

*С.Т. ТОЛМАЧЕВ*, д-р техн. наук,  
*Ж.Г. РОЖНЕНКО*, канд. техн. наук

## **КОМПЛЕКСНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ В СИСТЕМЕ С УПОРЯДОЧЕННОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДОЙ**

На прикладі магнітної системи поліградієнтного сепаратора надано рішення складної задачі магнітостатики, характерною особливістю якої є наявність як великомасштабних (електромагнітне джерело поля), так і дрібномасштабних (ферромагнітна фільтр-матриця) елементів. Задача зведена до вирішення інтегрального рівняння відносно вектора намагніченості системи.

На примере магнитной системы полиградиентного сепаратора рассмотрено решение сложной задачи магнитостатики, отличительной особенностью которой является наличие как крупномасштабных (электромагнитный источник поля), так и мелкомасштабных (ферромагнитная фильтр-матрица) элементов. Задача сведена к решению интегрального уравнения относительно вектора намагниченности системы.

Во многих технических приложениях конструктивными элементами электромагнитной системы являются упорядоченные гетерогенные среды (УГС), которые характеризуются периодичностью включений по плоским или пространственным координатам. При этом часто возникает необходимость определения не только приведенных (эффективных) характеристик УГС, но и локального распределения поля в самой дискретно-периодической среде. Типичным представителем таких систем являются полиградиентные магнитные сепараторы, в которых УГС выполняет функцию фильтр-матрицы [1-3]. Как правило, для обеспечения высоких значений извлекающей (пондеромоторной) силы, формируемой ферромагнитными элементами в рабочем пространстве фильтра, характерные размеры этих элементов могут на несколько порядков отличаться от размеров внешней магнитной системы, являющейся источником магнитного поля, а их число может достигать нескольких сотен и даже тысяч.

Зависимость пондеромоторной силы поля  $F = H \text{grad} H$  как от интенсивности магнитного поля, так и от его неоднородности, является дополнительным осложняющим фактором, поскольку, во-первых, уровень внешнего магнитного поля должен быть по возможности максимальным, что является основной причиной применения в полиградиентных сепараторах электромагнитов с высокими уровнями электромагнитной нагрузки,

и, во-вторых, достаточно точное определение дифференциального оператора  $\text{grad}H$  невозможно без высокой точности расчета намагниченности элементов фильтра.

Стандартный путь решения такой задачи в полевой постановке, основанный на дискретизации всей системы, сегодня практически невозможен, так как получение достаточной для практических целей точности в 3-5 % число дискретных элементов даже в двумерной постановке может составить  $10^6$ - $10^8$  единиц. Ниже изложен разработанный авторами способ практического решения рассматриваемой задачи путем реализации трех этапов. На первом этапе по изложенной в [4-7] методике определяются приведенные (как правило, нелинейные анизотропные) магнитные характеристики УГС. Затем производится расчет поля электромагнитной системы в целом, в результате чего определяется намагничивающее поле фильтр-матрицы. Наконец, на завершающем этапе на основе специального интегрального уравнения выполняется расчет магнитного поля в пределах основного параллелограмма периодов [8-11], а также рассчитывается распределение поперечных сил в рабочем зазоре сепаратора и оцениваются его извлекающие возможности.

В качестве примера рассмотрим плоско-параллельную магнитную систему полиградиентного сепаратора, конфигурация и геометрические размеры которого приведены на рис. 1,а. Фильтр-матрица с размерами основного параллелограмма периодов  $\omega_1=3,25$  мм и  $\omega_2=2,5\exp(j60^\circ)$  мм показана на рис. 1,б.

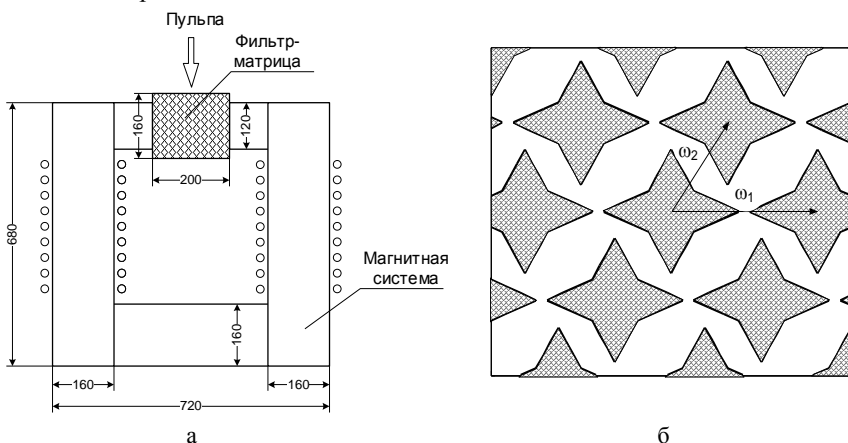


Рис. 1. Магнитная система полиградиентного сепаратора – (а) и его фильтр-матрица – (б)

Материал ферромагнитной части системы – изотропная сталь, харак-

теристика намагничивания которой аппроксимирована выражением

$$J_c(H_c) = \frac{4580H_c}{1 + 0,0025H_c}, \quad B_c(H_c) = \mu_0 [H_c + J_c(H_c)], \quad (1)$$

суммарная магнитодвижущая сила обмоток сепаратора  $I_w=2000$  А.

Расчет приведенных магнитных свойств нелинейной анизотропной УГС сводится к расчету распределения вектора намагниченности  $J_{\text{пр}}(H)$  ферромагнитных включений в области  $D$  с последующим её усреднением по основному параллелограмму периодов  $\Omega$  [9-11]. Распределение вектора намагниченности  $J(z)$  ( $z \in D$ ) является решением нелинейного интегрального уравнения [1], основанного на применении обобщённых аналитических функций [12]

$$U(z) = 2H_0(z) + \frac{1}{\pi} \int_D \overline{J[U(\xi)]} [\wp(z-\xi) + \frac{\eta_1}{\omega_1}] d\tau_\xi + \frac{1}{2jF_\Omega} \text{Im} \int_D \overline{J[U(\xi)]} d\tau_\xi, \quad (2)$$

где  $H_0(z)$  – напряженность внешнего поля, которая для задач приведения принимается постоянной и равной напряженности поля приведенной сплошной среды;  $\wp(z-\xi) = \wp(u) - \wp(u)$ -функция Вейерштрасса;  $F_\Omega = \omega_1 \text{Im} \omega_2$  – площадь основного параллелограмма периодов  $\Omega$ ;

$$U = \mu_0^{-1} B + H = \tilde{B} + H = 2H + J; \quad (3)$$

– некоторый вспомогательный вектор,  $J(U) = J(\tilde{B} + H)$  – модифицированное материальное уравнение среды (в общем случае неоднородной, нелинейной и анизотропной), которое получается на основе известной характеристики намагничивания включений  $B(H, z)$  применением уравнения (3).

Определяя по распределению вектора  $J(z)$  для произвольного значения  $H_0$  полный дипольный момент  $P$  области  $\Omega$ , находим среднюю намагниченность приведенной среды

$$J_{\text{пр}}(H_0) = \frac{\int J(\xi) d\tau_\xi}{F_\Omega} = \frac{P}{F_\Omega}. \quad (4)$$

Таким образом, задача расчета приведенных свойств УГС сводится к решению уравнения (2). Для численного решения этого уравнения целесообразно заменить область магнетиков  $D$  совокупностью  $N$  треугольных элементов  $D^n$  с постоянной намагниченностью  $J^n$ , соответствующей центру тяжести треугольника  $D^n$ . Как показано в [6], в этом случае решение  $J(z) = UJ^n(z)$  можно получить методом простых итераций для системы алгебраических уравнений

$$U_i^n \equiv U_i(z^n) = 2H_0^n + \frac{1}{\pi} \sum_k \int_{D^k} \overline{J[U_{i-1}(\xi^k)]} [\wp(z^n - \xi) + \frac{\eta_1}{\omega_1}] d\tau_k - \frac{j}{2F_\Omega} \text{Im} \sum_k \int_{D^k} \overline{J[U_{i-1}(\xi^k)]} d\tau_k, \quad (5)$$

( $k, n=1, 2, 3, \dots, N; i=1, 2, 3, \dots$ ).

Если рассматривать намагниченные области  $D^n$  как диполи с магнитными моментами  $M^n = J^n \Delta\tau_n$ , расположенные в точках  $\xi^n$ , то последнее соотношение принимает вид

$$U_i^n = 2H_0^n + \frac{1}{\pi} \sum_k \overline{J^k (U_{i-1})} \Delta\tau_k A_{nk} - \frac{j}{2F_\Omega} \text{Im} \overline{P(U_{i-1})}, \quad (6)$$

где  $A_{nk} = A(z^n, \xi^k) = \wp(z^n - \xi^k) + \frac{\eta_1}{\omega_1}$ .

Вычисление коэффициентов  $A_{nk}$  можно выполнять по формуле [12]

$$\wp(u) + \frac{\eta_1}{\omega_1} = -\frac{4\pi^2}{\omega_1^2} \left[ \frac{1}{(h-h^{-1})^2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{2r} h^{-2}}{(1-q^{2r} h^{-2})^2} + \frac{q^{2r} h^2}{(1-q^{2r} h^2)^2} \right], \quad (7)$$

где  $u = u^{mk} = z^m - \xi^k$ ,  $q = \exp(j\pi\tau)$ ,  $v = \frac{u}{\omega_1}$ ,  $h = \exp(j\pi v)$ .

Рассчитанные по изложенной выше методике приведенные векторные характеристики намагничивания фильтр-матрицы (рис. 1,б) показаны на рис. 2,а,б.

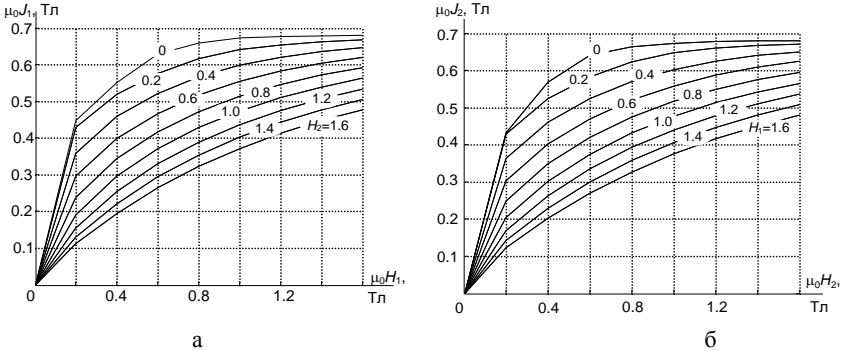


Рис. 2. Расчетные приведенные характеристики намагничивания УГС: а – в "лёгком" направлении; б – в "трудном" направлении

Решение задачи идентификации магнитных свойств УГС позволяет заменить её однородной средой, после чего можно выполнить расчет намагничивающего поля фильтр-матрицы путем расчета поля всей системы (2-й этап). Методика расчета распределения вектора намагниченности, рассматриваемого как источник вторичного поля, сохраняется прежней, только под областью  $D$  в данном случае следует понимать всю область сепаратора, занятую магнетиками. Можно воспользоваться рассмотренным выше уравнением (2), положив в нем  $\omega_1 = \infty$ ,  $\omega_2 = \infty$ . При этом ядро

интегрального уравнения преобразуется в классическое

$$\lim_{\omega_1, \omega_2 \rightarrow \infty} \varphi(z - \xi) + \frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{1}{(z - \xi)^2},$$

$$\omega_1, \omega_2 \rightarrow \infty,$$

а интегральное уравнение (3) существенно упрощается:

$$U(z) = 2H_0(z) + \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\overline{J[U(\xi)]}}{(z - \xi)^2}, \quad z, \xi \in D. \quad (8)$$

Из соотношения (3) для модифицированного материального уравнения  $J(U)$  в векторно-тензорном виде легко получить выражение  $\vec{J}(\vec{U}) = \lambda(\vec{J}) \cdot \vec{J}$ , где  $\lambda(\vec{J}) = [\mu(\vec{J}) - I] \cdot [\mu(\vec{J}) + I]^{-1}$ , а  $\mu(\vec{J})$  – тензор статической магнитной проницаемости среды. Используя последние соотношения, уравнению (8) можно придать другой вид, а именно

$$J(z) = 2H_0(z) \cdot \lambda[\vec{J}(z)] + \frac{\lambda[\vec{J}(z)]}{\pi} \int_D \frac{\overline{J(\xi)}}{(z - \xi)^2}, \quad z, \xi \in D. \quad (9)$$

Следует, однако, отметить, что последнее уравнение удобно применять в случае изотропных сред. Если же ферромагнитная среда имеет выраженную нелинейную анизотропию, то применение уравнения (8) связано с определёнными трудностями в связи с некорректностью самого тензора статической магнитной проницаемости среды в этом случае [3, 7]. Поэтому уравнение (8) можно рассматривать как универсальное интегральное уравнение магнитостатики и его применение предпочтительно.

Рассчитанное с учетом этих соображений распределение поля в сепараторе показано на рис. 3. Среднее значение магнитной индукции в сечении фильтр-матрицы ( $A - A'$ ) составляет 0,55 Тл. Как видно из приведенных иллюстраций, в основном объёме фильтр-матрицы магнитное поле является квазиоднородным, благодаря чему локальное распределение поля в рабочем зазоре сепаратора можно рассматривать независимо.

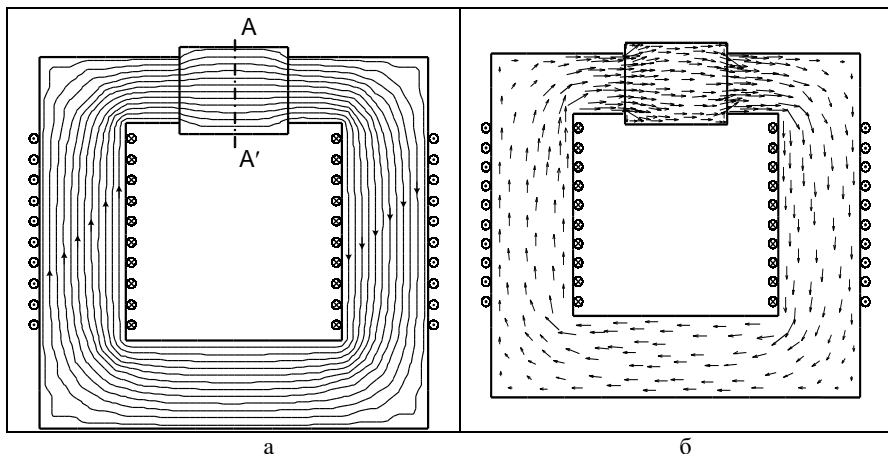


Рис. 3. Распределение магнитного поля в полиградиентном сепараторе

На заключительном этапе расчета по известному значению поля в фильтр-матрице при необходимости можно получить параметры локального распределения поля и вторичные характеристики – пондеромоторные силы, характеристики извлечения конкретных минералов и др. На рис. 4,а показано распределение вектора намагниченности одного из элементов фильтра, а на рис. 4,б – картина магнитного поля в фильтр-матрице рассматриваемого типа.

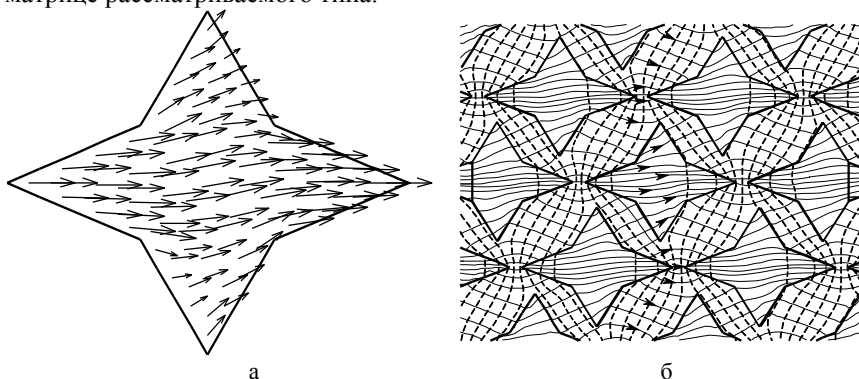


Рис. 4. Локальные характеристики поля в фильтр-матрице: а – распределение вектора намагниченности в элементе матрицы; б – силовые линии (сплошные) и эквипотенциалы (пунктирные) в фильтр-матрице

Магнитная анизотропия приведенной среды, которая вытекает из геометрических особенностей матрицы, проявляется в характере распре-

деления вектора намагниченности и в картине поля. Распределение намагниченности элементов фильтра получено в предположении квазигомогенного внешнего поля  $\mu_0 H = 0,55$  Тл путем решения системы уравнений (5), а картина поля – путем расчета обобщенного потенциала, основанного на интегрировании по первичным (внешнее поле  $H$ ) и вторичным (намагниченность элементов фильтр-матрицы) источникам поля. Более подробно методика этих вычислений изложена в статье [11].

Таким образом, изложенный выше метод расчета распределения поля в рабочем зазоре мелкомасштабных элементов фильтр-матрицы позволяет получить решение задачи с высокой степенью точности.

**Список литературы:** 1. *Толмачев С.Т.* Специальные методы решения задач магнитостатики. – К.: Вища школа, 1983. – 166 с. 2. *Толмачев С.Т.* Расчет силовых полей фильтр-сепараторов // Обогащение руд. – 1980. – №1. – С. 19-22. 3. *Толмачев С.Т., Ильченко А.В., Рожненко Ж.Г.* Математическое моделирование магнитного поля с учетом нелинейных анизотропных свойств среды // Вестник Национального технического университета "Харьковский политехнический институт". – Харьков: НТУ "ХПИ", 2006. – № 36. – С. 128-133. 4. *Толмачев С.Т.* Эффективные параметры упорядоченных гетерогенных структур // Электричество – 1983. – № 7. – С. 35-40. 5. *Толмачев С.Т.* Магнитные свойства нелинейной среды с упорядоченными неоднородностями // Изв. Вузов. Электромеханика. – 1983. – № 6. – С. 31-37. 6. *Толмачев С.Т., Ильченко А.В.* и др. Приведенные свойства магнитной среды с двоякопериодической структурой поля // Праці Луганського відділення Міжнародної Академії інформатизації. – 2007. – № 2 (15). – С. 133-137. 7. *Рожненко Ж.Г.* Способы идентификации магнитных свойств нелинейных анизотропных материалов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2005. – № 4/2 (16). – С. 86-89. 8. *Толмачев С.Т.* Двоякопериодическая задача магнитостатики // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. – 1983. – № 6. – С. 1402-1409. 9. *Толмачев С.Т.* Расчет потенциального поля в дискретно-периодических средах // Изв. вузов. Электромеханика. – 1977. – № 12. – С. 1298-1305. 10. *Толмачев С.Т., Ильченко А.В., Рожненко Ж.Г.* Математическое моделирование нелинейных анизотропных материалов без гистерезиса // Перспективні методи та технічні засоби підвищення ефективності енергоємних установок та технологічних комплексів гірничо-металургійної промисловості: Міжнародна науково-технічна конференція з проблем електромеханіки та енергозбереження. Кривий Ріг, 19 січня 2004 р.– Кривий Ріг, 2004. – С. 52. 11. *Толмачев С.Т., Ильченко А.В.* и др. Математическое моделирование магнитного поля с двоякопериодической структурой // Праці Луганського відділення Міжнародної Академії інформатизації. – 2007. – № 1 (14). – С. 141-146. 12. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с. 13. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 304 с.

*Поступила в редколлегию 05.08.08*