forall t \in \Re\,.$$

Определение 6. Пусть топология $\Im \prec \Im_0$. Функцию $g\left(t\right):\Re \to Y$ будем называть $\left(\Im, \Im_0\right)$ – локально равномерно непрерывной, если для любой пары $\left(\varepsilon, x\right)$ $\left(\varepsilon > 0, \quad x \in \left(-\infty, +\infty\right)\right)$ существует окрестность нуля $U = U_{x,\varepsilon}$ в топологии $\Im$ и окрестность нуля $V = V_{x,\varepsilon}$ в топологии $\Im_0$ такие, что

$$\sup_{t \in x+U} \left\|g\left(t+h\right) - g\left(t\right)\right\| < \varepsilon \quad \forall h \in V\,.$$

Заметим, что любая равномерно непрерывная функция в топологии $\Im_0$ является $\left(\Im, \Im_0\right)$ – локально равномерно непрерывной (для любой топологии $\Im \prec \Im_0$).

Определение 7 ([10]). Множество E называется относительно плотным множеством на группе $\Re$, если существует q элементов $c_1, c_2, ..., c_q$ таких, что

$$\Re = \bigcup_{i=1}^{q} \left(c_i + E\right).$$

Предложение 2 ([22], [16]). Непрерывная функция $f\left(t\right):\Re \to Y$ является почти периодической тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$U_{\varepsilon}\left(f\right) = \left\{\tau \in \Re : \sup_{t \in R} \left\|f\left(t+\tau\right) - f\left(t\right)\right\| < \varepsilon\right\}$$

относительно плотно на оси.

Предложение 2 дает возможность ввести топологию $\Im_{U,f}$ на группе с помощью множеств $U_{\varepsilon}\left(f\right)$.

Предложение 3 ([10], [7 – 9], [22]). Каждая почти автоморфная функция $f\left(t\right):\Re \to Y$ непрерывна в топологии $\Im_{A,f}$, определенной множествами

$$A_{N,\varepsilon} = \left\{\tau \in \Re : \sup_{t \in N} \left\|f\left(t+\tau\right) - f\left(t\right)\right\| < \varepsilon\right\},$$

где N – компактное множество чисел, $\varepsilon > 0$.

Предложение 4 ([7]). Пусть задана п.а. функция $f\left(t\right):\Re \to Y$ и по ней введена топология $\Im_{A,f}$ на группе $\Re$. Любая компактная функция $g(t)$, заданная на группе $\Re$, которая непрерывна в топологии $\Im_{A,f}$, является почти автоморфной.

Предложения 3 и 4 выполняют ту же самую роль, что и предложение 2, но только для почти автоморфных функций.

Определение 8. Непрерывную функцию $g\left(t\right):\Re \to Y$ будем называть слабо $\left(\Im, \Im_0\right)$ – локально равномерно непрерывной, если для любого $y^* \in Y^*$ числовая функция $\left\langle y^*, g\left(t\right)\right\rangle$ является $\left(\Im, \Im_0\right)$ – локально равномерно непрерывной.

Например, функция $g(t):\Re\to Y$ является слабо $\left(\Im_{A,f},\Im_0\right)$ – локально равномерно непрерывной, если для любого $y^*\in Y^*$ и любой пары (ε,x) ($\varepsilon>0$, $x\in(-\infty,+\infty)$) существует окрестность нуля $A=A_{x,\varepsilon}\left(y^*\right)$ вида

$$A=A_{x,\varepsilon}\left(y^*\right)=\left\{\tau\in\Re:\sup_{t\in N}\left\|f(t+\tau)-f(t)\right\|<\varepsilon\right\},$$

где N $(N\subset\Re)$ – компактное множество, и окрестность нуля $V=V_{x,\varepsilon}\left(y^*\right)$ в топологии $\Im_0$ такие, что

$$\sup_{t\in x+A}\left|\left\langle y^*,g(t+h)-g(t)\right\rangle\right|<\varepsilon\quad\forall h\in V.$$

Предложение 5 ([1]). Пусть $f(t):\Re\to Y$ имеет конечную производную в любой точке оси в естественной топологии $\Im_0$ и $f(t)$ непрерывна в более слабой топологии $\Im$ ($\Im\prec\Im_0$). Для непрерывности производной $f'(t)$ в более слабой топологи $\Im$ необходимо и достаточно, чтобы она была $(\Im,\Im_0)$ – локально равномерно непрерывной.

Замечание 1. Сформулированное предложение отличается только терминологией от опубликованного в работе [1]. Тут использовано введенное понятие $(\Im,\Im_0)$ – *локально равномерно непрерывной функции.*

Замечание 2. В работах [6], [12] было показано при определенных условиях, что если производная непрерывна в топологии $\Im$, то и функция (то есть интеграл) непрерывна в топологии $\Im$. В предложении 5 показано, что из непрерывности функции в топологии $\Im$ при определенных условиях следует непрерывность производной в топологии $\Im$.

Предложение **6** ([1]). Пусть функция $f(t):\Re\to Y$ имеет конечную производную в любой точке оси $\Re$ в естественной топологии $\Im_0$ и равномерно непрерывна в более слабой топологии $\Im$, $(\Im\prec\Im_0)$. Для равномерной непрерывности производной $f'(t)$ в более слабой топологии $\Im$ необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(t)$ была равномерно непрерывной на $\Re$ в естественной топологии $\Im_0$.

Это предложение – аналог теоремы Бохнера и показывает, что она справедлива для всех топологий $\Im$ ($\Im\prec\Im_0$), а не только для почти периодических функций.

Предложение 7 ([1]). Пусть непрерывная функция $f(t):\Re\to Y$ почти автоморфна и ее производная непрерывна и компактна. Для почти автоморфности $f'(t)$ необходимо и достаточно чтобы $f'(t)$ была слабо $\left(\Im_{A,f},\Im_0\right)$ – локально равномерно непрерывной.

Основные результаты. Результаты настоящей работы можно объединить в две группы: в первой используется $(\Im,\Im_0)$ – локальная равномерная непрерывность второй производной функции, а во второй группе используется условие $\left[f_a(t)\right]''=\left[f''\right]_a(t)$, где $a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (то есть, что вторая производная предельного сдвига совпадает с предельным сдвигом второй производной). В первой группе теорем основной результат сформулирован в теореме 1, где почти равномерная непрерывность второй производной в естественной топологии сохраняет и ее $\Im$ – непрерывность. Получены так же критерии почти автоморфности и почти периодичности второй производной.

Теорема 1. *Пусть $f(t):\Re\to Y$ имеет вторую конечную производную $f''(t)$ в любой точке оси в естественной топологии $\Im_0$ и $f(t)$ непрерывна в более слабой топологии $\Im$ ($\Im\prec\Im_0$). Для непрерывности второй производной $f''(t)$ в топологии $\Im$ необходимо и достаточно, чтобы она была $(\Im,\Im_0)$ – локально равномерно непрерывной.*

Доказательство: Необходимость повторяет доказательство предложения 5.

Для доказательства достаточности рассмотрим функцию $\psi_n(t):\Re\to Y$, определенную формулой:

$$\psi_n(t)=n^2\left[f(t+2/n)-2f(t+1/n)+f(t)\right],\tag{1}$$

где n – натуральное число.

Запишем функцию $\psi_n(t)$ в виде интеграла

$$\psi_n(t)=n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\int_u^{u+\frac{1}{n}}f''(t+v)\,dvdu,\ t\in x+U_{x,\varepsilon},\ n>\frac{2}{\delta},\ \delta=\delta_{x,\varepsilon}.\tag{2}$$

Заметим, что

$$f''(t)=n^2\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_u^{u+\frac{1}{n}} f''(t)\,dvdu\,. \tag{3}$$

Оценим разность $\left\|\psi_n(t)-f''(t)\right\|$. Из равенств (1) – (3), следует:

$$\left\|\psi_n(t)-f''(t)\right\|\le n^2\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_u^{u+\frac{1}{n}}\left\|f''(t+v)-f''(t)\right\|dvdu\le\sup_{v\in(-\delta,\delta)}\left\|f''(t+v)-f''(t)\right\|,$$

$$\sup_{t\in x+U_{x,\varepsilon}}\left\|\psi_n(t)-f''(t)\right\|\le\sup_{t\in x+U_{x,\varepsilon},v\in(-\delta,\delta)}\left\|f''(t+v)-f''(t)\right\|<\varepsilon\,. \tag{4}$$

Используя $(\Im,\Im_0)$ – локально равномерную непрерывность, каждому элементу $x\in\Re$ и числу $\varepsilon>0$ поставим в соответствие окрестность $\Gamma_n=\Gamma(x,\varepsilon,\delta_{x,\varepsilon})=x+U_{x,\varepsilon}$, принадлежащую топологии $\Im$ и номер $n=n_{x,\varepsilon}$, $n>\dfrac{2}{\delta_{x,\varepsilon}}$ так, что

$$\sup_{t\in\Gamma_n}\left\|\psi_n(t)-f''(t)\right\|<\varepsilon\,.$$

Множество $[-k,k]$ компактно в топологии $\Im$ ($\Im\prec\Im_0$) и оно покрывается конечным числом окрестностей вида Γ_n. Так как $\Re=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[-k,k]$, то существует счетное число окрестностей

$$\Gamma_{n_1},\Gamma_{n_2},\Gamma_{n_3},\ldots,\Gamma_{n_s},\ldots,$$

покрывающих множество $\Re$ и соответствующее им счетное число номеров $n_1,n_2,n_3,\ldots,n_s,\ldots$ таких, что

$$\sup_{t\in\Gamma_{n_s}}\left\|\psi_{n_s}(t)-f''(t)\right\|<\varepsilon\,.$$

Вторая производная $f''(t)$ существует и последовательность функций

$$\psi_n(t)=\frac{\dfrac{f\left(t+\frac{2}{n}\right)-f\left(t+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}-\dfrac{f\left(t+\frac{1}{n}\right)-f(t)}{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}$$

поточечно сходится к $f''(t)$.

Рассмотрим топологическое пространство $(\Re,\Im)$. Согласно *определению Александрова*, последовательность $\psi_{n_s}(t)$ сходится квазиравномерно ко второй производной $f''(t)$. Последовательность $\psi_{n_s}(t)$ состоит из непрерывных функций в топологии $\Im$ и по *теореме Александрова* (предложение 1) ее предел $f''(t)$ является непрерывной функцией в топологии $\Im$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $f(t):\Re\to Y$ имеет конечную вторую производную $f''(t)$ в любой точке оси в естественной топологии $\Im_0$ и $f(t)$ непрерывна в более слабой топологи $\Im$ ($\Im\prec\Im_0$). Для равномерной непрерывности второй производной $f''(t)$ в топологии $\Im$ необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно непрерывной в топологии $\Im_0$.*

Доказательство: Если $f''(t)$ равномерно непрерывна в топологии $\Im$, то она равномерно непрерывна и в топологии $\Im_0$. Покажем что, если вторая производная равномерно непрерывна в естественной топологии, то она $(\Im,\Im_0)$ – локально равномерно непрерывна в любой более слабой топологии $\Im$. Число $\delta_{x,\varepsilon}$ из определения $(\Im,\Im_0)$ – локально равномерно непрерывной функции одно и тоже для всех точек и последовательность $\psi_{n_s}(t)$ сходится равномерно к своему пределу, что видно из неравенства (4), которое выполняется как только $n_s>\dfrac{1}{\delta}$. Равномерный предел равномерно непрерывных функций в топологии $\Im$ является равномерно непрерывной функцией в топологии $\Im$ и значит вторая производная равномерно непрерывна в топологии $\Im$.

Замечание 3. Теорема 2 является аналогом предложения 6. В нем используется первая производная, а тут – вторая производная. Теорема 2 также является аналогом теоремы Бохнера.

Следствие 1. *Пусть почти периодическая функция* $f(t):\Re \to Y$ *имеет конечную вторую производную* $f''(t)$ *в любой точке оси в естественной топологи* $\Im_0$. *Для почти периодичности второй производной* $f''(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно непрерывной в топологии* $\Im_0$.

Доказательство: Если $f''(t)$ почти периодична, то она равномерно непрерывна в топологии $\Im_0$.

Для доказательства достаточности на $\Re$ введем топологию $\Im_{U,f}$. Тогда функция $f(t)$ равномерно непрерывна в топологии $\Im_{U,f}$. Функция $f''(t)$ равномерно непрерывна в топологии $\Im_0$. Согласно теореме 2, $f''(t)$ равномерно непрерывна в топологии $\Im_{U,f}$, то есть является почти периодической функцией.

Замечание 4. Следствие 1 утверждает, что теорема Бохнера справедлива, если первую производную заменить на вторую.

Теорема 3. *Пусть непрерывная функция* $f(t):\Re \to Y$ *почти автоморфна и ее вторая производная* $f''(t)$ *непрерывна и компактна. Вторая производная* $f''(t)$ *почти автоморфна, если она слабо* $\left(\Im_{A,f}, \Im_0\right)$ *– локально равномерно непрерывна.*

Доказательство: Рассмотрим интеграл

$$\int_u^v f''(t)dt = f'(v) - f'(u) .$$

Норма функции $f''(t)$ измерима и ограничена. Имеет место неравенство

$$\left\| f'(v) - f'(u) \right\| \le |v-u| \sup_{t\in(-\infty,+\infty)} \left\| f''(t) \right\| .$$

Следовательно, производная $f'(t)$ равномерно непрерывна. По теореме Бохнера, это в свою очередь дает почти автоморфность первой производной [23]. Далее, к паре функций $g(t)$, $g'(t)$, где $g(t) = f'(t)$, применим предложение 7 и получим, что $g'(t)$, то есть $f''(t)$, является почти автоморфной функцией.

Теорема 4. *Пусть функция* $f(t):\Re \to Y$ *почти периодична и имеет непрерывную и компактную вторую производную* $f''(t)$. *Тогда, вторая производная* $f''(t)$ *почти периодична, когда для любой функции* $f_a(t)$ $\left(a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, *выполняются условия теоремы 3.*

Доказательство: Компактность второй производной гарантирует равномерную непрерывность первой производной. Это в свою очередь дает почти периодичность первой производной [16]. Теперь к паре функций $g(t)$, $g'(t)$, где $g(t) = f'(t)$, можно применить теорему 5 [1] и получим, что $g'(t)$, то есть $f''(t)$, является почти периодической функцией.

Теорема 5. *Пусть* $f(t):\Re \to Y$ *непрерывная почти автоморфная функция, для любого* $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $f_a(t)$ *дважды дифференцируема и вторая производная* $\left[f_a(t)\right]''$ *компактна. Если для любого индекса* a *выполнено равенство* $\left[f_a(t)\right]'' = [f'']_a(t)$, *то производные* $f'(t)$ *и* $f''(t)$ *являются непрерывными почти автоморфными функциями.*

Доказательство: Компактность второй производной гарантирует равномерную непрерывность первой производной. Это в свою очередь дает почти автоморфность первой производной [23]. Теперь к паре функций $g(t)$, $g'(t)$, где $g(t) = f'(t)$, можно применить теорему 3 [3]. Применяя к $g(t) = f'(t)$ теорему 3 [3] получим, что и $g'(t)$, то есть вторая производная $f''(t)$, является равномерной почти автоморфной функцией.

Выводы. В теоремах 1 – 5 и следствии 1 даны критерии $\Im$ – непрерывности (почти автоморфности, почти периодичности) второй производной, когда сама функция является $\Im$ – непрерывной (почти автоморфной, почти периодической). Полученные результаты новые. Некоторые из них обобщают ранее известные теоремы. Возможно перенесение результатов на *пространства Фреше* Y, где топология задается с помощью счетной возрастающей *системы полунорм* $p_s(y)$, $p_s(y) \le p_{s+1}(y)$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, $y \in Y$, а метрика задается с помощью *квазинормы*

$$|||y-z||| = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p_s(y-z)}{\left[1+p_s(y-z)\right].2^s}, \quad y, z \in Y .$$

Список литературы

1. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Условия сохранения непрерывности при дифференцировании функций // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях. Сборник научных статей. – Х. : Вировец А.П. «Апостроф» – 2011. – С. 332 – 333.
2. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Непрерывность производной в более слабой топологи. «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологіях». Тезисы докладов международной конференции, г. Харьков, 17 – 22 апреля 2011г. – Х. : Вировец А.П. «Апостроф», 2011. – С. 249 – 250.
3. *Dimitrova-Burlayenko S. D.* Almost automorphic derivative of an almost automorphic function // Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. «Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics». – 2017. – Vol. 85. – P. 52 – 61. DOI: 10.26565/2221-5646-2017-85-04.
4. *Димитров Д. Б., Димитрова С. Д.* Почти автоморфност на криволинейния интеграл от почти автоморфни функции // Известия на Съюза на учените. Серия 5 : «Математика, информатика и фізика». – Русе, 2001. – Том 1. – С. 32 – 38.
5. *Димитров Д. Б., Димитрова С. Д.* Почти автоморфност на криволинейния интеграл в произволни метрични пространства на Фреше // Известия на ИУ Варна. – 2001. – №. 1. – С. 35 – 46.
6. *Димитрова С. Д., Димитров Д. Б.* Теорема о сохранении непрерывности // Вісник Харківского національного університету. Серія : Математика, прикладна математика I механіка. – 2003. – № 602. – Вып. 53. – С.77 – 81.
7. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Почти автоморфные функции как компактные непрерывные функции на топологической группе // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2012. – № 27 (2012). – С. 82 – 85.
8. *Левин Б. Я.* О почти-периодических функциях Левитана // Укр. матем. журнал. – 1949. – № 1. – С.49 – 100.
9. *Марченко В. А.* Методы суммирования обобщенных рядов Фурье // Записки научно исследовательского института математики и механики ХГУ и Харьковского математического общества. – 1950. – Т. ХХ. – С. 3 – 32.
10. *Reich A.* Präkompakte Gruppen und Fastperiodizität // Math. Z. – 1970 – Vol. 116, issue 3. – P. 218 – 234.
11. *Veech W. A.* Almost automorphic functions on groups // Amer. J. Math. – 1965. – 87. – №3. – P. 719 – 751.
12. *Димитрова С. Д.* Криволинейный интеграл от почти периодических и почти периодических по Левитану функцій // Вісник Харківського университету. Серія : Математика, прикладна математика і механіка. – 2001. – № 514. – С. 106 – 114.
13. *Кадец М. И.* Об интегрировании почти-периодической функции со значениями в пространстве Банаха // Функциональный анализ и его приложения. – 1969. – Вып. 3. – С. 71 – 74.
14. *Болес Басит Р.* Обобщение двух теорем М. И. Кадеца о неопределенном интеграле абстрактных почти-периодических функций // Матем. Заметки. – 1971. – Вып. 9. – № 3. – С. 311 – 321.
15. *Amerio L., Prouse G.* Almost-periodic functions and functional equations. – N.Y. : Van Nostrand Reinhold Company, 1971. – 184 p.
16. *Zaidman S.* Almost Periodic Functions in Abstract Spaces. – London : Pitman Publ. Ltd., 1985. – 138 p.
17. *Любарский М. Г.* О неопределенном интеграле почти периодической по Левитану функции // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1972. – Вып. 16. – С. 139 – 150.
18. *Arzela C.* Intorno alla continuita della somma d'infinità di funzioni continue // Rend. R. Accad. Sci. Istit. – Bologna, (1883-1884), pp. 79 – 84.
19. *Arzela C.* Sulle serie di funzioni. Mem. R. Accad. Sci. Ist. – Bologna, (1899 – 1900). – Serie 5 (8). – pp. 31 – 186 and 701 – 744.
20. *Sirvint G.* Weak compactness in Banach spaces // Studia Mathematica. – 1957. – № 6. – pp. 71 – 94.
21. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. –М. : Наука, 1977. – 368 с.
22. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М. : МГУ, 1978. – 205 с.
23. *N'Guérékata G. M.* Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces. – Springer, 2001. – 148 p.

References (transliterated)

1. Dimitrova-Burlayenko S. D. Usloviya sokhraneniya nepreryvnosti pri differentsirovanii funktsiy [Conditions for maintaining continuity when differentiating functions]. *Sovremennyye problemy matematiki i eye prilozheniya v estestvennykh naukakh i informatsionnykh tekhnologiyakh. Sbornik nauchnykh statey* [Contemporary problems of mathematics and its applications to natural sciences and information technologies. Collection of scientific papers]. Kharkov, Virovets A.P. «Apostrof» Publ., 2011, pp. 332–333.
2. Dimitrova-Burlayenko S. D. Nepreryvnost' proizvodnoy v boleye slaboy topologii. [Derivative continuity in a weaker topology]. "Sovremennyye problemy matematiki i eye prilozheniya v estestvennykh naukakh i informatsionnykh tekhnologiyakh" [Contemporary problems of mathematics and its applications to natural sciences and information technologies.]. *Tezisy dokladov mezhdunarodnoy konferentsii. Khar'kov, 17-22 aprelya 2011 g.* [Abstracts of the International conference, Kharkov, April, 17 – 22, 2011]. Kharkov, Virovets A.P. «Apostrof» Publ., 2011. pp. 249–250.
3. Dimitrova-Burlayenko S. D. Almost automorphic derivative of an almost automorphic function. *Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. : Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*. 2017, vol. 85, pp. 52–61. DOI: 10.26565/2221-5646-2017-85-04.
4. Dimitrov D. B., Dimitrova S. D. Pochti avtomorfnost na krivolineĭniya integral ot pochti avtomorfni funktsii [Almost automorphisity of curvilinear integral of an almost automorphic function]. *Izvestiya na Sŭyuza na uchenite. Seriya 5 : «Matematika, informatika i fizika»*. Ruse, 2001, vol. 1, pp. 32–38.
5. Dimitrov D. B., Dimitrova S. D. Pochti avtomorfnost na krivolineĭniya integral v proizvolni metrichni postranstva na Freshe [Almost automorphisity of curvilinear integral in arbitrary metric Frechet spaces]. *Izvestiya na IU Varna* [Reports of the University of Economics – Varna]. 2001, vol. 1, pp. 35-46.
6. Dimitrova S. D., Dimitrov D. B. Teorema o sokhranenii nepreryvnosti [The theorem on the preservation of continuity]. Visnyk Kharkivs'kogo natsional'nogo universytetu. Seriya : Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika [Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. : Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics]. 2003, no. 602, vol. 53, pp. 77–81.
7. Dimitrova-Burlayenko S. D. Pochti avtomorfnye funktsii kak kompaktnye nepreryvnye funktsii na topologicheskoy gruppe [Almost automorphic functions as compact continuous functions on a topological group]. *Visnyk natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2012, no. 27 (2012), pp. 82–85.
8. Levin B. Ya. O pochti-periodicheskikh funktsiyakh Levitana [On Levitan almost-periodic functions]. *Ukr. matem. Zhurnal* [Ukrainian mathematical journal]. 1949, no. 1, pp. 49–100.
9. Marchenko V. A. Metody summirovaniya obobshhennykh ryadov Fur'ye [Summation Methods of Generalized Fourier Series]. Zapiski nauchno issledovatel'skogo instituta matematiki i mekhaniki KhGU i Khar'kovskogo matematicheskogo obshchestva [Notes of the Research Institute of mathematics and mechanics of the Kharkov National University and Kharkov mathematical society]. 1950, vol. XX, pp. 3–32.
10. Reich A. Präkompakte Gruppen und Fastperiodizität. Math. Z. 1970, vol. 116, issue 3, pp. 218–234.
11. Veech W. A. Almost automorphic functions on groups. *Amer. J. Math.* 1965, vol. 87, no. 3, pp. 719–751.

12. Dimitrova S. D. Krivolineynyy integral ot pochti periodicheskikh i pochti periodicheskikh po Levitanu funktsiy [Curvilinear integral of almost periodic and Levitan almost periodic functions]. *Visnyk Kharkivs'kogo universytetu. Seriya : Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika* [Bulletin of the V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. : Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics]. 2001, vol. 514, pp. 106–114.

13. Kadets M. I. Ob integrirovanii pochti-periodicheskoy funktsii so znacheniyami v prostranstve Banakha [On the integration of an almost-periodic function with values in a Banach space]. *Funktsional'nyy analiz i ego prilozheniya* [Functional analysis and its applications]. 1969, issue 3, pp. 71–74.

14. Boles Basit R. Obobshheniye dvukh teorem M. I. Kadetsa o neopredelennom integrale abstraktnykh pochti-periodicheskikh funktsiy [A generalization of two theorems by M. I. Kadets on the indefinite integral of abstract almost-periodic functions]. Matem. Zametki [Notes in mathematics]. 1971, vol. 9, no. 3, pp. 311–321.

15. Amerio L., Prouse G. *Almost-periodic functions and functional equations*. N.Y., Van Nostrand Reinhold Company, 1971. 184 p.

16. Zaidman S. *Almost Periodic Functions in Abstract Spaces*. London, Pitman Publ. Ltd., 1985. 138 p.

17. Lyubarskiy M. G. O neopredelennom integrale pochti periodicheskoy po Levitanu funktsii [On the indefinite integral of a Levitan almost periodic function]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz i ikh prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis and their applications]. Kharkov, Izd-vo KhGU Publ., 1972, vol. 16, pp. 139–150.

18. Arzela C. Intorno alla continuita della somma di 'infinità di funzioni continue. *Rend. R. Accad. Sci. Istit*. Bologna, (1883–1884), pp. 79–84.

19. Arzela C. Sulle serie di funzioni. *Mem. R. Accad. Sci. Ist.* Bologna, (1899–1900), Serie 5 (8), pp. 31–186 and 701–744.

20. Sirvint G. Weak compactness in Banach spaces. *Studia Mathematica*. 1957, no. 6 (1957), pp. 71–94.

21. Aleksandrov P. S. *Vvedeniye v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* [Introduction to the set theory and general topology]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 368 p.

22. Levitan B. M., Zhikov V. V. *Pochti periodicheskie funktsii i differentsial'nyye uravneniya* [Almost periodic functions and differential equations]. Moscow, MGU Publ., 1978. 205 p.

23. N'Guérékata G. M. *Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces*. Springer, 2001. 148 p.

Поступила (received) 27.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Дімітрова-Бурлаєнко Світлана Дімова (Димитрова-Бурлаенко Светлана Димова*, *Dimitrova-Burlayenko Svetlana Dimova) **–** кандидат педагогічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: s.dimitrovaburlayenko@gmail.com.

UDC 629.114.2.073.286

A. P. KOZHUSHKO, A. L. GRIGORIEV, B. I. KALCHENKO

MATHEMATICAL MODELING OF FREE LIQUID SURFACE MOTION IN TRANSPORTING AGRICULTURAL SEMITRAILER TANKS

Mathematical modeling of the oscillatory process of the longitudinal motion of a machine-tractor unit with a semitrailer tank equipped with a hydraulic liquid mixer is developed. The redistribution of liquid in the tank by the characteristics of Rayleigh surface waves is taken into consideration. The influence of the mixer operation on the total vibrational motion of the liquid in the tank is given. The spectrum of frequencies of free mechanical oscillations is determined, and the corresponding forms of interconnected movements of the elements of a tractor and a tank are analyzed.

Key words: wheeled tractor, tank, hydraulic mixer, free liquid surface, oscillations, resonant frequencies, eigenmode, semitrailer tank.

А. П. КОЖУШКО, О. Л. ГРИГОР'ЄВ, Б. І. КАЛЬЧЕНКО

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ РІДИНИ ПРИ ТРАНСПОРТУВАННІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ НАПІВПРИЧІПНИХ ЦИСТЕРН

Виконано математичне моделювання коливального процесу поздовжнього руху машинно-тракторного агрегату з напівпричіп-цистерною, яка має гідравлічний змішувач рідини. Для перерозподілу рідини у цистерні, що викликаний коливаннями оболонки, використано характеристики поверхневих хвиль Релея. Наведено вплив роботи змішувача на загальний коливальний рух рідини в цистерні. Знайдено спектр частот вільних механічних коливань, а також проаналізовано відповідні форми взаємопов'язаних рухів елементів трактора та цистерни.

Ключові слова: колісний трактор, цистерна, гідравлічний змішувач, вільна поверхня рідини, коливання, резонансні частоти, власна форма, напівпричіпна цистерна.

А. П. КОЖУШКО, А. Л. ГРИГОРЬЕВ, Б. И. КАЛЬЧЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ТРАНСПОРТИРОВКЕ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПОЛУПРИЦЕПНЫХ ЦИСТЕРН

Выполнено математическое моделирование колебательного процесса продольного движения машинно-тракторного агрегата с полуприцеп-цистерной, которая имеет гидравлический смеситель жидкости. Для перераспределения жидкости в цистерне, вызванного колебаниями оболочки, использованы характеристики поверхностных волн Рэлея. Показано влияние работы смесителя на общее колебательное движение жидкости в цистерне. Найден спектр частот свободных механических колебаний, а также проанализированы соответствующие формы взаимосвязанных движений элементов трактора и цистерны.

Ключевые слова: колесный трактор, цистерна, гидравлический смеситель, свободная поверхность жидкости, колебания, резонансные частоты, собственная форма, полуприцепная цистерна.