

Н. Н. ТКАЧУК, канд. техн. наук, мл. научн. сотр. НТУ «ХПИ»;
Н. Б. СКРИПЧЕНКО, асп. НТУ «ХПИ»;
Н. А. ТКАЧУК, д.т.н, проф. НТУ «ХПИ»

КОНТАКТ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ТЕЛ: СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

Многие машиностроительные конструкции содержат элементы, основное функциональное предназначение которых – передача значительных эксплуатационных усилий и движений между отдельными телами. Это опоры вращения и скольжения, подшипники, зубчатые колеса, направляющие колонки штампов, кулачки, коленчатые валы, гидрообъемные передачи, механизмы перекачивания и наклона, катки, приводные колеса цепных приводов и гусеничных движителей. При проектировании таких конструкций, соответственно, возникают две последовательные задачи, связанные логикой и последовательностью проектно-исследовательских работ: геометрический синтез поверхностей этих деталей и анализ напряженно-деформированного состояния образуемых сложнопрофильных тел с учетом контактного взаимодействия. В статье описаны постановка и подходы к решению задач анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел. Дискретизация осуществляется методом граничных элементов. На основе единой системы разрешающих уравнений поставлена обратная задача синтеза геометрической формы поверхностей контактирующих тел, обеспечивающих распределений контактных давлений.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, метод граничных интегральных уравнений, метод граничных элементов, шероховатость, контактное давление, геометрический синтез, сложнопрофильное тело, кинематически генерируемая поверхность, принцип Калькера, вариационное неравенство.

Введение. Как указывается в статье [1], многие машиностроительные конструкции содержат элементы, основное функциональное предназначение которых – передача значительных эксплуатационных усилий и движений между отдельными телами (детальями). Это, например, опоры вращения и скольжения, подшипники, зубчатые колеса, направляющие колонки штампов, кулачки, коленчатые валы, гидрообъемные передачи, механизмы перекачивания и наклона, катки, приводные колеса цепных приводов и гусеничных движителей. Для них характерно то свойство, что основные взаимные движения осуществляются перекачиванием (со скольжением или без) сопряженных поверхностей взаимодействующих друг с другом тел, а основным рабочим усилием является нормальная сила контактного взаимодействия. При проектировании таких конструкций, соответственно, возникают две последовательные задачи, связанные логикой и последовательностью проектно-исследовательских работ: геометрический синтез поверхностей этих деталей и анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) образуемых сложнопрофильных тел (СПТ) с учетом контактного взаимодействия.

Анализ основных достижений и литературы. Сформулированные выше задачи получили частичное решение в работах [1, 2]. При этом в качестве метода геометрического синтеза был использован кинематический метод Литвина [3], а для анализа напряженно-деформированного состояния взаимодействующих тел привлечены модели Герца, методы конечных элементов (МКЭ) и граничных элементов (МГЭ). В целом в конечном итоге

была создана достаточно эффективная методология, направленная на последовательно-итерационное решение задач геометрического синтеза и анализа НДС (именно в такой последовательности).

В то же время, как показывает анализ многих конструкций, требования к сопряженным поверхностям, записанные в виде строгих уравнений, допускающих, как правило, единственное решение, формально оказываются излишне жесткими. Для таких случаев условия кинематического сопряжения могут зачастую быть ослаблены и записаны в виде неравенств, требований выпуклости, соотношения радиусов кривизн и т.д.

Таким образом, возникает некоторая свобода варьирования геометрической формы при синтезе сопряженных в подвижном контакте поверхностей, образующая подмножество G возможных решений. Если теперь принять во внимание, что в соотношения для анализа НДС с учетом контактного взаимодействия входит в качестве исходных данных геометрическая информация о контактирующих поверхностях, то возникает возможность за счет варьирования их геометрической формы провести ее оптимизацию внутри области кинематически допустимых решений G . На этом этапе получаем полностью связанную задачу анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза (теперь в таком порядке в формальной записи). Эта новая задача являлась предметом рассмотрения в работе [1]. Однако при этом не были учтены наличие и податливость упругого слоя, моделирующего свойства шероховатых поверхностей взаимодействующих тел при контакте.

Целью настоящих исследований является разработка общего подхода к решению поставленной задачи и одной из возможных ее математических формулировок с учетом наличия между контактирующими телами упруго деформируемой прослойки, с некоторой степенью приближения описывающей влияние микрорельефа шероховатых поверхностей тел, находящихся в контакте.

Постановка и общая формулировка задачи. Рассмотрим вначале подвижный контакт гладких тел 1 и 2, ограниченных кинематически генерируемыми поверхностями (КГП) [2], по которым эти тела сопрягаются в ходе непрерывного взаимного движения. Как известно, условие реализации такого движения [3]:

$$\mathbf{V}_{12} \times \mathbf{n} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{V}_{12} – скорость относительного движения тел 1 и 2; \mathbf{n} – вектор нормали в точке текущего сопряжения тел по кинематически генерируемым поверхностям, при задании (или фиксировании) формы поверхности одного из тел приводит к формированию системы нелинейных уравнений, из которых по координатам точки заданной поверхности можно восстановить координаты точки, ей сопряженной, на искомой КГП. При определенных дополнительных

условиях из (1) формируется система двух облаков попарно сопряженных точек кинематически генерируемых поверхностей, обеспечивающих двухпараметрическое взаимное движение тел 1 и 2.

В то же время, как отмечалось выше, изменяя условия задания поверхностей тел 1 и 2, а также требований к их взаимным движениям, можно отойти от чрезмерно жестких условий (1).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. *Случай однопараметрического движения при точечном первоначальном контакте.* В относительном движении тел 1 и 2, занимающие области Ω_1 и Ω_2 , которые ограничены КГП S_1 и S_2 соответственно, совершают перемещения, для которых вектор относительной скорости \mathbf{V} содержит только одну ненулевую компоненту (рис. 1):

$$\mathbf{V} = \{V_1; V_2\}^T, \quad V_1 \neq 0; \quad V_2 \equiv 0. \quad (2)$$

Тогда для реализации такого движения достаточно выполнения условия

$$R_{11} < R_{12}, \quad \pi_1 \cap \pi_2 = \{M\}, \quad (3)$$

где R_{11}, R_{12} – радиусы кривизны поверхностей 1 и 2 в одной из плоскостей Π_1 (xOz) главных кривизн; π_1, π_2 – профили, образуемые пересечением другой плоскости главных кривизны Π_2 (yOz) с поверхностями S_1 и S_2 соответственно:

$$\pi_1 = \Pi_2 \cap S_1, \quad \pi_2 = \Pi_2 \cap S_2. \quad (4)$$

Точка M в этом случае является точкой *первоначального контакта в ненагруженном состоянии* тел 1 и 2:

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{M\}. \quad (5)$$

Если множеством *первоначального контакта* является линия L , то имеем:

2. *Случай однопараметрического движения при линейчатом первоначальном контакте:*

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{L\}; \quad \pi_1 \cap \pi_2 = \{L\}. \quad (6)$$

Ограничения – те же, что и для случая 1.

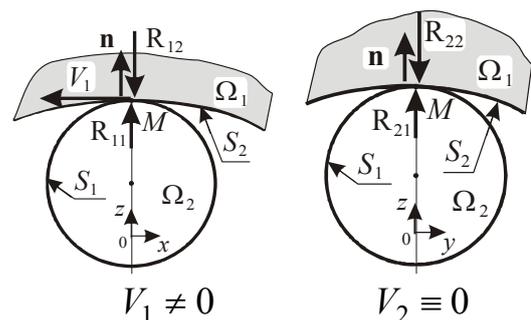


Рис. 1 – Случай однопараметрического взаимного движения тел 1 и 2

3. Случай первоначального контакта по поверхности S . Если

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{S\}, \quad (7)$$

то возможны варианты:

- если S – часть плоскости, возможны три взаимных движения тел 1 и 2;
- если S – цилиндрическая поверхность, то – два;
- если S – произвольная поверхность вращения или винтовая поверхность, то – одно;
- если S – поверхность общего вида, то реализуется неподвижный контакт тел 1 и 2.

Для последнего случая:

$$\mathbf{V} \equiv 0 \quad (8)$$

и реализуется контакт по конгруэнтным, совпадающим, согласованным [4] поверхностям.

Уравнения (5)-(7) описывают разные случаи геометрической локализации контактного сопряжения без нагрузки. Они определяют вместе с другими соотношениями (2)-(8) условия кинематического сопряжения абсолютно твердых тел 1 и 2 по кинематически генерируемым поверхностям S_1, S_2 . При этом явно или неявно задаваемые ограничения типа (3) или (6), (7) определяют подмножество G , конкретизируемое для того или иного объекта по-разному. Например, это может быть условие отсутствия подрезания в зубчатом зацеплении, недопущения интерференции материала шарового поршня и беговой дорожки в радиальной гидropередаче [5], отсутствие взаимопроникновения опорного материала сегмента механизма наклона плавильной печи в элементы базовой опорной конструкции [6].

Таким образом, формально кинематически генерируемые поверхности S_1, S_2 можно определить как подмножество пар поверхностей, удовлетворяющих кинематическим условиям G сопряжения абсолютно твердых тел Ω_1 и Ω_2 .

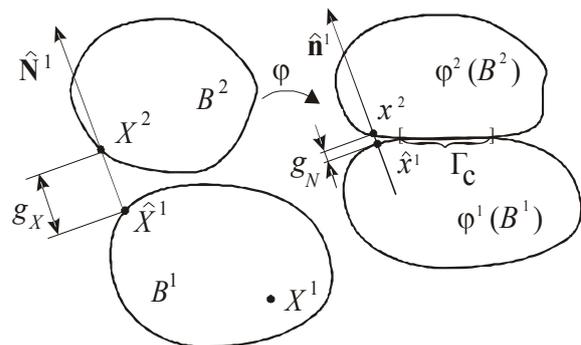


Рис. 2 – Кинематика контакта тел 1 и 2 с гладкой границей:

φ – отображение из начальной в актуальную конфигурацию; Γ_c – область контакта тел в актуальной конфигурации; Ω_1, Ω_2 – области, занимаемые телами 1 и 2

Учитывая, что в общем случае поверхности S_1, S_2 имеют сложную форму, то и, соответственно, тела Ω_1 и Ω_2 будут сложнопрофильными. Эти сложнопрофильные тела на этапе расчета напряженно-деформированного состояния с учетом контактного взаимодействия представимы в виде деформируемых гладких тел с непрерывно поворачивающейся нормалью на S_1, S_2 .

Следуя [2, 4, 7], условие непроникновения можно записать в виде (рис. 2):

$$g_N = (x^2 - \hat{x}^1) \cdot \hat{n}_1 \geq 0. \quad (9)$$

Здесь g_N – зазор между поверхностями; \hat{n}_1 – нормаль к Γ_c . Выполнение условия неотрицательности этой функции и обеспечивает отсутствие взаимного проникновения тел (т.е. интерференции материалов тел 1 и 2).

При малых деформациях для геометрически линейной модели деформирования можно записать условие непроникновения в виде:

$$(u^2 - \hat{u}^1) \cdot \hat{n}^1 + g_X \geq 0, \quad (10)$$

где $u^\alpha, \alpha = 1, 2$ – перемещения тел: $x^\alpha = X^\alpha + u^\alpha$, а $g_X = (X^2 - \hat{X}^1) \cdot \hat{N}^1$ – первоначальный зазор между телами 1 и 2 в начальной конфигурации.

Основными сложностями при включении условий (9), (10) в модели контакта является их нелинейность. Контактное взаимодействие является односторонним ограничением [4, 7-11]. Величина нормальных контактных давлений p_N (т.е. действующих по нормали к поверхности контакта) определяется как реакция в зоне контакта S и вычисляется по активным ограничениям в системе. Контактные давления в случае без адгезии должны быть сжимающими: $p_N = p_N^1 = p_N^2 \leq 0$. Таким образом, следуя [2], обобщая оба возможных случая: контакта, когда $g_N = 0$ и $p_N < 0$, и отрыва, когда $g_N > 0$ и $p_N = 0$, можно записать следующие соотношения на границе:

$$g_N \geq 0; p_N \leq 0; p_N g_N = 0. \quad (11)$$

Они известны как условия Герца-Синьорини для нормального контакта тел без трения. Эта запись используется в различных постановках контактных задач как задач минимизации с ограничениями. Соотношения (11) естественным образом повторяют условия Каруши-Куна-Таккера в задачах выпуклого программирования. При этом следует отметить их недифференцируемость, в результате чего многообразие допустимых состояний в слабых (вариационных) постановках контактных задач также является недифференцируемым.

Кинематическая модель контакта деформируемых тел приводит к соотношениям, относящимся лишь к границам S_1 и S_2 тел 1 и 2. Для построения замкнутой математической модели напряженно-деформированного состояния тел 1 и 2 с учетом контакта необходимо использовать уравнение состояния в самих телах. В случае контакта линейно упругих тел система соотношений теории упругости для каждого из тел имеет вид [12] (индексы 1 и 2 опускаются):

$$\text{Div} \sigma + \mathbf{f} = 0, X \in B; \quad (12) \quad \varepsilon(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) / 2; \quad (13) \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (14)$$

где σ, ε, E – тензоры напряжений, деформаций и модулей упругости.

На границе тел 1 и 2 будем рассматривать три типа граничных условий:

- кинематические (типа Дирихле) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma, X \in \Gamma_u; \quad (15)$

- силовые (типа Неймана) $\sigma \mathbf{n} = \mathbf{t}_\Gamma, X \in \Gamma_\sigma; \quad (16)$

- условия контакта (10), где $u_N = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ – нормальное смещение точек поверхности, t_Γ – заданное внешнее давление на поверхностях тел.

Условия (10) задают вместе с классическими граничными условиями (15), (16) подмножество K допустимых распределений перемещений \mathbf{u} . На этом множестве $\mathbf{u} \in K$ ищется решение задачи (u, p_N) . В частности, с применением теории вариационных неравенств [13-15] можно локальную постановку задачи анализа НДС с учетом контактного взаимодействия тел 1 и 2 свести к вариационному неравенству:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in K, \mathbf{u} \in K. \quad (17)$$

Здесь $a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^2 a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha); \quad L(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^2 L_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)$, т.е. a и L суть суммы билинейной и линейной форм для каждого из тел 1 и 2:

$$a_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = \int_{\Omega_\alpha} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) d\Omega, \quad (18)$$

$$L_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \int_{(\Gamma_\alpha)} t_\Gamma(\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Gamma \quad (19)$$

(здесь индексы α в \mathbf{u}, \mathbf{v} опущены).

В свою очередь вариационное неравенство (17) имеет решением аргумент функционала I , на котором он достигает минимума

$$I(\mathbf{u}) = 1/2 a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \rightarrow \min, \mathbf{u} \in K. \quad (20)$$

Итак, описывая геометрическую форму взаимодействующих гладких тел

1 и 2 в начальной конфигурации обычными или обобщенными параметрами $\bar{p}_1, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{N_p}$, которые формируют вектор $\bar{\mathbf{P}}$, получаем из условия кинематического сопряжения абсолютно твердых тел подмножество G , которое можно идентифицировать в виде системы ограничений

$$G(\bar{\mathbf{P}}) \geq 0. \quad (21)$$

При этом подразумевается справедливость прямого и обратного соответствий:

$$S_1 = S_1(\bar{\mathbf{P}}); \quad S_2 = S_2(\bar{\mathbf{P}}); \quad (22) \quad \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}(S_1, S_2). \quad (23)$$

Тогда (21) можно представить в виде:

$$G(\bar{\mathbf{P}}(S_1, S_2)) \geq 0. \quad (24)$$

В актуальной конфигурации деформируемые твердые тела удовлетворяют условию минимума функционала

$$I(\mathbf{u}, S_1, S_2) \rightarrow \min, \quad \mathbf{u} \in K(S_1, S_2), \quad (25)$$

где поверхности S_1, S_2 можно рассматривать как параметры, неявно присутствующие в определении форм a и L (через $\Omega_\alpha = \Omega_\alpha(S_\alpha); \Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha(S_\alpha), \alpha = 1, 2$), а также K (через ограничения (10), записанные для функций \mathbf{u}_α , определенных на $S_\alpha, \alpha = 1, 2$).

Таким образом, задачу определения напряженно-деформированного состояния гладких тел 1 и 2 с учетом контактного взаимодействия по кинематически генерируемым поверхностям S_1, S_2 можно представить как связанную задачу (25), (24). Ее можно сформулировать как задачу поиска \mathbf{u} , доставляющего минимум некоторому функционалу I на выпуклом множестве K при варьируемых в пределах подмножества G КГП S_1 и S_2 .

Материалы исследований. Гранично-элементная формулировка связанной задачи. Сложность решения

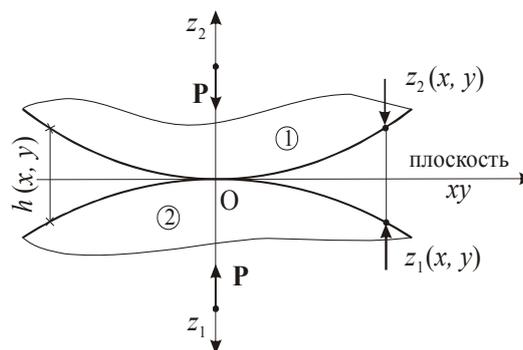


Рис. 3 – Представление локального зазора между контактирующими телами

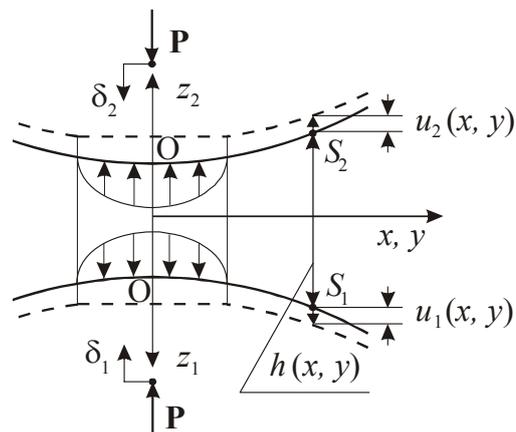


Рис. 4 – Деформация тел и образование контактной площадки под действием нормального усилия

связанной задачи (24), (25) состоит, прежде всего, в трудностях при оперировании с геометрической информацией (т.е. определении S_1, S_2 , подмножества G , а также способа варьирования S_1 и S_2). В общем случае это можно осуществлять путем варьирования параметров $\bar{p}_i \in \bar{\mathbf{P}}$. Тогда S_1 и S_2 изменяются, влияя на напряженно-деформированное состояние. Однако при таком способе варьирования трудно контролировать локальные и глобальные свойства поверхностей S_1 и S_2 (например, радиусы кривизны и область, занимаемую сопряженными поверхностями). Наоборот, оперируя ими, сложно подчинять поверхность условиям кинематического сопряжения.

В то же время при некоторых условиях можно предложить способ прямого сопряжения геометрических данных и полевых распределений искомого компонента НДС. Так, например, если форма и размеры взаимодействующих тел удовлетворяют условиям гладкости S_1 и S_2 , а также возможности интерпретации Ω_1, Ω_2 как полупространств, можно использовать один из вариантов метода граничных интегральных уравнений (МГИУ), описанный в [1, 2]. В соответствии с [1, 2] для описания зазора между контактирующими телами 1 и 2 вводится система координат, центр которой (точка O) традиционно располагается на линии действия прижимающей силы \mathbf{P} (рис. 3). Оси z_1 и z_2 имеют направление вовнутрь тел 1 и 2. Тогда уравнения каждой из поверхностей можно записать как $z_i = z_i(x, y), i = 1, 2$, а зазор – соответственно как $h = h(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y)$.

В деформированном состоянии оба гладких тела 1 и 2 приводятся в контакт по некоторой площадке. При этом перемещение произвольной точки поверхностей S_i каждого из тел в направлении оси z складывается из смещения тела как жесткого – δ_i и отклонения u_{z_i} (рис. 4) от недеформированной формы соответствующей поверхности (соответствует деформациям, которые вызваны действием искомого контактного давления). Тогда приходим к следующей общепринятой записи нелинейных соотношений для нормального контакта:

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2, \\ S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{в контакте;} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, \\ S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{вне зоны контакта.} \end{cases} \quad (26)$$

При этом для упругого полупространства известно интегральное соотношение между нормальным давлением и нормальными перемещениями точек границы (рис. 5) [12]:

$$u_z(x, y) = (1 - \nu^2) / \pi E \iint_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta, \quad (27)$$

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

Выражая перемещения $u_{z_1}(x, y)$ и $u_{z_2}(x, y)$ через единую функцию распределения давления $p(x, y)$, получаем:

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \times \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta. \quad (28)$$

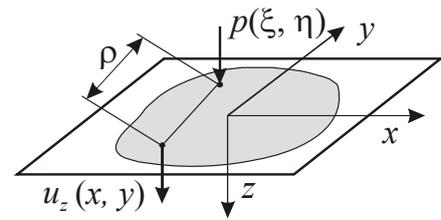


Рис. 5 – Перемещение границы полупространства под действием нормального усилия

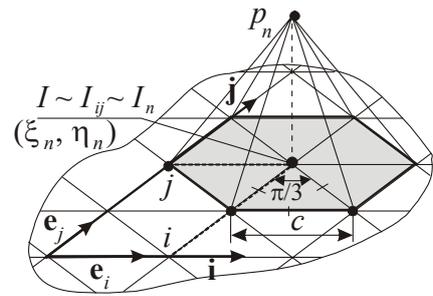


Рис. 6 – Регулярная треугольная сетка и пирамидальный элемент давления

Здесь $\nu_i, E_i, i = 1, 2$ – упругие параметры материалов каждого из контактирующих тел. Площадка контакта S и распределение давлений $p_N = p(\xi, \eta)$ (здесь и ниже $p \geq 0$ с учетом принятых на рис. 4-6 направлений), фигурирующие в правой части равенства, являются искомыми неизвестными. Для дискретизации разрешающих соотношений используется кусочно-линейное представление распределения действующих усилий, которому отвечают непрерывные и гладкие смещения точек поверхности, что характерно для контакта сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями. Искомая функция контактных давлений $p_N = p(x, y)$ аппроксимируется суперпозицией массива пирамидальных элементарных распределений с вершинами в узлах регулярной сетки с шагом c , состоящей из равносторонних треугольников (рис. 6, 7). При этом она полностью определяется дискретным набором конечного числа узловых значений давлений $p_n: p(\xi, \eta) \cong \sum_n \hat{p}(\xi - \xi_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n$.

Для нахождения искоемых величин усилий в узлах сетки, которые наилучшим образом удовлетворяют условиям на границе, применимы различные подходы [2], в частности, вариационный метод (принцип Калькера). При его использовании в качестве действительных принимаются такие узловые значения контактных давлений, которые минимизируют функционал энергии [16]. При этом требуется способ вычисления нормальных смещений (28) для используемого типа аппроксимирующих давлений. Такая задача

эквивалентна определению перемещений u_z , которые отвечают каждой из базисных нагрузок. В работе [2] описан способ аналитического вычисления коэффициентов такого представления.

Для узловых точек с некоторым индексом n , соответствующим паре номеров (i, j) :

$$u_n = \sum_m C_{nm} p_m, \quad (29)$$

где C_{nm} – компоненты матрицы коэффициентов влияния C , которая связывает узловые значения перемещений точек границы S с узловыми значениями контактных давлений.

Согласно принципа Калькера [16], для истинных областей контакта и контактного давления, действующего в сопряжении тел 1 и 2, достигается минимум функционала полной дополнительной работы Φ на множестве всех возможных неотрицательных распределений давлений p . Вид этого функционала:

$$\left\{ \Phi(p) = \frac{1}{2} \int_S p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_S p(h - \delta) dS \rightarrow \min; p(\xi, \eta) \geq 0 \text{ в } S. \right.$$

Из этого условия с учетом (29) получаем:

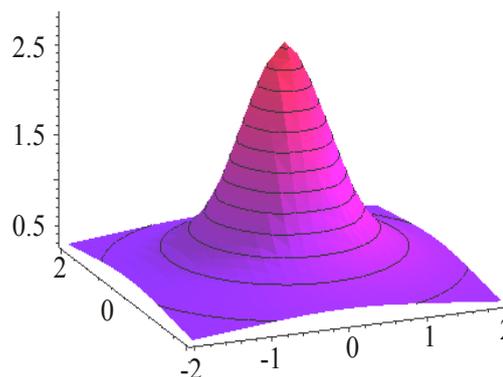


Рис. 7 – Распределение перемещений точек поверхности полупространства от действия давления (см. рис. 6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ узел } J_n - \text{ в контакте;} \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ узел } J_n - \text{ вне зоны контакта,} \end{array} \right. \quad (30)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$ – суммарное сближение тел; $h_n = h(x_n, y_n)$ – узловые значения первоначального зазора.

Условие неотрицательности контактных давлений накладывает на искомые узловые значения следующие ограничения:

$$p_m \geq 0, m = 1, N. \quad (31)$$

Кроме того, вне зоны контакта контактные давления должны быть нулевыми, откуда

$$p_m = 0, J_m - \text{вне зоны контакта}. \quad (32)$$

Интегральное соотношение для p_m :

$$\sum_m \sqrt{3}c^2 p_m / 2 = P. \quad (33)$$

Система соотношений (30)-(33) разрешается единственным образом относительно искомым неизвестных $\{p_m\}_{m=1}^N$ и δ . При их определении форма и размеры области контакта S обычно неизвестны. Поэтому для начала обычно строится сетка и делается начальное предположение о текущем (начальном) приближении области контакта S таким образом, чтобы принадлежащие ей узлы заведомо покрывали настоящую область контакта. В ходе последующей итерационной процедуры одновременно уточняются как форма области контакта, так и значения контактных узловых давлений. На каждом шаге итерационного уточнения имеется множество N_c , состоящее из текущих индексов n_c тех узлов, которые предположительно входят в контакт. Для этих узлов должны выполняться уравнения из системы (30), а также равенство (33):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c} p_{m_c} - \delta = h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3}c^2 p_{m_c} / 2 = P. \end{array} \right. \quad (34)$$

Последнее равенство в полученной системе записано с учетом условия (32): $p_m = 0, m \notin N_c$. Соотношения (34) образуют систему линейных алгебраических уравнений из $(N_c + 1)$ -го уравнения относительно такого же числа неизвестных. Матрица этой системы формируется из коэффициентов матрицы влияния C_{nm} и весовых множителей из равенства (33). Данная система имеет единственное решение. Полученные как ее текущее решение узловые значения $\{p_{m_c}\}_{m_c \in N_c}$ могут оказаться такими, что будут нарушать условие (31). Это будет означать, что текущие размеры зоны контакта завышены. Тогда индексы узлов, в которых это нарушение зафиксировано, исключаются из множества N_c , и производится следующий шаг итерации. Так происходит до той поры, пока решение системы (34) даст неотрицательные искомые узловые давления в зоне контакта.

В большинстве случаев этот результат является окончательным. Однако при этом требуется дополнительная проверка на выполнение второго типа из условий, представленных в (30). Вне зоны контакта S не должно наблюдаться взаимного проникновения взаимодействующих тел. Если же в части узлов, не вошедших в текущее приближение области контакта, не будут соблюдаться указанные неравенства, то их индексы включаются во множество N_c и повторяется итерационная процедура.

Основываясь на представленных выше подходах, можно, следуя тому же руслу выкладок, перейти к исследованию контакта шероховатых тел.

Начиная с этого момента, нужно, соблюдая логику и сохраняя подход, вместе с тем дополнить и модифицировать некоторые разрешающие соотношения, составляющие содержание работы [1]. Обратившись к статье [17], можно для линейно упругого винклерова слоя, в первом приближении моделирующего свойства шероховатости контактирующих тел, скорректировать приведенные выше соотношения, внося в диагональные компоненты матрицы коэффициентов влияния C слагаемые, описывающие податливость λ введенного слоя. Тогда следует сделать замену

$$C \rightarrow (C + \lambda E),$$

где E – единичная матрица.

Диагональная добавка к матрице коэффициентов влияния является коэффициентом λ в законе линейной связи «давление-перемещение» для упругого слоя, моделирующего упругие свойства шероховатого слоя. Все предыдущие выкладки и соотношения остаются в силе, однако с измененными свойствами.

Результаты исследований. Анализ представленных соотношений дает основание для следующих выводов.

1. Формально уравнения (34) объединяют в прямом «сконденсированном» виде:

- физико-механические характеристики исследуемой системы (они представлены матрицей коэффициентов влияния C_{nm} , в т.ч. учитывающей и податливость винклерова слоя, моделирующего шероховатость контактирующих тел);
- компоненты напряженно-деформированного состояния (в виде распределений контактных давлений p_m , через которые по известным соотношениям восстанавливаются все компоненты векторов перемещений, напряжений и деформаций на границах и внутри областей Ω_1, Ω_2);
- интегральное усилие \mathbf{P} ;
- трансляционное сближение тел – δ ;
- геометрическая форма сопряженных поверхностей (натянуты на дискретное множество ординат h_1, h_2 в узловых точках).

2. Полученная система уравнений является формально линейной по узловым контактными давлениям p , суммарным зазорам h , смещениям δ и силе P .

3. Формально решение (p_m, δ) не зависит от распределения узловых значений расстояний до поверхности S_1 и S_2 (т.е. h_1, h_2 соответственно), а только от их суммы $h = h_1 + h_2$. Таким образом, при предложенном подходе система не отражает индивидуальность каждой из сопряженных поверхностей, а только суммарность зазора между ними. Иными словами, распределение контактного давления «индифферентно» по отношению к условному «переносу» тонкого поверхностного слоя из одного тела на другое. В частности, одну из поверхностей (S_1 или S_2) можно «уплосщить» за счет такой процедуры, отнеся все их суммарные отступления от плоской формы на другую. То же справедливо и для податливостей поверхностных слоев каждого из тел: они, суммируясь, фигурируют в качестве общей податливости λ .

4. Система уравнений (34) относительно искомым (p_m, δ) хотя и выглядит идентично линейным алгебраическим уравнениям, не является по сути линейной в силу ограничений на неотрицательность p_m внутри области контакта, в силу их обнуления вне этой зоны, а также в силу недопустимости контакта вне этой области.

5. Формально систему (34) можно «инвертировать», т.е. трактовать ее как уравнения относительно неизвестных (p_m, δ) , доставляющих системе сближение δ и навязанное распределение p_m . При этом, если потребовать обнуление зазора в центральной точке (например, соответствующей номеру μ в сплошной нумерации узлов), то сближение δ определяется из соотношения $\delta = \sum_n C_{\mu n} p_n$. При этом естественным следствием этого условия является ограничение $h_n \geq \delta \forall n$. Т.о., задавая распределение p_n , мы в данном случае однозначно определяем δ .

Последний из выводов отображает свойство обратимости и связанности, выраженное в системе уравнений (34) в явном виде. Действительно, при анализе напряженно-деформированного состояния (т.е. когда искомыми являются (p_m, δ) при заданных (h_m, P)) геометрическую форму поверхностей (в смысле интегральную функцию зазора, см. вывод 3) задает набор h_m , при этом варьирование геометрической формы осуществляется путем покомпонентного изменения h_m . С другой стороны, при определении формы зазора в сопряжении контактирующих тел (т.е. когда искомые и заданные величины меняются местами) можно задавать желательное распределение контактного давления p_m путем назначения его узловых значений, а также варьировать его, просто меняя покомпонентно массив этих узловых

контактных давлений. При этом следует заметить, что и прямая (см. вывод 4), и обратная трактовка системы уравнений (34) не позволяет оперировать с ними как с линейными, поскольку действует, кроме них, еще и множество ограничений (30)-(32).

Предложенная система соотношений дает возможность, оперируя в основном только с ней, организовать решение связанной задачи анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза.

Таким образом, задавая некоторое ограничение или критерий (по напряжениям, контактному давлению, перемещениям), можно непосредственно из той же разрешающей системы уравнений, что и для задачи анализа напряженно-деформированного состояния, определять решение задачи синтеза геометрической формы контактирующих тел, а также подбора податливости упругого слоя, моделирующего по упругим свойствам шероховатость поверхностей контактирующих тел, на основе некоторых дополнительных критериев.

Выводы. Предложенный в статье подход объединяет в едином цикле, причем на базе одной и той же системы разрешающих соотношений, процедуры анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза поверхностей сложнопрофильных тел, контактирующих с возможностью взаимного движения или без него. Эти особенности отличают данную постановку от традиционных, обеспечивая большую эффективность численных исследований. Кроме того, в данной статье учтен дополнительный важный фактор – податливость винклерова слоя, описывающего шероховатость как источник больших величин сближения тел по сравнению с гладкими.

В дальнейшем планируется применить предложенный подход к решению ряда прикладных задач для элементов конкретных машиностроительных конструкций, в т.ч. – и для синтеза их проектно-технологических параметров.

Список литературы: 1. Ткачук Н. Н., Ткачук Н. А. Контакт сложнопрофильных тел: связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза // Вісник НТУ „ХПІ”. Тем. вип.: Механіка та машинобудування. – 2011. – №2. – С. 75-86. 2. Ткачук М. М. Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями: дисс. ... кандидата техн. наук: 05.02.09 – Харків, 2010. – 203 с. 3. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений – М.: Наука, 1968. – 584 с. 4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия – М.: Мир, 1989. – 509 с. 5. Аврунин Г. А. и др. Объемная гидropередача с шариковыми поршнями ГОП-900: характеристики и технический уровень // Механіка та машинобудування.– 2004.– №1. – С.14-21. 6. Ткачук Н. А., Ткачук Н. Н., Полищук Т. В. Контактное взаимодействие элементов конструкций с кинематически генерируемыми поверхностями // Вісник НТУ „ХПІ”. Тем. вип.: „Транспортне машинобудування”. – 2007. – №33. – С. 176–183. 7. Wriggers P. Computational Contact Mechanics – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – 518 p. 8. Greenwood J. A., J. P. Williamson. The contact of normally-flat surfaces // Proceedings of the Royal Society of London. – 1966. – Vol. 295. – P. 300-379. 9. Kragelsky I. V. Tribology – Lubrication, Friction, and Wear // Alisin Professional Engineering Publishing. – 2001. – P. 521-529. 10. Childs T. C. The persistence of asperities in indentation experiments – Wear, 1973. – Vol. 25. – P. 3-11. 11. Mikic B. B. Analytical studies of contact of nominally flat surfaces and effect of previous loading // Journal of Lubrication Technology.– 1971.– Vol. 93.– P. 451-459. 12. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.:

Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с. **13.** Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с. **14.** Гловински Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж. Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979 – 574с. **15.** Кравчук А. С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров // Прикладная математика и механика. – Том 41. – 1977.- с. 329-337. **16.** Kalker J. J. Variational principles of contact elastostatics. – J. Inst. Math. and Appl. – 1977. – Vol. 20. – 199 p. **17.** Скрипченко Н. Б., Ткачук Н. Н., Ткачук Н. А., Мухин Д. С. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов // НТУ «ХПИ». Серія: Проблеми механічного приводу –2013 – № 41. – С. 129-138.

Bibliography (transliterated): **1.** Tkachuk N. N., Tkachuk N. A. Kontakt slozhnoprofilnyh tel: svyazannaja zadacha analiza naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija i geometricheskogo sinteza // Visnik NTU „HPI”. Tem. vip.: Mehanika ta mashinobuduvannja. – 2011. – №2. – S. 75-86. **2.** Tkachuk M. M. Analiz kontaktnoi vzaemodii skladnoprofilnih elementiv mashinobudivnih konstrukcij z kinematično sprjazhenimi poverhnjami: diss. kandidata tehn. nauk: 05.02.09 – Harkiv, 2010. – 203 s. **3.** Litvin F. L. Teorija zubchatyh zaceplenij – M.: Nauka, 1968. – 584 s. **4.** Dzhonson K. Mehanika kontaktnogo vzaimodejstvija – M.: Mir, 1989. – 509 s. **5.** Avrunin G. A. i dr. Obemnaja gidroperedacha s sharikovymi porshnjami GOP-900: harakteristiki i tehničeskij uroven // Mehanika ta mashinobuduvannja.– 2004.– №1. – S.14-21. **6.** Tkachuk N. A. Tkachuk N. N., Polishhuk T. V. Kontaktnoe vzaimodejstvie jelementov konstrukcij s kinematičeski generiruemymi poverhnostjami // Visnik NTU „HPI”. Tem. vip.: „Transportne mashinobuduvannja”. – 2007. – №33. – S. 176–183. **7.** Wriggers P. Computational Contact Mechanics – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – 518 p. **8.** Greenwood J. A., J. P. Williamson. The contact of normally-flat surfaces // Proceedings of the Royal Society of London. – 1966. – Vol. 295. – P. 300-379. **9.** Kragelsky I. V. Tribology – Lubrication, Friction, and Wear // Alisin Professional Engineering Publishing. – 2001. – R. 521-529. **10.** Childs T. C. The persistence of asperities in indentation experiments – Wear, 1973. – Vol. 25. – P. 3-11. **11.** Mikic B. B. Analytical studies of contact of nominally flat surfaces and effect of previous loading // Journal of Lubrication Technology.– 1971.– Vol. 93.– P. 451-459. **12.** Rabotnov Ju .N. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988. – 712 s. **13.** Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с. **14.** Гловински Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж. Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979 – 574с. **15.** Кравчук А. С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров // Прикладная математика и механика. – Том 41. – 1977. с. 329-337. **16.** Kalker J. J. Variational principles of contact elastostatics. – J. Inst. Math. and Appl. – 1977. – Vol. 20. – 199 p. **17.** Скрипченко Н. Б., Ткачук Н. Н., Ткачук Н. А., Мухин Д. С. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов // НТУ «ХПИ». Серія: Проблеми механічного приводу –2013 – № 41. – С. 129-138.

Надійшла (received) 01.04.2014