

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ТЕОРІЯ СИСТЕМ ТА СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

**Навчальний посібник
для студентів всіх форм навчання
спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія»**

Затверджено

редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 27.06.2024

Харків
НТУ «ХПІ»
2024

Рецензенти:

Герман ФЕСЕНКО, д-р. техн. наук, професор, Харківський національний аерокосмічний університет «ХАІ».
Олена ТОЛСТОЛУЗЬКА, д-р. техн. наук, професор,
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна.

Автори:

М. Й. Заполовський, професор, кандидат технічних наук,
Н.Г. Кучук, професор, доктор технічних наук,
М. В. Мезенцев, доцент, кандидат технічних наук

Заполовський М. Й. Теорія систем та системного аналізу / М. Й. Заполовський, Н.Г. Кучук, М. В. Мезенцев: навчальний посібник [електронне видання]. – Харків: НТУ «ХПІ», 2024. – 235 с.

В посібнику розглядаються математичні моделі систем управління та сигналів збурювання, дослідження систем в часовій та частотній формі; моделі сигналів у вигляді зображення Фур'є; синтез управлінь за допомогою методів варіаційного числення; рішення задачі лінійного програмування. Наведені приклади рішення задач як аналітичними методами, так і з використання процедур пакету прикладних програм *MATLAB*. Навчальний посібник призначено для інформаційно-методичного забезпечення у процесі вивчення курсу «Теорія систем та системного аналізу» студентами всіх форм навчання.

Для студентів спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія».

Іл. 56. Табл. 12. Бібліогр. 18 назв.

УДК 004.7

© М. Й. Заполовський,
Н. Г. Кучук,
М. В. Мезенцев

ЗМІСТ

Вступ.....	7
1 Предмет «Теорія систем і системного аналізу».....	9
1.1 Основні поняття дисципліни.....	9
1.2 Класифікація систем та опис.....	13
1.3 Опис системи на вербальному рівні	17
2 Моделювання у системному аналізі.....	19
2.1 Аналіз моделей	19
3 Моделювання динамічних систем та сигналів за допомогою паketу <i>MATLAB</i>	27
3.1 Пакет прикладних програм <i>MATLAB</i>	27
3.2 Середовище <i>Simulink</i> пакету <i>MATLAB</i>	31
3.3 Дослідження динамічних систем в часовій області методами Ейлера та Рунге–Кутта	32
3.4 Завдання для самостійної роботи	38
4 Розроблення моделей динамічних ланок систем та їх дослідження.....	40
4.1 Передавальні функції систем.....	40
4.2 Побудова математичної моделі системи у вигляді передавальних функцій.....	49
4.3 Дослідження моделей, які задані у вигляді передавальних функцій, засобами <i>Simulink</i> пакету <i>MATLAB</i>	51
4.4 Завдання для самостійної роботи	53
5 Знаходження та дослідження динамічних характеристик систем.....	57
5.1 Частотні характеристики систем	57
5.2 Знаходження частотних характеристик системи аналітичним методом	59
5.3 Знаходження частотних характеристик системи за допомогою пакету <i>MATLAB</i> та побудова характерних функцій.	61
5.4 Завдання для самостійної роботи	66
6 Розробка дискретних моделей динамічних систем та їх елементів.....	68

6.1 Застосування засобу Z -перетворення для цифрового моделювання динамічних систем	68
6.2 Методика отримання рекурентного співвідношення для системи, що описується диференціальним рівнянням	72
6.3 Завдання для самостійної роботи	74
7 Моделі періодичних сигналів систем	76
7.1 Моделі сигналів у вигляді Фур'є зображення.....	76
7.2 Тригонометричний ряд Фур'є. Знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є для $2l$ -періодичної функції.....	79
7.3 Приклади побудови моделей періодичних сигналів	81
7.4 Завдання для самостійної роботи	89
8 Розроблення моделей неперіодичних сигналів у вигляді Фур'є зображення	95
8.1 Неперервне перетворення Фур'є	95
8.2 Інтеграл Фур'є	97
8.3 Приклади рішення задачі знаходження спектру неперіодичного сигналу.....	99
8.4 Завдання для самостійної роботи	108
9 Дослідження динамічних систем в замкнутій системі керування шляхом моделювання	112
9.1 Критерії оцінки схеми управління з негативним зворотним зв'язком.....	112
9.2 Типи регуляторів і їх моделі	116
9.3 Проектування ПД-регулятора динамічної системи	117
9.4. Завдання для самостійної роботи	123
10 Рішення задачі аналізу структурної керованості і спостережуваності системи	125
10.1 Поняття структурної керованості і спостережуваності системи	125
10.2 Приклади рішення задачі аналізу структурної керованості і спостережуваності системи	132

10.3 Завдання для самостійної роботи	134
11 Загальна характеристика методів оптимізації процесів в системах керування	137
11.1 Класифікація задач оптимізації	137
11.2 Аналітичні методи пошуку екстремуму безперервної функції.....	142
11.3 Градієнтні методи оптимізації	146
11.4 Приклади аналітичного знаходження екстремального значення функції багатьох змінних	148
11.5 Завдання для самостійної роботи	152
12 Багатокритеріальні задачі. Способи подолання невизначеності мети	154
12.1 Поняття невизначеності цілей і способи її подолання	154
12.2 Чисельні методи побудови множини Парето. Випадок двох критеріїв	156
12.3 Приклад побудови множини Парето та її аналіз	157
12.4 Завдання для самостійної роботи	160
13 Варіаційні методи оптимізації	162
13.1 Задача класичного варіаційного числення	162
13.2 Приклади рішення задач методами варіаційного обчислення	167
13.3 Завдання для самостійної роботи	180
14 Рішення задачі оптимального керування детермінованими об'єктами ..	184
14.1 Задача оптимального керування як задача Лагранжа варіаційного числення	184
14.2 Рішення задачі оптимального керування аналітичним методом та за допомогою процедур пакету <i>MATLAB</i>	185
14.3 Завдання для самостійної роботи	192
15 Принцип максимуму	195
15.1 Особливості використання принципу максимуму для оптимізації систем	195
15.2 Використання принципу максимуму для оптимізації лінійних систем	198

15.3 Використання принципу максимуму для оптимізації систем, які лінійні відносно управлінь	200
15.4 Рішення задач оптимізації з використанням методу принципу максимуму	201
16 Задача лінійного програмування	205
16.1 Постановка задачі лінійного програмування	205
16.2 Різновидності рішення задач лінійного програмування	206
16.3 Розв'язання задачі лінійного програмування симплекс-методом.....	208
16.4 Симплекс-метод розв'язання ЗЛП	211
16.5 Розв'язання ЗЛП двоїтим симплекс-методом	217
16.6 Приклади рішення ЗЛП аналітичним симплекс-методом та за допомогою процедур пакету <i>MATLAB</i>	220
16.7 Завдання для самостійної роботи	231
Список джерел інформації	233

ВСТУП

Навчальний посібник призначений для інформаційно-методичного забезпечення в процесі вивчення теоретичного курсу «Теорія систем та системного аналізу» для студентів всіх форм навчання спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія».

Даний посібник орієнтований на розроблення та дослідження математичних моделей і засобів, які застосовуються при проектуванні автоматизованих систем, зокрема систем оптимального управління, інформаційно-обчислювальних комплексів, автоматизованих систем наукових досліджень, а також на освоєння сучасної технології автоматизації дослідження цих систем на базі засобів моделювання на персональних комп'ютерах.

Мета посібника є надання студентам основних знань з теоретичних і практичних основ методології теорії систем та системного аналізу для дослідження складних міждисциплінарних проблем, методів формалізації системних завдань, що мають суперечливі цілі, невизначеності та ризики, які необхідні фахівцям з інформаційних технологій; формування умінь та компетенцій для прикладного застосування практичних інструментів системного аналізу для вирішення завдань сучасної теорії управління, теорії прийняття рішень, методів математичного та комп'ютерного моделювання.

Кожна тема посібника дає можливість навчити студентів:

- самостійно працювати з науково-технічною літературою і програмною документацією в галузі аналітичних досліджень та машинного моделювання;
- отримати навички проведення експериментів, збирання даних та моделювання в комп'ютерних системах;
- розв'язувати задачі аналізу та синтезу засобів, характерних для спеціальності;

- оцінювати отримані результати та аргументовано захищати прийняті рішення;
- оформлювати програмну документацію і результати імітаційних експериментів відповідно до вимог ЄСПД і ЄСКД.

В навчальному посібнику значну увагу приділено розробленню математичних моделей як самих об'єктів управління і можливих сигналів управління – керуючих впливів, а також методиці рішення задач з використанням сучасних методів оптимізації і пакетів прикладних програм моделювання, зокрема пакету *MATLAB*.

1 ПРЕДМЕТ «ТЕОРІЯ СИСТЕМ І СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»

1.1 Основні поняття дисципліни

Теорія систем – це область наукового знання про навколишній світ як сукупність систем різної складності й різного рівня, які взаємодіють між собою. Теорія систем є загальнотеоретичним підходом, заснованим на методах діалектики, використанні знань філософії, прикладної математики, моделювання, теорій пізнання та інших наукових дисциплін. Вона вивчає закономірності функціонування, взаємодії і розвитку великих систем.

Системний аналіз – це методологічна дисципліна, яка заснована на системному підході. Вона об'єднує методи вивчення систем різної складності й призначення, розробляє ці методи, узагальнює їх, дає практичні рекомендації для їх використання.

Головними методами системного аналізу є побудова моделей систем різного рівня і складності та аналіз систем за допомогою побудованих моделей [1 – 4].

Технічна основа системного аналізу – інформаційні системи, ряд математичних дисциплін, обчислювальна техніка і сучасні методи керування.

Основними принципами системного підходу є:

1. Принцип взаємозв'язку – система вивчається як частина певної макросистеми. Вона зв'язана безліччю зв'язків з іншими системами, взаємодіє та існує в єдності з ними.

2. Принцип багатоплановості – система як деяка самостійна одиниця вивчається з різних сторін зі своїми особливостями.

3. Принцип багатомірності, який полягає в тому, що вивчаються різні характеристики систем, які об'єднують в групи (кластери): об'єкт описується як сукупність деяких характеристик та взаємозв'язків між ними.

4. Принцип ієрархічності – система розглядається як складна структура з різними рівнями, між якими встановлюються певні зв'язки.

5. Принцип різнопорядковості - полягає у тому, що різні ієрархічні рівні системи породжують закономірності різного порядку. Одні закономірності властиві тільки всім елементам або деякій групі елементів, а інші тільки окремим елементам.

6. Принцип динамічності – система розглядається в рухові й розвитку.

Відповідно до системного підходу всякий об'єкт виникає та існує в рамках деякої великої системи. Зв'язки між об'єктами і системою є суттєвими основами виникнення, існування та розвитку об'єкта і системи в цілому.

1.1.1 Поняття системи. Термін «система» використовується у тих випадках, коли треба охарактеризувати об'єкт, який досліджується чи проектується як дещо ціле, складне, про який неможливо одразу дістати просте уявлення.

Найбільш відомі визначення системи такі:

– система – це множина елементів, що знаходяться в певних співвідношеннях і зв'язках один з одним, взаємодіють між собою, утворюють певну цілісність, як ціле взаємодіють із навколишнім середовищем;

– система - це сукупність елементів, яка має нові властивості, відсутні у кожного елемента;

– система – це сукупність засобів вирішення проблеми.

Ці та інші визначення системи характеризують різні підходи до розгляду систем, аналізу закономірностей їх розвитку та функціонування.

Розрізняють матеріальні й абстрактні (ідеальні) системи.

1.1.2 Властивості систем. Згідно [3] можливо виділити чотири основні властивості системи, а саме:

1. Система перш за все є сукупністю елементів. При певних умовах елементи можуть розглядатись як системи.

2. Між елементами існують суттєві зв'язки чи властивості, які за силою зв'язку перевищують зв'язки між елементами системи та елементами, які не входять у систему. Під суттєвими зв'язками розуміють такі, які закономірно з необхідністю визначають інтегровані властивості системи.

3. Системі властива певна організація, що виявляється у зменшенні ентропії системи в порівнянні з ентропією сукупності елементів, які складають систему.

4. Існування інтеграційних властивостей, тобто властивостей, які властиві системі в цілому і не властиві жодному елементу системи.

1.1.3 Основні ознаки системи. Основними ознаками системи є:

- цілісність;
- якісна визначеність;
- відмежованість відносно середовища;
- гетерогенність і структурованість;
- взаємодія частин системи між собою;
- взаємодія і зв'язок з навколишнім середовищем;
- наявність інтегральних характеристик;
- емерджентність;
- наявність цілей та їх сукупності, ціленаправленість.

Цілісність означає, що система - це об'єднання частин, яке по відношенню до навколишнього оточення виступає як одне ціле.

Під якісною визначеністю розуміють, що система - це така сукупність елементів, яка має свої якісні ознаки, характерні тільки для даної системи і відсутні в інших системах. Ці ознаки проявляються тільки у даній системі. Вони визначають відношення до інших систем.

Відмежованість системи від середовища означає, що всяка система має свої границі. Границі відділяють систему від навколишнього середовища.

Гетерогенність системи і структурованість. Під гетерогенністю розуміють неоднорідність, те, що система складається з різних частин. Структурованість означає, що система є певним чином організованою сукупністю, має певну структуру. Всяка система має певну структуру. Ця структура забезпечує об'єднання елементів системи таким чином, щоб дане об'єднання мало свою якісну визначеність, цілісність.

Взаємодія з навколишнім середовищем означає, що система як ціле взаємодіє з іншими системами. Це зумовлене цілісністю системи, її якісною визначеністю. Під час взаємодії з навколишнім середовищем виявляються властивості системи. За характером взаємодії розрізняють відкриті й закриті системи. Відкрита система - це система, яка активно обмінюється з навколишнім середовищем речовиною, енергією та інформацією. У закритій системі такий обмін обмежений або відсутній.

Під поняттям інтегрованості розуміють, що в системі властивості окремих елементів об'єднуються і виступають разом у новій якості.

Емерджентність – це поява нових якостей, не властивих елементам, що складають систему. Кожна система є сукупністю певних частин, певних елементів. Особливістю системи є те, що в результаті об'єднання декількох елементів і утворення системи з'являються нові властивості, яких не має жоден елемент до створення системи.

Наявність цілей, ціленаправленість – одна з головних ознак системи. Кожна система має певну ціль існування або створена для певної цілі. У системи може бути одна ціль або сукупність цілей. У випадку сукупності цілей всі вони утворюють певну ієрархію, в якій є головні, першочергові цілі й другорядні, підпорядковані головним. Визначення цілей системи є завданням, що має свої особливості. Структура системи, її склад, взаємодія частин завжди визначаються ціллю системи.

1.1.4 Складність систем. Складність систем є важливою характеристикою, яку необхідно враховувати при аналізі. Складність систем може бути структурною або функціональною. Структурна складність полягає у наявності великої кількості елементів і їх взаємозв'язку. Функціональна складність виражається в наявності багатьох взаємозв'язків і взаємозалежностей. Ці зв'язки можуть бути внутрішніми (між елементами системи) й зовнішніми (між системою та мегасистемою).

1.2 Класифікація систем та опис

1.2.1 Класифікація систем за ступенем організованості. Виділяють:

– добре організовані системи. відносяться ті системи, поведінка яких жорстко детермінована. У системі встановлені чіткі взаємозв'язки між складовими частинами, що забезпечують дію системи в цілому. До таких систем відносяться комп'ютер, телевізор, холодильник, пральна машина тощо. У них взаємозв'язки окремих механізмів чітко організовані і система діє тільки таким чином, як це дозволяє внутрішня організація.

– погано організовані (дифузні) системи. Це системи, в яких взаємодія частин не детермінована однозначно, має випадковий характер.

– самоорганізуючі системи. Системи, що мають механізми регулювання. Найбільш простими з них є системи саморегулювання. Це можуть бути механічні системи зі зворотним зв'язком. Вони у своєму складі мають дві частини: частину, яка підлягає керуванню – S, та керуючий пристрій чи регулятор – R. Зображають їх, як показано на рис. 1.1.

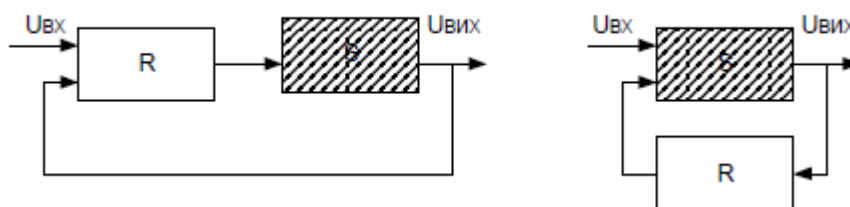


Рисунок 1.1 – Системи зі зворотним зв'язком

У таких системах важливим є наявність зворотного зв'язку. Під останнім розуміємо подачу на вхід системи сигналу про вихідну величину (пропорційного, залежного від швидкості зміни (диференційного) чи інтегрального значення вихідної величини або їх сокупності). Вихідна величина системи (сигнал), чи інформація про її стан подається на регулятор. Регулятор залежно від вимог, які стоять перед системою, та від інформації, яка надійшла через зворотній зв'язок, регулює її роботу.

– самонавчаючі системи. Системи, що мають здатність засвоювати й запам'ятовувати минулий досвід і змінювати свою поведінку відповідно до набутих знань.

– самовідновлювальні системи – це системи, які здатні відновлюватись повністю або частково.

– самовідтворюючі – це системи, які можуть відтворювати подібні до себе системи, породжувати нові системи аналогічні собі.

1.2.2 Класифікація за характером цілей. За характером цілей системи прийнято класифікувати як системи, призначені для певної цілі, так і системи, здатні самостійно обирати ціль і прагнути до неї.

1.2.3 Класифікація за описом змінних. Дана класифікація здійснюється залежно від ступеня складності системи, наших знань про неї і від того, як описуємо функціонування системи. Змінними системи є вхідні величини $x(t)$, вихідні $y(t)$ та внутрішні параметри системи $z(t)$. Відповідно до типу цих величин розрізняють системи з кількісним описом змінних, системи з якісним описом та системи зі змішаним (частково з кількісним, а частково з якісним) описом.

1.2.4 Класифікація за типом операторів системи. Класифікація за типом операторів відображає зв'язок між змінними в системі, тобто вона несе інформацію про те, які процеси відбуваються в системі, динаміку системи. Змінні системи, її вхідні й вихідні величини між собою завжди зв'язані певними залежностями, співвідношеннями. Ці залежності можуть бути описані певними операторами системи, які визначають перетворення вхідних величин у вихідні.

Системи, в яких внутрішні процеси зовсім невідомі і оператори явно не можуть бути записані, відносять до класу систем «чорна скриня». Для таких систем відомі тільки вхідні й вихідні величини і зовсім не відомі процеси перетворення вхідних величин у вихідні.

Системи, в яких частково відомі процеси перетворення вхідних величин у вихідні, оператори системи можуть бути записані у вигляді певних правил, відносять до непараметризованого класу.

Системи, для яких співвідношення між вхідними й вихідними величинами повністю відомі, можуть бути записані у явному вигляді з точністю до певних числових параметрів, відносять до параметризованого класу.

Для деяких систем параметризованого класу співвідношення між вхідними й вихідними величинами можуть бути описані в операторній формі, наприклад, у вигляді: $y(t) = R[x(t), z(t)]$, де R – певний оператор. Такі системи відносять до класу «біла скриня». Під цим терміном розуміють, що повністю відома внутрішня будова системи, закономірності її функціонування.

В якості операторів системи можуть бути звичайні й диференціальні рівняння, більш складні матричні співвідношення та ін.

Залежно від характеру рівнянь системи можуть бути лінійні й нелінійні, від того, який тип рівнянь, дискретні та неперервні, залежно від зміни величин у часі: інерційні й безінерційні, з пам'яттю, залежно від зміни параметрів системи в часі, стаціонарні й нестаціонарні.

1.2.5 Класифікація за способом керування. Ця класифікація здійснена на двох рівнях (рис. 1.2). Перший рівень класифікації визначає, чи входить блок керування у саму систему чи знаходиться поза нею. Самокеровані системи мають власний блок керування, у систем, керованих зовні, блок керування відсутній і існує тільки зовнішнє керування.

Системи з комбінованим керуванням – це такі системи, в яких є блок керування у самій системі, за допомогою якого здійснюється керування певними параметрами, але система підлягає також зовнішньому керуванню.

Другий рівень класифікації поділяє системи за ознакою, як саме здійснюється керування. Для всіх систем підкласи другого рівня мають певні спільні ознаки.

Системи з керуванням без зворотного зв'язку – це такі системи, у яких відсутні механізми зворотного зв'язку і режими роботи строго обумовлені керуючою дією. До цього підкласу відносяться верстати програмного керування, які мають одну чи декілька жорстких програм роботи і не здатні змінювати їх при зміні зовнішніх умов.

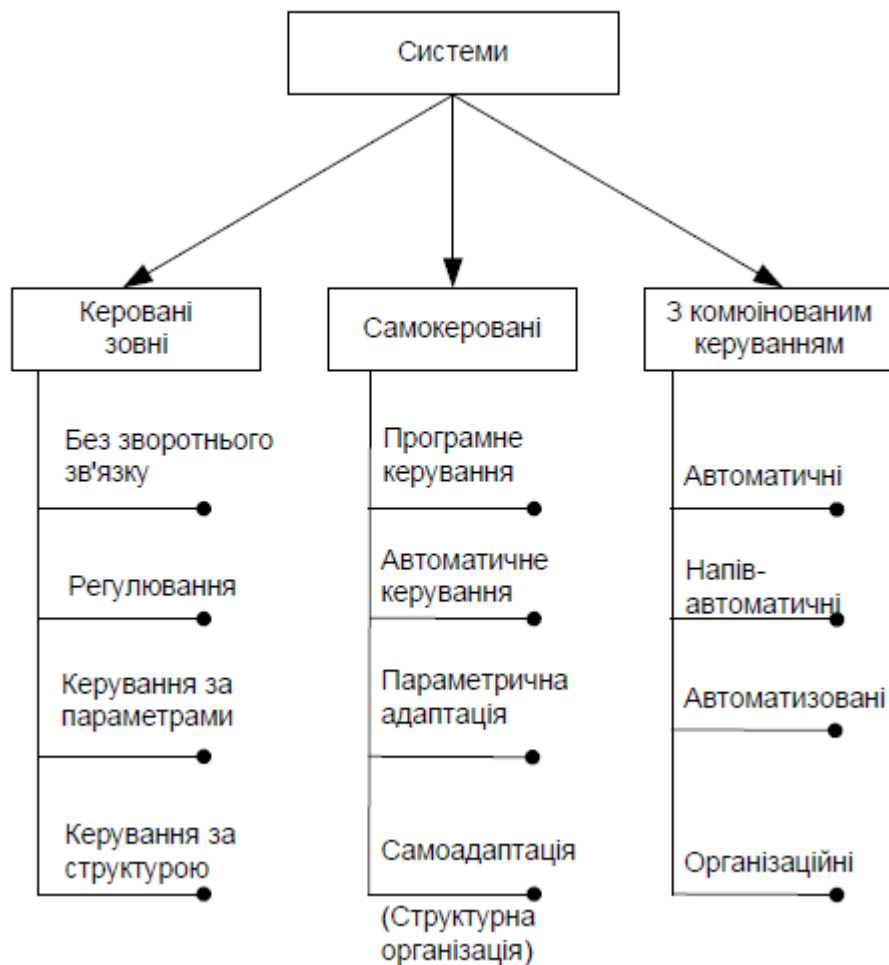


Рисунок 1.2 – Класифікація систем за способом керування

Системи наступного підкласу відрізняються наявністю зворотного зв'язку. Зворотній зв'язок забезпечує автоматичне регулювання системи, підтримання параметрів системи при змінах характеристик зовнішнього середовища.

Системи з керуванням за параметрами – це такі системи, в яких не тільки здійснюється зворотній зв'язок за вихідною величиною, а і можлива зміна

параметрів самої системи. Прикладом таких систем є адаптивні автоматизовані системи керування,

Найбільш складними є системи керування, якими здійснюються шляхом зміни структури самої системи. Такі системи працюють у надзвичайно складних умовах і зміна структури системи дозволяє їм пристосуватись до нових умов. До таких систем слід віднести гнучкі автоматизовані системи сучасних виробництв, які дозволяють переходити з випуску однієї продукції на іншу.

1.3 Опис системи на вербальному рівні

Як правило, інформація про систему має описовий, словесний характер. Виникає необхідність її впорядкувати, систематизувати. Першим етапом впорядкування інформації є відображення її в описовій формі аналізу системи. Одержана інформація про систему знаходить відображення на так званому вербальному рівні. Аналіз системи на цьому рівні включає такі три найбільш загальні форми опису:

- історична (історичний аналіз);
- предметна (морфологічний аналіз);
- функціональна (функціональний аналіз).

Предметна форма опису системи. Предметна форма опису системи (морфологічний аналіз) включає: виявлення елементного складу системи (субстрактний аналіз); виявлення відношень (зв'язків) між елементами системи (структурний аналіз).

Субстрактний аналіз, тобто виявлення елементного складу системи виконують для того, щоб зрозуміти, з яких елементів складається система, яка її будова, які складові частини. При виконанні субстрактного аналізу виходять з ознаки цілісності системи. Усі складові частини повинні у сукупності створювати систему, поняття цілісності дозволяє зрозуміти необхідність кожного елемента в системі.

Склад системи, як правило, описують у наступних термінах: система, підсистема, складова частина, елемент. Кожна з підсистем може бути розділена на певні вузли, або елементи.

1.3.1 Структурний аналіз – це виявлення зв'язків між складовими частинами системи. Якщо субстрактний аналіз дозволяє виявити, які частини входять до складу системи, то структурний аналіз встановлює взаємозв'язки між цими складовими частинами. Структурний аналіз вирішує два типи завдань: виявлення закономірності зв'язків елементів системи; виявлення ступеня складності системи.

1.3.2 Функціональний аналіз (Функціональна форма опису системи). Під функціями розуміють прояви властивостей будь-якого об'єкта в даній системі відношень. Функціональний аналіз дозволяє вивчити роботу системи в цілому, враховуючи її призначення, склад, структуру, взаємодію частин, зрозуміти процеси, що відбуваються в системі, і взаємодію системи з навколишнім середовищем. Розрізняють дві форми функціонального аналізу, а саме: розкриття внутрішнього і зовнішнього функціонування системи.

У функціональному описі відображають: призначення складових частин; роль кожної складової частини; взаємозв'язок між частинами; процеси, зумовлені зв'язками між частинами; можливі стани й режими; здатність до дії; порядок виконання дій; обов'язки підрозділів в організаційній системі; шляхи передачі команд управління; взаємозв'язок результатів дій одних частин від дій інших частин; взаємозв'язок дій частин з цілями системи.

Зовнішнє функціонування досліджується з метою виявлення способів пристосування системи для існування в оточуючому середовищі, адаптивної та адаптуючої активності системи.

2 МОДЕЛЮВАННЯ У СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ

2.1 Аналіз моделей

2.1.1 Типи моделей та їх характеристики. Основною процедурою системного аналізу є побудова моделей систем і вивчення систем за допомогою цих моделей. Вирішення проблеми розпочинається з вивчення системи. Результатом попереднього вивчення є опис системи на вербальному рівні.

Наступним етапом системного аналізу є побудова моделей системи. Модель системи, чи сукупність моделей, служить інструментом розуміння і вивчення системи, засобом подачі знань про систему і їх збереження. Моделі систем використовують для вирішення конкретних проблем, що виникають у системі.

Кожна модель є певною абстракцією, в якій конкретні характеристики системи замінені описом найбільш загальних властивостей. Модель може бути як фізична, предметна, так і формальна, логічна. Серед формальних моделей особливо виділяють математичні моделі.

Математична модель з'являється тоді, коли в системі виділені кількісні властивості і встановлені співвідношення між ними. Поняття абстракція означає таку форму пізнання, в якій уявно виділяють суттєві властивості і зв'язки предмета і відокремлюють їх від інших випадкових, не суттєвих у даному аспекті властивостей і зв'язків.

Існує декілька визначень моделі. Найбільш вживані такі:

1. Модель – це деякий матеріальний чи уявний об'єкт, який за певних умов замінює оригінал і може використовуватися для вирішення проблеми відносно об'єкта – оригінала.

2. Модель – спеціально створений для зручності дослідження об'єкт, який має потрібний ступінь подібності до модельованого об'єкта, адекватний цілям дослідження, створений суб'єктом чи особою, яка приймає рішення відносно досліджуваної системи.

3. Модель – це матеріальна, знакова або уявна система, що відтворює, імітує чи відображає принципи внутрішньої організації, функціонування, ознаки, характеристики об'єкта дослідження, безпосереднє вивчення якого неможливе, ускладнене чи недоцільне.

Процес моделювання включає такі етапи: постановку проблеми; побудову або вибір моделі; дослідження моделі; екстраполяцію результатів дослідження на оригінал.

2.1.2 Засоби побудови моделей. Класифікація моделей. При вивченні багатьох явищ використовується моделювання за допомогою обчислювальних машин (ОМ). Модель представляє собою введені в машину дані, певні правила роботи з цими даними, закономірності, записані у вигляді програми обробки даних, певних рівнянь, які зберігаються в пам'яті ОМ.

У визначенні моделі вказано, що модель – це реальний чи уявний об'єкт. Залежно від того, з чого створені моделі, їх слід поділяти на матеріальні (реальні) та ідеальні (уявні, продукти свідомості).

Для того, щоб даний об'єкт міг бути моделлю, необхідно, щоб він відповідав декільком умовам: відповідав цільовому призначенню моделі; замінював оригінал, давав відповіді відносно оригіналу з потрібною точністю.

Для цього повинно бути встановлене певне співвідношення подібності між об'єктом моделювання і моделлю. Існує декілька способів встановлення такого співвідношення. Типи співвідношення подібності:

- пряма подібність;
- опосереднена подібність;
- умовна подібність.

Найпростіше пряме співвідношення подібності – це моделі, створені на основі фізичної подібності. Моделі створюються такими ж як об'єкти, подібні до них. Модель може бути побудована у зменшеному, або збільшеному масштабі реального об'єкта.

Опосереднена подібність – це подібність, заснована на єдності законів природи, на існуючій у природі аналогії між різними явищами. Моделі

створюють не на основі механічного відтворення, а на основі об'єктивно існуючої єдності явищ природи. Наприклад, коливання в електричному колі і механічні коливання описуються однаковими диференціальними рівняннями. Тому електричні явища можна вивчати на механічних моделях, а коливання складних механічних систем краще вивчати за допомогою електричних кіл.

Умовна подібність – використовується там, де не можна встановити ні прямої ні опосередкованої подібності. Тут подібність встановлюють на основі певних правил, домовленостей. Наприклад, електрична схема – це модель електричного кола, що є моделлю тільки завдяки певній домовленості, умовній подібності.

Крім того виділяють логіко–математичні моделі, які поділяють на аналітичні й імітаційні. Аналітичні моделі – це моделі, призначені для аналізу теоретичними методами, засобами алгебри, математики, а імітаційні – для відтворення певних процесів, явищ. До них також відносяться інтуїтивні моделі – це моделі, що будуються на вербальному (описовому) рівні. Вони мають характер гіпотез, розуміння загальних характеристик розвитку об'єктів.

2.1.3 Властивості моделей. Найбільш важливі властивості моделей: обмеженість; спрощеність; адекватність; вірність моделі.

Обмеженість моделей зумовлена обмеженістю ресурсів (матеріальних, енергетичних, інформаційних, часових), які ми використовуємо при створенні моделей.

Спрощеність моделі. Спрощена модель виділяє головне, зосереджує увагу на ньому, відкидає все другорядне, несуттєве.

Адекватна модель – це модель, яка правильно відображає суттєві властивості і відношення предметів та явищ навколишнього світу. Адекватною вважається модель, яка не взагалі в повній мірі відповідає об'єкту, а в тій мірі, що приводить до потрібної цілі, дозволяє одержати потрібні на практиці результати.

Вірність моделі – поняття не тотожне адекватності. Вірність поняття більш загальне, означає, що модель повністю відповідає дійсності.

2.1.4 Моделі систем. В відповідності до класифікації розрізняють формальні і змістовні моделі.

Формальні моделі – це окремі типи моделей, подані у формальному, описовому вигляді, в який входять головні ознаки, за якими дана модель, суттєво відрізняється від інших. В описі формальної моделі даються також правила її побудови, складові частини моделі, зв'язки між частинами, вигляд моделі в цілому. Формальна модель має загальний характер без конкретного наповнення. На її основі можна побудувати цілий ряд змістовних моделей. Формальних моделей існує обмежена кількість. До формальних моделей самого високого рівня абстракції відносяться моделі «Чорний ящик», «Склад системи», «Структура системи», «Структурна схема».

Змістовні моделі – це моделі, наповнені поняттями даної предметної області. Вони будуються на основі формальних моделей, які служать шаблоном, зразком для побудови змістовних моделей. Створення змістовної моделі - це процес інтерпретації формальної моделі на мові певної предметної області. У математиці інтерпретація – це встановлення відповідності, пояснення положень деякої формальної теорії на мові певної змістовної системи, причому положення змістовної системи повинні бути визначені незалежно від формальної системи. Інтерпретація вважається повною, якщо кожному елементу формальної системи відповідає певний елемент змістовної системи.

2.1.5 Модель типу «Чорний ящик». Найпростіша формальна модель – це модель типу «Чорний ящик» (рис. 2.1).

Модель «чорний ящик» при формальному математичному розгляді може мати представлення системи у вигляді оператора, який діє на вхідні величини і перетворює їх у вихідні. Якщо оператор системи враховує, наприклад, зміну в часі, то такий опис системи буде динамічним. Сам оператор може бути простим чи складним.

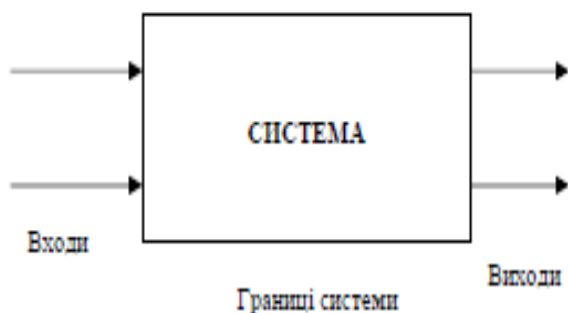


Рисунок 2.1 – Модель типу «Чорний ящик»

2.1.6 Модель типу «Склад системи». Модель «Чорний ящик» нічого не говорить про те, що являє собою система, з яких підсистем вона складається, як вони взаємодіють. Вона не дає відповіді на запитання про будову системи, її частин, чи інших систем, які входять до її складу.

Під час побудови змістовної моделі «Склад системи» в першу чергу визначають границі системи.

Побудова самої моделі передбачає вирішення питання, як розбити систему на підсистеми і елементи? Елемент – це найменша відмежована, самостійна частина системи, яка при даному розгляді вважається неподільною.

Побудова змістовної моделі «Склад системи» залежить від: цілей моделювання, проблем, які необхідно вирішувати; точки зору аналітика; контексту вивчення системи; ступеня потрібної деталізації; рівня знань і досвіду аналітика.

2.1.7 Модель типу «Структура системи». Під структурою системи розуміють сукупність необхідних та достатніх для досягнення цілі відношень і зв'язків між елементами. У структурі системи вказують сукупність закономірних, суттєвих зв'язків, що забезпечують функціонування системи. Для вивчення структури системи використовують два підходи: теорії множин; теорії графів.

У теорії множин структуру виражають відношеннями між елементами. Теорія розглядає подвійні, потрійні та інші відношення, їм у відповідність ставляться бінарні відношення, добутки елементів. У теорії множин структуру

системи описують за допомогою матриць суміжності. Матриця суміжності – це математичний об’єкт зображений у вигляді прямокутної матриці, елементи якої встановлюють зв’язки і відношення між складовими частинами системи.

Більш простим і менш формалізованим є підхід теорії графів. Зображення структури подається у вигляді графа. Граф структури системи встановлюють шляхом декомпозиції системи і вивчення зв’язків між складовими частинами.

Формальна модель «Структура системи» – це, як правило, зображення системи у вигляді графа, хоча може бути і матриця суміжності. Модель – «Структура системи» у вигляді графа включає в себе елементи системи, зображені точками чи кружками і зв’язки між ними зображені лініями або лініями зі стрілками. Як елементи в моделі «Структура системи» розглядають всі складові частини системи, не розрізняючи, підсистема це чи елемент, як це було в моделі «Структурна схема».

Граф може мати таку топологію: лінійну; кільцеву; ієрархічну; деревовидну; сіткову; матричну.

2.1.8 Модель «Структурна схема системи». Ця модель являє собою сукупність розглянутих вище трьох типів моделей: «Чорний ящик», «Склад системи» і «Структура системи». Вона є найбільш детальною та повною моделлю системи. Її зображують також у вигляді графа, але вузли його, як правило, наповнюють певним змістом, зображають прямокутником, еліпсом чи колом. У моделі «Структурна схема системи» показують: границі системи; елементний склад системи; зв’язки між окремими елементами; зовнішні зв’язки системи.

Формальна модель «Структурна схема» містить елементи системи, зображені, як правило, прямокутниками чи еліпсами, в середині яких записана назва елемента і зв’язки між елементами показані лініями чи стрілками.

2.1.9 Динамічні моделі. Це моделі, що зображають динаміку системи.

Динаміку систем вивчають з використанням математично-множинних методів, заснованих на положеннях теорії множин. Динаміка системи

описується як перехід з одного стану в інший. Сукупність можливих станів системи називають множиною станів. Системи можуть мати дискретні стани (система може знаходитись тільки в певних, дозволених станах) або неперервні стани (система переходить послідовно з одного стану в інший через безконечну кількість проміжних станів). Зображення можливих станів системи здійснюється у просторі станів. Це, як правило, абстрактний математичний простір. Описати динаміку системи в просторі станів можна матрицями суміжності або за допомогою графів. Для вивчення динаміки систем використовують множини вхідних і вихідних процесів. Теоретико-множинні методи вивчення динаміки систем спрямовані на вивчення керованості системи, стійкості, надійності функціонування, вивчення роботи в даний момент часу і прогнозу розвитку системи в майбутньому.

2.1.10 Імітаційне моделювання при прийнятті рішень. Імітаційні моделі дозволяють проводити чисельні експерименти і є надзвичайно універсальними.

При експериментуванні на імітаційній моделі можливе внесення таких змін: в структуру моделі; моделей поведінки, параметрів моделей; параметрів та законів розподілу випадкових факторів; значень та зміни в часі зовнішніх змінних.

Імітаційна модель повинна відповідати таким вимогам: логічна причинно-наслідковість повинна відповідати характеристикам системи, що моделюється; характер та зміст інформації про процеси, що спостерігаються за допомогою моделі повинні зберігатися подібними до системи; в моделі повинні спостерігатися змінні, що є суттєвими з точки зору дослідника в реальній системі.

2.1.11 Проблеми побудови оптимізаційних моделей в системному аналізі. Побудова оптимізаційних моделей з математичної точки зору передбачає використання дескриптивних моделей у такому складі: модель (моделі) критеріїв, моделі обмежень. Така постановка дозволяє знайти

оптимальні дії для ефективного функціонування системи, або Паретто-оптимальну множину оптимальних дій (у випадку великої кількості критеріїв).

Оптимізаційна модель будується у такій послідовності:

1. Розробка дескриптивної моделі, яка описує якість функціонування системи та визначає мету.
2. Побудова множини критеріїв оцінки якості.
3. Проведення досліджень на предмет адекватності моделі.
4. Формалізація задач знаходження оптимальних розв'язків.
5. Вибір методу оптимізації.
6. Оцінювання результатів рішення оптимізаційної задачі та їх інтерпретація.

3 МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА СИГНАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАКЕТУ *MATLAB*

3.1 Пакет прикладних програм *MATLAB*

Мова *MATLAB* є високорівневою інтерпретованою мовою програмування, що включає структури даних засновані на матрицях, широкий спектр функцій, інтегроване середовище розробки, об'єктно-орієнтовані можливості та інтерфейси до програм, написаних на інших мовах програмування.

Програми, написані на *MATLAB*, бувають двох типів – функції та скрипти. Функції мають вхідні та вихідні аргументи, а також власний робочий простір для зберігання проміжних результатів обчислень і змінних. Скрипти ж використовують загальний робочий простір. Як скрипти, так і функції не компілюються в машинний код і зберігаються у вигляді текстових файлів. Існує також можливість зберігати так звані *preparsed* програми – функції та скрипти, оброблені у вигляді, зручний для машинного виконання. У загальному випадку такі програми виконуються швидше звичайних, особливо якщо функція містить команди побудови графіків.

Застосування:

1. *Математика та обчислення.* *MATLAB* надає користувачеві велику кількість (кілька сотень) функцій для аналізу даних, що покривають практично всі області математики, зокрема:

– Матриці та лінійна алгебра – алгебра матриць, лінійні рівняння, власні значення вектору, сингулярності, факторизація матриць та інші.

– Поліноми і інтерполяція – корені многочленів, операції над многочленами та їх диференціювання, інтерполяція і екстраполяція кривих та інші.

– Математична статистика та аналіз даних – статистичні функції, статистична регресія, цифрова фільтрація, швидке перетворення Фур'є та інші.

– Обробка даних – набір спеціальних функцій, включаючи побудову графіків, оптимізацію, пошук нулів, чисельне інтегрування та інші.

– Диференціальні рівняння – рішення диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь, диференціальних рівнянь з запізненням, рівнянь з обмеженнями, рівнянь в часткових похідних та інші.

– Розріджені матриці – спеціальний клас даних пакета *MATLAB*, що використовується в спеціалізованих програмах.

– Цілочисельна арифметика – виконання операцій цілочисельної арифметики в середовищі *MATLAB*.

2. *Розробка алгоритмів.* *MATLAB* надає зручні засоби для розробки алгоритмів, включаючи високорівневі з використанням концепцій об'єктно-орієнтованого програмування. У ньому є всі необхідні засоби інтегрованого середовища розробки, включаючи відладчик і профайлер. Функції для роботи з цілими типами даних полегшують створення алгоритмів для мікроконтролерів і інших застосувань, де це необхідно.

3. *Візуалізація даних.* У складі пакета *MATLAB* є велика кількість функцій для побудови графіків, у тому числі тривимірних, візуального аналізу даних і створення анімаційних роликів. Вбудоване середовище розробки дозволяє створювати графічні інтерфейси користувача з різними елементами управління, такими як кнопки, перемикачі та іншими. За допомогою компонента *MATLAB Compiler* ці графічні інтерфейси можуть бути перетворені в самостійні додатки, для запуску яких на інших комп'ютерах встановлена бібліотека *MATLAB Component Runtime*.

4. *Зовнішні інтерфейси.* Пакет *MATLAB* включає різні інтерфейси для отримання доступу до зовнішніх підпрограм, що написані на інших мовах програмування, даних, клієнтів і серверів, спілкується через технології *Component Object Model (COM)* або *Dynamic Data Exchange (DDE)*, а також периферійних пристроїв, які взаємодіють безпосередньо з *MATLAB*. Багато з цих можливостей відомі під назвою *MATLAB API*.

Пакет *MATLAB* надає доступ до функцій, що дозволяють створювати, маніпулювати і видаляти *COM*-об'єкти (як клієнти, так і сервера). Підтримується також технологія *ActiveX*. Всі *COM*-об'єкти належать до спеціального *COM*-класу пакета *MATLAB*. Всі програми, що мають функції контролера автоматизації можуть мати доступ до *MATLAB* як до сервера автоматизації.

Пакет *MATLAB* містить функції, які дозволяють йому отримувати доступ до інших додатків середовища *Windows*, так само як і цим програмам отримувати доступ до даних *MATLAB*, за допомогою технології динамічного обміну даними (*DDE*). Кожна програма, яка може бути *DDE*-сервером, має своє унікальне ідентифікаційне ім'я. Для *MATLAB* це ім'я – *Matlab*.

5. *Веб-сервіси*. В *MATLAB* існує можливість викликати методи веб-сервісів. Спеціальна функція створює клас, ґрунтуючись на методах *API* веб-сервісу. *MATLAB* взаємодіє з клієнтом веб-сервісу за допомогою прийняття від нього посилки, їх обробки та посилки відповіді.

Підтримуються наступні технології: *Simple Object Access Protocol (SOAP)* і *Web Services Description Language (WSDL)*. Набори інструментів. Для *MATLAB* є можливість створювати спеціальні набори інструментів (англ. *toolbox*), що розширюють його функціональність. Набори інструментів це ряд функцій, написаних на мові *MATLAB* для вирішення певного класу задач.

Набори інструментів, які використовуються в багатьох галузях, включаючи наступні:

1. Цифрова обробка сигналів, зображень та даних: *DSP Toolbox*, *Image Processing Toolbox*, *Wavelet Toolbox*, *Communication Toolbox*, *Filter Design Toolbox* – набори функцій, які дозволяють вирішувати широкий спектр задач обробки сигналів, зображень, проектування цифрових фільтрів і систем зв'язку.

2. Системи управління: *Control Systems Toolbox*, *μ-Analysis and Synthesis Toolbox*, *Robust Control Toolbox*, *System Identification Toolbox*, *LMI Control Toolbox*, *Model Predictive Control Toolbox*, *Model-Based Calibration Toolbox* –

набори функцій, що полегшують аналіз і синтез динамічних систем, проектування, моделювання і ідентифікацію систем управління, включаючи сучасні алгоритми управління,

3. Фінансовий аналіз: *GARCH Toolbox, Fixed-Income Toolbox, Financial Time Series Toolbox, Financial Derivatives Toolbox, Financial Toolbox, Datafeed Toolbox* – набори функцій, які дозволяють швидко та ефективно збирати, обробляти і передавати різну фінансову інформацію.

4. Аналіз і синтез географічних карт, включаючи тривимірні: *Mapping Toolbox*.

5. Збір та аналіз експериментальних даних: *Data Acquisition Toolbox, Image Acquisition Toolbox, Instrument Control Toolbox, Link for Code Composer Studio* – набори функцій, які дозволяють зберігати й обробляти дані, отримані в ході експериментів, у тому числі в реальному часі.

6. Візуалізація та подання даних: *Virtual Reality Toolbox* – дозволяє створювати інтерактивні звіти і візуалізувати наукову інформацію за допомогою технологій віртуальної реальності та мови VRML.

7. Засоби розробки: *MATLAB Builder for COM, MATLAB Builder for Excel, MATLAB Builder for NET, MATLAB Compiler, Filter Design HDL Coder* – набори функцій, які дозволяють створювати незалежні програми з середовища *MATLAB*.

8. Взаємодія із зовнішніми програмними продуктами: *MATLAB Report Generator, Excel Link, Database Toolbox, MATLAB Web Server, Link for ModelSim* – набори функцій, що дозволяють зберігати дані в різних видах таким чином, щоб інші програми могли з ними працювати.

9. Бази даних: *Database Toolbox* – інструменти роботи з базами даних.

10. Наукові та математичні пакети: *Bioinformatics Toolbox, Curve Fitting Toolbox, Fixed-Point Toolbox, Fuzzy Logic Toolbox, Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox, OPC Toolbox, Optimization Toolbox, Partial Differential Equation Toolbox, Spline Toolbox, Statistic Toolbox, RF Toolbox* – набори спеціалізованих математичних функцій, що дозволяють вирішувати широкий спектр наукових

та інженерних завдань, включаючи розробку генетичних алгоритмів, вирішення завдань в часткових похідних, цілочисельні проблеми, оптимізацію систем та інші.

11. Нейронні мережі: *Neural Network Toolbox* – інструменти для синтезу та аналіз нейронних мереж.

12. Нечітка логіка: *Fuzzy Logic Toolbox* – інструменти для побудови й аналізу нечітких множин.

13. Символьні обчислення: *Symbolic Math Toolbox* – інструменти для символічних обчислень з можливістю взаємодії з символьним процесором програми *Maple*.

Крім перерахованих вище, існують багато інших наборів інструментів для *MATLAB*.

В даний час пакет *MATLAB* являє собою інтегральне програмне середовище, що включає власну мову програмування. Він дає користувачеві можливість швидко виконувати різні операції над векторами і матрицями, Крім того, в *MATLAB* входять операції обчислення звичайних функцій (алгебраїчних, тригонометричних, логічних), рішення алгебраїчних і диференціальних рівнянь, операції побудови графіків і ряд інших.

3.2 Середовище *Simulink* пакета *MATLAB*

Система автоматизованого моделювання і параметричної оптимізації *MATLAB/Simulink* застосовується для автоматизації наукових і інженерних розрахунків в області аналізу і синтезу широкого класу динамічних систем з зосередженими параметрами.

За допомогою *MATLAB/Simulink* можна:

- проводити імітаційне моделювання;
- здійснювати параметричну оптимізацію;
- будувати частотні характеристики.

MATLAB/Simulink орієнтовано на блочно-структурну форму подання математичних моделей.

Модель в *MATLAB/Simulink* – це сукупність типових блоків і зв'язків між ними. Зв'язати блок А з блоком Б – означає подати на вхід алгоритму, реалізованого в блоці Б, результат роботи алгоритму, реалізованого в блоці А. В подальшому умовимося називати результат роботи алгоритму будь-якого блоку його вихідним сигналом або просто сигналом блоку, а сигнали, що використовуються на вході алгоритму, – вхідними сигналами.

У ході моделювання здійснюється числове розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР), яку автоматично формує *Simulink* за вихідною структурною схемою. Результати розв'язання запам'ятовуються в *LG*-точках для кожного блоку. Результати після цього використовуються для побудови графіків.

Порядок системи, що інтегрується, обмежується лише доступною пам'яттю і може бути досить великим. На структуру накладається єдине обмеження: вона повинна бути такою, щоб вхідний сигнал будь-якого блоку міг бути обчислений системою до обчислення вихідного сигналу цього ж блоку. Моделювання можна перервати в будь-який момент.

3.3 Дослідження динамічних систем в часовій області методами Ейлера та Рунге–Кутта

3.3.1 Метод Ейлера. Нехай дана задача Коші для рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (3.1)$$

де функція f визначена на деякій області. Розв'язок шукається на інтервалі (t_0, z) . Інтегруючи обидві частини рівняння (2.1), маємо, що для знаходження розв'язку необхідно знайти значення інтегралу від функції f на інтервалі (t_0, z) . Для цього на цьому інтервалі вводяться вузли

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq z.$$

Наближене розв'язання у вузлах t_i , що відповідає y_i , визначається за формулою

$$y_i = y_{i-1} + (t_i - t_{i-1})f(t_{i-1}, y_{i-1}), i = \overline{1, n}. \quad (3.2)$$

Ця формула використовується і для систем звичайних диференціальних рівнянь. Метод Ейлера розраховує наближене значення розв'язання диференціального рівняння першого порядку. Метод Ейлера ще має назву методу прямокутників.

Основний недолік методу Ейлера – систематичне накопичування помилок. Тому цей метод рекомендується застосовувати для розв'язання диференціальних рівнянь при малих значеннях кроку інтегрування h .

3.3.2 Модифікований метод Ейлера з перерахунком. Обчислення за методом Ейлера з перерахунком виконується в два етапи. Для цього спочатку виконується прогнозування значення (використовуючи звичайний метод Ейлера), а далі розраховується нове значення з урахуванням корекції результату.

Прогноз:

$$\tilde{y}_i = y_{i-1} + (t_i - t_{i-1})f(t_{i-1}, y_{i-1}).$$

Корекція:

$$y_i = y_{i-1} + (t_i - t_{i-1}) \frac{f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_i, \tilde{y}_i)}{2}.$$

Таким чином, значення інтеграла розраховується за двома точками. Метод Ейлера з перерахунком також має назву методу трапецій.

3.3.3 Метод Рунге – Кутта. Метод Рунге – Кутта часто застосовується для розв'язання диференціальних рівнянь і систем рівнянь через його високу точність. Відмінна риса методу – уточнення нахилу інтегральної кривої за рахунок обчислення похідної не тільки на початку поточного відрізка інтегрування, але й, наприклад, у середині відрізка (для двочленних схем

Рунге – Кутта) або чотириразове обчислення похідних у методі четвертого порядку.

Для задачі Коші (2.1) в методі Рунге – Кутта 4-го порядку наближене значення в наступних точках обчислюється за ітераційною формулою

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

де $k_1 = hf(t_i, y_i)$,

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3),$$

h – величина кроку за t .

3.3.4 Приклад рішення. Складемо програму для знайдення числового розв’язання диференціального рівняння: $5y'' + 6y' + 7y = t$, $y(0) = 5$; $y'(0) = 6$ на інтервалі $[0, 10]$ описаними вище методами та перевіримо ці розв’язання із розв’язаннями, одержаними за допомогою *Simulink*.

Модель для знаходження розв’язання у *Simulink* має вигляд (рис. 3.1).

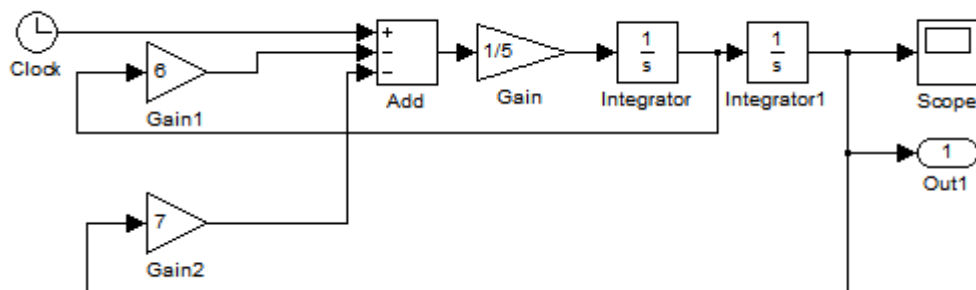


Рисунок 3.1 – Модель розв’язання рівняння в *Simulink*

Код програми за методом Ейлера в *MATLAB* має вигляд:

```
y=5;
z=6;
h=0.1;
yy=[];
tt=[];
for t=0:0.1:10
yy=[yy y];
tt=[tt t];
newy=y+h*z;
newz=z+h*(-6*z-7*y+t)/5;
y=newy;
z=newz;
end
```

Для перевірки розв'язань виконаємо налаштування моделі в *Simulink*. Для цього оберемо в меню моделі *Simulation* пункт «*Configuration parameters...*». У вікні оберемо розділ «*Solver*» і налаштуємо метод інтегрування (рис. 3.2).

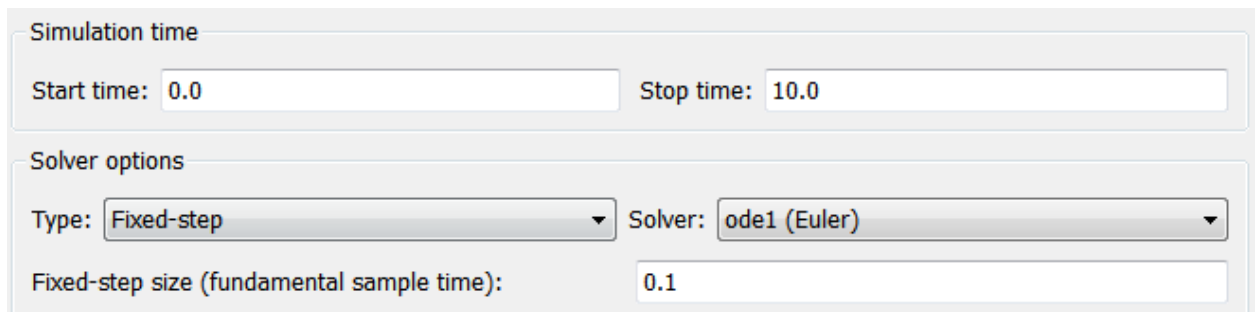



Рисунок 3.2 – Налаштування методу інтегрування в *Simulink*

Після цього виконаємо моделювання, натиснувши кнопку  на панелі інструментів моделі.

Скопіюємо код програми в командне вікно *MATLAB* та виконаємо додатково таку команду:

```
plot(tt,yy,tout,yout);
```

У результаті з'явиться вікно (рис. 3.3), на якому міститься лише один графік.

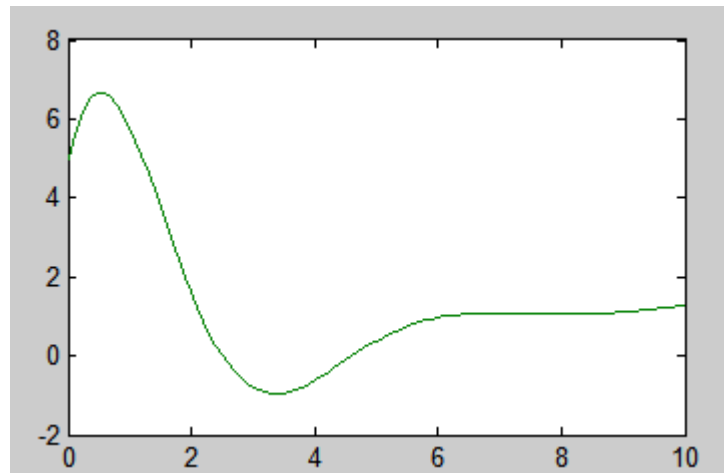



Рисунок 3.3 – Графік розв’язання диференційного рівняння

Це свідчить, що два розв’язки, отримані різними способами, повністю збігаються.

Аналогічним чином виконаємо налаштування розв’язання для методу Ейлера з перерахунком. Для цього оберемо у розділі *Solver* метод «*ode2 (Heun)*». Інші налаштування залишимо такими самими. Виконаємо моделювання, натиснувши кнопку  на панелі інструментів моделі.

Скопіюємо в командний рядок *MATLAB* наступний код, який реалізує розв’язання рівняння методом Ейлера з перерахунком:

```

y=5;
z=6;
h=0.1;
yy=[];
tt=[];
for t=0:0.1:10
yy=[yy y];
tt=[tt t];
y_prog=y+h*z;
z_prog= z+h*(-6*z-7*y+t)/5;
newy=y+h*(z+z_prog)/2;
newz=z+h*((-6*z-7*y+t)/5+(-6*z_prog-7*y_prog+t+h)/5)/2;
y=newy;
z=newz;
end

```

Виконаємо додатково команду:

```
plot(tt,yy,tout,yout);
```

У результаті з'явиться вікно, яке містить один графік.

Повторимо дії з налаштуванням методу розв'язання, але оберемо метод «*ode4 (Runge-Kutta)*» та виконаємо запуск моделювання.

Скопіюємо в командний рядок *MATLAB* наступний код, який реалізує розв'язання рівняння методом Рунге – Кутта:

```
y=5;
z=6;
h=0.1;
yy=[];
tt=[];
for t=0:0.1:10
yy=[yy y];
tt=[tt t];
k1=h*z;
m1=h*(-6*z-7*y+t)/5;
k2=h*(z+1/2*m1);
m2= h*(-6*(z+1/2*m1)-7*(y+1/2*k1)+(t+h/2))/5;
k3=h*(z+1/2*m2);
m3= h*(-6*(z+1/2*m2)-7*(y+1/2*k2)+(t+h/2))/5;
k4=h*(z+m3);
m4= h*(-6*(z+m3)-7*(y+k3)+(t+h))/5;
newy=y+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
newz=z+1/6*(m1+2*m2+2*m3+m4);
y=newy;
z=newz;
end
```

Додатково виконаємо команду:

```
plot(tt,yy,tout,yout);
```

Аналогічно у вікні, що з'явиться, отримаємо лише один графік. Це свідчить, що обидва розв'язання дають однаковий результат.

3.4. Завдання для самостійної роботи

1. Розробити програми для розв'язання наступних диференціальних рівнянь методами, розглянутими в теоретичній частині. Варіанти завдань обрати згідно з номером за списком в журналі групи.

2. Порівняти отримані розв'язки цих рівнянь з розв'язками, за допомогою *Simulink*.

$$1) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{z}{t}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{2z^2}{t(y-1)} + \frac{z}{t}, & \text{на } [1 \ 2]. \\ y(1) = 0, z(1) = 1/3. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = (z-y)t, \\ \frac{dz}{dt} = (z+y)t, & \text{на } [0 \ 1]. \\ y(0) = 1, z(0) = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = \cos(y+2z) + 2, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{2}{t+2y^2} + t + 1, & \text{на } [0 \ 0,3]. \\ y(0) = 1, z(0) = 0.05 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = e^{-(t^2+z^2)} + 2t, \\ \frac{dz}{dt} = 2y^2 + z, & \text{на } [0 \ 0,3]. \\ y(0) = 0,5, z(0) = 1. \end{cases}$$

5) $y'' = -y' / t + y / t^2 + 1, y(3) = 6, y'(3) = 3$ на $[3 \ 5]$.

6) $y'' - y = e^t, y(0) = 0, y'(0) = 0.5$ на $[0 \ 1]$.

7) $y'' - 2y' = t^2 - 1, y(1) = -1/6, y'(1) = -3/4$ на $[1 \ 2]$.

8) $y'' - 2y' = 3e^t, y(0,3) = 1,415, y'(0,3) = 5.83$ на $[0,3 \ 0,6]$.

9) $y'' + y' = t^2, y(1) = -1, y'(1) = 2$ на $[1 \ 2]$.

Контрольні запитання

1. Які методи використовуються для числового розв'язання диференціальних рівнянь?
2. Як виконується розрахунок наступного значення розв'язання методом Ейлера?
3. Як виконується розрахунок наступного значення розв'язання модифікованим методом Ейлера?
4. Як виконується розрахунок наступного значення розв'язання методом Рунге – Кутта?
5. Що таке крок інтегрування і як його задати?
6. Які бувають кроки інтегрування і чим вони розрізняються?
7. Як обрати метод розв'язання та його налаштування в Simulink?
8. В якому випадку необхідне зменшення/збільшення кроку інтегрування при моделюванні?
9. Які існують методи для розрахунку кроку інтегрування?

4 РОЗРОБКА МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ ЛАНОК СИСТЕМ ТА ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

4.1 Передавальні функції систем

Для створення загальної методики розрахунку різних систем, в тому числі автоматичного управління (САУ), вводиться поняття динамічної ланки. Типовою ланкою системи автоматичного управління є елемент, що має один вхід і один вихід, і описується диференціальним рівнянням. На структурній схемі об'єктів управління ланки зображуються у вигляді прямокутників, усередині яких записується передавальна функція ланки (рис. 4.1).

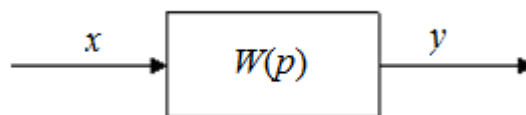


Рисунок 4.1 – Приклад зображення ланок на структурних схемах

Однією з основних динамічних характеристик об'єкта, що широко використовується у теорії автоматичного регулювання, є передавальна функція.

4.1.1 Передавальна функція. Передавальною функцією об'єкта називається відношення перетвореного за Лапласом виходу об'єкта $y(p)$ до перетвореного за Лапласом входу $x(p)$ при нульових початкових умовах. Передавальна функція є функцією комплексної змінної p , позначається $W(p)$:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)}$$

Передавальна функція характеризує динаміку об'єкта по певному каналу, що зв'язує вхід об'єкта з його виходом. Якщо в об'єкті є кілька входів, то кожному каналу зв'язку між входом та виходом буде відповідати своя передавальна функція.

Так само, як і диференціальне рівняння, передавальна функція повністю характеризує динаміку об'єкта. Якщо задане диференціальне рівняння об'єкта,

то для одержання передавальної функції необхідно перетворити диференціальне рівняння за Лапласом і з отриманого алгебраїчного рівняння знайти співвідношення $\frac{y(p)}{x(p)}$.

Якщо відома передавальна функція об'єкта, то зображення виходу об'єкта $y(p)$ дорівнює добутку передавальної функції на зображення входу $x(p)$: $y(p) = W(p) \cdot x(p)$.

Будь-яка складна структурна схема може бути зображена за допомогою трьох основних типів з'єднання:

- паралельного;
- послідовного;
- з'єднання зі зворотним зв'язком.

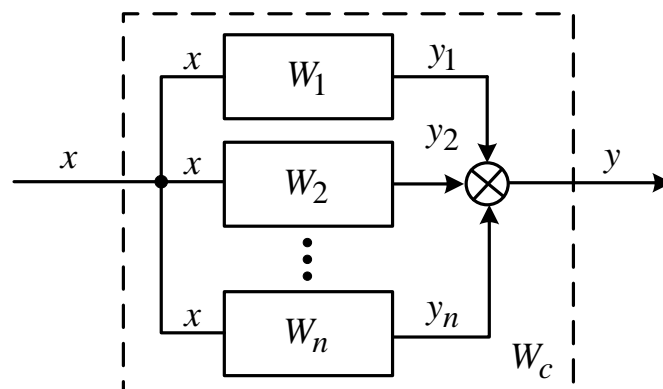


Рисунок 4.2 – Структурна схема паралельного з'єднання ланок

4.1.2 Паралельне з'єднання. При паралельному з'єднанні вхідні сигнали всіх ланок однакові й дорівнюють входу системи $x(p)$, а вихід системи $y(p)$ дорівнює сумі виходів ланок.

Запишемо рівняння вихідних координат кожної ланки:

$$y_1(p) = x(p) \cdot W_1(p)$$

$$y_2(p) = x(p) \cdot W_2(p)$$

.....

$$y_n(p) = x(p) \cdot W_n(p)$$

Вихід усієї системи буде дорівнювати:

$$y(p) = y_1(p) + y_2(p) + \dots + y_n(p) =$$

$$= x(p) \cdot (W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)) = x(p) \cdot \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

Передавальна функція системи:

$$W_c(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

Передавальна функція системи паралельно з'єднаних ланок дорівнює сумі передавальних функцій окремих ланок.

4.1.3 Послідовне з'єднання ланок. Особливістю є те, що вихід попередньої ланки є входом наступної (рис. 4.3).

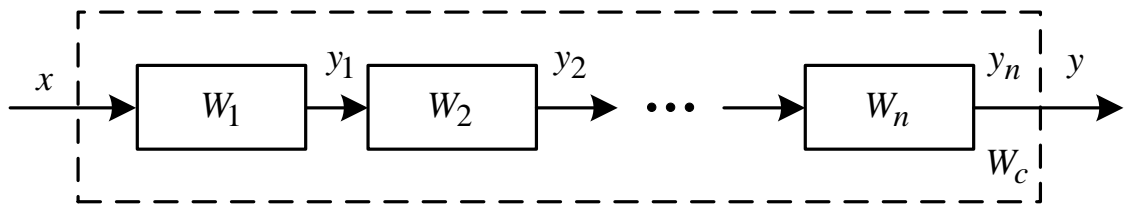


Рисунок 4.3 – Послідовне з'єднання ланок

Рівняння вихідних сигналів кожної ланки має вигляд:

$$y_1(p) = x(p) \cdot W_1(p)$$

$$y_2(p) = y_1(p) \cdot W_2(p)$$

.....

$$y_n(p) = y_{n-1}(p) \cdot W_n(p)$$

Вихідний сигнал останньої ланки є виходом усієї системи $y(p) = y_n(p)$.

Передавальна функція системи:

$$W_c(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{y_n(p)}{x(p)} = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

Таким чином, передавальна функція системи послідовно з'єднаних ланок дорівнює добутку передавальних функцій окремих ланок. Це співвідношення справедливе лише в тому випадку, якщо вихід кожної ланки залежить тільки від її входу й не залежить від вихідної координати наступної ланки.

4.1.4 З'єднання ланок зі зворотним зв'язком. Зворотним зв'язком називають передачу сигналу з виходу ланки на його вхід (рис. 4.4), де сигнал зворотного зв'язку $x_{зз}$ алгебраїчно підсумується із зовнішнім сигналом $x(p)$. Причому якщо сумарний сигнал $x_1(p)$ визначається співвідношенням $x_1(p) = x(p) + x_{зз}(p)$, то зворотний зв'язок називається позитивним, якщо $x_1(p) = x(p) - x_{зз}(p)$, тобто сигнал зворотного зв'язку віднімають від зовнішнього сигналу, то зворотний зв'язок називається негативним.

У лінії зворотного зв'язку в загальному випадку може бути включена ланка, у якій вихідний сигнал $y(p)$ перетвориться відповідно до передавальної функції $W_{зз}(p)$ у сигнал $x_{зз}(p)$. Іноді ця ланка може бути відсутня, тобто $W_{зз}(p) = 1$ і $x_{зз}(p) = y(p)$.

Знайдемо співвідношення між передавальною функцією замкнутої системи $W_{зс}(p)$ і передавальними функціями окремих ланок $W_n(p)$ і $W_{зз}(p)$. Рівняння вихідних сигналів кожної ланки:

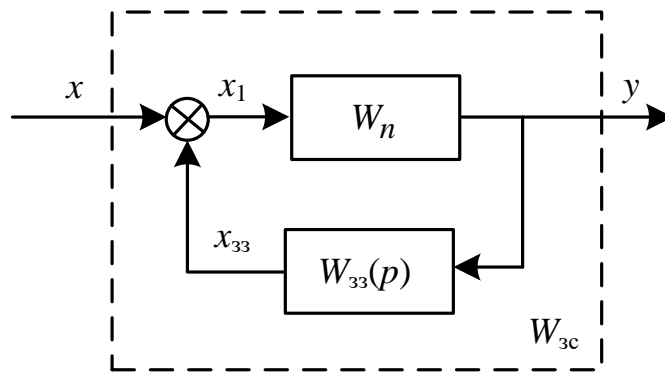


Рисунок 4.4 – З'єднання ланок зі зворотнім зв'язком

$$y(p) = x_1(p) \cdot W_n(p);$$

$$x_1(p) = x(p) + x_{33}(p);$$

$$x_{33}(p) = y(p) \cdot W_{33}(p).$$

Виключивши з отриманої системи рівнянь $x_1(p)$ і $x_{33}(p)$, отримаємо

$$y(p) = x_1(p) \cdot W_n(p) + y(p) \cdot W_n(p) \cdot W_{33}(p);$$

$$y(p) - y(p) \cdot W_n(p) \cdot W_{33}(p) = x(p) \cdot W_n(p);$$

$$y(p) [1 - W_n(p) \cdot W_{33}(p)] = x(p) \cdot W_n(p).$$

Звідси передавальна функція замкнутої системи з позитивним зворотним зв'язком:

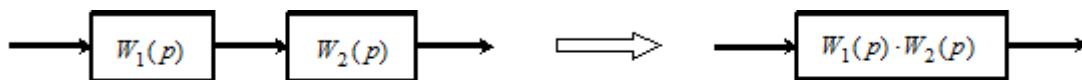
$$W_{3c}(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{W_n(p)}{1 - W_n(p) \cdot W_{33}(p)},$$

а передавальна функція замкнутої системи з негативним зворотним зв'язком:

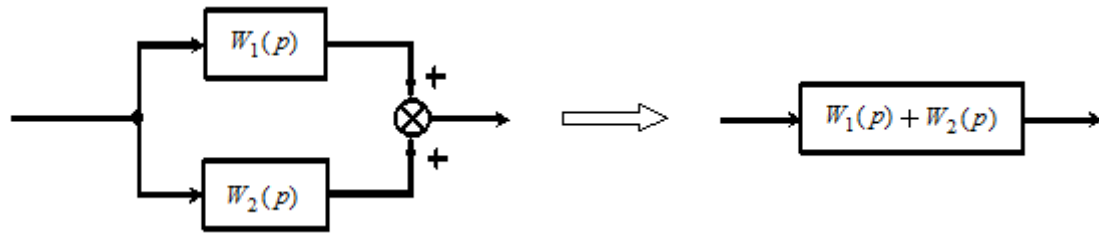
$$W_{3c}(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{W_n(p)}{1 + W_n(p) \cdot W_{33}(p)}.$$

Крім того, використовуються перетворення з'єднань передавальних функцій для подання САУ у вигляді узагальненої передавальної функції. При цьому можна скористатися такими правилами:

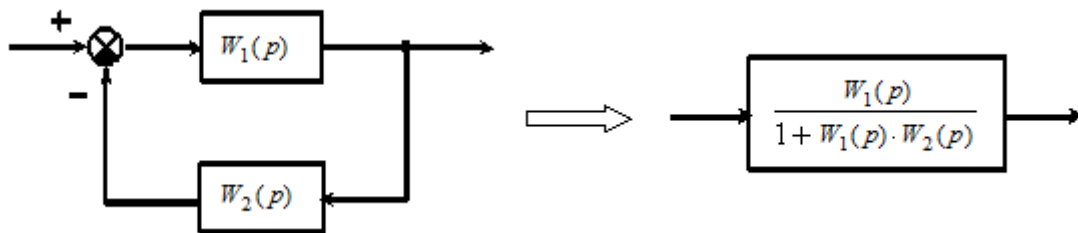
- Послідовне з'єднання динамічних ланок.



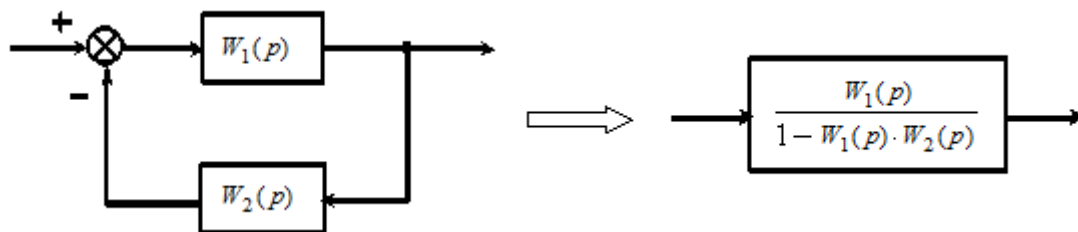
- Паралельне з'єднання динамічних ланок.



- Замкнутий контур з негативним зворотним зв'язком.



- Замкнутий контур з позитивним зворотним зв'язком.



У реальних умовах на об'єкт управління впливають зовнішні впливи, які називають збурюючими впливами (збурювання). Збурювання викликають відхилення регульованого параметра від заданого значення.

Збурювання, що діють на САУ, є безперервними функціями часу з різними законами зміни. У цьому випадку виникають труднощі принципового характеру, тому що заздалегідь невідомі закони виміру зовнішніх впливів, що ускладнює аналіз динаміки й статички САУ. Для ліквідації виникаючих ускладнень часто використовують так звані типові, керуючі й збурюючі впливи, які являють собою або найбільш імовірні, або найбільш несприятливі закони зміни керуючих і збурюючих впливів. Наприклад, досить широко як типові використовують впливи поліноміального вигляду:

$$f(t) = \frac{f_n}{n!} t^n \cdot 1(t),$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$ – натуральні числа; f_n – постійні величини; $1(t)$ – одинична степенева функція

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < 0; \\ 1, & \text{якщо } t \geq 0. \end{cases}$$

При $n = 0$ маємо одиничний степеневий вплив: $f(t) = f_0 \cdot 1(t)$.

При $n = 1$ маємо лінійний вплив: $f(t) = f_1 \cdot t \cdot 1(t)$.

У деяких випадках як типовий використовується одиничний імпульсний вплив такого вигляду: $f(t) = k\delta(t)$, де $\delta(t)$ – одинична дельта-функція.

Одинична дельта-функція (одиничний імпульс) являє собою математичну ідеалізацію імпульсу нескінченно малої тривалості, нескінченно великої амплітуди, що має кінцеву площу, яка дорівнює одиниці.

Момент подання зовнішніх впливів на САУ зазвичай приймається за нуль відліку часу. При такому підході зовнішні впливи для негативного моменту часу дорівнюють нулю. В аналітичні вираження для зовнішніх впливів як множник вводять одиничну ступінчасту функцію.

Найважливішою характеристикою САУ і елементів, з яких вона складається, є перехідні і імпульсні перехідні (імпульсні) функції. Графічне подання перехідних і імпульсних функцій називають часовими характеристиками. Перехідною функцією $h(t)$ називають функцію, що описує сигнал на виході за умови, що на вхід поданий одиничний степеневий вплив, при нульових початкових умовах. Графік перехідної функції, що являє собою залежність функції $h(t)$ від часу t , називають перехідною характеристикою. У тому випадку, якщо амплітуда одиничного ступеневого впливу відмінна від одиниці, отримують різновид перехідної характеристики, що називається кривою розгону.

Імпульсною або ваговою функцією $\omega(t)$ називають функцію, що описує реакцію на одиничний імпульсний вплив при нульових початкових умовах.

Графік залежності функції $\omega(t)$ від часу називають імпульсною перехідною (імпульсною) характеристикою.

Будь-який зовнішній вплив складної форми може бути приблизно поданий у вигляді сукупності типових впливів, зв'язаних між собою певними математичними операціями.

Аналітичне визначення перехідних функцій і характеристик основане на таких положеннях. Якщо задано передавальну функцію системи або складової частини $W(p)$ і відомий вхідний сигнал $x(t)$, то вихідний сигнал $y(t)$ визначається таким співвідношенням: $L\{y(t)\} = L\{x(t)\} \cdot W(p)$.

Таким чином, зображення вихідного сигналу $L\{y(t)\}$ являє собою добуток передавальної функції на зображення вхідного сигналу $L\{x(t)\}$. Сигнал $y(t)$ у явному вигляді одержимо після переходу від зображення $L\{y(t)\}$ до оригіналу $y(t)$.

Оскільки зображення одиничного степеневого впливу дорівнює $1/p$, то зображення перехідної функції визначається співвідношенням: $L\{h(t)\} = W(p)/p$. Отже, для знаходження перехідної функції необхідно передавальну функцію розділити на p і виконати перехід від зображення до оригіналу.

Зображення одиничного імпульсу дорівнює 1. Тоді зображення імпульсної функції – $L\{\omega(t)\} = W(p)$. Таким чином, передавальна функція є зображенням імпульсної функції.

Оскільки $\delta(t) = d1(t)/dt$, то між імпульсною й перехідною функціями існує така залежність: $dh(t)/dt = \omega(t)$.

Імпульсна й перехідна функції, як і передавальна функція, є вичерпними характеристиками системи при нульових початкових умовах. За ними можна визначити вихідний сигнал при довільних вхідних впливах.

У таблиці 3.1 наведені передавальні функції різновидів так званих типових динамічних ланок. Під типовою ланкою розуміється така ланка, що описується диференціальним рівнянням не вище другого порядку.

Таблиця 4.1 – Типові динамічні ланки

№ п/п	Тип ланки		Математичний вираз
1	Позиційні	Безінерційна	$W(p) = K$
2		Аперіодична 1-го порядку	$W(p) = \frac{K}{1 + Tp}$
3		Аперіодична 2-го порядку	$W(p) = \frac{K}{(1 + T_1p)(1 + T_2p)}$
4		коливальна ($0 < \xi < 1$)	$W(p) = \frac{K}{1 + 2\xi Tp + T^2 p^2}$
5		консервативна	$W(p) = \frac{K}{1 + T^2 p^2}$
6	Інтегровальні	Ідеальна інтегровальна	$W(p) = K/p$;
7		Інтегровальна з затримкою	$W(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)}$
8		Ізодромна	$W(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p}$
9	диференціювальні	Ідеальна диференціювальна	$W(p) = Kp$
10		Реальна диференціювальна	$W(p) = \frac{Kp}{1 + Tp}$

При створенні моделі у вигляді передавальних функцій необхідно звернути увагу на тип з'єднання елементів схеми і використовувати відомі закони протікання електромагнітних процесів в електричних колах систем, за умови, якщо досліджуються системи з такими особливостями.

Так, залежність між напругою та струмом на типових елементах електричних принципових схем відома з фізичних процесів, що відбуваються на цих елементах:

- на резисторі залежність струму від напруги описується законом Ома, а саме

$$U = IR; \quad I = U/R;$$

- на котушці індуктивності залежність напруги від струму описується таким співвідношенням:

$$U_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_L = \frac{1}{L} \int U_L dt;$$

- на конденсаторі залежність струму від напруги має вигляд

$$i_C = C \frac{dU_C}{dt}; \quad U_C = \frac{1}{C} \int i_C dt.$$

Використовуючи ці співвідношення можливо отримати відповідні передавальні функції окремих елементів і в залежності від структури принципової електричної схеми шляхом еквівалентних перетворень отримати загальну передавальну функцію системи.

4.2 Побудова математичної моделі системи у вигляді передавальних функцій

Розглянемо побудову математичної моделі системи (наприклад схеми електричного фільтра) у вигляді передавальних функцій. Задача полягає у побудові моделі, завдяки якій можливо отримати значення вихідної напруги $U_{\text{вих}}$ схеми при різноманітних входних напругах $U_{\text{вх}}$ (рис. 4.5).

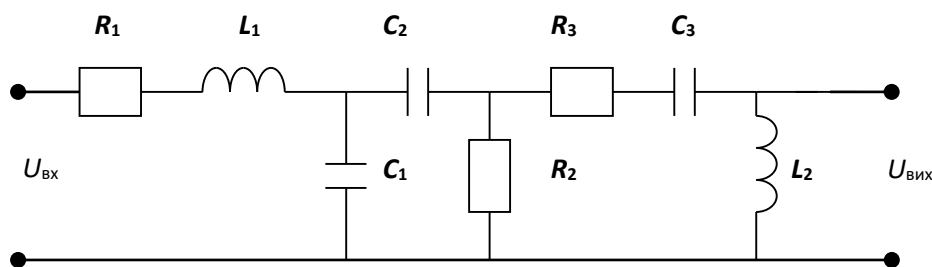


Рисунок 4.5 – Вихідна схема

4.2.1 Розбиття схеми. Для полегшення розрахунків виконаємо послідовно аналіз відповідної схеми, як показано на рис. 4.6.

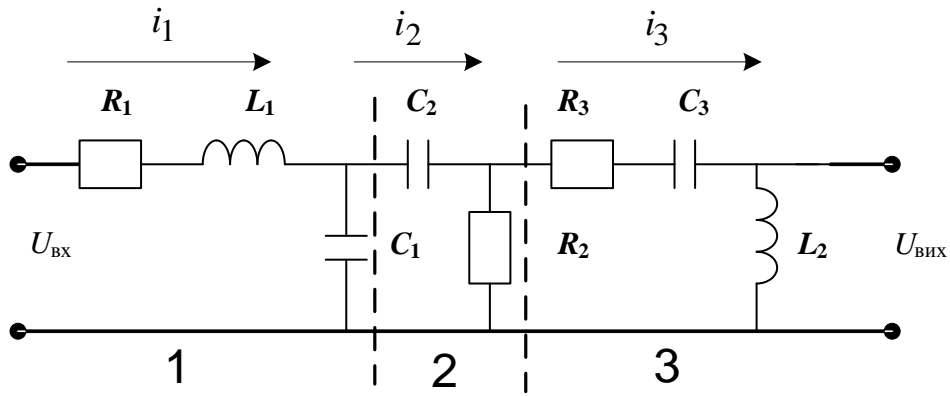


Рисунок 4.6 – Структурна схема системи

В результаті розбиття отримали три підструктури, для кожної із яких можливо знайти передавальні функції, як $W_1(p)$, $W_2(p)$, $W_3(p)$.

Тоді загальна передавальна функція $W(p)$ буде визначатись як $W(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p)$.

На кожному кроці побудови окремої математичної моделі у вигляді передавальної функції будемо використовувати відомі залежності між струмом та напругою на відповідних елементах схеми, а також залежності напруги та струму при відповідному з'єднанні елементів схеми.

Розглянемо структурну схему системи рис. 3.6. Запишемо усі залежності, що використовуються для побудови моделі першої підсистеми. Оскільки елементи R_1 , L_1 , C_1 з'єднані послідовно, то напруга на вході моделі буде складатися з суми напруг на цих елементах, а саме $U_{\text{вх}} = U_{R_1} + U_{L_1} + U_{C_1}$. Звідки $U_{\text{вх}} - U_{C_1} = U_{R_1} + U_{L_1}$. Отримати загальний струм i_1 можна, використовуючи залежності на одному з елементів R_1 , L_1 , C_1 , знаючи напругу на них:

$$U_{L_1} = U_{\text{вх}} - U_{C_1} - U_{R_1}; i_1 = U_{L_1} \frac{1}{L_1 p}; U_{R_1} = i_1 R_1, U_{C_1} = i_1 \frac{1}{C_1 p}.$$

Тому перша частина схеми моделі буде мати вигляд (рис. 4.7).

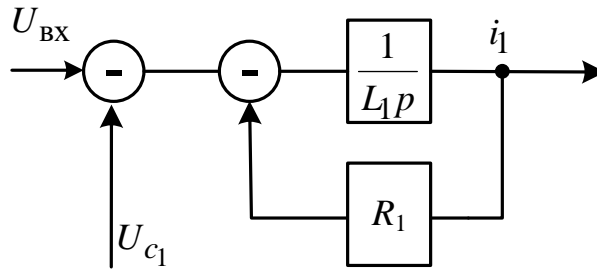


Рисунок 4.7 – Перший етап побудови моделі

В результаті отримали структурну схему, в якій можемо виділити дві підсистеми з негативним зворотним зв'язком.

Передавальна функція на основі співвідношення:

$$i_1 = U_{L_1} \frac{1}{L_1 p}; U_{R_1} = i_1 R_1.$$

Отримаємо:

$$W_{11}(p) = \frac{1/L_1 p}{1 + (1/L_1 p)R_1} = \frac{1}{L_1 p + R_1}; W_{12}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{L_1 p + R_1} \frac{1}{C_1 p}} =$$

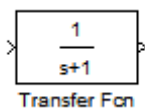
$$= \frac{C_1 p}{L_1 C_1 p^2 + R_1 C_1 p + 1}. W_1(p) = \frac{C_1 p}{L_1 C_1 p^2 + R_1 C_1 p + 1} * \frac{1}{C_1 p} =$$

$$= \frac{1}{L_1 C_1 p^2 + R_1 C_1 p + 1} = \frac{1}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}. T_1 = \sqrt{L_1 C_1}; T_2 = R_1 C_1.$$

Аналогічні перетворення і для отримання наступних передавальних функцій підсистем $W_2(p)$ і $W_3(p)$.

4.3 Дослідження моделей, які задані у вигляді передавальних функцій засобами *Simulink* пакету *MATLAB*

Для задання передавальної функції в *Simulink* використовується блок:



. Після відкриття налаштувань цього блоку можна задати

коефіцієнти, які відповідають чисельнику (*Numerator*) та знаменнику (*Denominator*) передавальної функції САУ. Так, наприклад, для отримання реальної інтегрувальної ланки, яка задається передавальною функцією

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}$$

з коефіцієнтами $k = 5$ та $T = 2$, необхідно в розділі *Numerator*

ввести значення [5], а в розділі *Denominator* – [2 1 0] (рис. 4.8).

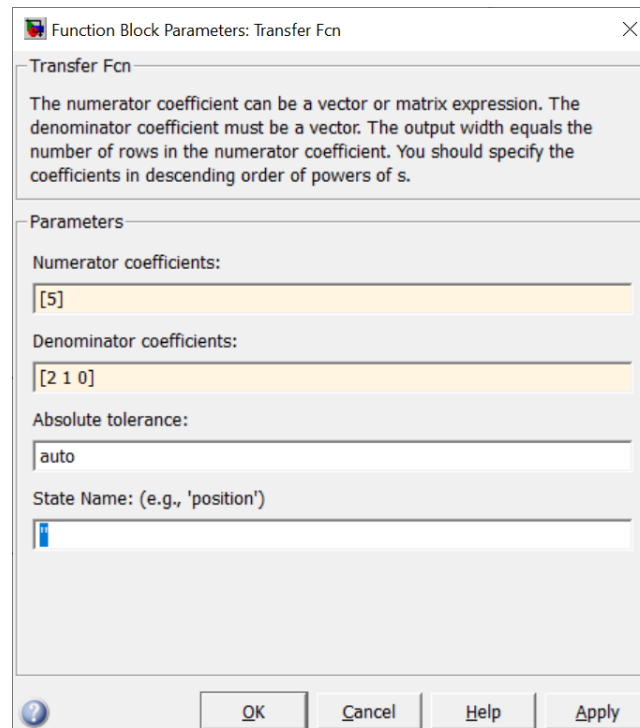


Рисунок 4.8 – Налаштування передавальної функції

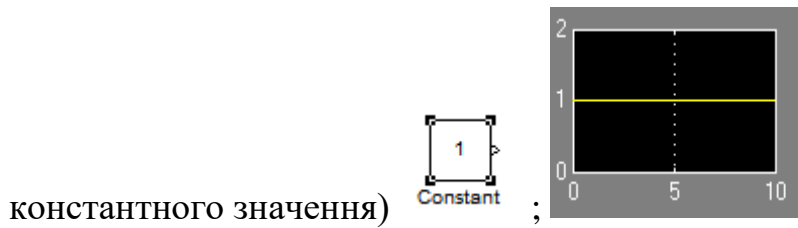
Таким чином, передавальна функція цієї ланки буде мати вигляд:

$$\frac{5}{2s^2 + s}$$

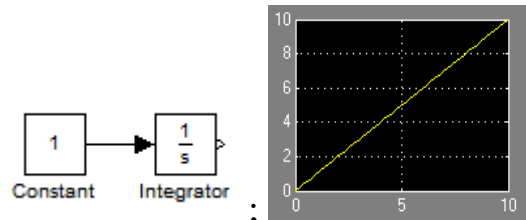
Transfer Fcn

Збурюючі впливи (вхідні сигнали) задаються такими блоками:

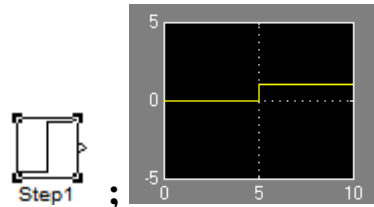
1) **одиничний степеневий вплив** (задається блоком генерації



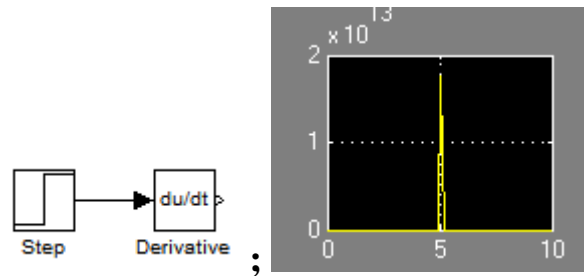
2) **лінійний вплив**



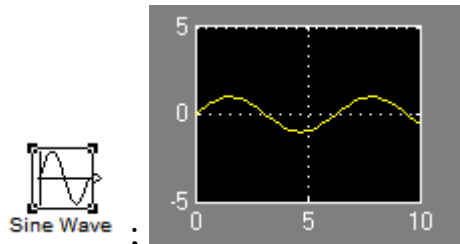
3) **стрибко-подібний вплив**



4) **одинична дельта-функція**



5) **синусоїдальний вплив**



Більш складні форми впливів або форми впливів (синтезовані управління) можливо сформувати шляхом моделювання відповідних процесів.

4.4 Завдання для самостійної роботи

1. Для схеми, зображеної на рис. 4.9, побудувати математичну модель у вигляді передавальних функцій. Елементи **E** обрати виходячи з таблиці 4.2.

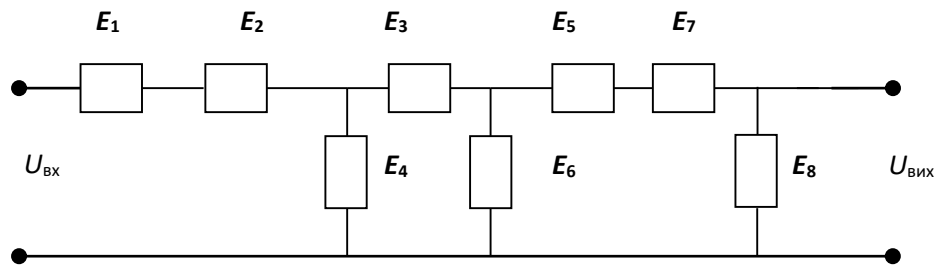


Рисунок 4.9 – Схема завдання для самостійної роботи

Таблиця 4.2 – Варіанти індивідуальних завдань

№ з/п	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
1	C	R	L	R	–	L	C	R
2	R	L	C	L	R	C	–	R
3	L	C	R	C	R	R	–	L
4	C	L	R	L	–	C	R	R
5	L	R	C	L	R	C	L	C
6	L	R	L	C	L	R	–	L
7	R	C	R	L	–	R	C	R
8	R	C	L	R	–	L	C	L
9	R	L	C	R	C	L	–	R
10	C	–	R	L	C	R	L	R

2. Як передавальні функції розглянути такі ланки:

2.1 ідеальна інтегрувальна: $W(p) = k/p$;

2.2 реальна інтегрувальна: $W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}$;

2.3 аперіодична 1-го порядку: $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$;

2.4 аперіодична 2-го порядку: $W(p) = \frac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$;

2.5 реальнеадиференціуюча: $W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}$;

2.6 коливальна ($0 < \xi < 1$): $W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1}$;

2.7 консервативна: $W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$.

При цьому значення коефіцієнта k відповідає місяцю народження студента, а T – номеру за списком у журналі групи; $\xi = \text{день народження} / 32$.

– визначити вигляд перехідних процесів з урахуванням типових збурюючих впливів для кожного типу динамічних ланок, наведених у п.1;

– побудувати графіки перехідних процесів при різноманітних значеннях постійних часу й коефіцієнта підсилення. Розглянути такі випадки: при базових значеннях параметрів (k і T); змінивши значення коефіцієнтів підсилення з базовим значеннями постійних часу; змінивши значення постійних часу й базових значень коефіцієнтів підсилення;

– проаналізувати поведження системи, що складається із з'єднання двох заданих ланок у вигляді послідовного, паралельного, з позитивним та негативним зворотним зв'язком. Номери динамічних ланок (з п.1) обрати таким чином: 1 ланка – $(d \% 7) + 1$; 2 ланка – $(m \% 7) + 1$, де d та m – відповідно день та місяць народження студента.

Контрольні запитання

1. Що таке «типова ланка» САУ? Назвіть типові ланки.
2. Що таке передавальна функція САУ? Що вона характеризує?
3. Основні типи з'єднання ланок у структурних схемах.
4. Паралельне з'єднання ланок. Структурна схема. Передавальна функція.
5. Послідовне з'єднання ланок. Структурна схема. Передавальна функція.

6. З'єднання ланок зі зворотним зв'язком. Структурна схема. Передавальна функція системи з позитивним і негативним зворотним зв'язком.

7. Що відноситься до «часових» характеристик САУ?

8. Що являє собою перехідна функція?

9. Що являє собою імпульсна функція?

10. Назвіть основні типи збурюючих впливів САУ

11. Як побудувати математичну модель у вигляді передавальних функцій для схеми, що складається з типових елементів принципів схем?

12. Як отримати модель системи у вигляді диференціального рівняння, якщо вона задана у вигляді передавальної функції?

13. Як отримати модель системи у вигляді передавальної функції, якщо є диференціальне рівняння, яке описує роботу цієї системи?

5 ЗНАХОДЖЕННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ

5.1 Частотні характеристики систем

Розглянемо елемент (складову) системи, що описується лінійним (лінійаризованим) диференціальним рівнянням такого вигляду:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \end{aligned} \quad (5.1)$$

де $u(t)$ – вхідний процес; $y(t)$ – вихідний процес; $a_i, b_j, (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m};)$ – постійні коефіцієнти; $n, m (n \geq m)$ – постійні числа.

В операторній формі вираз (4.1) може бути записаний в такий спосіб:

$$A(D)y(t) = B(D)u(t),$$

де D – оператор диференціювання $\left(D^{def} = \frac{d}{dt} \right)$. Звідси запишемо

перетворення «вхід-вихід» системи:

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{B(D)}{A(D)} = W(D), \quad (5.2)$$

де $W(D)$ – операторна передавальна функція.

Один зі способів моделювання систем полягає в поданні перетворення «вхід-вихід» у вигляді комплексної передавальної функції:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = W(s), \quad (5.3)$$

яка виходить шляхом застосування перетворення Лапласа до (4.2) при початкових нульових умовах. Тут s – комплексна змінна. Зв'язок між операторною (5.2) і комплексною (5.3) передавальними функціями можна записати у вигляді

$$W(s) = W(D)|_{D=s}.$$

Комплексні числа, що є коріннями багаточлена $B(s)$, називаються нулями передавальної функції, а корінь багаточлена $A(s)$ – полюсами.

Динамічні властивості систем характеризують реакції на вхідні впливи спеціального виду. Зокрема аналіз виходу системи на одиничний стрибок і δ -функцію (дельта-функцію).

Завдяки широкому застосуванню при дослідженні стійкості динамічних систем набули поширення частотні характеристики.

Нехай на вхід системи з передавальною функцією $W(s)$ подається гармонійний сигнал $u(t) = au \cos(\omega t)$, $t > 0$. У цих умовах має місце така теорема:

Якщо ланка є стійкою, то стала реакція $y(t)$ на гармонійний вплив є функцією тієї ж частоти з амплітудою

$$ay = au |W(i\omega)|$$

і відносним зрушенням за фазою

$$y = \arg W(i\omega),$$

а саме

$$y(t) = au |W(i\omega)| \cos(\omega t + \arg W(i\omega)),$$

де i – комплексна одиниця; $W(i\omega) = W(s)|_{s=i\omega}$ – частотна характеристика.

Частотною характеристикою $W(i\omega)$ стаціонарної динамічної системи називається перетворення Фур'є перехідної функції:

$$W(i\omega) = F[h(t, \tau)] = \int_0^{\infty} w(t - \tau) e^{-i\omega(t - \tau)} d\tau,$$

де $w(t - \tau)$ – імпульсна перехідна функція.

Зв'язок між комплексною передавальною функцією й частотною характеристикою визначається співвідношенням:

$$W(s)|_{s=i\omega} = W(i\omega).$$

При фіксованому значенні ω частотна характеристика є комплексним числом i , отже, може бути подана у вигляді

$$W(i\omega) = A(\omega)e^{i\omega + \psi(\omega)} = U(\omega) + iV(\omega).$$

Тут:

$A(\omega) = |W(i\omega)|$ – амплітудно-частотна характеристика (АЧХ);

$\psi(\omega) = \arg W(i\omega)$ – фазово-частотна характеристика (ФЧХ);

$U(\omega) = \operatorname{Re} W(i\omega)$ – дійсна частотна характеристика (ДЧХ);

$V(\omega) = \operatorname{Im} W(i\omega)$ – уявна частотна характеристика (МЧХ).

Геометричне місце точок $W(i\omega)$ на комплексній площині при зміні ω від ω_0 до ω_1 (зазвичай $\omega_0=0$, $\omega_1=\infty$) називається амплітудно-фазовою характеристикою (АФХ) або частотним годографом Найквіста.

Також має широке практичне значення діаграма Бode (логарифмічна амплітудна характеристика, ЛАХ), що визначається як $L = 20 \lg A(\omega)$, вимірюється в децибелах і будується як функція від $\lg \omega$.

5.2 Знаходження частотних характеристик системи аналітичним методом

Частотні (амплітудно-частотна і фазо-частотна) характеристики системи можуть бути визначені на основі відомої передавальної функції.

Нехай передавальна функція має вид:

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

де $k=1.8$; $T_1=1.6$ сек; $T_2=1.6$ сек.

Для заданої системи при заданих параметрах (коефіцієнтів передач та постійних часу) передавальна функція буде мати вид:

$$W(p) = \frac{1.8}{(2.56p^2 + 3.2p + 1)} = \frac{a_1}{(b_1 p^2 + b_2 p + 1)},$$

де $a_1=1.8$; $b_1=2.56$; $b_2=3.2$.

Частотна передавальна функція:

$$W(j\omega) = \frac{a_1}{(b_1(j\omega)^2 + b_2(j\omega) + 1)} = \frac{a_1}{(1 - b_1\omega^2) + jb_2\omega} =$$

$$= \frac{a_1((1-b_1w^2) - jb_2w)}{(1-b_1w^2)^2 + (b_2w)^2} = \frac{a_1(1-b_1w^2)}{(1-b_1w^2)^2 + (b_2w)^2} - \frac{jb_2wa_1}{(1-b_1w^2)^2 + (b_2w)^2} =$$

$$= \frac{a_1 * c_1}{(c_2 + c_3)} - j \frac{a_1 b_2 w}{(c_2 + c_3)};$$

$$c_1 = (1-b_1w^2); \quad c_2 = c_1^2; \quad c_3 = (b_2w)^2.$$

Амплітудно-частотна характеристика:

$$A(w) = \sqrt{\frac{(a_1c_1)^2}{(c_2 + c_3)^2} + \frac{(a_1b_2w)^2}{(c_2 + c_3)^2}}.$$

Фазо-частотна характеристика:

$$Fi(w) = -\arctg \frac{a_1 b_2 w}{a_1 c_1}.$$

Програма для побудови амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик в пакеті MATLAB:

Програма

```

clc
% Вихідні дані системи
a1=1.8;
b1=2.56;
b2=3.2;
% Задання діапазону частоти
w=[0:0.1:10];
c1=(1-b1*w.^2);
c2=c1.^2;
c3=b2^2*w.^2;
% Розрахунок АЧХ
a=sqrt(((a1*c1).^2+b2.^2*w.^2*a1.^2)./(c2+c3).^2);
% fi=-atan((a1*b2*w)./(a1*c1));
% Побудова графіка
plot(w,a)
% plot(w,fi)
xlabel('Chstota')
ylabel('Amplituda')
grid

```

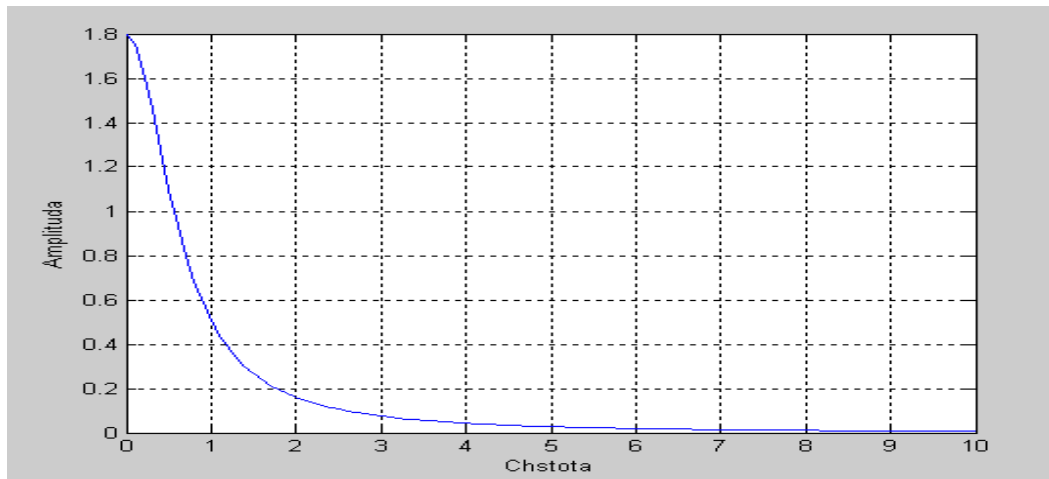


Рисунок 5.1 – Амплітудно-частотна характеристика

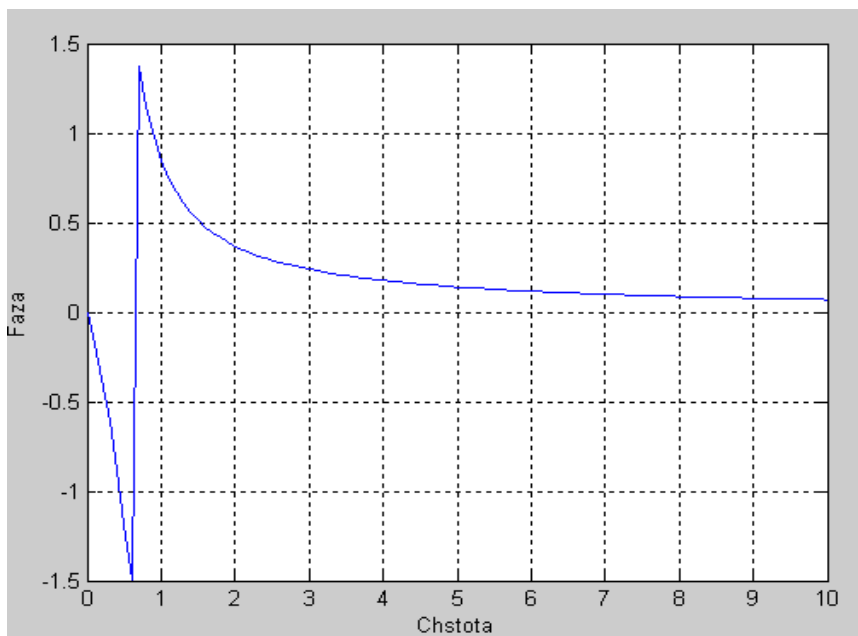


Рисунок 5.2 – Фазо-частотна характеристика

5.3 Знаходження частотних характеристик системи за допомогою пакету *MATLAB* та побудова характерних функцій

Як об'єкт дослідження розглянемо лінійну динамічну стаціонарну систему з одним входом і одним виходом. При цьому модель одновимірної системи задана у вигляді комплексної передавальної функції, записаної як відношення поліномів

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Нехай необхідно:

1. Визначити полюси й нулі передавальної функції:

$$s_i^*, (i = \overline{1, n}), s_j^0, (j = \overline{1, m}).$$

2. Побудувати графіки перехідної й імпульсно-перехідної функції:

$$h(t), w(t).$$

3. Побудувати логарифмічні частотні характеристики: $L(\omega)$.

4. Побудувати частотний годограф Найквіста: $W(i\omega)$, $\omega = [0, \infty]$.

Для розв'язання задачі використаємо пакет прикладних програм (ППП) *Control System Toolbox* пакета *MATLAB*. PPP призначений для роботи з *LTI*-моделями (*Linear Time Invariant Models*) систем управління.

В *Control System Toolbox* є тип даних, що визначають динамічну систему у вигляді комплексної передавальної функції. Синтаксис команди, що створює *LTI*-систему з одним входом і одним виходом, у вигляді передавальної функції:

$$tf([b_m, \dots, b_1, b_0], [a_n, \dots, a_1, a_0]),$$

b_m, \dots, b_0 – значення коефіцієнтів полінома B ,

a_n, \dots, a_0 – значення коефіцієнтів полінома A .

Іншим варіантом одержання графіків динамічних характеристик САУ є використання графічного інтерфейсу PPP *CST-LTIviewer*, виклик якого здійснюється командою *ltiview*, для якої як параметр можна вказати ім'я змінної, що описує *LTI*-об'єкт.

Таблиця 5.1 – Деякі команди *Control System Toolbox*

Синтаксис	Опис
<i>pole</i> (<LTI-об'єкт>)	Обчислення полюсів передавальної функції
<i>zero</i> (<LTI-об'єкт>)	Обчислення нулів передавальної функції
<i>step</i> (<LTI-об'єкт>)	Побудова графіка перехідного процесу
<i>impulse</i> (<LTI-об'єкт>)	Побудова графіка імпульсної перехідної функції
<i>bode</i> (<LTI-об'єкт>)	Побудова логарифмічних частотних характеристик (діаграма Боде)
<i>nyquist</i> (<LTI-об'єкт>)	Побудова частотного годографа Найквіста. Для визначення коренів поліномів ступеня k може також застосовуватися команда <i>roots</i> (P), яка як аргумент P отримує матрицю коефіцієнтів полінома $[p_k, \dots, p_0]$

Нехай задана передавальна функція системи

$$W(s) = \frac{s + 2}{3s^3 + 4s^2 + 5s + 3}$$

Знайдемо її динамічні і частотні характеристики з використанням ППП *Control System Toolbox* системи *MATLAB*. Будемо працювати в командному режимі.

1. Створимо *LTI*-об'єкт із ім'ям w , для цього виконаємо:

```
w=tf([1 2],[3 4 5 3])
```

Transfer function:

$$\frac{s + 2}{3s^3 + 4s^2 + 5s + 3}$$

2. Знайдемо полюси й нулі передавальної функції з використанням команд *pole*, *zero*.

```
pole(w)
ans =
-0.2639 + 1.0825i
-0.2639 - 1.0825i
-0.8055
zero(w)
ans =
-2
```

3. Побудуємо перехідну функцію командою *step(w)*. Результат її виконання наведений на рис. 5.3.

```
step(w)
grid on
```

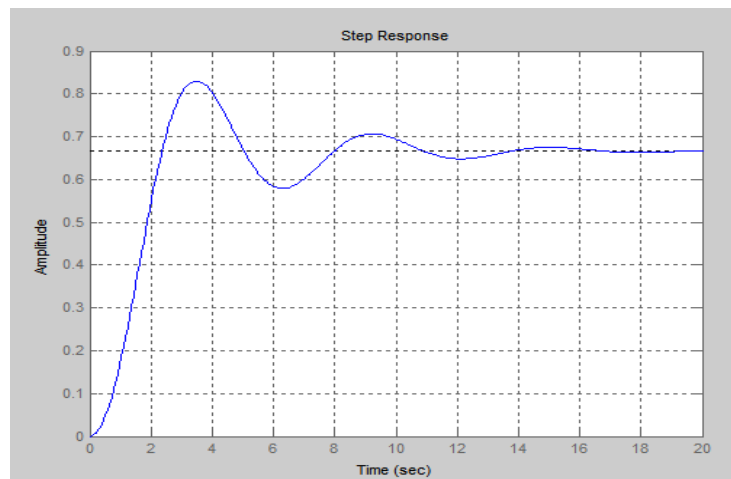


Рисунок 5.3 – Перехідна функція $h(t)$

4. Побудуємо імпульсну перехідну функцію командою *impulse(w)*. Результат показаний на рис. 5.4.

```
impulse(w)
grid on
```

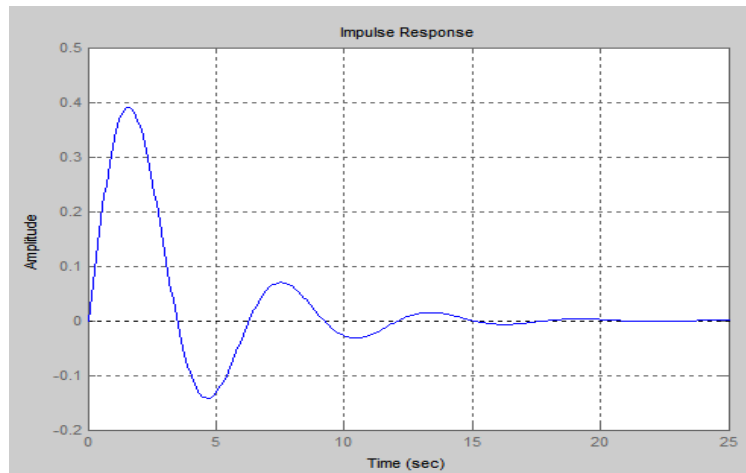


Рисунок 5.4 – Імпульсна перехідна функція

5. Діаграму Боде одержимо, використовуючи команду **bode(w)** (рис. 5.5).

bode(w)
grid on

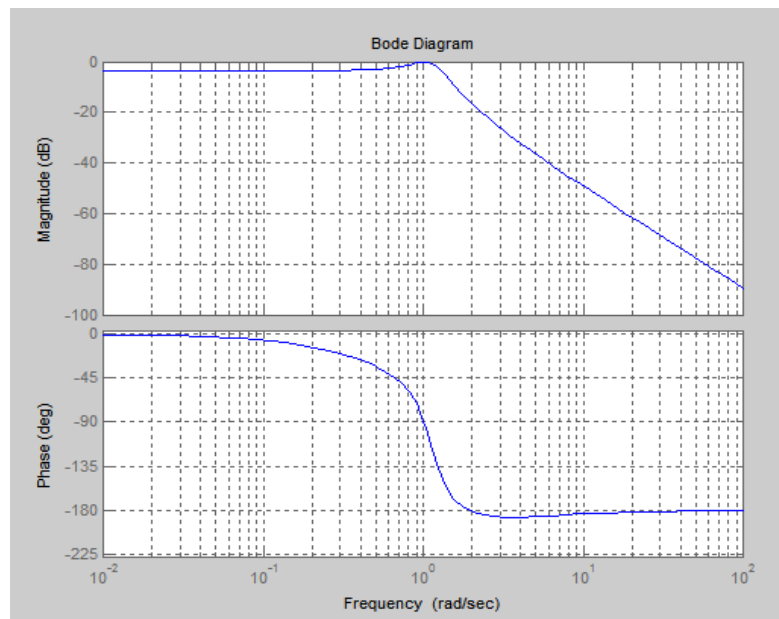


Рисунок 5.5 – Логарифмічні частотні характеристики

6. Визначимо частотний годограф Найквіста, виконавши команду **nyquist(w)** (рис. 5.6).

nyquist(w)
grid on

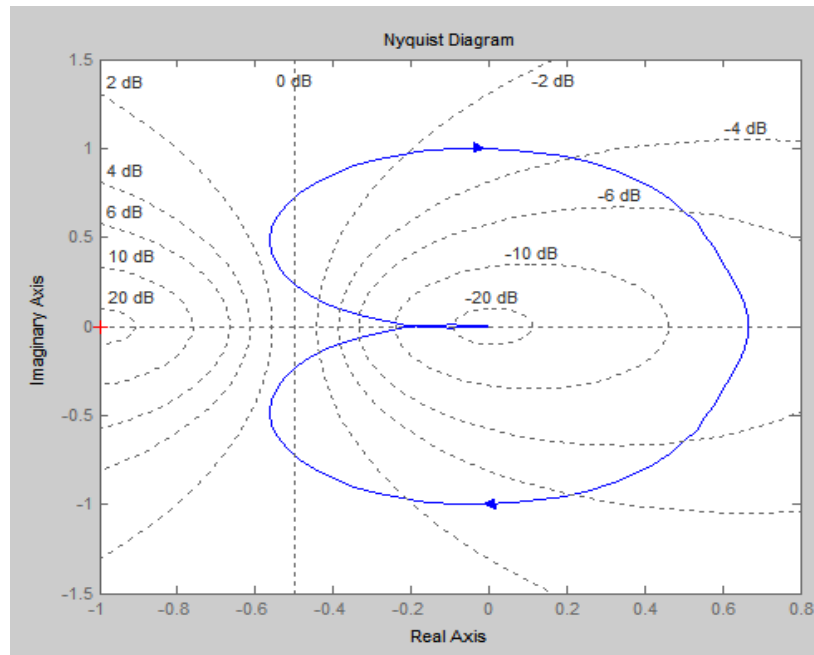


Рисунок 5.6 – Частотний годограф

Аналогічні результати можна одержати, використовуючи команду *ltiview(w)*, з відповідними налаштуваннями в меню «*Plot Configuration*».

5.4. Завдання для самостійної роботи

Виконати такі операції для передавальної функції вигляду

$$\frac{ds^2 - ms + dm}{ds^3 + (N\%2)s^2 - (N\%2)s + N},$$

де d, m, N – відповідно день, місяць народження та номер за списком у журналі групи студента.

1. побудувати перехідну функцію;
2. знайти полюси й нулі передавальної функції;
3. побудувати імпульсну функцію;
4. побудувати діаграму Бode;
5. визначити частотний годограф Найквіста.
6. аналітично визначити АЧХ та ФЧХ і побудувати графіки функцій.

Контрольні запитання

1. Як записується перетворення між входом і виходом динамічної системи у вигляді передавальної функції?
2. Що таке операторна передавальна функція?
3. Що таке комплексна передавальна функція?
4. Які функції використовуються для дослідження динамічних властивостей системи та її елементів?
5. Що таке нулі передавальної функції та що вони характеризують?
6. Що таке полюси передавальної функції та що вони характеризують?
7. Який зв'язок між комплексною передавальною функцією й частотною характеристикою?
8. Що характеризує діаграма Бode?
9. Для чого використовується годограф Найквіста?

6 РОЗРОБКА ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ЇХ ЕЛЕМЕНТІВ

6.1 Застосування засобу Z-перетворення для цифрового моделювання динамічних систем

При використанні ПК для моделювання безперервних динамічних систем вихідні диференціальні рівняння або апроксимуються різницевиими рівняннями (в цьому випадку моделювання виконується в часовій області), або піддаються Z-перетворенню (в цьому випадку моделювання виконується в комплексній області).

При моделюванні дискретних систем використовуються тільки цифрові ЕОМ. Застосування для цієї мети аналогових ЕОМ пов'язане з більшими незручностями і на практиці має місце в дуже рідких випадках.

При моделюванні динамічних систем за допомогою ПК всі обчислення виконуються машиною послідовно в часі. В одному алгоритмічному циклі в першу чергу обчислюють всі входи першого блоку системи, що моделюється, після цього обчислюється вихід цього блоку, після чого здійснюється перехід до другого блоку і так далі доти, поки не буде обчислений вихід всієї системи. Після чого здійснюється перехід до наступного алгоритмічного циклу, коли послідовність обчислень повторюється.

Важливою задачею в цьому випадку є автоматизація вибору величини кроку приросту незалежної змінної при чисельному інтегруванні.

Кожна схема інтегрування характеризується помилкою апроксимації, що може бути використана для управління в процесі обчислень величиною кроку приросту.

При моделюванні безперервних систем на ПК такі системи зводяться до еквівалентних дискретних, в яких сигнали хоча б на одній з дільниць схеми періодично комутуються (перетворюються з аналогової форми в дискретну).

Найбільш поширеним є перетворення сигналу засобом квантування в часі. При цьому аналогова функція $X(t)$ перетворюється в послідовність імпульсів шириною T_n з постійним періодом T :

$$\{X(nt)\} = [X(0t), X(1t), \dots], \quad (6.1)$$

Огинаючи цих імпульсів відповідає вхідному сигналу. Таким чином, одержуємо послідовність імпульсів, тривалість яких прагне до нуля.

Квантований за часом сигнал припускає застосування Z -перетворення, яке широко використовується для розв'язання диференціальних і рекурентних рівнянь. Z -перетворення безперервної функції $X(t)$ являє собою операцію перетворення послідовності величини (6.1) у функцію комплексної змінної Z :

$$X(z) = X(0t) + X(1t)Z^{-1} + X(2t)Z^{-2} + X(3t)Z^{-3} + \dots \quad (6.2)$$

З рівняння (6.2) виходить, що Z -перетворення неперервної функції являє собою послідовність ступенів комплексної змінної Z , що зменшуються, які мають коефіцієнти, які дорівнюють амплітудним значенням послідовності імпульсів $\{X_n\}$.

Якщо відоме Z -перетворення, то можна отримати рекурентне співвідношення і навпаки – з рекурентного співвідношення отримати Z -перетворення.

Розглянемо отримання рекурентного співвідношення за допомогою операції інтегрування за методом прямокутників:

$$Y_{n+1} = Y_n + \tau X_n. \quad (6.3)$$

Схему перетворення умовно можливо подати у вигляді блок-схеми, яка показана на рис. 6.1.

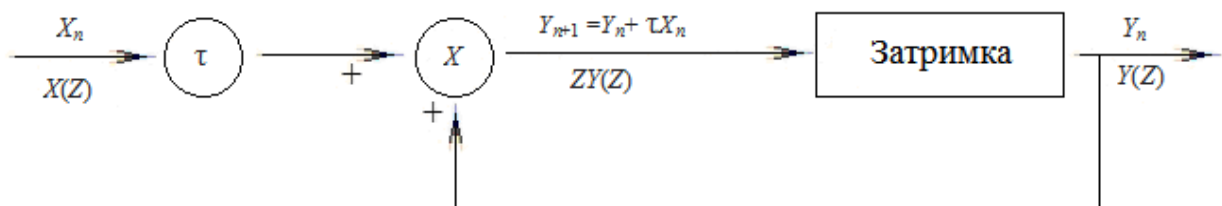


Рисунок 6.1 – Блок-схема процесу інтегрування

За умови, що відомі значення сигналів виходу Y_n і входу X_n , то можна отримати Y_{n+1} , як це показано на рис. 6.1. Якщо пропустимо Y_{n+1} через елемент затримки τ , то отримаємо Y_n . Рівняння (6.3) є рекурентним співвідношенням, яке включає зв'язок між окремими значеннями імпульсних послідовностей $\{Y_n\}$ і $\{X_n\}$.

Позначимо Z-перетворення $\{Y_n\}$ і $\{X_n\}$ як $Y(z)$ і $X(z)$ відповідно. Тоді рівняння (6.3) можемо подати у вигляді

$$Y_n = Y_{n-1} + \tau X_{n-1}. \quad (6.4)$$

Виконаємо Z-перетворення від обох частин виразу (6.4):

$$z[\{Y_n\}] = z[\{Y_{n-1} + \tau X_{n-1}\}]. \quad (6.5)$$

Тоді, використовуючи властивості лінійності Z-перетворення, отримаємо

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \tau z^{-1}X(z) \quad (6.6)$$

або

$$zY(z) = Y(z) + \tau X(z) \quad (6.7)$$

Співвідношення (6.7) може бути подано у вигляді

$$Y(z) = \frac{\tau}{(z-1)} X(z) \quad (6.8)$$

Z-перетворення особливо важливе при одержанні рекурентних співвідношень.

Відношення Z-перетворення виходу лінійної системи до Z-перетворення входу цієї системи називається *імпульсною передавальною функцією*, тобто

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (6.9)$$

Тоді для операції інтегрування за формулою прямокутників імпульсна передавальна функція має вигляд:

$$H(z) = \frac{\tau}{(z-1)}. \quad (6.10)$$

Аналогічні співвідношення для операції інтегрування (імпульсні передавальні функції) можна записати і для інших рекурентних співвідношень.

Для формули трапецій

$$H(z) = \frac{\tau(z+1)}{2(z-1)}. \quad (6.11)$$

Отримання рекурентного співвідношення із імпульсної передавальної функції виконується згідно з такою схемою.

Якщо відома імпульсна передавальна функція, яка зв'язує Z-перетворення $X(z)$ і $Y(z)$

$$Y(z) = H(z) X(z),$$

де $H(z)$ – дробово-раціональна функція від z , наприклад

$$Y(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} X(z). \quad (6.12)$$

Тоді, поділивши чисельник і знаменник на вищий степінь z (в данному випадку z^2), отримаємо:

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z) \quad (6.13)$$

або

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})X(z). \quad (6.14)$$

На основі рівняння (6.14) отримаємо

$$a_0 Y_n + a_1 Y_{n-1} + a_2 Y_{n-2} = b_0 X_n + b_1 X_{n-1} + b_2 X_{n-2}. \quad (6.15)$$

Тоді рекурентне співвідношення буде мати вигляд

$$Y_n = \frac{1}{a_0} (b_0 X_n + b_1 X_{n-1} + b_2 X_{n-2} - a_1 Y_{n-1} - a_2 Y_{n-2}). \quad (6.16)$$

Таким чином, за допомогою Z-перетворення здійснюється відповідність між імпульсними передавальними функціями (які описують динаміку дискретних систем у комплексній площині) і рекурентними співвідношеннями (які описують динаміку дискретних систем в часовій області).

Для дослідження систем, які описуються диференціальними рівняннями, використовують підхід, що дозволяє подати диференціальне рівняння у вигляді рекурентного співвідношення. Цей підхід базується на використанні Z -перетворення і операторного методу. При цьому використовуються оператори диференціювання та інтегрування.

6.2 Методика отримання рекурентного співвідношення для системи, що описується диференціальним рівнянням

В основі методики покладено використання операторів диференціювання та інтегрування.

Оператором диференціювання називається такий оператор D , для якого

$$Dx = x'; D^2x = x''; D^3x = x''' \text{ і так далі.}$$

Оператором інтегрування називається такий оператор I , для якого

$$Ix = \int_0^t x dt; I^2x = \int_0^t \int_0^\alpha x(t) dt d\alpha \text{ і так далі.}$$

При виборі відповідних значень початкових умов оператор I зворотний оператору D .

Оператор I може бути поданий відповідною імпульсною передавальною функцією, наприклад, у вигляді (6.10), (6.11) чи якоюсь іншою.

Розглянемо отримання рекурентного співвідношення для системи, що описується диференціальним рівнянням вигляду (змінні y та x – функції часу):

$$y'' + 6y' + 5y = x. \quad (6.17)$$

Представимо рівняння (6.17) у вигляді операторів диференціювання і інтегрування (D і I):

$$D^2y + 6Dy + 5y = x;$$

$$(D^2 + 6D + 5)y = x;$$

$$(1 + 6I + 5I^2)y = xI^2.$$

Для операції інтегрування використаємо метод прямокутників з імпульсною передавальною функцією:

$$I = \frac{\tau}{(z-1)},$$

де τ – крок інтегрування.

Тоді

$$\left[1 + 6\frac{\tau}{(z-1)} + 5\left(\frac{\tau}{(z-1)}\right)^2\right]y(z) = \left(\frac{\tau}{(z-1)}\right)^2 x(z). \quad (6.18)$$

Після нескладних перетворень рівняння (6.18) отримаємо

$$[1 + (6\tau - 2)z^{-1} + (1 - 6\tau + 5\tau^2)z^{-2}]y(z) = \tau^2 z^{-2} x(z). \quad (6.19)$$

Використовуючи рівняння (6.19) діючи аналогічно перетворенням (6.14) – (6.16), запишемо рекурентне співвідношення для розв'язання системи (6.17) за допомогою методу прямокутників:

$$y_n + (6\tau - 2)y_{n-1} + (1 - 6\tau + 5\tau^2)y_{n-2} = \tau^2 x_{n-2} \quad (6.20)$$

або

$$y_n = (2 - 6\tau)y_{n-1} - (1 - 6\tau + 5\tau^2)y_{n-2} + \tau^2 x_{n-2}. \quad (6.21)$$

Рівняння (6.21) (рекурентне співвідношення) є дискретною моделлю системи (6.17).

У прикладному плані, при його реалізації за допомогою засобів обчислювальної техніки, в тому числі мікропроцесорної та мікроконтролерної, важливе значення має раціональний вибір кроку обчислення (інтегрування) величини τ . З одного боку τ визначає час формування сигналу управління (швидкодію системи), а з іншого – стійкість алгоритму управління та точність розрахунку.

Метод Z -перетворення дає змогу, використовуючи поняття стійкості, визначити крок інтегрування. Це базується на понятті: якщо корні імпульсної передавальної функції знаходяться в середині кола одиничного радіуса, то відповідне рекурентне співвідношення стійке. При цьому функція $H(z)$ має нулі в точці $z = z_l$, якщо:

$$1) \lim_{z \rightarrow z_l} H(z) = \infty;$$

2) $\lim_{z \rightarrow z_1} H(z)(z - z_1)^k$ існує для деякого k .

Наприклад:

$$H(z) = \frac{1}{1 - rz^{-1}}. \quad (6.22)$$

При цьому рекурентне співвідношення має вигляд:

$$y_n = ry_{n-1} + x_n. \quad (6.23)$$

Імпульсна передавальна функція $H(z)$ має один нуль в точці $z = r$. Це означає, що рекурентне співвідношення стійке за умови, що $|r| < 1$ (нуль знаходиться в середині кола одиничного радіуса) і нестійке для $|r| > 1$. Отримавши аналітичні значення коренів за умови $|r| < 1$ як залежностей від кроку інтегрування, знаходимо величину τ як мінімуму із визначених.

При моделюванні складних систем такі аналітичні розрахунки пов'язані з певними труднощами, оскільки необхідно виконувати розрахунок коренів характеристичного рівняння n -го ступеня.

6.3 Завдання для самостійної роботи

1. Для заданого диференціального рівняння побудувати рекурентне співвідношення методом прямокутників та трапецій.

2. Визначити значення кроку інтегрування.

3. Знайти 10 перших значень розв'язання диференціального рівняння з отриманим кроком інтегрування.

4. Порівняти ці значення з відповідними значеннями, отриманими в пакеті *MATLAB*.

1) $y'' = -y' / t + y / t^2 + 1$, $y(3) = 6$, $y'(3) = 3$ на інтервалі $[3, 5]$.

2) $y'' - y = e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0.5$ на інтервалі $[0, 1]$.

3) $y'' - 2y' = t^2 - 1$, $y(1) = -1/6$, $y'(1) = -3/4$ на інтервалі $[1, 2]$.

4) $y'' - 2y' = 3e^t$, $y(0,3) = 1,415$, $y'(0,3) = 5.83$ на інтервалі $[0,3, 0,6]$.

5) $y'' + y' = t^2$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 2$ на інтервалі $[1, 2]$.

Контрольні запитання

1. Моделювання динамічних систем на ЕОМ. Z -перетворення. Основні властивості Z -перетворення.
2. Блок-схема процесу інтегрування.
3. Поняття операторів диференціювання та інтегрування. Використання операторів для укладання рекурентних співвідношень розв'язання диференціальних рівнянь.
4. Побудова дискретних моделей системи на підставі Z -перетворення за формулами Ейлера та трапецій.
5. Чисельне інтегрування. Найпростіші засоби чисельного інтегрування. Рекурентне співвідношення для формули прямокутників та трапецій.
6. Вибір кроку інтегрування. Рекомендації щодо вибору кроку інтегрування.
7. Помилки обчислень. Характеристика помилок обчислень.
8. Визначення тривалості засобів чисельного інтегрування.

7 МОДЕЛІ ПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ СИСТЕМ

7.1 Моделі сигналів у вигляді Фур'є зображення

Крім звичного зображення сигналів і функцій у вигляді залежності їх значень від певних аргументів (часу, лінійної або просторової координати тощо) при аналізі й обробці даних широко використовується математичний опис сигналів по аргументах. Можливість такого опису визначається тим, що будь-який як завгодно складний за своєю формою сигнал, що не має нескінченних значень на своєму інтервалі, можна зобразити у вигляді суми більш простих сигналів і, зокрема, у вигляді суми найпростіших гармонічних коливань, що виконується за допомогою перетворення Фур'є.

Математично розкладання сигналу на гармонічні складові описується функціями значень амплітуд і початкових фаз коливань по неперервному або дискретному аргументу. Сукупність амплітуд гармонічних коливань розкладання називають амплітудним спектром сигналу, а сукупність початкових фаз – фазовим спектром. Обидва спектри разом утворюють повний частотний спектр сигналу, що за точністю математичного зображення тотожний динамічній формі опису сигналу.

Крім гармонічного ряду Фур'є, застосовуються й інші види розкладання сигналів: за функціями Уолша, Адамара, Вейвлета та інших. Крім того, існують розкладання за поліномами Чебишева, Лагерра, Лежандра та інших. Цей спосіб зображення сигналів опирається на те, що в будь-якому сигналі присутні гармонічні складові. Залежно від частоти, складові називаються гармоніками (перша, друга і так далі). Сума гармонік з відповідними вагами становить модель сигналу.

Будь-який сигнал, наскільки складний би він не був, може бути зображений сумою гармонік. Простіший сигнал зображується меншою кількістю гармонік, більш складний – великою. Чим більше гармонік зображено в моделі сигналу, тим точніше, в загальному випадку, модель відображає реальний сигнал. Відзначимо важливу особливість цього способу

зображення: замість усього сигналу у всіх його подробицях достатньо зберігати вектор чисел, що являють собою вагові коефіцієнти складових його гармонік. Тобто ці числа повністю характеризують вихідний сигнал, оскільки за ним сигнал можна повністю відновити формулою оберненого перетворення Фур'є.

Сукупність модулів амплітуд і відповідних частот гармонік називають спектром амплітуд, сукупність початкових фаз і відповідних частот гармонік – спектром фаз. Спектр амплітуд і спектр фаз однозначно визначають сигнал.

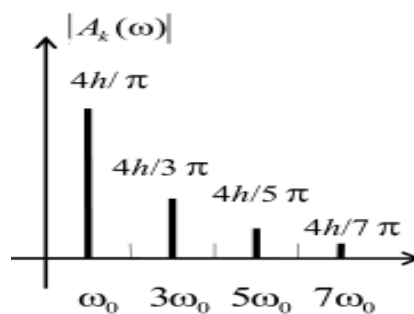


Рисунок 7.1 – Спектральна характеристика періодичного сигналу

На рис. 7.1 наведено графічне зображення спектра амплітуд періодичного сигналу. Характерною особливістю періодичного сигналу є його дискретність. Дискретний спектр не обов'язково означає періодичність функції $x(t)$. Останнє має місце тільки тоді, коли відстань між спектральними лініями кратна основній частоті ω_1 . При аналізі спектрів сигналів основну увагу приділяють визначенню ширини спектра, оскільки цей фактор використовується для узгодження з апаратурою обробки інформації каналом.

Ширина спектра не повинна бути більшою за полосу пропускання каналу. Ширина спектра, як правило, визначається через його енергетичну характеристику – середню потужність. Середня потужність періодичного коливання і розподілення цієї потужності між окремими гармоніками має вигляд:

$$\overline{x^2} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|)^2.$$

7.1.1 Форми аналітичного опису сигналів. Сигнали можуть бути представлені в часовій, операторній або частотній області, зв'язок між якими визначається за допомогою перетворень Фур'є і Лапласа.

Перетворення Лапласа:

$$L: x(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt; \quad L^{-1}: x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} x(p)e^{pt} dp.$$

Перетворення Фур'є:

$$F: x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt; \quad F^{-1}: x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

При цьому можуть бути використані різні форми зображення сигналів у вигляді функцій, векторів, матриць, геометричне та інші. При описі випадкових процесів у часовій області використовується так звана кореляційна теорія випадкових процесів, а при описі в частотній області – спектральна теорія випадкових процесів.

З урахуванням парності функцій і відповідно до формул Ейлера

$$e^{j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) + j\sin(\omega\tau); \quad e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau),$$

можна записати вирази для кореляційної функції $R_x(\tau)$ та енергетичного спектра (спектральної щільності) випадкового процесу $S_x(\omega)$, які пов'язані перетворенням Фур'є або формулами Вінера – Хинчина

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega;$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

Слід узяти до уваги: якщо сигнал періодичний, то час розгляду становить один період сигналу; якщо сигнал неперіодичний, то періодом сигналу вважається весь час його розгляду.

7.2 Тригонометричний ряд Фур'є. Знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є для $2l$ -періодичної функції

Функцію $f(x)$ називають періодичною з періодом T , якщо $f(x)$ визначена на всій числовій осі і для будь-якого $x \in (-\infty, +\infty)$ відповідає $f(x+T) = f(x)$. Для того, щоб отримати графік функцій $f(x)$, достатньо побудувати її графік на будь-якому відрізку довжини T , а потім періодично продовжити його на всю числову вісь. Якщо $f(x)$ – періодична функція з періодом T , то $f(x) = f(x + T) = f(x + nT)$, де n – будь яке ціле число.

Тригонометричним рядом називають функціональний ряд вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right) + \left(a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right) + \dots, \quad (7.1)$$

де $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$, – дійсні числа, $l \in (0, +\infty)$.

У скороченому запису

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right). \quad (7.2)$$

Числа $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$, називають коефіцієнтами тригонометричного ряду.

Оскільки члени ряду є неперервними функціями періоду $2l$, то і його сума також є періодичною функцією з періодом $2l$.

За умови, якщо тригонометричний ряд збігається до функції $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \quad (7.3)$$

то його можливо інтегрувати почленно на проміжку $[-l, l]$. Тоді:

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx + \int_{-l}^l a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \right). \quad (7.4)$$

Враховуючи, що $\int_{-l}^l a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0$, $\int_{-l}^l a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0$, отримаємо:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx. \quad (7.5)$$

Розглянемо рівняння (7.3). Домножимо його на $\cos(k\pi x/l)$, де k – фіксоване натуральне число.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) &= \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Домножимо рівняння (7.3) на $\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$ і проінтегруємо його почленно:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx &= \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx + \int_{-l}^l b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Складові рівняння:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx &= 0; \\ \left(\int_{-l}^l a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right) &= \begin{cases} 0, n \neq k; \\ a_k l, n = k. \end{cases} \\ \left(\int_{-l}^l b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right) &= 0. \end{aligned}$$

В результаті інтегрування, враховуючи ортогональність тригонометричної системи, отримаємо:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \end{aligned} \quad (7.8)$$

Тригонометричний ряд, у якому коефіцієнти визначено за формулами (7.5), (7.7) та (7.8), називається тригонометричним рядом Фур'є, а коефіцієнти $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ – коефіцієнтами Фур'є.

Якщо задано $2l$ -періодичну функцію $f(x)$, яка є інтегрованою на періоді, то можна обчислити за формулами (7.5), (7.7), (7.8) коефіцієнти і побудувати її ряд Фур'є. При цьому слід керуватись теоремою Діріхле: якщо функція $f(x)$ є періодичною з періодом $2l$ і задовольняє на проміжку $[-l, l]$ умови Діріхле, то ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається на $[-l, l]$ і його сума

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

в точках неперервності функції $f(x)$ дорівнює $f(x)$, а в точках розриву – функції $f(x)$

$$S(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

7.3 Приклади побудови моделей періодичних сигналів

Приклад 7.1. Задано неперервну функцію $f(x) = 3(1-x)/5$ в інтервалі $(-3, 3)$.

Необхідно:

- розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур'є;
- розробити програму (M-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є і функції $f(x)$;
- проаналізувати вплив числа гармонік на результат апроксимації функції $f(x)$.

Розв'язання.

Продовжимо функцію $f(x)$ періодично на всю числову вісь відповідно до заданого інтервалу з періодом $3 - (-3) = 6$. В результаті такого продовження отримали періодичну функцію, яка задовольняє умови Діріхле. Знайдемо коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$. Оскільки $2l = 6$, $l = 3$.

Для розрахунку коефіцієнтів a_0, a_n, b_n використаємо рівняння (7.5)–(7.8).

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-l}^l \left(\frac{3-3x}{5} \right) dx = \frac{3}{15} \int_{-3}^3 x dx + \frac{3}{15} \int_{-3}^3 dx = \frac{x^2}{10} \Big|_{-3}^3 + \frac{1}{5} x \Big|_{-3}^3 = \frac{6}{5}; \\
 a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = \frac{1}{3} \int_{-l}^l \left(\frac{3-3x}{5} \right) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{3-3x}{5}, du = \left(\frac{3-3x}{5} \right)' dx = -\frac{3}{5} dx \\ dv = \cos\left(\frac{\pi n x}{3}\right) dx, v = \int \cos\left(\frac{\pi n x}{3}\right) dx = \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} \end{array} \right\} = \\
 &= \left(\frac{3(3-3x)}{15\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} \right) \Big|_{-3}^3 - \frac{1}{3} \int_{-3}^3 \left(-\frac{3}{5} \right) \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} dx = \\
 &= \frac{3-9}{5\pi n} \sin \pi n - \frac{3+9}{5\pi n} \sin(-\pi n) - \frac{3}{5\pi n} \frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} \Big|_{-3}^3 = \\
 &= -\frac{9}{5\pi^2 n^2} (\cos(\pi n) - \cos(-\pi n)) = \left\| \cos(\pi n) = \cos(-\pi n) = (-1)^n \right\| = \\
 &= \frac{9}{5\pi^2 n^2} ((-1)^n - (-1)^n) = 0.
 \end{aligned}$$

У процесі перетворення враховано, що задана функція $f(x)$ парна; $\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ – парна, $\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ – непарна функції. Добуток парних функцій дає парну функцію, добуток парної функції на непарну – непарну функцію.

Аналогічні перетворення виконаємо і для знаходження b_n , враховуючи те, що $\cos(\pi n) = \cos(-\pi n) = (-1)^n$, $\sin(\pi n) = \sin(-\pi n) = 0$.

В результаті отримаємо:

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{18}{5\pi n} (-1)^n.$$

Таким чином, для кожного x заданого інтервалу $[-3, 3]$ функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є згідно за формулою:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \right) = \frac{3}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{5\pi n} (-1)^n \sin \frac{\pi n x}{3}. \quad (7.9)$$

Програма (М-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є і функції $f(x)$.

Програма AF_1.m

```

y=0;
x=[-10:0.01:10];
for n=1:200% графіки приведено для варіантів
%числа гармонік 5 і 200
y=y+(18/(5*pi*n))*(-1)^n*(sin(pi*n*x/3));%сума ряду
y1=y+3/5;
%hold on
end
figure
plot(x,y1)
xlabel('x')
ylabel('y1')
grid
y2=(3/5)-((3*x)/5); %задана функція
figure
plot(x,y2)
xlabel('x')
ylabel('y2')
grid

```

Результат виконання наведено на рис. 7.2 – 7.3.

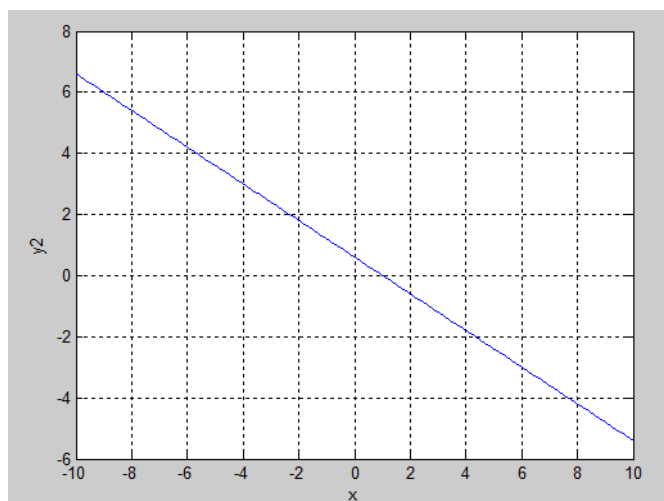


Рисунок 7.2 – Графік функції $f(x)$

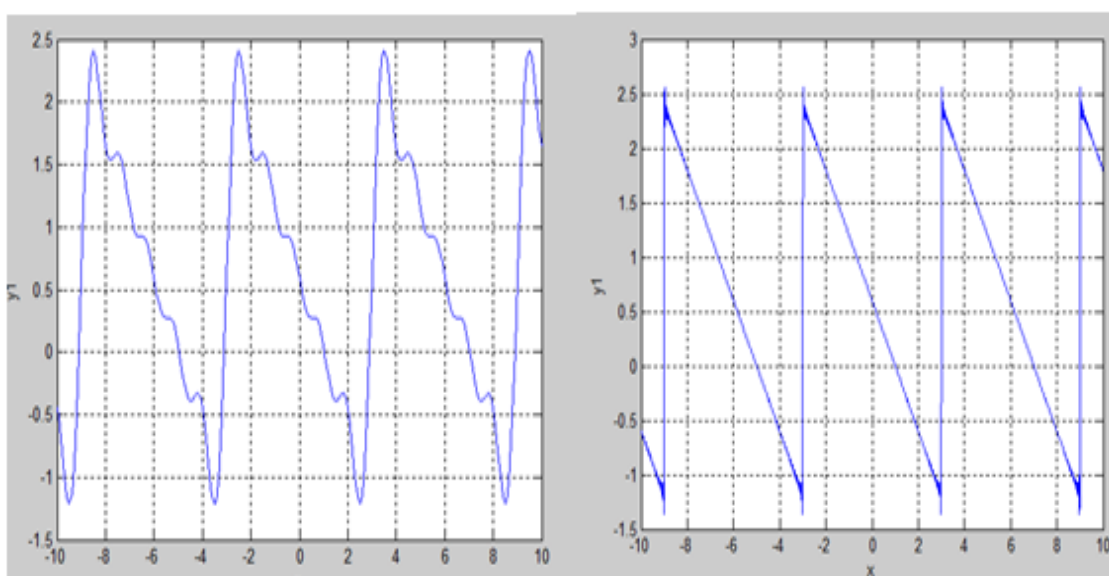


Рисунок 7.3 – Графіки суми ряду Фур'є при $n = 5$ і $n = 200$

Згідно з отриманим співвідношення (7.9) сума ряду має вираховуватись від одиниці до нескінченності числа гармонік. Графіки приведені для випадку врахування 5-ти і 200-т гармонік (рис. 7.3). Задовільний результат – при врахуванні 200-от гармонік. Порівняння графічних залежностей (заданої і

отриманих) дає підставу стверджувати, що отримані співвідношення адекватно відображають процес зображення заданої функції рядом Фур'є.

Приклад 7.2. Функція $f(x)$ задана графічно (рис. 7.4) .

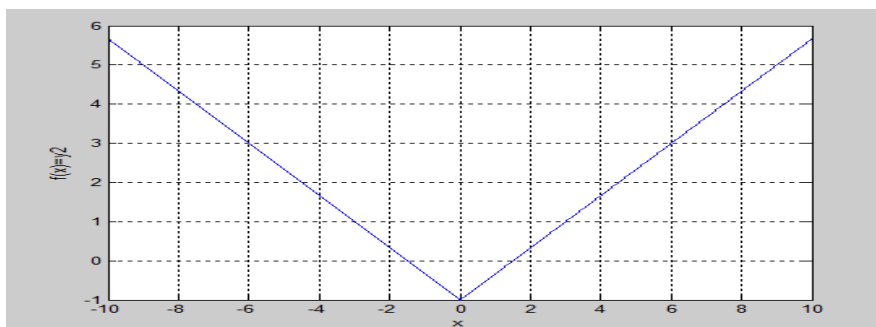


Рисунок 7.4 – Графік функції $f(x)$

Необхідно:

- розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур'є в інтервалі $(-3, 3)$;
- розробити програму (M-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є і функції $f(x)$;
- проаналізувати вплив числа гармонік на результат розкладання функції $f(x)$.

Розв'язання.

З рис. 7.4 видно, що графік функції $f(x)$ є симетричним відносно осі y . Значить, функція $f(x)$ є парною та її ряд Фур'є не містить синусів.

Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки $(0, -1)$ та $(3, 1)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \frac{x - 0}{3 - 0} = \frac{y + 1}{2}; y = \frac{2}{3}x - 1.$$

Період функції: $2l = 3 - (-3) = 6$; $l = 3$.

Використаємо методику Знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є для парних і непарних $2l$ -періодичних функцій.

Функція $f(x)$ називається парною, якщо $f(-x) = f(x)$, і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ є парною, то $f(x) + f(-x) = 2f(x)$. Для парних функцій

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ є непарною, то $f(x) + f(-x) = f(x) - f(x) = 0$. Для непарних функцій

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Якщо функція $f(x)$ є $2l$ -періодичною кусково-гладкою або кусково-монотонною парною функцією, тоді коефіцієнти для розкладання $f(x)$ в ряд Фур'є набудуть вигляду:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x)dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)dx.$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx; \parallel \text{парна функція}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0. \parallel \text{непарна функція}$$

Якщо $f(x)$ функція парна, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right);$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, b_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

Особливість – ряд Фур'є парної функції не містить синусів.

Аналогічно, якщо $f(x)$ є $2l$ -періодичною кусково-гладкою або кусково-монотонною непарною функцією, то $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є, який містить лише синуси:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Якщо $f(x)$ функція не парна, то:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right);$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, n = 1, 2, \dots, a_0 = 0, a_n = 0.$$

Знаходимо коефіцієнти Фур'є.

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x - 1\right) dx = \frac{4}{9} \int_0^3 x dx - \frac{2}{3} \int_0^3 dx = \frac{4x^2}{18} \Big|_0^3 - \frac{2}{3} x \Big|_0^3 = 0;$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x - 1\right) \cos \frac{\pi n x}{l} dx =$$

$$= \left(\frac{2(2x-3)3}{9\pi n}\right) \sin \frac{\pi n x}{3} \Big|_0^3 - \frac{2}{3} = \frac{4x^2}{18} \Big|_0^3 - \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{2}{3} \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \sin(\pi n) + \frac{2}{\pi n} \sin(0) + \frac{4}{3\pi n} \frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2} (\cos(\pi n) - \cos(0)) = \left\| \cos(\pi n) = (-1)^n, \cos(0) = 1 \right\| = \frac{4}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right);$$

$$b_n = 0.$$

У результаті отримаємо розкладання функції у вигляді ряду Фур'є на проміжку $x \in (-3, 3)$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos \frac{\pi n x}{3}, \quad x \in (-3, 3).$$

Програма (М-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є і функції $f(x)$.

Програма AF_2.m

```
y=0;
x=[-10:0.01:10];
for n=1:200 %графік приведено для варіанту
%числа гармонік 200
y=y+(4/(pi^2*n^2))*((-1)^n-1)*(cos(pi*n*x/3));%сума ряду
y1=y;
hold on
end
figure
plot(x,y1)
xlabel('x')
ylabel('y1')
grid
y2=abs((2/3)*x)-1; %задана функція
figure
plot(x,y2)
xlabel('x')
ylabel('f(x)=y2')
grid
```

Результат виконання програми наведено на рис. 7.5.

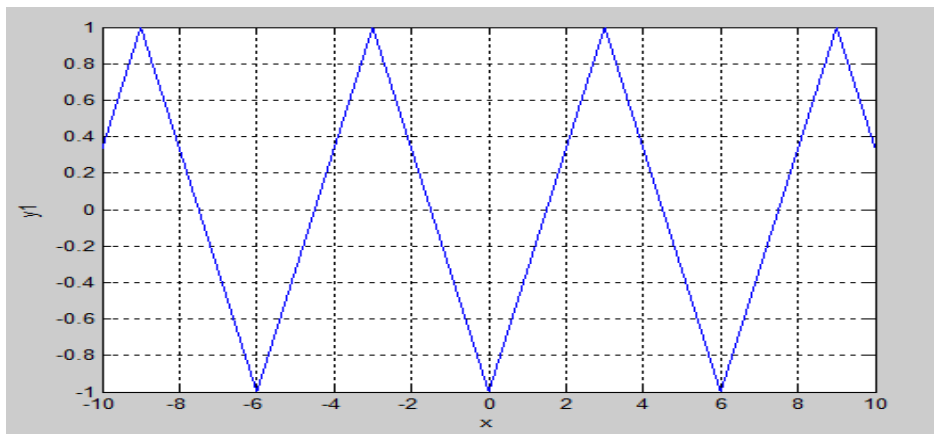


Рисунок 7.5 – Графік суми ряду Фур'є при $n = 200$

7.4 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1 Задана функція $f(x)$ в інтервалі $(-4, 4)$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ 2, & \text{якщо } 2 < x \leq 4, \\ -2, & \text{якщо } -2 \geq x \geq -4. \end{cases}$$

Необхідно:

- розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур'є в інтервалі $(-4, 4)$;
- розробити програму (M-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є функції $f(x)$;
- проаналізувати вплив числа гармонік на результат розкладання функції $f(x)$.

Завдання 2 Задана функція $f(x)$, яка визначена згідно з аналітичним виразом:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2, \\ 2, & \text{якщо } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Необхідно:

- розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур'є;
- розробити програму (M-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є функції $f(x)$.

Особливості функції. Функція задана на відрізку $[0, 4]$. Продовжимо задану функцію симетрично на відрізок $[-4, 0]$. Отримали парну функцію з періодом $2l = 4 - (-4) = 8$, $l = 4$. Рівняння функції однієї із симетричних частин – із двох складових: $y = x$, якщо $0 \leq x \leq 2$ і $y = 2$, якщо $2 \leq x \leq 4$.

Завдання 3

Задана періодична функція $f(x)$ в інтервалі $(-\pi, +\pi)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\pi < x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Необхідно:

- розкласти функцію $f(x)$ у ряд Фур'є в інтервалі $(-\pi, +\pi)$;
- розробити програму (М-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є функції $f(x)$.

Теорія.

У випадку, коли $f(x)$ є 2π -періодичною кусково-монотонною або кусково-гладкою функцією, розкладення у ряд Фур'є функції $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx; \quad n = 1, 2, \dots$$

Якщо $f(x)$ – 2π -періодична парна функція, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx); \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad n = 1, 2, \dots; \quad b_n = 0.$$

Якщо $f(x)$ – 2π -періодична непарна функція, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin nx); \quad a_0 = 0; \quad a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx; \quad n = 1, 2, \dots; \quad b_n = 0.$$

Завдання 4 Задана функція $f(x)$, яка визначена згідно з аналітичним виразом:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{для } 0 < x < 2; \\ 1, & \text{для } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Необхідно:

– розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур'є у синус-косинусній та косинусній формах на інтервалі $(0, 4)$;

– розробити програму (M-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є функції $f(x)$.

Допоміжна теорія.

Припустимо, що маємо $2l$ -періодичну функцію $f(t)$ у вигляді ряду Фур'є:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi}{l} t + b_n \sin \frac{\pi}{l} t \right).$$

Позначимо: $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$.

Тоді:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t).$$

Таку форму запису ряду Фур'є називають синус-косинусною, або квадратурною.

Зобразимо кожен додано у вигляді:

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n).$$

Тоді

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n),$$

де $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$, $\varphi_n = \arg(a_n - ib_n)$.

Такий запис називають косинусною формою запису ряду Фур'є. Сукупність чисел – коефіцієнтів a_n та b_n у синус-косинусній формі ряду Фур'є функції $f(t)$ – називають спектром сигналу $f(t)$. Для того щоб побудувати спектр, треба відкласти значення a_n та b_n на частотах $0, \omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$ (рис. 7.6).

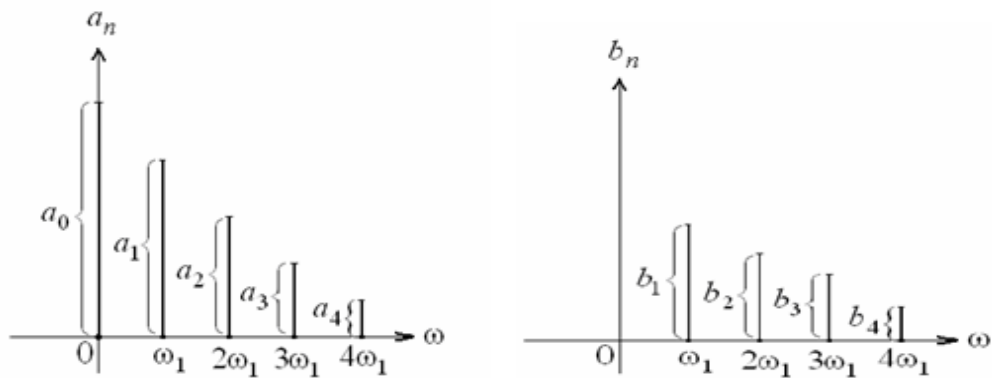


Рисунок 7.6 – Спектр сигналу у синус-косинусній формі

Контрольні запитання

1. Які способи подання (зображення) моделей сигналів відомі?
2. У чому полягають переваги частотного методу зображення сигналів?
3. Яку функцію називають періодичною? Які властивості мають періодичні функції?
4. Який ряд називають тригонометричним?
5. Який ряд називають рядом Фур'є? Сформулюйте достатні умови для розкладення функції в ряд Фур'є.
6. За яких умов періодична функція може бути зображена рядом Фур'є?
7. Що розуміється як спектр амплітуд і спектр фаз?
8. Які характерні особливості спектра періодичного сигналу?
9. Нехай $f(x)$ – кусково-монотонна або кусково-гладка функція. Чому дорівнює сума ряду Фур'є функції $f(x)$ в точках неперервності функції $f(x)$, в точках розриву функції $f(x)$?
10. За якими формулами обчислюють коефіцієнти Фур'є $2l$ -періодичної функції $f(x)$?
11. За якими формулами обчислюють коефіцієнти Фур'є парної або непарної $2l$ -періодичної функції $f(x)$?

12. За якими формулами обчислюють коефіцієнти Фур'є 2π -періодичної функції $f(x)$?
13. За якими формулами обчислюють коефіцієнти Фур'є парної або непарної 2π -періодичної функції $f(x)$?
14. Як розкласти кусково-монотонну або кусково-гладку функцію $f(x)$, визначену на відрізку $[0, 1]$, в ряд Фур'є тільки за синусами або тільки за косинусами?
15. Що називають гармонічним коливанням? Як знайти амплітуду і фазу гармонічного коливання?
16. Що називають синусно-косинусною або квадратурною формою запису ряду Фур'є?
17. Що називають косинусною формою запису ряду Фур'є?
18. Як побудувати спектр сигналу у синусно-косинусній формі запису ряду Фур'є?
19. Як побудувати амплітудний і фазовий спектри сигналу у косинусній формі запису ряду Фур'є?
20. Що називають комплексною формою запису ряду Фур'є?
21. Як побудувати амплітудний і фазовий спектри сигналу у комплексній формі запису ряду Фур'є?
22. Як пов'язані між собою коефіцієнти у комплексній та синусно-косинусній формах запису ряду Фур'є?
23. Яку симетрію має амплітудний спектр у комплексній формі запису ряду Фур'є?
24. Яку симетрію має фазовий спектр у комплексній формі запису ряду Фур'є?
25. Як у спектрі амплітуд відображається постійна складова сигналу?
26. Який вигляд має спектр гармонічного сигналу?
27. Як можна енергетично пояснити спектр періодичного сигналу?
28. Що розуміється як практична ширина спектра періодичного сигналу?

29. У чому полягає критерій вибору практичної ширини спектра періодичного сигналу?

30. Як виглядає спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів?

31. Який фізичний зміст має крива, що обводить спектр амплітуд періодичного сигналу?

32. Чим відрізняються спектри симетричного і несиметричного періодичних прямокутних імпульсів?

8 РОЗРОБКА МОДЕЛЕЙ НЕПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ У ВИГЛЯДІ ФУР'Є ЗОБРАЖЕННЯ

8.1 Неперервне перетворення Фур'є

Для аперіодичних процесів замість розкладання у ряд Фур'є використовується розкладання в інтеграл Фур'є при виконанні таких вог: функція $f(t)$ задовольняє умову Діріхле і є абсолютно інтегрованою.

Умови Діріхле:

- не повинно бути розривів другого роду (гілок функції, що прямують до нескінченності);
- кількість розривів першого роду (стрибків) має бути скінченною;
- кількість екстремумів функції має бути скінченною.

Припустимо, що функція $f(x)$ відмінна від 0 на деякому скінченному проміжку (t_1, t_2) , а за межами цього проміжку $f(x) = 0$ (рис. 8.1).

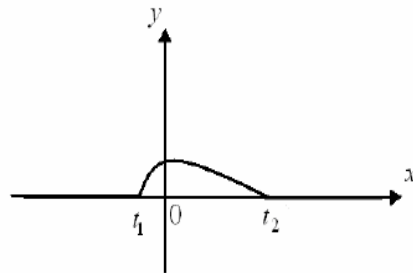


Рисунок 8.1 – Графік неперіодичної функції $f(x)$

Виберемо довільний інтервал довжини T , який містить всередині себе проміжок (t_1, t_2) , і продовжимо функцію $f(x)$ періодично з періодом T (рис. 8.2).

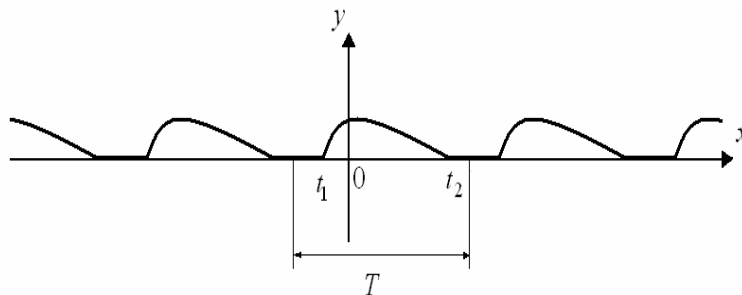


Рисунок 8.2 – Графік функції $f(x)$ з періодом T

Отримуємо нову функцію $f_T(x)$, яка є періодичною з періодом T . Таку функцію можна розкласти в ряд Фур'є в комплексній формі:

$$f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{\pi n x}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_1 x}, \quad (8.1)$$

де $\omega_1 = \frac{\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$, $c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(x) e^{-i \frac{\pi n x}{T}} dx = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(x) e^{-in\omega_1 x} dx$.

Тоді отримаємо

$$f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(x) e^{-in\omega_1 t} dt \right) e^{in\omega_1 x}. \quad (8.2)$$

Оскільки $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, маємо рівність $\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \omega_1$.

Тоді

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt \right) e^{in\omega_1 x}. \quad (8.3)$$

При цьому спектральні лінії спектра функції $f_T(x)$ мають абсциси $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, $2\omega_1$, $3\omega_1, \dots$

Рівняння (8.3) набуде вигляду:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \left(\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) d\omega.$$

Позначимо вираз у дужках, який залежить тільки від ω , через $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (8.4)$$

Оскільки за межами проміжку $[t_1, t_2]$ функція $f(x)$ дорівнює 0, рівність (8.4) можна записати як

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (8.5)$$

При цьому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega. \quad (8.6)$$

Рівняння (8.5) називається прямим перетворенням Фур'є функції $f(x)$, а вираз функції $f(x)$ за формулою (8.6) називають **оберненим перетворенням Фур'є** (або комплексною формою інтеграла Фур'є).

Функцію $F(x)$ називають **спектральною щільністю** функції $f(x)$. Модуль $F(\omega)$ називають **амплітудним спектром** функції $f(x)$. Фазовий спектр $\theta(\omega)$ визначається рівністю $\theta(\omega) = \arg(F(\omega))$.

При цьому, якщо функція $f(x)$ є дійсною і парною, то фазовий спектр може набувати тільки значення 0 або $\pm\pi$. Якщо функція $f(x)$ є дійсною і непарною, то фазовий спектр може набувати лише значення $\pm\frac{\pi}{2}$.

8.2 Інтеграл Фур'є.

Припустимо, що функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, існує інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$, і на будь-якому проміжку $(-l, l)$ функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right). \quad (8.7)$$

Підставимо в рівняння (8.7) вирази для коефіцієнтів a_n , b_n , a_0 . Отримуємо рівність:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (8.8)$$

Позначимо $\frac{\pi}{l} = \omega_1$, тоді $\frac{1}{l} = \frac{\omega_1}{\pi}$.

Отримаємо

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos n\omega_1 t dt \cdot \cos n\omega_1 x + \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin n\omega_1 t dt \cdot \sin n\omega_1 x \right) \omega_1.$$

При $l \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt \leq \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \rightarrow 0, \quad \text{за умови } l \rightarrow \infty, \omega_1 \rightarrow d\omega,$$

$n\omega_1 \rightarrow \omega$ і операція підсумовування перетворюється в операцію інтегрування.

Тоді

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega x \right) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega x.$$

В результаті отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega, \quad (8.9)$$

$$\text{де } A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Цей запис (8.9) називають **інтегралом Фур'є**.

Якщо $f(x)$ парна функція, то

$$A(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = 0.$$

Інтеграл Фур'є для парної функції:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega x d\omega.$$

Інтеграл Фур'є для непарної функції:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega x d\omega.$$

8.3 Приклади рішення задачі знаходження спектру неперіодичного сигналу

Приклад 1. Знайти спектр прямокутного імпульсу тривалістю τ і одиночної амплітуди (рис. 8.3).

Математичне зображення імпульсу:

$$u(t) = \begin{cases} 1, t \in [0, \tau]; \\ 0, t \notin [0, \tau]. \end{cases}$$

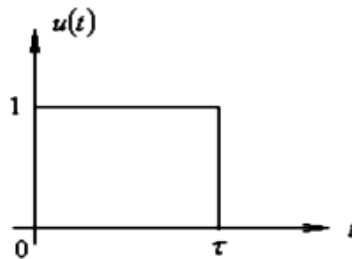


Рисунок 8.3 – Графік прямокутного імпульсу

Для знаходження спектру використаємо формулу прямого перетворення Фур'є. Підінтегральна функція відмінна від нуля тільки на відрізку $[0, \tau]$:

$$U(\omega) = \int_0^{\tau} 1 e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-j\omega \tau}}{j\omega} = \frac{\tau}{2} \frac{e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}}{j\frac{\omega\tau}{2}} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} = \tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Якщо імпульс амплітудою h , то спектр буде визначатись як

$$U(\omega) = h\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Спектр є комплексною функцією. Як правило, в ньому виділяють амплітуду і фазу, відповідно амплітудний і фазовий спектри. Для прямокутного імпульсу отримали, що амплітудний спектр поводитья як

функція $\frac{\sin x}{x}$, де $x = \frac{\omega\tau}{2}$, а фазовий спектр – лінійна функція ($\varphi = \frac{\omega\tau}{2}$).

Використовуючи властивості перетворення Фур'є, можливо отримати спектри інших сигналів, які можуть бути виражені через прямокутний імпульс.

Приклад 2. Задана функція $f(x)$, яка визначена згідно з аналітичним виразом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < -2, \\ 1, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Необхідно:

- розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур'є;
- розробити програму (М-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є функції $f(x)$;
- побудувати амплітудний та фазовий спектри.

Розв'язання.

Графік заданої функції зображено на рис 8.4.

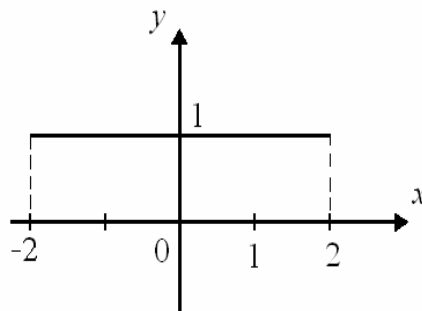


Рисунок 8.4 – Графік функції $f(x)$

Знаходимо пряме перетворення Фур'є:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-2}^2 1e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{-2}^2 = \frac{e^{-2i\omega} - e^{2i\omega}}{-i\omega} = \\
 &= \frac{i}{-i\omega * i} (\cos(-2\omega) + i \sin(-2\omega) - \cos(2\omega) - i \sin(2\omega)) = \frac{i}{\omega} (-2i \sin 2\omega) = \\
 &= \frac{2 \sin 2\omega}{\omega}.
 \end{aligned}$$

Пряме перетворення Фур'є заданої функції $f(x)$:

$$F(\omega) = \frac{2 \sin 2\omega}{\omega}.$$

Графік функції $F(\omega)$ зображено на рис. 8.5 (ліворуч).

Значення функції $F(\omega)$, наведені на графіку, відповідають умові:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin ax}{ax} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = a.$$

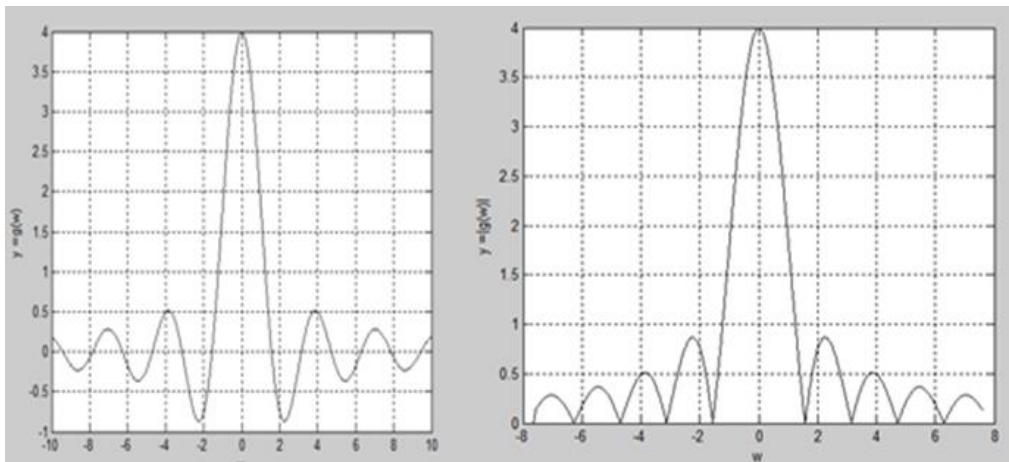


Рисунок 8.5 – Графіки функції $F(\omega)$ і $|F(\omega)|$

Для побудови амплітудного спектра потрібно точки графіка функції $F(\omega)$, які розташовані нижче осі абсцис, симетрично відобразити відносно цієї осі (тобто її модуль). Амплітудний спектр наведено на рис. 8.5 (праворуч), який отримано згідно з програмою, викладеною нижче (Програма AF_7_5.m).

Програма AF_7_5.m

```
clear, clc, close all
y=0;
yy=[];
ww=[];
for w=-24/pi:0.01:24/pi
yy=[yy y];
ww=[ww w];
y=abs(2*sin(2*w)/w);
end
figure
plot(ww,yy,'k')
xlabel('w')
ylabel('y = |g(w)|')
%ylabel('y =faza')
grid
```

При знаходженні перетворення Фур'є обчислення можна також проводити у тригонометричній формі:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t) dt = A(\omega) - iB(\omega), \end{aligned}$$

$$\text{де } A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t) dt; \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t) dt.$$

Амплітуда і фаза спектра визначаються як

$$|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}; \quad \Theta(\omega) = \arg(A(\omega) - iB(\omega)).$$

Приклад 3. Знаходження вихідного сигналу системи на основі використання спектральної характеристики вхідного сигналу і частотних характеристик каналу.

Послідовність аналізу лінійних кіл спектральним методом:

- 1) Визначення спектральної щільності вхідного сигналу.
- 2) Визначення частотних характеристик кола.

3) Розрахунок спектральної щільності вихідного сигналу.

4) Розрахунок вихідного сигналу в часовій області.

Для знаходження спектра вихідного сигналу можливо скористатися формулою:

$S_{\text{вих}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega) \cdot K(j\omega)$, яку можливо представити у вигляді:

$$S_{\text{вих}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \cdot K(\omega) e^{j\Psi(\omega)} = S_{\text{вх}}(\omega) \cdot K(\omega) e^{j(\varphi(\omega) + \Psi(\omega))},$$

де $K(\omega)$ – АЧХ кола (модуль), $\varphi(\omega)$ – ФЧХ кола, $\Psi(\omega)$ – фазовий спектр вхідного сигналу.

Амплітудно-частотна характеристика (див. розділ 5.2):

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(a_1 c_1)^2}{(c_2 + c_3)^2} + \frac{(a_1 b_2 \omega)^2}{(c_2 + c_3)^2}}.$$

Фазо-частотна характеристика:

$$Fi(\omega) = -\arctg \frac{b_2 \omega}{c_1}.$$

Знаходження спектра вхідного сигналу.

Нехай задана функція $f(t)$ (сигнал) на інтервалі $[0, 4]$ визначається наступним аналітичним виразом:

$$f(x) = \begin{cases} t, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 2; \\ 2, & \text{якщо } 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Характеристика сигналу приведена на рис. 7.6.

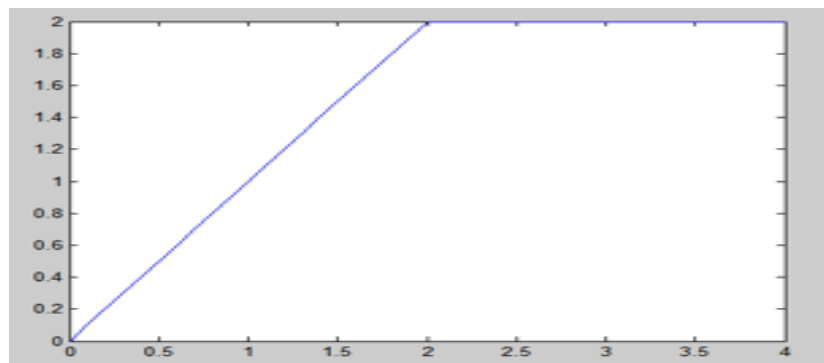


Рисунок 7.6 – Графік функції $f(t)$ на інтервалі $[0, 4]$

Для знаходження спектра сигналу використаємо наступні співвідношення (перетворення Фур'є):

– пряме перетворення Фур'є функції $x(t)$

$$F: x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt;$$

– обернене перетворення Фур'є функції $x(t)$

$$F^{-1}: x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

З урахуванням парності функцій і в відповідності до формул Ейлера:

$$e^{j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) + j\sin(\omega\tau); e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau).$$

Згідно формули прямого перетворення Фур'є для заданого сигналу запишемо:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^4 f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^2 te^{-i\omega t} dt + \int_2^4 2e^{-i\omega t} dt.$$

Знаходження інтеграла $I_1 = \int_0^2 te^{-i\omega t} dt$ виконаємо згідно співвідношення:

$$I_1 = UV - \int VdU.$$

Прийmemo, що $U=t$, $dV = e^{-i\omega t} dt$.

Тоді: $dU/dt = 1$ або $dU=dt$.

Знайдемо V .

$$V = \int e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} * e^{-i\omega t}.$$

$$U_1(i\omega) = UV = t * \left(\frac{1}{-i\omega} * e^{-i\omega t} \right) = \frac{it}{\omega} e^{-i\omega t}.$$

$$U_2(i\omega) = \int VdU = \int Vdt = \int \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} * \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} = -\frac{1}{\omega * \omega} e^{-i\omega t}.$$

$$I_1(i\omega) = U_1(i\omega) - U_2(i\omega) = \left(\frac{it}{w} e^{-i\omega t} + \frac{1}{w^* w} e^{-i\omega t} \right) = \frac{i2}{w} e^{-2i\omega} + \frac{1}{w^* w} e^{-2i\omega} - \frac{1}{w^* w} = \frac{1}{w} e^{-2i\omega} \left(2i + \frac{1}{w} \right) - \frac{1}{w^* w}.$$

Знаходження $I_2(i\omega) = \int_2^4 2e^{-i\omega t} dt.$

$$I_2(i\omega) = \int_2^4 2e^{-i\omega t} dt = 2 * \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} = \frac{2}{-i\omega} e^{-4i\omega} - \frac{2}{-i\omega} e^{-2i\omega} = \frac{2}{-i\omega} (e^{-4i\omega} - e^{-2i\omega}) = \frac{2}{w} e^{-2i\omega} (e^{-2i\omega} - 1).$$

В результаті:

$$F(i\omega) = \frac{1}{w} e^{-2i\omega} \left(2i + \frac{1}{w} \right) - \frac{1}{w^* w} + \frac{2}{w} e^{-2i\omega} (e^{-2i\omega} - 1).$$

Програмна реалізація (М-файл) отримання графіків спектральних характеристик (модуля) амплітуди і фази.

На рис. 7.7 приведена характеристика модуля спектра сигналу функції $f(t)$ на інтервалі $[0, 4]$, на рис. 7.8 – фазовий спектр сигналу функції $f(t)$ на інтервалі $[0, 4]$ (для отримання фазового спектру необхідно розкоментувати відповідний рядок у тексті програми).

Текст програми

```
% очищення екрана
clear, clc, close all
y=0;
yy=[];
ww=[];
t=5;
for w=-15/pi:0.01:15/pi
yy=[yy y];
ww=[ww w];
%частина постійної складової
%y=abs(2*i/w*exp(-2*i*w)*(exp(-2*i*w)-1));
%частина лінійно-наростаючої частини
%y=abs(((exp(-2*i*w))/w)*(2*i+1/w)-1/w^2);
%сумарна частина інтегралу-амплітудний спектр
```

```

y=abs((2*i/w*exp(-2*i*w)*(exp(-2*i*w)-1))+(((exp(-2*i*w))/w)*(2*i+1/w)-1/w^2));
% фазовий спектр сигналу
%y=angle((2*i/w*exp(-2*i*w)*(exp(-2*i*w)-1))+(((exp(-2*i*w))/w)*(2*i+1/w)-1/w^2));
end
figure
plot(ww,yy)
xlabel('CHASTOTA')
ylabel('AMPLITUDA')
grid

```

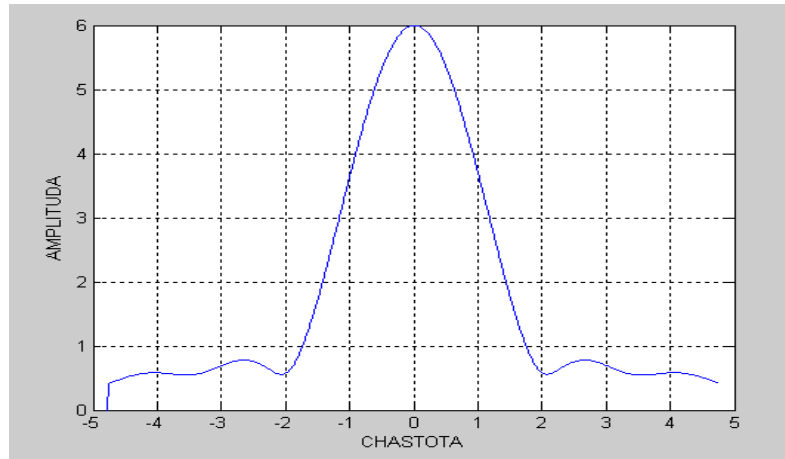


Рисунок 8.7 – Модуль спектра сигналу функції $f(t)$ на інтервалі $[0, 4]$

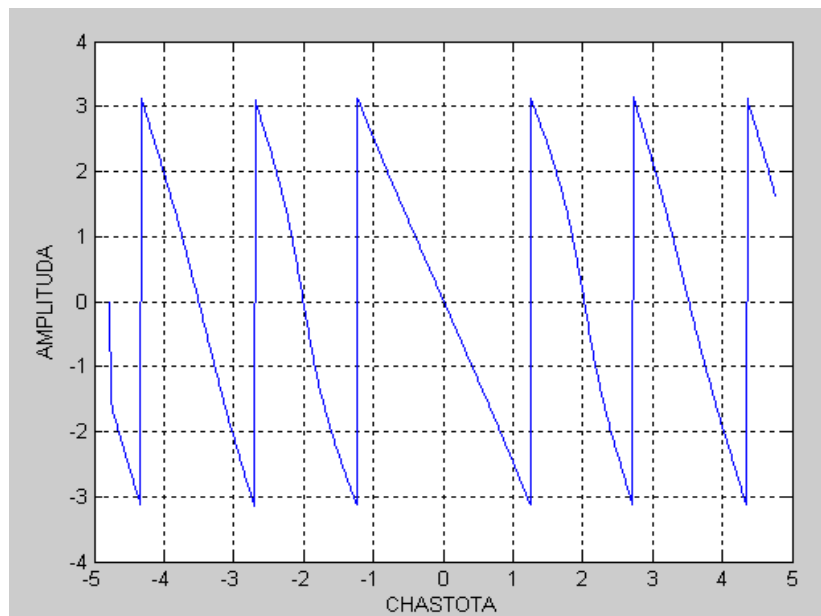


Рисунок 8.8 – Фазовий спектр сигналу функції $f(t)$ на інтервалі $[0, 4]$

На рис. 8.9 приведена характеристика модуля спектра вихідного сигналу функції $f(t)$ на інтервалі $[0, 4]$, отриманого за допомогою наступної програми:

Програма pr2.m

```
% очищення екрана
clear, clc, close all
y=0;
y1=0;
yy=[];
ww=[];
yy1=[];
t=5;
a1=1.8;
b1=2.56;
b2=3.2;
for w=-15/pi:0.01:15/pi
    c1=(1-b1*w.^2);
    c2=c1.^2;
    c3=b2^2*w.^2;
    a=sqrt(((a1*c1).^2+b2.^2*w.^2*a1.^2)./(c2+c3).^2);
    fi=atan((a1*b2*w)./(a1*c1));
    yy=[yy y];
    ww=[ww w];
    yy1=[yy1 y1];
    %частина постійної складової
    %y=abs(2*i/w*exp(-2*i*w)*(exp(-2*i*w)-1));
    %частина лінійно-наростаючої частини
    %y=abs(((exp(-2*i*w))/w)*(2*i+1/w)-1/w^2);
    %сумарна частина інтегралу помножена на АЧХ (модуль спектру вихідного сигналу)
    y=abs((2*i/w*exp(-2*i*w)*(exp(-2*i*w)-1))+(((exp(-2*i*w))/w)*...
    (2*i+1/w)-1/w^2))*a;
    y1=angle((2*i/w*exp(-2*i*w)*(exp(-2*i*w)-1))+(((exp(-2*i*w))/w)*...
    (2*i+1/w)-1/w^2));
end
figure
plot(ww,yy)
xlabel('CHASTOTA')
ylabel('AMPLITUDA')
grid
figure
plot(ww,yy1)
xlabel('CHASTOTA')
ylabel('FAZA')
grid
```

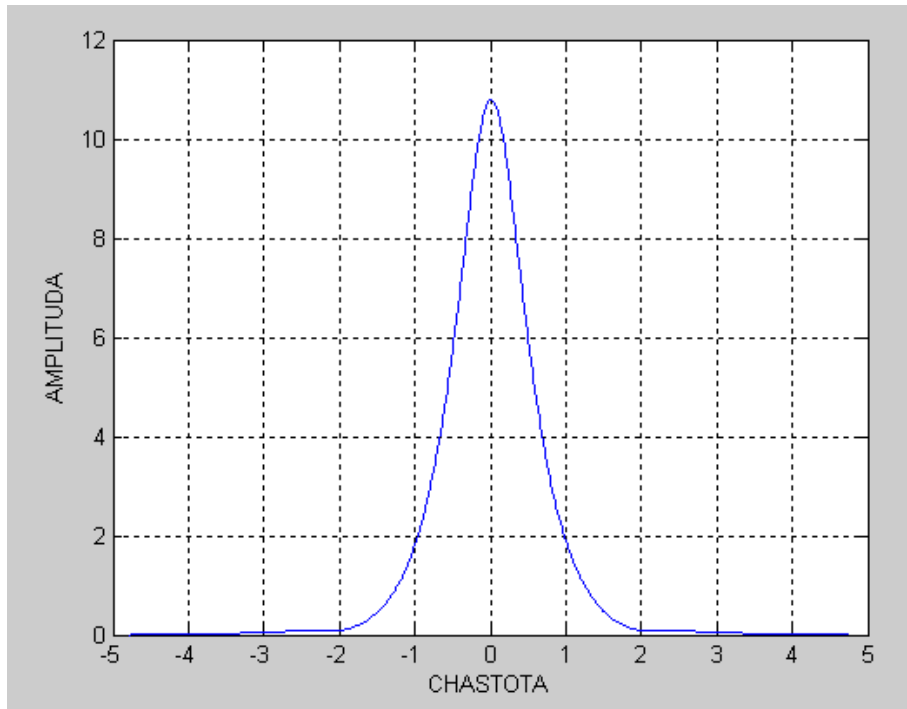


Рисунок 8.9 – Спектр вихідного сигналу

8.4 Завдання для самостійної роботи

Згідно варіанту:

1. Розрахувати спектральну характеристику вхідного сигналу.
2. Розрахувати частотний коефіцієнт передачі лінійного кола.
3. Розрахувати спектральну характеристику вихідного сигналу.
4. Розробити комп'ютерну програму для розрахунків та відображення результатів дослідження (мова програмування вибирається самостійно).

Варіанти завдань:

1. Модель системи

$$1.1) W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}; \quad 1.2) W(p) = W(p) = \frac{kp}{T^2 p^2 + kp + 1};$$

$$1.3) W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)};$$

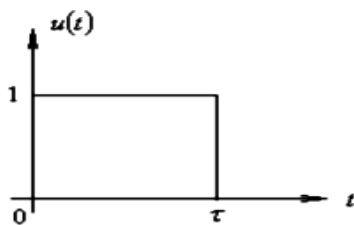
$$1.4) W(p) = \frac{kp}{Tp+1}; \quad 1.5) W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + kp + 1}, \quad T_1=T; T_2=0.1k.$$

де k – номер варіанта; T – число букв в імені (сек.); p – оператор Лапласа.

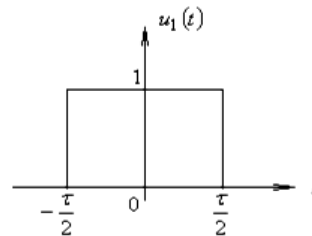
2. Форма вхідного сигналу

$$2.1) f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ 2, & \text{якщо } 2 < x \leq 4, \\ -2, & \text{якщо } -2 \geq x \geq -4. \end{cases}$$

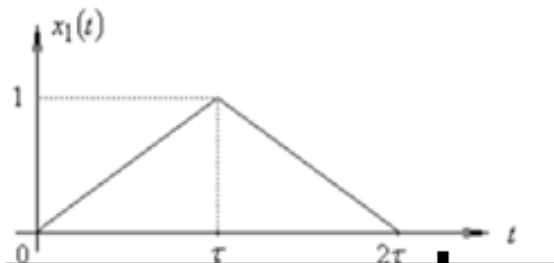
2.2)



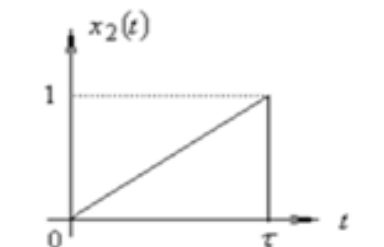
2.3)



2.4)



2.5)



Таблиця 8.1 – Параметри системи

Варіант	k	T (сек)	τ (сек)	Система	Сигнал
1	0.1	1.0	2.0	1.1	2.1
2	0.2	1.0	2.0	1.2	2.2
3	0.3	1.0	2.0	1.3	2.3
4	0.4	2.0	2.0	1.4	2.4
5	0.5	2.0	2.0	1.5	2.5

Закінчення таблиці 8.1

Варіант	k	T (сек)	τ (сек)	Система	Сигнал
6	0.6	2.0	2.0	1.1	2.2
7	0.7	1.5	2.0	1.2	2.3
8	0.8	1.5	2.0	1.3	2.4
9	0.9	1.5	2.0	1.4	2.5
10	1.0	1.5	2.0	1.5	2.1
11	1.1	2.5	1.0	1.1	2.3
12	1.2	2.5	1.0	1.2	2.4
13	1.3	2.5	1.0	1.3	2.5
14	1.4	2.5	1.0	1.4	2.1
15	1.5	2.5	1.0	1.5	2.2
16	1.6	1.6	1.5	1.1	2.4
17	1.7	1.6	1.5	1.2	2.5
18	1.8	1.6	1.5	1.3	2.1
19	1.9	1.6	1.5	1.4	2.2
20	2.0	1.6	1.5	1.5	2.3
21	1.9	1.2	1.5	1.1	2.5
22	1.8	1.2	1.5	1.2	2.1
23	1.7	1.2	1.5	1.3	2.2
24	1.6	1.2	2.5	1.4	2.3
25	1.5	1.2	2.5	1.5	2.4
26	1.4	1.8	2.5	1.1	2.5
27	1.3	1.8	2.5	1.2	2.1
28	1.2	1.8	2.5	1.3	2.2
29	1.1	1.8	2.5	1.4	2.3
30	1.0	1.8	2.5	1.5	2.4

Контрольні запитання

1. При яких умовах неперіодична функція може бути зображена інтегралом Фур'є?
2. Які умови Діріхле?
3. Що розуміється як пряме й обернене перетворення Фур'є?
4. Які основні властивості перетворення Фур'є?
5. Порівняйте перетворення Фур'є з перетворенням Лапласа?
6. Які характерні особливості спектра неперіодичного сигналу?
7. Які властивості спектральної щільності сигналу?
8. Який спектр одиночного прямокутного імпульсу?
9. Як можна енергетично пояснити спектр неперіодичного сигналу?
10. Що розуміється як практична ширина спектра неперіодичного сигналу?
11. У чому є критерій вибору практичної ширини спектра неперіодичного сигналу?
12. Як можна отримати спектр імпульсу високочастотних коливань, використовуючи властивості перетворення Фур'є?
13. Як можна отримати спектр неперіодичного сигналу безпосередньо зі спектра відповідного періодичного сигналу?

9 ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В ЗАМКНУТІЙ СИСТЕМІ КЕРУВАННЯ ШЛЯХОМ МОДЕЛЮВАННЯ

9.1 Критерії оцінки схеми управління з негативним зворотним зв'язком

Класична схема управління з одиничним негативним зворотним зв'язком показана на рис. 9.1.



Рисунок 9.1 – Управління з негативним зворотним зв'язком

Призначення регулятора системи полягає в корекції динамічних властивостей об'єкта управління за допомогою керуючого сигналу $u(t)$ таким чином, щоб реальний вихідний сигнал $y(t)$ якнайменше відрізнявся від бажаного вихідного сигналу $g(t)$. Регулятор виробляє управління, використовуючи помилку регулювання $e(t) = g(t) - y(t)$.

Для оцінки динамічних властивостей системи часто розглядається реакція на одиничний вхідний вплив. Перехідний процес повинен відповідати заданим показникам якості, до яких належать час перехідного процесу, перерегулювання й коливальність. Можуть бути також використані інтегральні оцінки якості перехідного процесу.

Приблизні графіки зміни сигналу на виході та помилки регулювання показані відповідно на рис 9.2.

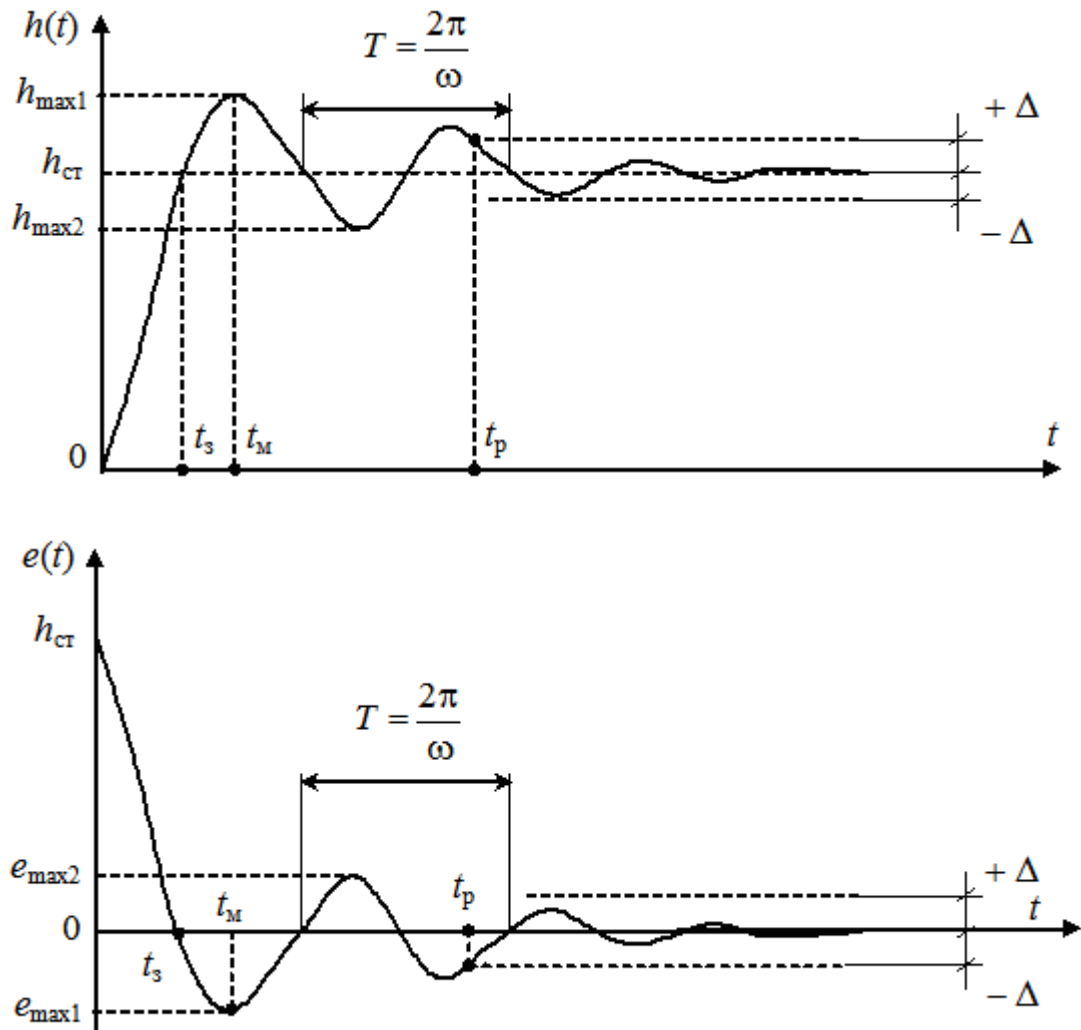


Рисунок 9.2 – Зміна сигналу на виході та зміна помилки регулювання

До прямих оцінок якості перехідних процесів, зображених на рис. 9.2, належать:

1) t_p – мінімальний час, після закінчення якого регульована величина буде залишатися близькою до сталого значення із заданою точністю

$$|h(t) - h_{ст}| \leq \Delta, \Delta = \text{const};$$

Δ попередньо задається у відсотках від сталого значення $h_{ст}$. Якщо немає певних вимог, то приймають $\Delta = 5\%$;

2) σ – перерегулювання – максимальне відхилення від сталого значення, виражене у відносних одиницях або відсотках:

$$\sigma = \frac{h_{\max 1} - h_{\text{ст}}}{h_{\text{ст}}} 100 \% \quad \text{або} \quad \sigma = \frac{|e_{\max 1}|}{e(0)} 100 \% = \frac{|e_{\max 1}|}{h_{\text{ст}}} 100 \% .$$

Зазвичай вимоги щодо перерегулювання встановлюють $\sigma \approx (10 \div 30) \%$, іноді до якості процесів може бути поставлена вимога $\sigma = 0 \%$, наприклад у системах позиціонування маніпуляторів промислових роботів;

3) ω – частота коливань:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

де T – період коливань для коливальних процесів.

4) N – це число повних коливань, що має $h(t)$ або $e(t)$ за час регулювання t_p , звичайні вимоги до числа коливань $N = 1 \div 2$, у деяких системах накладають обмеження на коливальність $N = 0$, наприклад, у системах з істотним люфтом у механічних передачах;

5) t_m – час досягнення першого максимуму;

6) t_z – час зростання перехідного процесу, час від початку перехідного процесу до моменту першого перетинання графіком лінії сталого значення;

7) K – декремент загасання, дорівнює відношенню модулів двох суміжних перерегулювань:

$$K = \frac{|h_{\max 1} - h_{\text{ст}}|}{|h_{\max 2} - h_{\text{ст}}|}.$$

Перераховані вище показники можуть бути доповнені й іншими, якщо цього вимагають специфічні технічні завдання на розробку або дослідження систем управління.

Вимоги до якості перехідного процесу можуть бути подані графічно. Вони зводяться до вимог, щоб відхилення регульованої величини при ступеневому впливі не виходило за межі деякої області, зображеної на діаграмі якості процесу. Найпростіша діаграма показана на рис 9.3.

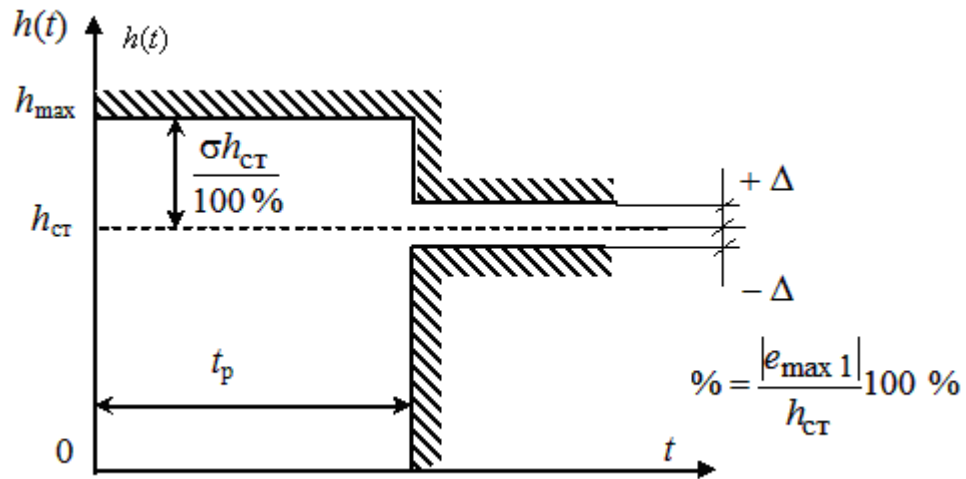


Рисунок 9.3 – Проста діаграма якості перехідного процесу

Уточнена діаграма, у якій накладаються обмеження на швидкість наростання сигналу, показана на рис. 9.4. На уточненій діаграмі $t_{\text{зап}}$ позначає час запізнювання, який дорівнює відрізку часу, відкладеному між моментами завдання стрибкоподібного сигналу ($t=0$) і моментом часу, при якому вихідна величина досягає половини сталого значення.

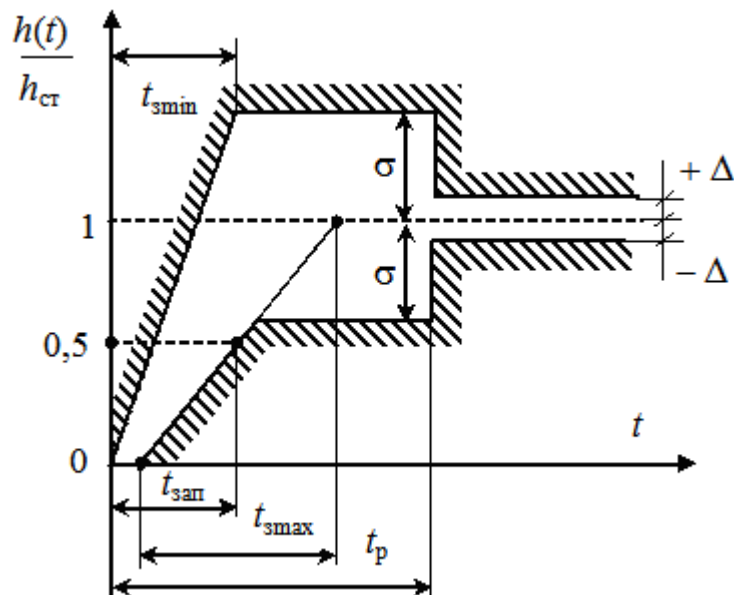


Рисунок 9.4 – Уточнена діаграма якості перехідного процесу

9.2 Типи регуляторів і їх моделі

ПДД-регулятори (ПДД – пропорційно-інтегро-диференціальний) набули саме широкого поширення при управлінні виробничими й технологічними процесами. Основне рівняння ПДД-регулятора має такий вигляд:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_{\tau=0}^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (9.1)$$

де k_p , k_i , k_d – константи, обираєні в процесі проектування.

Пропорційна складова виробляє вихідний сигнал, що протидіє відхиленню регульованої величини від заданого значення, яке спостерігається в поточний момент часу. Вона тим більша, чим більше це відхилення. Якщо вхідний сигнал дорівнює заданому значенню, то вихідний дорівнює нулю.

Однак при використанні тільки пропорційного регулятора значення регульованої величини ніколи не стабілізується на заданому значенні. Існує так звана статична помилка, що дорівнює такому відхиленню регульованої величини, що забезпечує вихідний сигнал, який стабілізує вихідну величину саме на цьому значенні. Наприклад, у регуляторі температури вихідний сигнал (потужність нагрівача) поступово зменшується при наближенні температури до заданого значення, і система стабілізується при потужності, яка дорівнює тепловим втратам. Температура не може досягти заданого значення, тому що в цьому випадку потужність нагрівача стане дорівнювати нулю, і він почне остигати.

Чим більший коефіцієнт пропорційності між вхідним і вихідним сигналом (k_p – коефіцієнт підсилення), тим менша статична помилка, однак при занадто великому коефіцієнті підсилення за наявності затримок (запізнювання) у системі можуть початися автоколивання, а при подальшому збільшенні коефіцієнта система може втратити стійкість.

Інтегральна складова пропорційна інтегралу за часом від відхилення регульованої величини. Її використовують для усунення статичної помилки. Вона дозволяє регулятору згодом урахувати статичну помилку.

Якщо система не має зовнішніх збурювань, то через якийсь час регульована величина стабілізується на заданому значенні, сигнал пропорційної складової буде дорівнювати нулю, а вихідний сигнал буде повністю забезпечуватися інтегральною складовою. Проте інтегральна складова також може призводити до автоколивань при неправильному виборі її коефіцієнта (k_i).

Складова, що диференціює, пропорційна темпу зміни відхилення регульованої величини й призначена для протидії відхиленням від цільового значення, які прогнозуються в майбутньому. Відхилення можуть бути викликані зовнішніми збурюваннями або запізнюванням впливу регулятора на систему.

Хоча ПД-регулятор являє собою систему другого порядку, його можна успішно застосовувати для управління процесами, що мають більш високий порядок. Це викликано можливістю апроксимації багатьох систем високого порядку системами другого порядку.

На практиці часто використовуються спрощені версії ПД-регулятора: П-, І-, ПД- і ПІ-регулятори.

9.3 Проектування ПД-регулятора динамічної системи шляхом моделювання

У складі *MATLAB Simulink* є пакет, за допомогою якого можна виконати оптимізацію параметрів ПД-регулятора, якщо є модель об'єкта управління.

У наборі блоків є основний блок *Signal Constraint* (розділ *Simulink Design Optimization*), за допомогою якого можна задати необхідні обмеження для перехідного процесу в системі, що оптимізується; вказати параметри, що оптимізуються, й виконати параметричну оптимізацію.

Інструментальний пакет надає в розпорядження користувача графічний інтерфейс для настроювання параметрів динамічних об'єктів, що забезпечують бажану якість перехідних процесів. Як засіб для досягнення зазначеної мети береться оптимізаційний підхід, що забезпечує мінімізацію функції штрафу за порушення динамічних обмежень. За допомогою даного інструменту можна налаштовувати параметри нелінійної *Simulink*-моделі, за які може бути заявлена будь-яка кількість змінних, включаючи скаляри, вектори й матриці. Особливе значення має та обставина, що в процесі настроювання можуть ураховуватися невизначеності параметричного типу математичної моделі, що дозволяє синтезувати робастні закони управління.

Завдання динамічних обмежень здійснюється у візуальному режимі. На базі цих обмежень автоматично генерується задача скінченно вимірної оптимізації так, щоб точка екстремуму в просторі параметрів відповідала виконанню всіх вимог, які ставляться до якості процесу. Ця задача вирішується із залученням спеціалізованої процедури квадратичного програмування. Хід оптимізації контролюється на екрані за допомогою відображення графіка контрольованого процесу й поточних значень функції, що мінімізується. Після завершення процесу його результат фіксується в робочому просторі.

Розглянемо проектування ПД-регулятора на прикладі.

Нехай потрібно побудувати управління зі зворотним зв'язком (наприклад, регулятор температури) для об'єкта, що має передавальну функцію

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

так, щоб замкнута система мала перерегулювання менше ніж 5 % і час перехідного процесу (входу в 1 % зону сталого значення) менше ніж 2 секунди. Як зворотний зв'язок будемо використовувати ПД-регулятор з передавальною функцією вигляду

$$R(s) = k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d s.$$

Завдання полягає в тому, щоб вибрати такі коефіцієнти k_p , k_i і k_d , які забезпечують зазначені вимоги до якості перехідного процесу.

Побудуємо *Simulink*-модель об'єкта управління відповідно до схеми, поданої на рис. 9.5, помістивши у вікно моделі блоки *Constant* (з бібліотеки *Sources*), *Sum* (з бібліотеки *Math Operations*), *Transfer Fcn* (з бібліотеки *Continuous*).

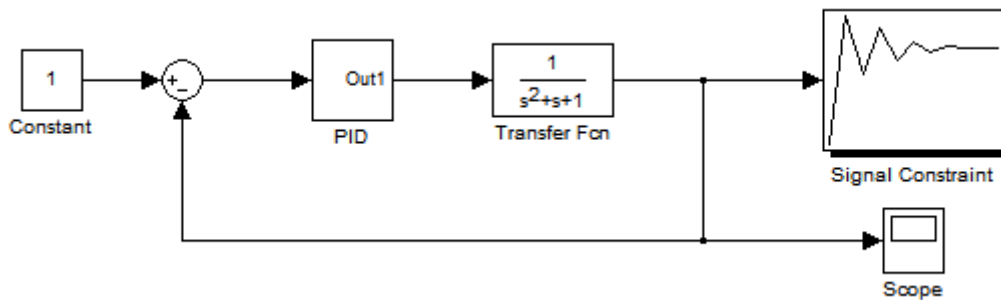


Рисунок 9.5 – Модель з ПІД-регулятором

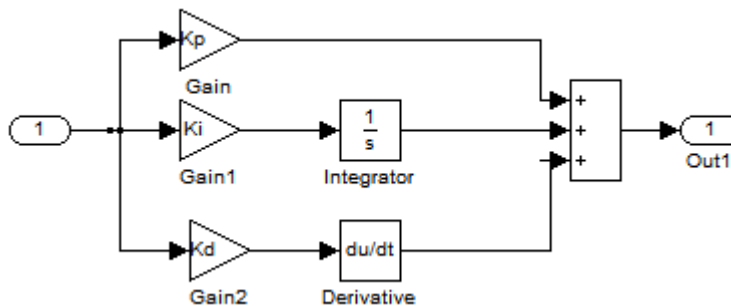


Рисунок 9.6 – Структура блоку *PID*

Настроїмо модель об'єкта, змінивши параметр *Denominator* блоку *Transfer Fcn*. При цьому задамо як його значення вектор $[1 \ 1 \ 1]$.

Ініціалізуємо у командному вікні *MATLAB* змінні $K_p = 1$; $K_i = 1$; $K_d = 0$.

Таким чином, було сформульовано *Simulink*-модель об'єкта управління й тепер необхідно задати обмеження, що накладаються на вихід системи (блоку *Transfer Fcn*). Для цього двічі натиснути на блок *Signal Constraint*. При цьому з'явиться вікно, яке наведено на рис. 9.7.

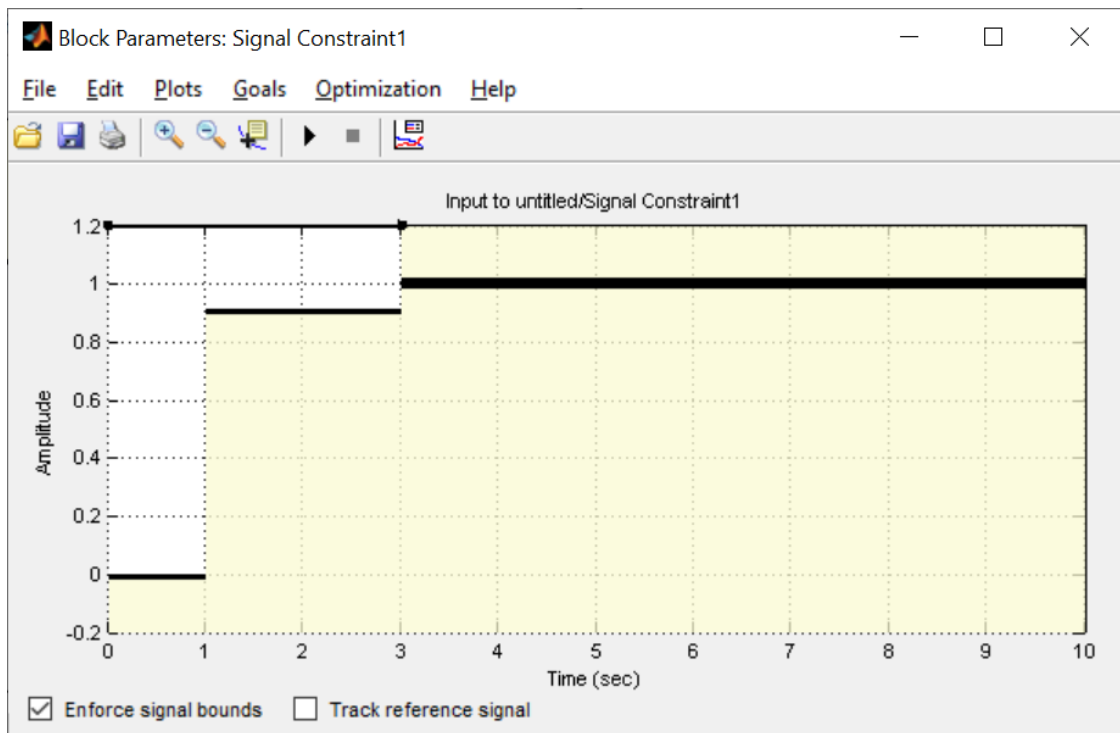


Рисунок 9.7 – Вікно налаштування якості перехідного процесу

Установити коридор, у межах якого повинен перебувати вихідний сигнал відповідно до вимог задачі. Це можна зробити, пересуваючи чорні лінії, що є межами коридору, за допомогою миші. Місце розташування цих ліній можна встановити точно (не у візуальному режимі) за допомогою діалогової панелі *Edit Design Requirement*, що виникає при подвійному кліку миші на чорній лінії (рис. 9.8 та 9.9).

Design requirement: Lower limit from 0 to 10 (sec)

Design requirement parameters: Lower limit from 0 to 10

Segments:

Start		End		Slope	Weight
Time	Amplitude	Time	Amplitude		
0	0	1	0	0	1
1	0.9000	2	0.9000	0	1
2	0.9900	10	0.9900	0	1

Buttons: Insert, Delete, Close, Help

Рисунок 9.8 – Налаштування якості перехідного процесу

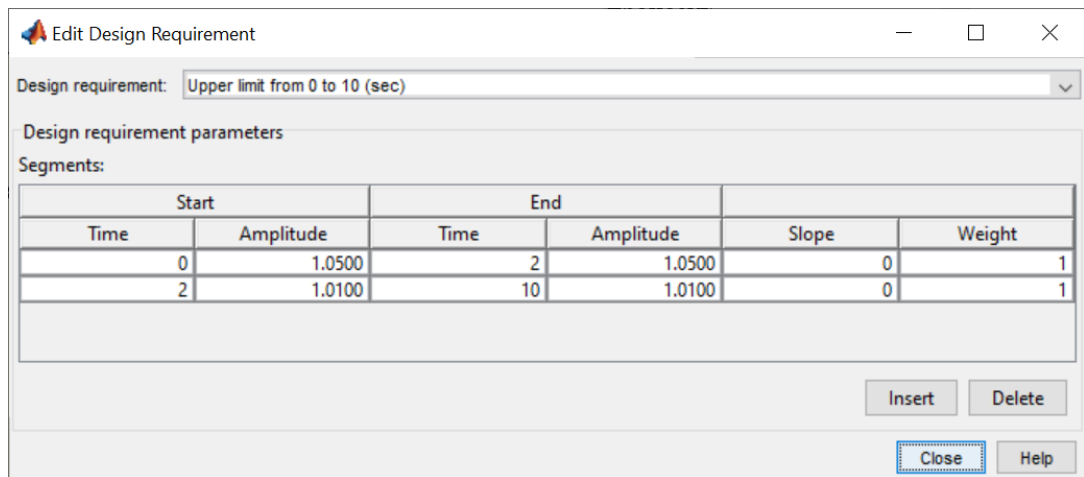


Рисунок 9.9 – Налаштування якості перехідного процесу

Виконати налаштування, які показано на рис. 9.8 та 9.9.


Після виконання встановлення меж коридору вікно повинне виглядати так, як це показано на рис. 9.10.

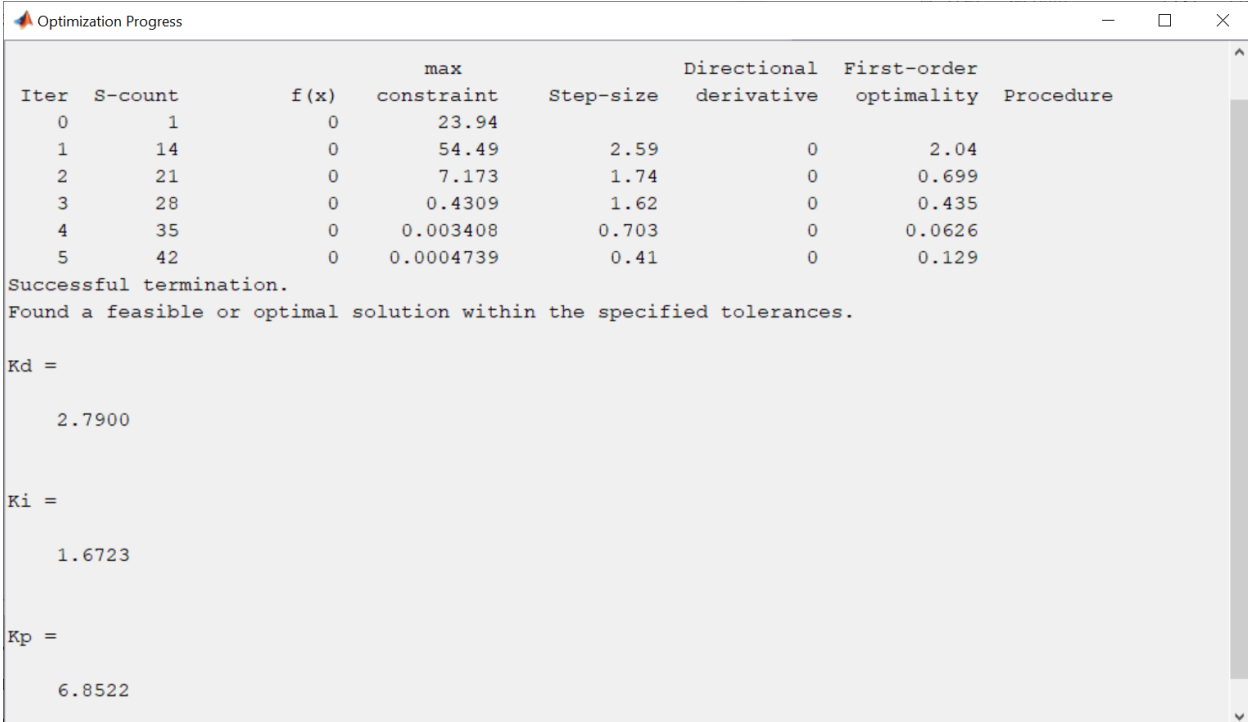


Рисунок 9.10 – Вигляд вікна налаштування після завдання меж

Далі необхідно обрати пункт «*Tuned Parameters...*» меню *Optimization*. При цьому відкриється вікно, у якому необхідно натиснути кнопку «*Add...*» та у новому вікні виділити імена змінних K_p , K_i , K_d . Якщо необхідно створити ПІ-регуляр, то для цього потрібно встановити початкове значення константи

$Kd = 0$, і цю константу не додавати до процесу оптимізації, тобто обрати тільки константи Kp , Ki . Аналогічно для задання П-регулятора – початкові значення констант $Ki = 0$ та $Kd = 0$, а оптимізувати тільки коефіцієнт Kp . Так само і для I- та ПД-регуляторів.

Тепер усе готове для початку процесу оптимізації. Необхідно натиснути на кнопку  (або пункт меню *Optimization\Start*) і спостерігати за розвитком процесу. Для кожного етапу оптимізації у вікні відображаються графіки сигналу, що відповідають поточним значенням параметрів, які налаштовуються (рис. 9.11). У вікні *Optimization Progress* відображається інформація про хід оптимізації.



Iter	S-count	f(x)	max constraint	Step-size	Directional derivative	First-order optimality	Procedure
0	1	0	23.94				
1	14	0	54.49	2.59	0	2.04	
2	21	0	7.173	1.74	0	0.699	
3	28	0	0.4309	1.62	0	0.435	
4	35	0	0.003408	0.703	0	0.0626	
5	42	0	0.0004739	0.41	0	0.129	

Successful termination.
Found a feasible or optimal solution within the specified tolerances.

$Kd =$
2.7900

$Ki =$
1.6723

$Kp =$
6.8522

Рисунок 9.11 – Вигляд вікна *Optimization Progress*

Після закінчення процесу оптимізації оптимальні значення налаштованих змінних зберігаються в робочому просторі *MATLAB*.

На рис. 9.12 наведено виходи об'єкта управління при використанні вихідних значень коефіцієнтів ПД-регулятора ($Kp = 1$; $Ki = 1$; $Kd = 0$) (крива 2) та значеннями цих коефіцієнтів, знайдених у процесі оптимізації (крива 1).

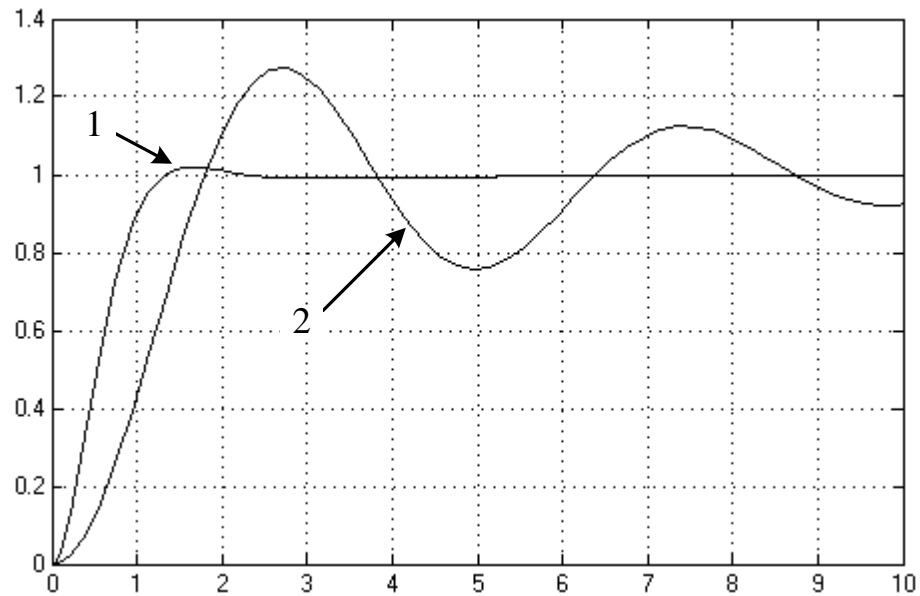


Рисунок 8.12 – Результат оптимізації

9.4. Завдання для самостійної роботи

1. Зібрати в *MATLAB Simulink* систему управління з ПД-регулятором для отриманого об'єкта управління, який задається такою передавальною функцією:

$$\frac{m}{ds^2 - (N\%2)s + N},$$

де d, m, N – відповідно день, місяць народження й номер за списком у журналі групи студента.

2. Виконати оптимізацію параметрів ПД-регулятора.

3. Розглянути варіанти П-, І-, ПД- і ПІ-регуляторів для заданого об'єкта.

Оптимізувати їхні параметри й порівняти результати.

Контрольні запитання

1. Як визначити час регулювання за графіком перехідного процесу?

2. Як визначити перерегулювання за графіком перехідного процесу?

3. Як визначити час зростання за графіком перехідного процесу?
4. Що таке помилка регулювання?
5. Як оцінити якість перехідного процесу?
6. Яка структура ПД-регулятора?
7. На що впливає пропорційна складова в ПД-регуляторі?
8. На що впливає інтегральна складова в ПД-регуляторі?
9. На що впливає диференціальна складова в ПД-регуляторі?
10. Як виконати оптимізацію параметрів П-, І-, ПД-, ПІ- та ПІД-регуляторів?

10 РІШЕННЯ ЗАДАЧІ АНАЛІЗУ СТРУКТУРНОЇ КЕРОВАНOSTІ І СПОСТЕРЕЖУВАНOSTІ СИСТЕМИ

10.1 Поняття структурної керованості і спостережуваності системи

При дослідженні систем як об'єктів керування необхідно [1 – 3]:

- представити систему у виді окремих елементів підсистем, що відповідають окремим апаратам, які об'єднані функціональними зв'язками;
- сформулювати задачу керування системою;
- виявити вхідні та вихідні змінні, керуючі і керовані змінні для кожної з підсистем і системи в цілому;
- отримати математичний опис динаміки підсистем і системи у цілому;
- провести аналіз характеристичних властивостей системи як об'єкта керування, таких як: чутливість, керованість, спостережуваність, перешкодозахищеність, стійкість,

Під чутливістю системи розуміється властивість змінювати характеристики свого функціонування під впливом змін власних параметрів системи і зовнішніх збуруючих впливів. При цьому в процесі дослідження чутливості при розробці систем керування виявляються параметри системи, які вимагають найбільш точного вимірювання, а також можливості вибору керуючих впливів.

Під керованістю розуміється властивість системи мати керуючі впливи, що дозволяють перевести її з заданого початкового стану в кінцевий за певний відрізок часу. Слід відзначити, що керованість залежить від конструктивних і технологічних параметрів системи, її структури і обмежень, які накладені на керуючі змінні.

Для прикладу поняття керованості, розглянемо динамічну систему, в математичній моделі якої використовується вектор стану X , координатами якого є сукупність змінних станів: x_1, x_2, \dots, x_n :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (10.1)$$

і вектор керування U :

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_m). \quad (10.2)$$

У цьому випадку динамічна система описується рівнянням стану виду:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t, U(t)), i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.3)$$

Для розгляду поняття керованості скористаємося поняттям фазового простору, у якому стан об'єкта керування зображується точками. У загальному випадку, тобто коли є довільне число змінних станів, фазовий простір можна представити n -мірним простором, що не має наочної графічної інтерпретації при $n > 3$. Якщо $n = 2$, фазовий простір переходить у фазову площину і зображення стану об'єкта стає наочним; при значеннях змінних станів x_0^1 і x_0^2 ним буде деяка точка X^0 .

Будь-яка зміна вектору U переводить об'єкт керування в деякий новий стан. У фазовому просторі цей «перехід» відбивається у виді руху з початкової точки X^0 у нову точку X^1 по деякій траєкторії, що представляється у фазовому просторі неперервною лінією, що з'єднує початкову і кінцеву точки. Сукупність фазових траєкторій називається фазовим портретом розглянутої динамічної системи [1 – 3].

Якщо нас не цікавить процес переходу з точки X^0 в точку X^1 , а оцінку переходу виявляють, порівнюючи початковий і кінцевий стани, то можна говорити, що задано визначену функцію вигоди, що залежить тільки від стану об'єкта керування. Якщо ж нас цікавить і форма шляху, по якому процес переходить з початкового стану в кінцевий, то говорять, що задано деякий функціонал від траєкторії руху і потрібно вибрати дану траєкторію таким чином, щоб процес переходу відповідав мінімальному чи максимальному значенню зазначеного функціонала. Таким функціоналом може служити час переходу об'єкта з початкового стану в кінцевий, енергетичні затрати за визначений час функціонування, значення змінних стану та інше. У випадку, коли функція вигоди залежить тільки від стану об'єкта, для рішення задач

використовуються методи математичного програмування, для задач, у яких функція вигоди описується у вигляді функціоналу, а математична модель системи у вигляді рівнянь (10.3) застосовуються методи варіаційного числення, динамічного програмування, принципу максимуму та інші [3].

Як виходить із [5], якщо у фазовому просторі $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ задано дві множини I_1 і I_2 , то система (1.3) називається керованою відносно I_1 і I_2 за умови, якщо існує таке припустиме керування $U(\tau)$, що за кінцевий відрізок часу переводить точку X системи (10.3) з множини I_1 в множину I_2 . Зокрема, множина I_1 може збігатися з усім фазовим простором системи (10.3), а множина I_2 вироджуватися в одну точку, наприклад у початок координат. Керованість заданої системи залежить від класу припустимих керуючих впливів, тобто від характеру обмежень, накладених на керуючі впливи.

Наприклад, використовуючи методи варіаційного числення або принцип максимуму, які являють собою сукупність ряду теорем теорії оптимальних процесів, можлива побудова оптимального закону керування об'єктом. При цьому передбачається, що керований об'єкт описується системою звичайних диференціальних рівнянь (10.3) і задано початковий стан об'єкта:

$$x_i(t=0) = x_{i0}, \quad i=1, \dots, n. \quad (10.4)$$

Подальше поводження об'єкта керування знаходиться розв'язуванням системи рівнянь (10.3) при початкових умовах (1.4) та виду оптимізаційного функціоналу.

Крім фазових координатами x_i в рівняння (1.3) динаміки об'єкта входять також керуючі впливи u_1, \dots, u_m , що можуть довільним чином змінюватися в деяких межах, згідно співвідношень:

$$\alpha_k \leq u_k \leq \beta_k, \quad k=1, \dots, m.$$

Зміна синтезованих керуючих впливів приводить до того, що траєкторія об'єкта у фазовому просторі змінюється. Якщо із траєкторією руху зв'язаний деякий кількісний критерій оцінки її ефективності (функціонал), то в даному

випадку виникає задача оптимального керування. Задача полягає у виборі такого закону керування $u_k(t)$, $k=1, \dots, m$ при якому заданий критерій оптимальності приймає максимальне чи мінімальне значення в залежності від постановки завдання.

Під спостережуваністю системи будемо розуміти властивість відновлювати вектор її стану $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ за координатами, що спостерігаються. Проблема полягає в тому, щоб по деякому лінійному перетворенню $Y(t) = CX(t)$ вектору стану $X(t)$ на деякій підмножині ω кінцевого відрізка часу $[t_0, t]$ визначити стан системи (10.3), тобто вектор $X(t)$, на якій-небудь іншій підмножині відрізка $[t_0, t]$. Поняття спостережуваності має пряме відношення до задачі ідентифікації, що включає обов'язкову умову – об'єкт спостережуваний.

Згідно [3], система цілком спостережувана при даному перетворенні C , якщо існує перетворення (наприклад, на основі правила, алгоритму чи закону), за яким спостережуваний на інтервалі $[t_0, t]$ траєкторії $Y(\tau)$ ставиться у взаємно однозначну відповідність точка $X(t_0) \in I_0$. Зміст проблеми спостережуваності системи – визначення і дослідження необхідних і достатніх умов, які потрібно накласти на перетворення C , відрізок $[t_0, t]$ і множину початкових станів I_0 , щоб, спостерігаючи $Y(\tau)$ на $[t_0, t]$, можна було знайти $X(t_0) \in I_0$.

Стан лінійного стаціонарного об'єкта вважається спостережуваним, якщо він може бути однозначно визначений на підставі вимірювань вихідного сигналу $Y(\tau) = \varphi(T.X, t)$ на кінцевому інтервалі часу $0 \leq t \leq T$. Тут Y - вектор вимірюваних виходів системи (вектор спостереження).

Дослідження керованості і спостережуваності дозволяє визначити канали зв'язку між технологічною системою і системою автоматичного керування, а також можливість створення оптимальної замкнутої системи управління.

Для лінійних стаціонарних дискретних чи неперервних систем відомі критерії керованості і спостережуваності, що можуть бути використані при аналізі керованості і спостережуваності систем, які описуються диференціальними рівняннями виду [3]:

$$\dot{X} = AX + BU, Y = CX + DU, \quad (10.5)$$

де A, B, C, D – матриці розмірності $n \times n, n \times m, L \times n, L \times m$ відповідно.

Критерієм (тобто необхідною і достатньою умовою) керованості системи (10.5) є рівність:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B & D \end{bmatrix} = n. \quad (10.6)$$

У загальному випадку змінні вектора стану X не є вимірюваними змінними, тому система цілком керована за виходом тоді і тільки тоді, коли матриця

$$G = \begin{bmatrix} C & BC & \dots & CA^{n-1} & D \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

має ранг, рівний n , тобто

$$\text{rang} G = n. \quad (10.8)$$

Для того щоб система (10.5) була цілком спостережувана, необхідно і достатньо, щоб матриця

$$Q = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

мала ранг, рівний n , тобто $\text{rang} Q = n$.

Індекс « T » означає транспонування матриці. За критерієм керованості виду (10.6), як правило, неможливо оцінити, у результаті чого виникла некерованість системи, чи лежать у її основі структурні особливості системи чи причиною є значення конструктивних і технологічних параметрів. Така оцінка особливо важлива при спільному проектуванні технологічної системи і систем управління ще і тому, що багаторазовість аналізу керованості, а також труднощі, зв'язані з обчисленням критеріїв (10.6), (10.7), обумовлюють необхідність попередньої оцінки керованості в залежності від структури системи. Аналіз керованості технологічної системи, що враховує лише її структурні особливості, називають аналізом структурної керованості ТС.

В основу структурної керованості покладене твердження: якщо матриця G містить нульові рядки, то відповідні компоненти вектору стану некеровані, тому що вони інваріантні стосовно наявних керувань.

На підставі цього твердження слідує, що якщо при всіляких змінах ненульових елементів матриць A, B, C, D деяким компонентам вектору стану в матриці G відповідають нульові рядки, то має місце структурна некерованість системи. Однак для доказу структурної некерованості необхідно визначити матрицю G для всіляких значень матриць A, B, C, D , що практично неможливо. Найбільш простими методами дослідження структурної керованості є методи, які базуються на логічному аналізі можливості проходження сигналу від входу до виходу системи. До них можна віднести топологічний метод, що базується на виділенні прямих шляхів у сигнальному графі, і метод безпосереднього аналізу матриць A, B, C, D . Метод визначення структурної керованості на основі безпосереднього аналізу матриць базується на наступних положеннях:

- компонент вектору Y системи структурно керований, якщо у відповідній рядку матриці D є хоча б один ненульовий елемент;
- компонент вектору Y системи структурно керований, якщо у відповідному рядку матриці D всі елементи нульові, а у відповідному рядку матриці C є хоча б один ненульовий елемент, що вказує на можливість передачі сигналу від структурно керованого компонента вектору стану;
- компонент вектору стану X системи структурно керований, якщо у відповідному рядку матриці B є хоча б один ненульовий елемент, або у відповідному рядку матриці A є хоча б один ненульовий елемент, що вказує на можливість передачі сигналу від іншого структурно керованого компонента вектору стану.

Структурна керованість і спостережуваність вказують на можливість зміни і визначення вектору стану, але не дають відповіді на питання, чи буде така зміна і визначення бажаним для керування технологічною системою. Для

визначення повної керованості і спостережуваності системи необхідний аналіз її апаратурної керованості і спостережуваності.

Апаратурна керованість вказує на можливість переведення технологічної системи з одного стаціонарного стану в інший і цілком визначається значеннями елементів матриць A, B, C, D .

Як випливає з критерію (10.6), визначення апаратурної керованості зводиться до перевірки умови $\text{rang}G = n$, або до перевірки умови нерівності нулю одного з визначників n -го порядку матриці. Згідно з [1 – 3] більш раціонально робити виділення керованої частини технологічної системи і визначення її керованості з використанням умов лінійної залежності рядків матриці G . При цьому метод визначення апаратурної керованості полягає в наступному. Аналізується лінійна залежність двох рядків матриці G за умовою:

$$\frac{g_{i1}}{g_{k1}} = \frac{g_{i2}}{g_{k2}} = \dots = \frac{g_{i[m(n+1)]}}{g_{k[m(n+1)]}}.$$

Якщо два аналізовані рядки матриці G лінійно незалежні, то необхідно скласти комбінацію з трьох рядків G , що включає рядки i, k і новий рядок l . У протилежному випадку необхідний аналіз лінійної залежності іншої пари рядків матриці G . Якщо три аналізовані рядки незалежні, то необхідно скласти комбінацію з чотирьох рядків матриці G і т. д. Комбінаціям лінійно-незалежних рядків матриці керованості відповідають комбінації керованих компонентів вектору системи.

Приведені методи аналізу керованості і спостережуваності дозволяють провести оцінку працездатності системи. При проектуванні технологічної системи і її системи автоматичного управління методи дають можливість проаналізувати і вибрати канали зв'язку.

10.2 Приклади рішення задачі аналізу структурної керованості і спостережуваності системи

Приклад 1. Провести аналіз структурної керованості і спостережуваності однієї зони реактора гідроформування пропилена, математична модель якої має вигляд [3]:

$$\frac{dG_n}{d\tau} = \frac{1}{\tau_g} G_n^0 - \frac{1}{\tau_g} G_n - K_T G_T,$$
$$\frac{dG_H}{d\tau} = \frac{1}{\tau_g} G_H^0 - \frac{1}{\tau_g} G_H + 1.715 K_1 G_n,$$

де G_n^0 (G_H^0), G_n (G_H) кількість пропилена (і H -альдегідів) на входах у зони і виходах з них; τ_g – час перебування рідкої фази в зоні реактора; K_T – константа швидкості реакції гідроформування пропилена; $K_T = b \exp[17.8 - 8211/(t + 273)] K_1$ – константа швидкості утворення нормальних альдегідів.

Один з можливих статичних режимів роботи зони характеризується наступними параметрами:

$$G_n^0 = 500 \text{ кг/хв}; G_n = 476.4 \text{ кг/хв}; G_H^0 = 0.0 \text{ кг/хв}; G_H = 17.3 \text{ кг/хв}; \tau_g = 1.0572 \text{ хв};$$
$$t = 109.6^\circ \text{C}; b = 0.992.$$

Модель зони реактора для цього режиму має вид:

$$\frac{dG_n}{d\tau} = -0.9693 G_n - 0.011t - 0.2071b + 0.945 G_n^0 + 0.1276.$$
$$\frac{dG_H}{d\tau} = 0.0326 G_n - 0.945 G_H + 0.0147t + 0.0278b + 0.945 G_H^0 - 0.1703.$$

Для даної системи згідно рівняння (1.5) матриця A має вид:

$$A = \begin{bmatrix} -0.9693 & 0.0 \\ 0.0326 & -0.945 \end{bmatrix}.$$

1. Нехай як керування використовується температура в зоні реакції, тоді:

$$B = \begin{bmatrix} -0.110 \\ 0.0147 \end{bmatrix}.$$

У цьому випадку обидва компоненти вектору стану (витрата пропилену H -альдегідів) структурно керовані, тому що у відповідних рядках B є ненульові елементи.

2. Нехай як керування використовується подача H -альдегідів у зону G_H^0 , тоді:

$$B = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.945 \end{bmatrix}.$$

У цьому випадку G_H – структурно керована, тому що у відповідній рядку матриці B є ненульовий елемент, а структурно некерована, тому що у відповідній рядку матриці стоїть нульовий елемент, а вплив G_H на G_n відсутній.

3. Нехай як керування використовуються подача пропилену і температура t , тоді

$$B = \begin{bmatrix} 0.945 & -0.0110 \\ 0.0 & 0.0147 \end{bmatrix}.$$

Обидва компоненти вектору стану структурно керовані, тому що у відповідних рядках матриці B є ненульові елементи.

Приклад 2. Провести аналіз апаратної керованості зони реактора гідроформування [3].

1. Нехай як керування використовується температура t в зоні, тоді:

$$G = [BAB]; \quad B = \begin{bmatrix} -0.0110 \\ 0.147 \end{bmatrix}; \quad AB = \begin{bmatrix} -0.9693 & 0,0 \\ 0.0326 & -0.945 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0110 \\ 0.147 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0107 \\ -0.0142 \end{bmatrix};$$

$$G = \begin{bmatrix} -0.0110 & 0.0107 \\ 0.0147 & -0.0142 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Тоді: } \frac{g_{21}}{g_{11}} = \frac{g_{22}}{g_{12}}.$$

Звідси виходить, що рядки матриці G лінійно залежні отже, система апаратно некерована.

2. Нехай як керування використовується подача пропилену в зону реактора, тоді:

$$B = \begin{bmatrix} 0.945 \\ 0.0 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0.945 & -0.916 \\ 0.0 & 0.0308 \end{bmatrix}.$$

У цьому випадку рядки матриці G лінійно-незалежні, значить система апаратно керована.

10.3 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Дослідити структурну керованість інформаційної системи, яка зображується моделлю:

$$\frac{dy_1}{d\tau} = 2y_1 + 2.5x_1 - 4V + 5,$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = 3y_1 - 2y_2 + 0.5V - 4x_2 - 1.2,$$

де x_1, x_2 – кількості потоків вхідної інформації I та II, y_1, y_2 – кількості потоків вихідної інформації, τ – час проходження інформації, V – швидкість проходження інформації. Розглянути випадки, коли в якості керування використовується:

- 1) швидкість проходження інформації V ;
- 2) кількість потоку вхідної інформації II.

Примітка. Згідно до підрозділу 10.1 система є структурно керованою, якщо у рядках матриці керування є ненульові елементи.

$$A = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} V \\ V \end{bmatrix} - \text{матриця } B - \text{матриця керування.}$$

$G = [B \quad AB]$ – матриця, що визначає апаратну керованість системи.

Якщо рядки матриці лінійно залежні, тобто $\frac{g_{21}}{g_{11}} \approx \frac{g_{22}}{g_{12}}$, то система апаратно некерована.

Завдання 2. Дослідити структурну керованість інформаційної системи, яка зображується моделлю:

$$\frac{dy_1}{d\tau} = 4y_1 - 1.5x_1 - 2V - 2x_2 + 3;$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = 3.3y_1 + y_2 + 3.3V - 2,$$

де x_1, x_2 – кількість потоків вхідної інформації I та II, y_1, y_2 – кількості потоків вихідної інформації, τ - час проходження інформації, V – швидкість проходження інформації. Розглянути випадки, коли в якості керування використовується кількість потоку вхідної інформації I і швидкість проходження інформації V .

Завдання 3. Дослідити структурну керованість інформаційної системи, яка зображується моделлю:

$$\frac{dy_1}{d\tau} = y_1 - 5x_1 + V - 2.3;$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = 2y_1 + 3y_2 - 1.5V + x_2 - 2.5,$$

де x_1, x_2 – кількість потоків вхідної інформації I та II, y_1, y_2 – кількості потоків вихідної інформації, τ – час проходження інформації, V – швидкість проходження інформації. Розглянути випадки, коли в якості керування використовується швидкість проходження інформації V .

Контрольні запитання

1. Які є основні характеристичні властивості системи як об'єкта керування?
2. Що розуміють під чутливістю системи?
3. Для чого необхідне дослідження чутливості при розробці систем керування?
4. Що розуміють під керованістю системи?

5. Від чого залежить керованість системи?
6. Що називається фазовим портретом динамічної системи?
7. Що визначає перехідна характеристика системи?
7. Методи визначення стійкості лінійної динамічної системи?
9. Що розуміють під спостережуваністю системи?
10. Що дозволяє визначити дослідження керованості і спостережуваності систем?
11. Що називають аналізом структурної керованості систем?
12. Що розуміється під оптимальністю функціонування системи?

11 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

11.1 Класифікація задач оптимізації

Методи оптимізації широко застосовуються для розв'язання задач теорії оптимальних процесів, оптимального регулювання, вироблення керуючих впливів на об'єкти.

Оптимізація полягає в знаходженні оптимуму заданої функції або оптимальних умов проведення даного процесу. Для оцінки оптимуму необхідно вибрати критерій оптимізації. У залежності від конкретних умов як критерій оптимізації можна взяти технологічний критерій, наприклад максимальне отримання продукції з одиниці об'єму системи, економічний критерій - мінімальна вартість продукту при заданій продуктивності, витрати енергії при виконанні певної роботи та інше. На підставі обраного критерію оптимізації складається цільова функція, що представляє собою залежність критерію оптимізації від параметрів та режимів функціонування системи, які впливають на його значення. В загальному плані задача оптимізації зводиться до знаходження екстремуму (максимуму або мінімуму) цільової функції.

Для автоматично керованих процесів або систем розрізняють дві стадії оптимізації: статичну і динамічну. Проблеми створення і реалізації оптимального стаціонарного режиму процесу вирішує статична оптимізація, створення і реалізація системи оптимального управління процесом - динамічна оптимізація.

Перш за все треба розділяти задачі параметричної та структурної оптимізації. Структурна оптимізація – це задача синтезу оптимальної структури системи, причому зміна структур та перетворення однієї структури в іншу здійснюється за спеціальним алгоритмом синтезу. Параметрична оптимізація об'єднує багато різних задач, що мають свої власні особливості та методи розв'язання.

Класифікацію цих задач наведено на рисунку 11.1. Слід відмітити наступне:

1. Якщо існує декілька цільових функцій, то має місце задача векторної оптимізації.

2. Якщо кількість параметрів X , що керуються, більше ніж один, то розв'язується задача багато параметричної оптимізації.

3. Якщо існують обмеження та умови, що зв'язують параметри X , то виникає задача оптимізації з умовами, яка в кібернетиці дістала назву математичного програмування.

4. Математичне програмування об'єднує задачі лінійного програмування, нелінійного програмування (цільова функція в загальному випадку нелінійна), стохастичного програмування (параметри X – випадкова величина, а цільова функція – випадкова функція), динамічного програмування (оптимізація багатокрокових процесів пошуку рішення).

5. Якщо параметри, що керуються, приймають тільки дискретні значення, то виникає задача дискретної оптимізації, а якщо X – цілі числа, то – задача цілочислового програмування.

6. У випадку, коли цільова функція опукла, та область, де задані X , теж опукла, то має місце задача опуклого програмування. Якщо цільова функція та умови лінійні-лінійного (кусково-лінійного) програмування; цільова функція квадратична, а умови лінійні-квадратичного програмування; цільова функція та умови – лінійні комбінації функцій однієї змінної – сепарабельного програмування; цільова функція та умови подані у вигляді поліномів – геометричного програмування.

В залежності від виду математичних моделей застосовуються різні методи оптимізації. Ряд з методів зводяться до знаходження мінімуму чи максимуму цільової функції.

Цільова функція може бути задана як без обмежень, так і з обмеженнями на значення окремих параметрів.

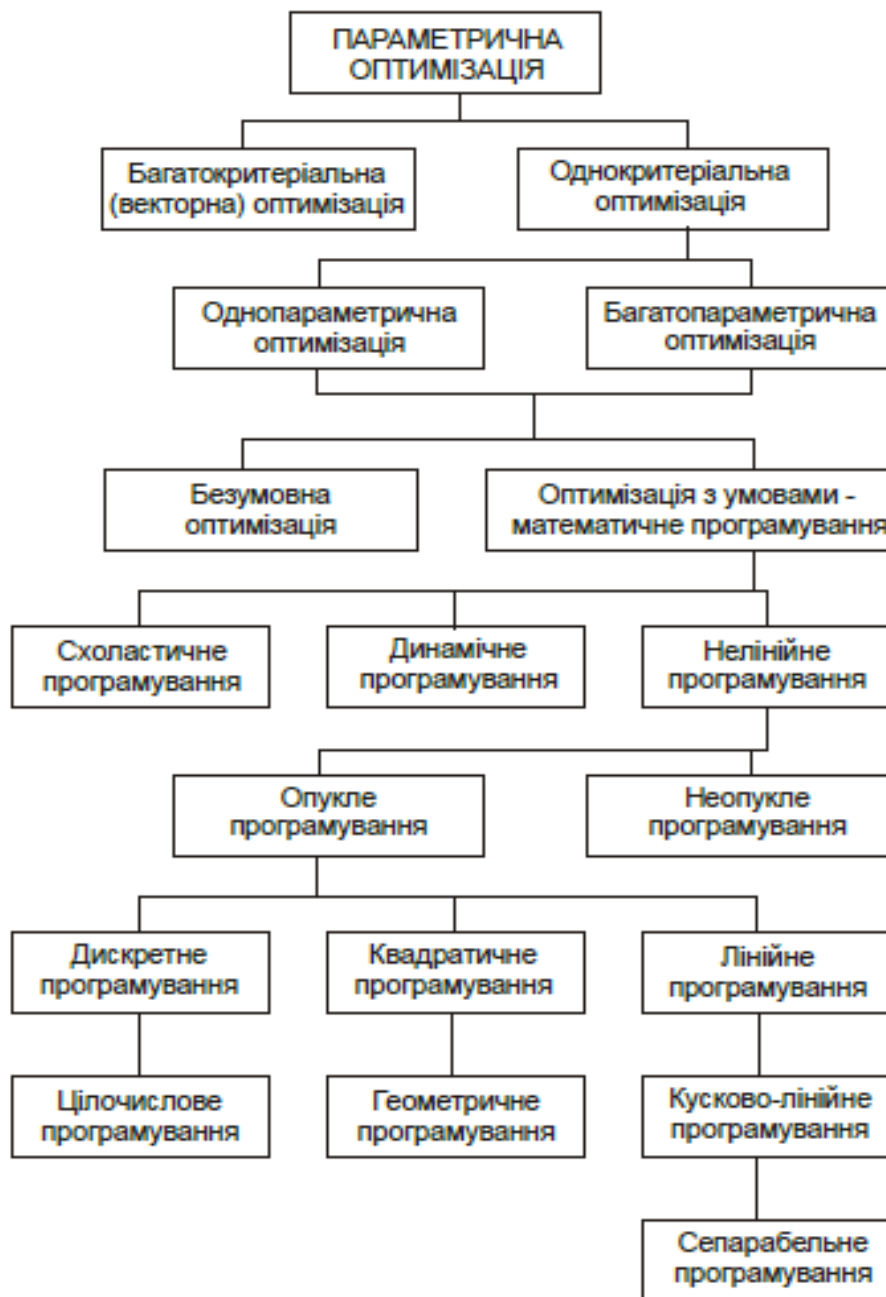


Рисунок 11.1 – Класифікація задач оптимізації

В табл. 11.1 наведені основні види та характеристики методів оптимізації

При виборі методу оптимізації необхідно враховувати можливі обчислювальні труднощі, обумовлені обсягом обчислень, складністю самого методу, розмірністю задачі і т.п.

Таблиця 11.1 – Види та характеристики методів оптимізації

Методи оптимізації	Об'єкт оптимізації, розв'язувані задачі
Аналітичні	
Аналітичний пошук екстремуму	Детерміновані процеси з критерієм оптимальності у виді диференційованих функцій.
Метод множників Лагранжа	Задачі з обмеженнями типу рівностей з критерієм оптимальності у виді диференційованих функцій.
Варіаційні методи (загальна задача Лагранжа, принцип максимуму)	Задачі з критерієм оптимальності у виді функціонала. Розрахунок оптимальних режимів процесів функціонування динамічних систем. Широкий клас задач з об'єктами, що описуються диференціальними рівняннями. Розрахунок оптимальних керувань в задачах регулювання.
Математичне програмування	
Геометричне програмування.	Процеси, що описуються співвідношеннями у виді алгебраїчних функцій – поліномів.
Лінійне програмування	Процеси, що описуються лінійними алгебраїчними рівняннями з критерієм оптимальності у виді лінійної функції. Задачі максимізації доходу при обмеженні ресурсів, оптимальне використання обладнання, транспортні задачі.
Динамічне програмування	Багатостадійні процеси з критерієм оптимальності у виді адитивної функції. Каскад апаратів, реактори і т.д.

Закінчення таблиці 11.1

Гradientні	
Метод градієнта, метод найшвидшого спуску і ін.	Окремі об'єкти і каскади апаратів з перехресними зв'язками. Найбільш загальні випадки оптимізації лінійних і нелінійних функцій з лінійними і нелінійними обмеженнями
Автоматичні з моделями, які самоналагоджуються	
Адаптивні, програмні з автоматичними пристроями	Складні об'єкти з різного роду технологіями.
Статистичні	
Регресійний аналіз, кореляційний аналіз та ін.	Об'єкти, котрі не мають детермінованого опису. Задачі оптимізації економічних об'єктів. Планування експерименту.

Доцільно по можливості проводити попередню оцінку положення оптимуму якої-небудь конкретної задачі. Для цього необхідно розглянути вихідні й основні співвідношення між змінними. Для скорочення розмірності задачі на етапі створення математичних моделей часто використовується прийом виділення найбільш істотних змінних. Застосування комп'ютерів дозволяє спростити розрахунки, використовуючи стандартні підпрограми. Створити певні правила спрощення задачі для всіх можливих випадків взагалі неможливо: при виборі методу оптимізації і рішення задачі необхідно виходити з конкретної суті самої задачі.

11.2 Аналітичні методи пошуку екстремуму безперервної функції

Аналітичні методи є класичними методами визначення екстремального значення функції (мінімуму чи максимуму). Вони застосовуються, коли функції, котрі оптимізуються, задані аналітично і число незалежних змінних невелике. При великому числі змінних виникає так названий бар'єр багатомірності, і застосування аналітичних методів стає складним. Також ускладнює застосування аналітичних методів наявність обмежень. Внаслідок цього практично використання аналітичних методів у їхньому класичному виді досить обмежене.

При визначенні оптимуму в задачах, де незалежними змінними є незалежні функції, можуть застосовуватися варіаційні методи. У цих випадках задача зводиться до знаходження екстремуму функціонала, що залежить від однієї чи декількох невідомих функцій.

Аналітичний пошук екстремуму цільової неперервної функції $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де x_1, x_2, \dots, x_n – незалежні змінні, зводиться до прирівнювання її часткових похідних до нуля:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = 0. \quad (11.1)$$

Тому що диференціали dx_i можна вибрати незалежно, то

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Класичний метод аналізу функцій одного незалежного параметра $F(x_1)$ дозволяє знайти координати точок екстремумів з умови $F'(x_1)=0$. При цьому вид екстремуму (мінімум чи максимум) з'ясовується за відомими правилами для другої похідної. При $F''(x_1)=0$ варто провести аналіз поведінки $F''(x_1)$ в околі точки або дослідити вищі похідні.

Якщо число змінних більше одиниці, труднощі знаходження екстремуму стають істотними. Для функції двох змінних $F(x_1, x_2)$ маємо: $F'_{x_1}(x_1, x_2) = 0$ і

$F'_{x_2}(x_1, x_2)=0$; при цьому кожна пара значень дає одну точку. Для перевірки екстремуму досліджується вираз: $\Delta = F''_{x_1x_1} F''_{x_2x_2} - (F''_{x_1x_2})^2$.

Якщо $\Delta > 0$, то екстремум є. Якщо $\Delta < 0$, то екстремуму немає. При $F''_{x_1x_2} < 0$ є максимум, при $F''_{x_1x_2} > 0$ є мінімум.

В загальному плані для функції багатьох змінних шляхом знаходження часткових перших похідних по кожній змінній отримуємо систему алгебраїчних рівнянь, із яких знайдемо ряд точок, в яких може досягатися екстремум. Для виявлення типу екстремуму складається матриця Гессе (матриця других часткових похідних) і по знаках визначників кутових мінорів визначається тип екстремуму.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_1 \partial \dot{f}_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_1 \partial \dot{f}_m} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_2 \partial \dot{f}_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_2 \partial \dot{f}_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_m \partial \dot{f}_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_m \partial \dot{f}_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_m^2} \end{bmatrix}.$$

Для досягнення на деякій сукупності екстремалей мінімуму необхідно, щоб усі кутові мінори цієї матриці були не негативні, тобто

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_i^2} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_1 \partial \dot{f}_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_2 \partial \dot{f}_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_2^2} \end{vmatrix} \geq 0, \dots$$

Для максимуму знаки цих мінорів повинні чергуватися таким чином: «-», «+», «-», «+»,

Як раніше було відмічено при визначенні оптимуму в задачах, де незалежними змінними є незалежні функції, можуть застосовуватися варіаційні методи.

Якщо функціонал (функція) критерію є диференційованим, то необхідною умовою існування в нього екстремуму є рівність нулю градієнта

функціоналу в деякій точці простору управлінь, яка називається стаціонарною або особливою:

$$\vec{U}^0 \in V.$$

Це означає, що

$$\text{grad } J(\vec{U}^0) = 0,$$

або

$$\frac{\partial J}{\partial U_1} = \frac{\partial J}{\partial U_2} = \dots = \frac{\partial J}{\partial U_n} = 0. \quad (11.2)$$

Дана умова виділяє і локальні екстремуми, а якщо їх кілька, то це вже завдання визначення глобального екстремуму.

Використання (11.2) не дає відповіді – це максимум або мінімум. Для цього використовується значення другого диференціалу функціоналу у стаціонарній точці $\frac{\partial^2 J}{\partial U_i^2}$.

Наведені умови є загальними (необхідними та достатніми) і можуть застосовуватися для вирішення практичних завдань.

До аналітичних методів знаходження екстремуму функції багатьох змінних відноситься метод множників Лагранжа. Цей метод використовується, коли на змінні моделі системи накладені обмеження типу рівності, тобто, якщо потрібно знайти екстремум функції $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при наявності обмежень типу «рівність» на незалежні змінні $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m; m < n$). Для рішення цієї задачі вводиться допоміжна функція:

$$\varphi = (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (11.3)$$

де λ_i ($i = 1, \dots, m$) – невизначені множники Лагранжа. У цьому випадку екстремальні точки функції $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначаються рішенням системи рівнянь, що отримується прирівнюванням до нуля похідних від функції $\varphi = (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ за усіма незалежними змінними x_k ($k = 1, \dots, n$) і за всіма

множниками Лагранжа $\lambda_i (i=1, \dots, m)$. В результаті отримується система рівнянь:

$$\frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)}{\partial x_k} = 0, (k=1, 2, \dots, n);$$

$$\frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)}{\partial \lambda_j} = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, j=1, \dots, m,$$

яка містить $n+m$ рівнянь, з яких можна виключити m невизначених множників Лагранжа, що мають допоміжне значення, і знайти координати екстремальних точок. Кожне обмеження додає ще одне рівняння, і на кожне обмеження вводиться один множник Лагранжа.

Слід зазначити, що множники Лагранжа використовують також як допоміжний засіб при рішенні спеціальними методами задач інших класів з обмеженнями типу рівностей, наприклад у варіаційному численні і динамічному програмуванні. Особливо ефективно застосування множників Лагранжа в методі динамічного програмування, у цьому випадку вони можуть знизити розмірність розв'язуваної задачі.

11.3 Градієнтні методи оптимізації

У випадку, коли функція цілі $f(x)$ і функції $p_j(x)$, які задають обмеження, є диференційними (гладкими), для розв'язання задач оптимізації використовується поняття градієнта. Для будь-якої функції $g(x)$, що диференціюється, її градієнтом $\nabla g(x)$ в точці x називається вектор

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Вектор градієнта $\nabla g(x)$ задає (в даній точці x) найшвидшого росту функції $g(x)$, а зворотний йому напрям $-\nabla g(x)$, що називається антиградієнтом,

напрям найшвидшого спадання цієї функції. Точки, в яких градієнт функції перетворюється в нуль, називаються її стаціонарними точками. Якщо екстремум функції $f(x)$ досягається в середині припустимої області (не на її межі), то в точці оптимуму x її градієнт перетворюється в нуль, тобто має місце система рівнянь:

$$\left. \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} \right|_{x=a} = 0, \dots, \left. \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right|_{x=a} = 0.$$

Ці рівняння (умови стаціонарності функцій) мають місце не тільки для абсолютних, але й для локальних екстремумів. Разом з тим умови стаціонарності не є достатніми.

У випадку, коли екстремальна точка a лежить на межі припустимої множини, вона не обов'язково є стаціонарною. Але за деякої додаткової умови може, якщо замінити цільову функцію $f(x)$ так званою функцією

Лагранжа $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i(x)$, (де $p_i(x)$ – ліві частини всіх граничних

умов), дістати того, щоб граничні екстремальні точки функції $f(x)$ були стаціонарними точками функції Лагранжа $L(x)$ при відповідних значеннях параметрів.

11.3.1 Чисельні градієнтні методи оптимізації. Метод оптимізації, який використовує умови Куна-Таккера, на практиці застосовується відносно рідко через велику складність аналізу системи співвідношень, що виникає. Найчастіше застосовуються чисельні методи оптимізації, для яких використовуються чисельні значення градієнта в будь-якій заданій точці. Градієнтні методи універсальні, добре пристосовані для роботи із сучасною комп'ютерною технікою й у більшості випадків дуже ефективні при пошуку екстремального значення нелінійних функцій з обмеженнями і без них, а також тоді, коли аналітичний вид функції узагалі невідомий. Внаслідок цього градієнтні методи широко застосовуються на практиці.

Сутність зазначених методів полягає у визначенні значень незалежних змінних, що дають найбільші зміни цільової функції. Для цього рухаються уздовж градієнта, ортогонального до контурної поверхні в даній точці. Різні пошукові методи в основному відрізняються один від одного способом визначення напрямку руху до оптимуму, розміром кроку і тривалістю пошуку уздовж знайденого напрямку, критеріями закінчення пошуку, простотою алгоритмізації. Техніка пошуку екстремуму базується на розрахунках, що дозволяють визначити напрямок найбільш швидкої зміни оптимізуючого критерію.

Якщо критерій заданий рівнянням

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

то його градієнт у точці (x_1, x_2, \dots, x_n) визначається вектором:

$$\text{grad}f = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n).$$

Часткова похідна $\partial f / \partial x_i$ пропорційна косинусу кута, утвореного вектором градієнта з i -ою віссю координат. При цьому

$$(\partial f / \partial x_i) / \sqrt{\sum_{i=1}^n (\partial f / \partial x_i)^2} = \cos(\text{grad}f, x_i).$$

Поряд з визначенням напрямку градієнтного вектора основним питанням, що вирішується при використанні градієнтних методів, є вибір кроку руху за градієнтом. Величина кроку в напрямку $\text{grad}f$ у значній мірі залежить від виду поверхні. Якщо крок занадто малий, будуть потрібні тривалі розрахунки; якщо занадто великий, можна проскочити оптимум. Розмір кроку Δx_i повинний задовольняти умові, при якому всі кроки від базисної точки лежать у тому ж самому напрямку, що і градієнт у базисній точці. Розміри кроку по кожній змінній x_i обчислюються із значень часткових похідних у базовій (початкової) точці.

Для лінійних функцій градієнтний напрямок не залежить від положення на поверхні, для якої він обчислюється. Якщо поверхня має вид

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 ,$$

$$\text{то } \partial f / \partial x_1 = c_1, \quad \partial f / \partial x_2 = c_2, \quad \partial f / \partial x_3 = c_3$$

і компонента градієнта в i - му напрямку дорівнює

$$c_i / \sqrt{(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)}.$$

Для нелінійної функції напрямок градієнтного вектора залежить від точки на поверхні, у якій він обчислюється.

Незважаючи на існуючі розходження між градієнтними методами, послідовність операцій при пошуку оптимуму в більшості випадків однакова і зводиться до наступного:

1. вибирається базисна точка;
2. визначається напрямок руху від базисної точки;
3. знаходиться розмір кроку;
4. визначається наступна точка пошуку;
5. значення цільової функції в даній точці порівнюється з її значенням у попередній точці;
6. знову визначається напрямок руху і процедура повторюється до досягнення оптимального значення.

11.4 Приклади аналітичного знаходження екстремального значення функції багатьох змінних

Приклад 1. Знайти оптимум функції $y = x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2$, використовуючи метод знаходження екстремуму функції багатьох змінних (в даному випадку двох змінних).

Для двох змінних $F(x_1, x_2)$ для знаходження точки екстремуму використаємо співвідношення:

$$F'_{x_1}(x_1, x_2) = 0 \quad \text{і} \quad F'_{x_2}(x_1, x_2) = 0.$$

При цьому кожна пара значень дає нам точку, в якій можливий екстремум.

Для уточнення, що досягається в конкретній точці, знаходяться значення визначників, які отримуємо з матриці Гессе. В результаті досліджуємо вираз:

$$\Delta = F''_{x_1x_1} \quad \text{і} \quad \Delta = F''_{x_1x_1} F''_{x_2x_2} - (F''_{x_1x_2})^2.$$

В нашому випадку:

$$y'_{x_1} = 2x_1 - 6x_2, \quad y'_{x_2} = -6x_1 + 3.$$

Точка можливого екстремуму: $x_1 = 1/2; x_2 = 1/6$.

Тип екстремуму:

$$y''_{x_1x_1} = 2, \quad y''_{x_2x_2} = 0, \quad y''_{x_1x_2} = -6.$$

$$\Delta = F''_{x_1x_1} F''_{x_2x_2} - (F''_{x_1x_2})^2 = 2 \cdot 0 - 36 = -36.$$

Постільки зміна знаків головних визначників «+» «-», то екстремуму в даній точці не існує.

Приклад 2. Визначити максимальне значення ентропії $H_{\max}(x)$ інформації двох повідомлень, використовуючи метод множників Лагранжа.

Як відомо ентропія – математичне сподівання $H(x)$ випадкової величини $I(x)$, визначеної на ансамблі $\{X, p(x)\}$, тобто вона характеризує середнє значення кількості інформації, що доводиться на один символ.

$$H(X) = M[I(X)] = \frac{I(X)}{n} = - \sum_{i=1}^m p(x_i) \cdot \log p(x_i).$$

Визначимо максимальне значення ентропії $H_{\max}(x)$. Скористаємося методом невизначеного множника Лагранжа – (для відшукування умовного екстремуму функції). Знаходимо допоміжну функцію:

$$F = - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i - \lambda.$$

Визначимо допоміжну функцію F у вигляді:

$$F = - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i - \lambda \sum_{i=1}^m p_i = - \sum_{i=1}^m [p_i \log_2 p_i + \lambda p_i] = - \sum_{i=1}^m F_i.$$

Знайдемо максимум цієї функції:

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_i} = \log_2 p_i + \log_2 e + \lambda = 0; \quad \log_2 p_i = -\log_2 e - \lambda,$$

тому що $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$.

Як видно з виразу, величина імовірності p_i не залежить від i , а це може бути у випадку, якщо всі p_i рівні, тобто $p_1 = p_2 = \dots = p_m = 1/m$.

При цьому, вираз для ентропії рівно імовірних, незалежних елементів дорівнює:

$$H_{\max}(x) = -\sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \log_2 \frac{1}{m} = \log_2 m.$$

Знайдемо ентропію системи двох альтернативних подій з імовірностями p_1 і p_2 :

$$\begin{aligned} H(X) &= -p_1 \cdot \log_2 p_1 - p_2 \cdot \log_2 p_2 = -p_1 \cdot \log_2 p_1 - [1 - p_1] \cdot \log_2 [1 - p_1] = \\ &= \begin{cases} 1; & p_1 = p_2 = 1/2; \\ 0; & p_1 = 0, p_2 = 1 \text{ або } p_1 = 1, p_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

При $m = 2$ для рівноймовірних подій $p_i = 1/2$ ентропія дорівнює 1. Зміну ентропії залежно від імовірності події наведено на рис. 11.1. Як можна бачити, максимум ентропії відповідає рівноймовірним подіям.

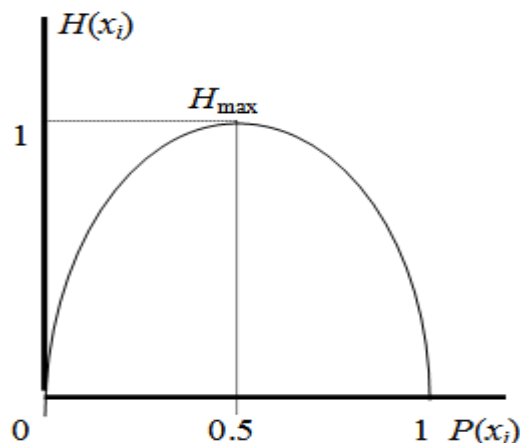


Рисунок 11.1 – Графік зміни ентропії

Приклад 3. Визначити розміри відкритого прямокутного бака ємкістю 1000 м^3 за умови мінімальної поверхні дна і стінок.

Рішення.

Об'єм бака: $V=lbh$, де l – довжина, b – ширина, h – висота.

Для рішення задачі використаємо метод множників Лагранжа. Згідно умови задачі цільова функція повинна мінімізувати площу, тобто мінімізувати функцію:

$$F(l,b,h) = 2hb + lb + 2hl.$$

Обмеження: $f(l,b,h) = 0$, тобто $f(l,b,h) = lbh - V = 0$.

Згідно методу використання множників Лагранжа будемо допоміжну функцію, яка має вигляд:

$$G(l,b,h,\lambda) = F(l,b,h) + \lambda(lbh - V).$$

Або:

$$G(l,b,h,\lambda) = 2hb + lb + 2hl + \lambda(lbh - V).$$

Згідно методики знаходимо часткові похідні по l, b, h, λ і прирівнюємо їх до нуля. Отримуємо систему чотирьох рівнянь із чотирма невідомими.

$$2b + 2l + \lambda lb = 0;$$

$$2h + l + \lambda lh = 0;$$

$$b + 2h + \lambda bh = 0;$$

$$lbh - V = 0.$$

Отриману систему рівнянь представимо у вигляді, як прийнято при описі моделей систем, при цьому зробивши заміну перемінних: $x_1 = l$; $x_2 = b$; $x_3 = h$; $x_4 = \lambda$.

Допоміжна функція з використанням нових перемінних має вид:

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_2x_3 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_4(x_1x_2x_3 - V).$$

Знаходимо часткові похідні по x_1, x_2, x_3, x_4 та прирівнюємо їх до нуля.

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = x_2 + 2x_3 + x_2x_3x_4 = 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = x_1 + 2x_3 + x_1x_3x_4 = 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_3} = 2x_1 + 2x_2 + x_1x_2x_4 = 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_4} = x_1x_2x_3 - 1000 = 0.$$

Цю систему рівнянь представимо у вигляді:

$$x_2(1 + x_3x_4) + 2x_3 = 0; \quad (1)$$

$$x_1(1 + x_3x_4) + 2x_3 = 0; \quad (2)$$

$$2(x_1 + x_2) + x_1x_2x_4 = 0; \quad (3)$$

$$x_1x_2x_3 - 1000 = 0. \quad (4)$$

Із рівнянь (1) і (2) слідує, що $x_1 = x_2$.

В результаті отримаємо систему рівнянь:

$$4x_1 + x_1^2x_4 = 0; \quad (5)$$

$$x_1 + 2x_3 + x_1x_3x_4 = 0; \quad (6)$$

$$x_1^2x_3 = 1000. \quad (7)$$

Із рівняння (5): $x_1 = -4/x_4$; із рівняння (7): $x_3 = 1000/x_1^2 = \frac{1000}{16}x_4^2$.

Після підставлення цих значень в рівняння (6) і перетворень отримаємо:

$$1000x_4^3 = -32.$$

Звідки $x_4 = -\sqrt[3]{0.032} = -0.317$. Тобто $\lambda = -0.317$.

В результаті отримаємо значення параметрів бака :

$$l = 12.57 \text{ м}, \quad b = 12.57 \text{ м}, \quad h = 6.32 \text{ м}.$$

11.5 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Дослідити на екстремум функцію однієї змінної вигляду:

$$y = x_1^3 - Nx_1^2 - (N + 2)x_1,$$

де N – номер варіанту.

Завдання 2. Знайти екстремум функції $y = x_1^2 - Nx_1x_2 + (N - 6)x_2$, використовуючи метод знаходження екстремуму функції багатьох змінних (в даному випадку двох змінних) та визначити його тип (N – номер варіанту).

Завдання 3. Визначити розміри сторін основи прямокутного бака площею 900 м^2 за умови мінімальної площі основи.

Контрольні запитання

1. Які основні види та характеристики методів оптимізації?
2. Аналітичні методи оптимізації. Їх характеристики.
3. Функція однієї змінної. Необхідні та достатні умови екстремуму.
4. Функція багатьох змінних. Необхідні та достатні умови екстремуму.
5. Алгоритм пошуку екстремуму цільової неперервної функції.
6. Матриця Гессе. Складання матриці Гессе. Використання.
7. Поняття градієнта цільової функції. Побудова градієнта для лінійної функції двох змінних.
7. Метод множників Лагранжа. Особливості використання.
9. Складання допоміжної функції Лагранжа.
10. Алгоритм знаходження екстремуму функції багатьох змінних за допомогою методу множників Лагранжа.

12 БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ЗАДАЧІ. СПОСОБИ ПОДОЛАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ МЕТИ

12.1 Поняття невизначеності цілей і способи її подолання

В теорії дослідження операцій прийнято розрізняти три типи невизначеностей:

- невизначеність цілей;
- невизначеність наших знань про навколишнє оточення;
- невизначеність дій реального супротивника або партнера.

В процесі рішення задачі оптимізації важливим питанням є подолання невизначеності цілей (багатокритеріальна задача).

Розглянемо випадки, коли перед дослідником операції стоїть задача вибору способу дії (вектора x), що забезпечує максимальне значення цільовим функціям $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – одночасно.

12.1.1 Лінійна згортка. Замість n -окремих критеріїв f_i передбачається розглядати один критерій виду

$$F(x) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(x),$$

де C_i – деякі позитивні числа, тим або іншим способом нормовані, наприклад

$$\sum_{i=1}^n C_i = 1.$$

Такий спосіб згортки вводить по суті відношення еквівалентності різних критеріїв. Величини C_i показують, наскільки змінюється цільова функція $F(x)$ при зміні критерію $f_i(x)$ на одиницю: $C_i = \partial F / \partial f_i$.

Коефіцієнти C_i – результат експертизи. Вони відображають подання сторони, що оперує, про зміст компромісу, який вона повинна прийняти. Зміст компромісу складається з ранжирування цілей, які разом із призначенням вагових коефіцієнтів є додатковою гіпотезою, що дозволяє звести задачу з багатьма критеріями до задачі з одним критерієм.

Можливе знаходження коефіцієнтів C_i і шляхом рішення задачі лінійного програмування.

12.1.2 Використання контрольних показників. Досить часто в задачах планування й проектування задається деяка система нормування: $f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*$.

Це означає, наприклад, що параметри майбутньої конструкції повинні бути такі, щоб максимізувати функції $f_i(\mathbf{x})$ за умови, що $f_i(\mathbf{x}) \geq f_i^*, i = \overline{1, n}$. У цьому випадку цільову функцію зручно подати у вигляді

$$F(\mathbf{x}) = \min_i \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_i^*}$$

і шукати вектор \mathbf{x} , що забезпечує максимальне значення $F(\mathbf{x})$. Сенс тут полягає в наступному. При даному значенні вектору \mathbf{x} величина $F(\mathbf{x})$ дасть нам значення найгіршого з показників $f_i(\mathbf{x})$. Умова $F(\mathbf{x}) \rightarrow \max$ означає вибір такої системи, яка максимізує відношення i -го реального досягнутого значення критерію до його контрольного значення. Якщо значення f_i^* жорстко не задані, то вони можуть бути визначені в результаті експертного опитування.

Критерій $F(\mathbf{x}) = \min_i \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_i^*} \rightarrow \max$ зводиться до задачі лінійного програмування.

12.1.3 Найпростіший спосіб подолання невизначеностей. Припустимо, ввели деяку систему контрольних показників f_i^* , щодо яких критерії $f_i(\mathbf{x})$ повинні задовольняти обмеження $f_i(\mathbf{x}) \geq f_i^*, i = \overline{1, n}$. Припустимо, що серед $f_i(\mathbf{x})$ виділимо основний, наприклад $f_1(\mathbf{x})$. Тоді знову прийшли до одно критеріальної задачі:

$$f_1(\mathbf{x}) \rightarrow \max.$$

При цьому останні показники повинні задовольняти обмеженням $f_i(\mathbf{x}) \geq f_i^*, i = \overline{1, n}$. Даний підхід найбільш часто застосовується в інженерній практиці. Тут задача конструктора зводиться тільки до призначення припустимих границь показників, що використовуються.

12.1.4 Компроміси Парето. Дослідник завжди прагне мати справу не із багатокритеріальною задачею, а з однокритеріальною. Для однокритеріальних, та ще й із гладкою функцією, розроблено ряд методів. Вище розглянуто деякі способи переходу від багатокритеріальної задачі до однокритеріальної. Однак можна вчинити інакше. Замість зведення багатокритеріальної задачі до однокритеріальної використовуючи спосіб зменшення варіантів прорахунку, тобто виключити ті варіанти, які завідомо повинні бути незадовільними. Один з таких підходів – це шлях, запропонований італійським економістом В. Парето в 1904 році.

У теорії прийняття рішень термін «принцип Парето» означає, що як рішення вибирати треба тільки той вектор x , що належить множині Парето. Принцип Парето не виділяє єдиного рішення, він тільки звужує множину альтернатив. Остаточний вибір залишається за особою, що приймає рішення, але при цьому полегшується процедура знаходження рішення.

12.2 Чисельні методи побудови множини Парето. Випадок двох критеріїв

Нехай мова йде про задачу $f_1(x) \rightarrow \max$, а вектор x належить множині G_x . І так само $f_2(x) \rightarrow \max$, $x \in G_x$.

Кожній точці $x \in G_x$ функції $f_1 = f_1(x)$ і $f_2 = f_2(x)$ ставлять у відповідність деяку точку $f \in G_f$ у площині критеріїв f_1 і f_2 . Ці співвідношення ($f_1 = f_1(x)$ і $f_2 = f_2(x)$) визначають відображення множини G_x на G_f . Множина G_f зветься множиною досяжності граничних можливостей. Множина Парето являє собою лише частину границі множини досяжності.

Наближена побудова множини Парето зводиться до послідовного розв'язання ряду задач математичного програмування.

Одна зі схем розрахунку (найпростіша). Фіксуємо деякі бажані значення критеріїв f_1 і f_2 : $f_1 = C_1$; $f_2 = C_2$.

Значення C_1 і C_2 обираються таким чином, щоб вони належали множині досяжності.

Тепер розв'яжемо дві оптимізаційні задачі:

1. $f_1(x) \rightarrow \max, f_2 = C_2; x \in G_x;$

2. $f_2(x) \rightarrow \max, f_1 = C_1; x \in G_x.$

3. $f_1(x) \rightarrow \max, f_2 = C_3; x \in G_x;$

4. $f_2(x) \rightarrow \max, f_1 = C_4; x \in G_x.$

Знаходимо ще дві точки: c і d , які належать цій множині. Значення C_3 і C_4 повинні належати множині досяжності. Через крапки a, b, c, d проводимо ламану, яка буде наступним наближенням множини Парето. Дуже часто подібної інформації достатньо для уявлення про структуру множини Парето.

12.3 Приклад побудови множини Парето та її аналіз

Задача: провести аналіз багатокритеріальної задачі, яка задається функціями $f_1(x)$ та $f_2(x)$.

$$f_1(x) = x^2 + 2 \rightarrow \max;$$

$$f_2(x) = 5\cos(x) + 5 \rightarrow \max;$$

$$x \in [0, 2; 10].$$

При цьому:

- приблизно побудувати множину Парето;
- визначити області зміни параметра x , які задовольняють вимоги щодо відповідності до множини Парето;
- за допомогою точної побудови функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ показати, що отримані значення параметрів x дійсно апроксимують функцію $f_2(f_1(x))$.

Розв'язок.

Використаємо чисельний метод (алгоритм) побудови множини Парето.

1. Межі досяжності: $f_1(x) = x^2 + 2 = 100 + 2 = 102;$

$$f_2(x) = 5\cos(x) + 5 = 10.$$

2. Розрахунок контрольних точок для побудови графіка множини Парето.

2.1 Задаємо максимальне значення (в межах досяжності) значення функції $f_1(x) = 102$ і знаходимо значення параметра x , шляхом рішення рівняння: $x^2 + 2 = 102$. Це відповідає значенню $x = 10$.

2.2 Отримане значення x підставляємо у функцію $f_2(x) = 5\cos(x) + 5$ і шляхом рішення цього рівняння при $x = 10$, знаходимо можливі значення функції $f_2(x)$ в межах її досяжності. В даному випадку це відповідає значенню $f_2(10) = 0,7$.

2.3 Ці значення функцій $f_1(x) = 102$ і $f_2(10) = 0,7$, відображаємо на графіку в площині $(f_2(x), f_1(x))$ та вказуємо значення параметра « x » (Рис. 3.1).

3. Аналогічно проводимо розрахунки і для знаходження інших значень параметра « x » в межах досяжності функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, які приведені нижче:

$$f_2(x) = 10; x = 2\pi; f_1(2\pi) = 41,5.$$

$$f_1(x) = 73; x = 9; f_2(9) = 0,4.$$

$$f_2(x) = 7,7; x = 1; f_1(1) = 3.$$

$$f_1(x) = 51; x = 7; f_2(7) = 7,7.$$

$$f_2(x) = 5; x = 5\pi/2; f_1(5\pi/2) = 64.$$

$$f_1(x) = 27; x = 5; f_2(5) = 6,4.$$

$$f_2(x) = 2,9; x = 2; f_1(2,9) = 10.$$

$$f_1(x) = 2,04; x = 0,2; f_2(5) = 9,9.$$

$$f_2(x) = 0; x = \pi; f_1(\pi) = 12.$$

4. В результаті розрахунків отримуємо ряд точок в площині координат $f_2(f_1)$, які визначаються значеннями функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ зі своїми значеннями параметра « x ». Послідовно, в порядку збільшення або зменшення значення « x », з'єднуємо їх прямими лініями. В результаті отримаємо кусочно-лінійну

функцію (рис. 12.1), яка відображає апроксимацію множини Парето.



Рисунок 12.1 – Графік множини Парето

З рисунку 12.1 випливає, що до множини Парето параметр « x » знаходиться в інтервалі $[2\pi; 9]$.

Слід відмітити, що визначення множини значень параметра « x » проводиться за умови (признаку) – повинна виконуватись умова, відносно якої із збільшенням однієї функції зменшується інша або навпаки. При одночасному зростанні (зменшенні) функцій ці області значень параметра « x » не відповідають множині Парето.

Описаний спосіб може бути поширений і на випадок більшої кількості критеріїв. Практично множини Парето бувають опуклими й неопуклими. Для опуклих апроксимація множини Парето може бути виконана з будь-яким ступенем точності. Для неопуклих задача набагато складніша.

12.4 Завдання для самостійної роботи

Провести аналіз багатокритеріальної задачі, яка задається функціями $f_1(x)$ та $f_2(x)$ згідно зі своїм варіантом.

У процесі аналізу:

- 1) приблизно побудувати множину Парето;
- 2) визначити області зміни параметра x , які задовольняють вимоги щодо відповідності до множини Парето;

3) за допомогою точної побудови функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ показати, що отримані значення параметрів x дійсно апроксимують функцію $f_2(f_1)$, де $f_1 = f_1(x)$, $f_2 = f_2(x)$.

Варіант 1.

$$f_1(x) = \ln(x) + 5 \rightarrow \max;$$

$$f_2(x) = 10 \sin(2x) - 5 \rightarrow \max;$$

$$x \in [0.1, 10].$$

Варіант 3.

$$f_1(x) = x^2 + 2 \rightarrow \max;$$

$$f_2(x) = 5 \cos(x) + 5 \rightarrow \max; x \in [0.2, 10].$$

Варіант 5.

$$f_1(x) = 2^x + 5x \rightarrow \max;$$

$$f_2(x) = 10 \cos(x) + 10 \rightarrow \max;$$

$$x \in [0, 10].$$

Варіант 7.

$$f_1(x) = x^2 + 2 \rightarrow \max;$$

$$f_2(x) = 15 \cos(x) + 5 \rightarrow \max;$$

$$x \in [0.2, 20].$$

Варіант 2.

$$f_1(x) = x + 1 \rightarrow \max;$$

$$f_2(x) = 10 \sin(x) + 10 \rightarrow \max;$$

$$x \in [0.1, 10].$$

Варіант 4.

$$f_1(x) = e^x - 1 \rightarrow \max;$$

$$f_2(x) = 10 \sin(x) + 5 \rightarrow \max; x \in [0, 10].$$

Варіант 6.

$$f_1(x) = 10/x \rightarrow \max;$$

$$f_2(x) = \sin(2x) + 1 \rightarrow \max;$$

$$x \in [0.01, 10].$$

Варіант 7.

$$f_1(x) = e^x - 10 \rightarrow \max;$$

$$f_2(x) = 15 \sin(x) + 10 \rightarrow \max;$$

$$x \in [0, 20].$$

Варіант 9.

$$f_1(x) = 2^x + 5x \rightarrow \max;$$

$$f_2(x) = 10\cos(x) + 5 \rightarrow \max; x \in [0, 20].$$

Варіант 10.

$$f_1(x) = 10/x \rightarrow \max;$$

$$f_2(x) = 5\sin(2x) + 1 \rightarrow \max; x \in [0, 20].$$

Контрольні запитання

1. Поняття невизначеності цілей. Приклади.
2. Способи подолання невизначеностей цілей.
3. Лінійна згортка. Визначення коефіцієнтів.
4. Використання контрольних показників. Ідея методу.
5. Найпростіший спосіб подолання невизначеностей. Сутність методу.
6. Компроміс Парето. Сутність методу. Множини Парето.
7. Чисельні методи побудови множин Парето.
8. Побудова множини Парето для випадку двох критеріїв.
9. Визначення області множини Парето.
10. Особливості застосування множини Парето.

13 ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

13.1 Задача класичного варіаційного числення

Задано функціонал:

$$J = \int_0^T G(t, U(t), \dot{U}(t)) dt, \quad (13.1)$$

де G – відома функція, безперервна і диференціальна до другого порядку включно.

Нехай $U(t)$ – безперервна та диференційна функція до першого порядку, тобто гладка. Позначимо цей клас символом $\Omega(u)$.

Отже, $U(t) \in \Omega(u)$.

Якщо задані значення функції $U(t)$ у граничних точках t_0 і T , тобто відомі $U(t_0)$ і $U(T)$, то функції $U(t) \in \Omega_1(u)$, що проходять через задані точки $U(t_0)$ та $U(T)$ називають допустимими.

Завдання полягає в тому, що серед допустимих функцій необхідно визначити таку, де функціонал (13.1) досягає найменшого значення, тобто виконується умова:

$$J = \int_0^T G(t, U(t), \dot{U}(t)) dt = \min \quad (13.2)$$

на множині допустимих гладких функцій $U(t) \in \Omega_1(u)$.

В даному разі, при пошуку розв'язання задачі необхідно порівнювати різні допустимі функції, в певному сенсі близькі одна одній.

13.1.1 Концепція близькості функцій. Дві функції $U_1(t)$ і $U_2(t)$ на відрізку $[t_0, T]$ називатимемо близьким у сенсі близькості нульового порядку, якщо відстань між функціями визначається як:

$$\max |U_1(t) - U_2(t)| \leq \varepsilon, \quad t_0 \leq t \leq T$$

тобто, як максимальне значення модуля різниці функцій мало, (тобто $\leq \varepsilon$).

У сенсі близькості першого порядку, якщо малі відстані між функціями та їх похідними, тобто:

$$\max|U_1(t) - U_2(t)| \leq \varepsilon \text{ і } \max|\dot{U}_1(t) - \dot{U}_2(t)| \leq \varepsilon.$$

При розв'язанні завдання (13.2) необхідно порівнювати допустимі функції першого порядку, оскільки функціонал залежить від " $U(t)$ " та " $\dot{U}(t)$ ".

Якщо значення функціоналу на деякій кривій менше, ніж на всіх інших допустимих кривих, близьких у сенсі нульового порядку, то на цій кривій досягається сильний мінімум, якщо це досягається серед кривих, близьких у сенсі першого порядку – слабкий мінімум. Сильний мінімум одночасно є і слабким, але не навпаки. У цій задачі маємо слабкий мінімум.

13.1.2 Визначення варіацій функцій. Для вирішення задачі мінімізації функціоналу необхідно знайти умови, яким повинна задовольняти функція $U(t)$ з тим, щоб при переході до будь-якої іншої близької у сенсі близькості першого порядку функції значення функціоналу зросло.

Припустимо, що розв'язання задачі знайдено. Тоді відповідну функцію позначимо $\bar{U}(t)$ і перейдемо від цієї функції до іншої

$$U(t) = \bar{U}(t) + \alpha\eta(t), \quad (13.3)$$

де α – мале число; $\eta(t)$ – довільна гладка функція з класу $\Omega_1(u)$, яка задовольняє обмеженням $\eta(t_0) = \eta(T) = 0$. Функція $U(t)$ в силу введених обмежень є допустимою. Функцію $\alpha\eta(t)$ – називається варіацією функції $U(t)$.

Підставимо $U(t)$ у (13.3) і розглянемо функціонал J як функцію параметра α :

$$J(\alpha) = \int_{C_0}^T G(t, \bar{U}(t) + \alpha\eta(t), \dot{\bar{U}}(t) + \alpha\dot{\eta}(t)) dt. \quad (13.4)$$

Розкладемо цю функцію в ряд Маклорена за степенями α :

$$J(\alpha) = J(0) + \frac{\partial J(0)}{\partial \alpha} \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(0)}{\partial \alpha^2} \alpha^2 + \dots \quad (13.5)$$

Другий та третій доданки – це перша та друга варіації функціоналу.

Необхідною умовою екстремуму є:

$$\frac{\partial J(0)}{\partial \alpha} = 0. \quad (13.6)$$

13.1.3 Рівняння Ейлера-Лагранжа. Для функціоналу вигляду (4.1), отримаємо:

$$\frac{\partial G}{\partial U} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{U}} = 0. \quad (13.7)$$

Це рівняння є необхідною умовою мінімуму функціоналу (4.3). Якщо врахувати, що похідна $\frac{\partial G}{\partial \dot{U}}$ є функцією трьох змінних $U(t)$, $\dot{U}(t)$, t , то

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{U}} = \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial G}{\partial \dot{U}} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial}{\partial \dot{U}} \frac{\partial G}{\partial \dot{U}} \frac{d\dot{U}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial G}{\partial \dot{U}},$$

то рівняння Ейлера може бути записано у розгорнутому вигляді:

$$\frac{\partial G}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial G}{\partial \dot{U}} - \frac{\partial^2 G}{\partial U \partial \dot{U}} \dot{U} - \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}^2} \ddot{U} = 0. \quad (13.7)$$

З (13.7) видно, що рівняння Ейлера є нелінійним та диференціальним рівнянням другого порядку. Його рішення залежить від двох постійних інтегрування, тобто

$$U(t) = U(t, C_1, C_2).$$

Постійні інтегрування C_1 і C_2 – знаходяться з умови проходження функції $U(t)$ через задані граничні точки $U(t_0)$ та $U(T)$.

Якщо серед допустимих функцій існує функція, яка доставляє мінімум функціоналу J , вона буде рішенням рівняння Ейлера, тобто екстремальною.

Рівняння Ейлера є необхідною, але недостатньою умовою знаходження мінімуму (максимуму) функціоналу.

13.1.4 Умова Лежандра. Відповідь на запитання максимум чи мінімум досягається на деякій екстремалі – дає умова Лежандра.

Перша варіація функціоналу на екстремалі перетворюється на нуль – ознака екстремалі функції. Знак збільшення функціоналу визначається другою варіацією. Функція $U(t)$ забезпечує мінімум, якщо (згідно (13.5)).

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(0)}{\partial \alpha^2} \alpha^2 \geq 0. \quad (13.8)$$

В результаті отримаємо: для досягнення на екстремалі мінімуму необхідно, щоб у всіх точках екстремалі виконувалася умова:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}^2} > 0.$$

Для досягнення максимуму – умова:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}^2} < 0.$$

В точках, де $\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}^2} = 0$ можливі злами екстремалі.

13.1.5 Рівняння Ейлера–Пуассона. Рівняння Ейлера–Лагранжа є основними формулами варіаційного числення, за допомогою яких знаходяться стаціонарні точки і екстремуми функціоналів.

Використання рівнянь Ейлера–Лагранжа для знаходження екстремуму функціонала в деякому розумінні аналогічне використанню теореми диференціального числення, за якою лише в точці, де перша похідна функції дорівнює нулю, гладка функція може мати екстремум (у разі векторного аргументу прирівнюється до нуля градієнт функції, тобто похідна за векторним аргументом).

Нехай задано функціонал:

$$J = \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx \quad (13.9)$$

з підінтегральною функцією $F(x, f(x), f'(x))$, що має безперервні перші часткові похідні і яка має назву функції Лагранжа, або лагранжіану, де через $f'(x)$ позначена перша похідна функції f за x . Якщо цей функціонал досягає екстремуму на деякій функції f , то для неї повинно виконуватися звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) = 0. \quad (13.10)$$

Це рівняння називається рівнянням Ейлера–Лагранжа.

Для визначення типу екстремуму необхідно перевірити умову Лежандра, а саме: якщо на екстремалі виконується умова $\frac{\partial^2 F}{\partial f'^2} > 0$, то досягається сильний мінімум. Якщо $\frac{\partial^2 F}{\partial f'^2} < 0$, то досягається максимум.

Лагранжیان може також залежати від порядку похідних $\frac{\partial F}{\partial f}$ вищого, ніж перший.

Нехай функціонал, екстремум якого потрібно знайти, заданий у вигляді

$$J = \int_a^b F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)) dx. \quad (13.11)$$

Якщо накласти граничні умови на f і на її похідні до порядку $n - 1$ включно, а також припустити, що F має безперервні перші похідні, то можна, застосовуючи інтегрування за частинами кілька разів, вивести аналог рівняння Ейлера – Лагранжа і для цього випадку:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial f''} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} \right) = 0. \quad (13.12)$$

Це рівняння має назву рівняння Ейлера–Пуассона.

13.1.6 Функціонал з рядом управлінь. В деяких задачах критерієм оптимальності є функціонал виду:

$$J = \int_a^b F \left[x; f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x); f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_m(x) \right] dx. \quad (13.13)$$

При цьому задані координати граничних точок $f_i(a), f_i(b), i = 1, m$.

Необхідно в класі $\Omega_1(f)$ знайти функції $f_i(x), i = 1, m$, які проходять через граничні точки і при цьому функціонал буде мати екстремумальне значення. При розв'язанні задачі варіюється одна з функцій, а інші приймаються постійними (тобто фіксованими). Якщо це зробити зі всіма функціями, то отримаємо систему з рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (13.14)$$

Екстремалі, які відповідають розв'язанню системи рівнянь (13.14), і містять $2m$ постійних інтегрування, що знаходяться з граничних умов.

Для визначення характеру екстремуму складається матриця Гессе:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_1 \partial \dot{f}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_1 \partial \dot{f}_m} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_2 \partial \dot{f}_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_2 \partial \dot{f}_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_m \partial \dot{f}_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_m \partial \dot{f}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_m^2} \end{bmatrix}. \quad (13.15)$$

Для досягнення на деякій сукупності екстремалей мінімуму необхідно, щоб усі кутові мінори цієї матриці були не негативні, тобто

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_i^2} \geq 0; \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_1 \partial \dot{f}_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_2 \partial \dot{f}_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}_2^2} \end{vmatrix} \geq 0, \dots \quad (13.16)$$

Для максимуму знаки цих мінорів повинні чергуватися таким чином: $-, +, -, + \dots$

Функціонал може містити і похідні більших порядків. У цьому випадку для кожної функції необхідно скласти рівняння Ейлера – Пуассона, а граничні умови повинні бути задані відповідно до кількості постійних інтегрування.

13.2 Приклади рішення задач методами варіаційного обчислення

Приклад 1. Дослідити на екстремуми функціонал:

$$J = \int_1^2 (\dot{U}^2(t) - 2U(t)t) dt.$$

Граничні умови: $U(1) = 0$; $U(2) = -1$.

Рішення: Визначимо підінтегральну функцію G .

$$G = G(t, U(t), \dot{U}(t)) = \dot{U}^2 - 2Ut.$$

Для знаходження екстремалі використаємо рівняння Ейлера – Лагранжа:

$$\frac{\partial G}{\partial U} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{U}} = 0.$$

В результаті отримаємо рівняння екстремалі: $2t + 2\ddot{U}(t) = 0$.

Проінтегруємо по "t". Отримаємо:

$$\dot{U}(t) = -\frac{t^2}{2} + C_1; U(t) = -\frac{1}{6}t^3 + C_1t + C_2.$$

З граничних умов визначимо C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} -\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0; \\ -\frac{2}{6} + 2C_1 + C_2. \end{cases} \quad C_1=1/6; C_2=0.$$

Екстремаль досягається на кривій:

$$U(t) = -\frac{1}{6}t^3 + (1/6)t.$$

Тип екстремуму (максимум або мінімум) визначимо з умови Лежандра.

Знаємо, що $G(t, U, \dot{U}) = \dot{U}^2 - 2Ut$. Умова Лежандра $\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}^2} = ?$. Для нашого випадку:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}^2} = \frac{\partial}{\partial \dot{U}} \frac{\partial G}{\partial \dot{U}} = \frac{\partial(2\dot{U})}{\partial \dot{U}} = 2 > 0,$$

тобто досягається мінімальне значення.

Чисельне значення функціоналу: $J = \int_1^2 (\dot{U}^2 - 2Ut) dt = \cong -7,46$.

Приклад 2. Нехай у тривимірному просторі t , $U_1(t)$, $U_2(t)$ задані дві точки:

$$U_1(t_0) \text{ і } U_2(t_0), U_1(T) \text{ і } U_2(T).$$

Потрібно знайти рівняння кривої $U_1(t)$ і $U_2(t)$, яка з'єднала б дві точки і мала найменшу довжину.

Рішення. Довжина кривої визначається як: $J = \int_{t_0}^T \sqrt{1 + \dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2} dt$.

На вигляд довжина кривої представляється як функціонал з двома невідомими ($U_1(t)$, $U_2(t)$) і залежить лише від однієї змінної – t . Значить використовуватимемо рівняння Ейлера-Лагранжа у формі (13.14) і рівняння Лагранжа – у вигляді (13.15).

Мінімізувати функціонал будемо за $U_1(t)$ и $U_2(t)$.

Система рівнянь Ейлера матиме такий вигляд (від "U" не залежить):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{U}_1} = 0; \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{U}_2} = 0 \text{ або } \frac{\partial G}{\partial \dot{U}_1} = C_1; \frac{\partial G}{\partial \dot{U}_2} = C_2.$$

Тоді:

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_1}{\sqrt{1 + \dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2}} = C_1; \frac{\partial G}{\partial \dot{U}_2} = \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{1 + \dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2}} = C_2;$$

Розділимо одне рівняння на друге і виразимо U_2 через U_1 . Отримаємо:

$$\dot{U}_2 = \frac{C_2 \dot{U}_1}{C_1}.$$

Перетворимо перше рівняння шляхом зведення в квадрат і зробимо виразимо U_2 через U_1 . В результаті перетворення отримаємо:

$$(\dot{U}_1)^2 = C_1^2 (1 + \dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2); (\dot{U}_1)^2 = C_1^2 (1 + \dot{U}_1^2 + \frac{C_2^2 \dot{U}_1^2}{C_1^2});$$

$$\dot{U}_1^2 = C_1^2 + C_1^2 \dot{U}_1^2 + C_2^2 \dot{U}_1^2;$$

$$\dot{U}_1^2 (1 - C_1^2 - C_2^2) = C_1^2; \dot{U}_1 = \frac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^2 - C_2^2}} = C_3; \dot{U}_2 = \frac{C_2}{C_1} * C_3 = C_4.$$

$$\text{Тоді: } \begin{cases} U_1(t) = C_3 t + C_5; \\ U_2(t) = C_4 t + C_6. \end{cases}$$

Це рівняння прямих. Постійні часу $C_3 - C_6$ визначаються із граничних умов.

Визначимо елементи матриці Гессе для виконання умов Лежандра.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}_1^2} = \frac{(1 + \dot{U}_2^2)}{(\sqrt{1 + \dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2})^3}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}_2^2} = \frac{(1 + \dot{U}_1^2)}{(\sqrt{1 + \dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2})^3};$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}_1 \partial \dot{U}_2} = \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}_2 \partial \dot{U}_1} = \frac{-\dot{U}_1 \dot{U}_2}{(\sqrt{1 + \dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2})^3}.$$

Відповідно до (4.16)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}_1^2} \geq 0; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}_1^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}_2^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}_1 \partial \dot{U}_2} \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{U}_2 \partial \dot{U}_1} = \frac{1}{1 + \dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2} > 0.$$

Таким чином знайдені екстремали мають найменшу довжину.

Приклад 3. Знайти екстремум функціонала та для обчислень розробити програму (М-файл) в пакеті *MATLAB*.

Функціонал:

$$J(y) = \int_0^1 \left((\dot{y}^2(x) + 12xy(x)) \right) dx \rightarrow \text{extr}$$

при граничних умовах $y(0) = 0$; $y(1) = 1$.

Рішення.

Із виду функціонала слідує, що постільки підінтегральна функція містить одне управління «у», то для знаходження його екстремуму можемо використати рівняння Ейлера-Лагранжа у вигляді:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Підінтегральна функція $F(y)$ має вид:

$$F(y) = \left((\dot{y}^2(x) + 12xy(x)) \right).$$

Знайдемо часткові похідні $F_y = \partial F / \partial y$ і $F_{y'} = \partial F / \partial y'$:

$$F_y = 12x; \quad F_{y'} = 2y'.$$

Обчислимо повну похідну за x від F_y ‘:

$$\frac{dFy'}{dx} = 2y''.$$

Складаємо диференціальне рівняння Ейлера – Лагранжа:

$$12x - 2y'' = 0,$$

або після спрощень:

$$y'' = 6x.$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$y(x) = x^3 + C_1x + C_2.$$

Для знаходження довільних постійних C_1 і C_2 підставимо у розв'язання граничні умови:

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 0; \\ y(1) = 1 + C_1 + C_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо значення C_1 і C_2 : $C_1 = 0$; $C_2 = 0$.

Рівняння екстремалі має вигляд:

$$y(x) = x^3.$$

Для перевірки типу екстремуму використаємо умову Лежандра: якщо на екстремалі виконується умова $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$, то досягається сильний мінімум.

Якщо $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} < 0$, то досягається максимум.

У нашому випадку: $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 2 > 0$, отже, на нашій екстремалі досягається сильний мінімум.

Перевіримо цей результат: обчислимо $J(y)$ на декількох функціях вигляду $y_k = x^k$. Ці функції задовольняють граничні умови і, отже, є допустимими. Для обчислень застосуємо *MATLAB*:

```

clear all % видалили все
syms x % описали символічний аргумент
k=1:5; % показники степеня
y=x.^k; % символічні функції
Dy=diff(y,x); % похідні
F=Dy.^2+12*x.*y; % підінтегральні функції
J=int(F,x,0,1); % функціонали
Jm=eval(J); % розрахунок значень
disp('k   J(x^k)') % друкуємо заголовок
fprintf('%d   %12.10f\n',[k;Jm]) % друкуємо результат

```

У результаті отримаємо таке:

```

k   J(x^k)
1   5.0000000000
2   4.3333333333
3   4.2000000000
4   4.2757142757
5   4.4920634921

```

Дійсно, отриманий результат не суперечить висновку про те, що на функції $y(x) = x^3$ досягається мінімум.

Приклад 4.

1. Знайти екстремаль функціонала

$$J(y) = \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + (y')^2) dx, \quad \begin{cases} y(-1) = 1; \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

2. Дослідити отриманий екстремум на достатні умови екстремуму.

Обчислити значення функціонала на знайдений екстремалі і, для порівняння, на прямій, що з'єднує точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Побудувати графік розв'язання.

У цьому прикладі підінтегральна функція $F(x, y, y')$ є функцією загального вигляду, тому складемо рівняння Ейлера у вигляді (13.10) і розв'яжемо його. Потім побудуємо графік розв'язання. За одним заходом досліджуємо на виконання достатніх умов екстремуму і обчислимо значення функціонала на екстремалі і відрізьку прямої $M_1 - M_2$.

Застосуємо для розв'язання завдання *MATLAB*.

1. Очистимо пам'ять. Надрукуємо заголовок розв'язуваної задачі. Опишемо символічні змінні. Для розв'язання рівняння Ейлера використовуємо прийняті в *MATLAB* позначення похідних: Dy для y' і $D2y$ для y'' . Аргумент позначимо x , а функцію – y .

```
clear all % очистили пам'ять
disp('Розв'язуємо приклад 4') % виводимо заголовок задачі
syms x y Dy D2y % описали символічні змінні
```

Результат:

Розв'язуємо приклад 4

2. Вводимо підінтегральну функцію і граничні умови. Друкуємо їх. Тут ви повинні поставити свої вихідні дані: підінтегральну функцію F і граничні умови x_1, y_1, x_2, y_2 .

```
F=x^2+y^2+Dy^2; % підінтегральна функція
x1=-1; % граничні умови
y1=1;
x2=1;
y2=2;
disp('Вихідні дані:')
fprintf(['Підінтегральна функція'...
 'F(x,y,y')=%s\n'],char(F))
fprintf('Гранична умова ліворуч: y(%d)=%d\n',x1,y1)
fprintf('Гранична умова праворуч: y(%d)=%d\n',x2,y2)
```

Результат:

```
Вихідні дані:
Підінтегральна функція F(x,y,y')=Dy^2 + x^2 + y^2
Гранична умова зліва: y(-1)=1
Гранична умова справа: y(1)=2
```

3. Починаємо введення диференціального рівняння Ейлера (7.1). Знайдемо часткові похідні F_x і F_y' . Надрукуємо їх.

```
dFdy=diff(F,y); % обчислили Fy
dFdy1=diff(F,Dy); % обчислили Fy'
fprintf('Fy=%s\n',char(dFdy))
fprintf('Fy''=%s\n',char(dFdy1))
```

Результат:

$$F_y = 2 * y$$
$$F_{y'} = 2 * D_y$$

4. У рівняння Ейлера (7.1) входить повна похідна dy'/dx . Обчислимо її за звичайною формулою диференціювання складної функції:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y''.$$

Надрукуємо її. Надрукуємо також величину $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$, необхідну для перевірки достатніх умов екстремуму за ознакою Лежандра.

```
d_dFdy1_dx=diff(dFdy1,x); % Fxy'x
d_dFdy1_dy=diff(dFdy1,y); % Fyy'
d_dFdy1_dy1=diff(dFdy1,Dy); % Fy'y'-умова Лежандра
dFy1dx=d_dFdy1_dx+d_dFdy1_dy*Dy+d_dFdy1_dy1*D2y;
fprintf('dFy''/dx=%s\n',char(dFy1dx))
disp('Умова Лежандра: ')
fprintf('Fy'y'=%s\n',char(d_dFdy1_dy1))
```

Результат:

$$dF_y'/dx = 2 * D^2 y$$

Умова Лежандра:

$$F_{y'y'} = 2$$

5. Складемо ліву частину диференціального рівняння Ейлера (7.1) і спростимо її. Перетворимо символічну змінну Euler в рядок.

```
Euler=simple(dFdy-dFy1dx); % рівняння Ейлера
deqEuler=[char(Euler) '=0']; % в рядок додали =0
fprintf('Рівняння Ейлера:\n%s\n',deqEuler)
```

Результат:

Рівняння Ейлера:

$$2 * y - 2 * D^2 y = 0$$

6. Ми склали рівняння Ейлера, тепер розв'яжемо його. Команда *dsolve* дозволяє знаходити як загальне розв'язання диференціального рівняння, так і

часткове його розв'язання, що задовольняє задані початкові або граничні умови. Знайдемо розв'язання загального рівняння Ейлера.

```
Sol=dsolve(deqEuler, 'x'); % розв'язуємо рівняння Ейлера
if length(Sol)~=1 % розв'язання немає або більш одного
    error('Немає розв'язання або більш одного розв'язання! ');
else
    disp('Загальне розв'язання рівняння Ейлера: ')
    fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol))
end
```

Результат:

Загальне розв'язання рівняння Ейлера:
 $y(x)=C3*\exp(x) + C2/\exp(x)$

7. Сформуємо тепер рівняння для граничних умов, підставивши знайдене аналітичне розв'язання *Sol* в граничні точки x_1 і x_2 і дорівнявши їх відповідно до y_1 і y_2 .

```
SolLeft=subs(Sol,x,x1); % підставили x1
SolRight=subs(Sol,x,x2); % підставили x2
EqLeft=[char(SolLeft) '=' char(sym(y1))]; % =y1
EqRight=[char(SolRight) '=' char(sym(y2))]; % =y2
disp('Рівняння для граничних умов: ')
fprintf('%s\n',EqLeft,EqRight)
```

Результат:

Рівняння для граничних умов:
 $C2*\exp(1) + C3/\exp(1)=1$
 $C2/\exp(1) + C3*\exp(1)=2$

7. Розв'язуємо отриману систему кінцевих рівнянь – знаходимо значення довільних постійних C_2 і C_3 (індекси цих постійних можуть бути різними. Тому уважно дивіться, які саме індекси призначив *MATLAB* у вашому випадку). Присвоюємо знайдені розв'язання символічним константам, отриманим при розв'язанні диференціального рівняння. Тепер обчислюємо аналітичне розв'язання *Sol21*. Таке обчислення зводиться до того, що в нього будуть підставлені знайдені значення констант C_2 і C_3 . Друкуємо знайдене рівняння екстремалі.

```

Con=solve(EqLeft,EqRight, 'C2,C3'); % розв'язуємо систему
C2=Con.C2; % прирівнюємо отриманні розв'язання
C3=Con.C3; % символічним константам C2 и C3
Sol21=vpa(eval(Sol),14); % підставили C2,C3
disp('Рівняння екстремалі: ')
fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol21))

```

Результат:

Рівняння екстремалі:
 $y(x) = 0.69877023730774 * \exp(x) + 0.27331117318808 / \exp(1.0 * x)$

9. Обчислимо значення функціонала на знайдений екстремалі і на прямій, що з'єднує точки M_1 і M_2 . Підставимо в підінтегральну функцію F аналітичні вирази для цих ліній та їх похідних, а потім проінтегруємо. Надрукуємо результати.

```

Fextr=subs(F,{y,Dy},{Sol21,diff(Sol21,x)});
Jextr=eval(int(Fextr,x,x1,x2))
ylin=(x-x1)*(y2-y1)/(x2-x1)+y1;
Flin=subs(F,{y,Dy},{ylin,diff(ylin,x)});
Jlin=eval(int(Flin,x,x1,x2))

```

Результат:

Jextr = 4.7504
 Jlin = 5.8333

У даному прикладі умова Лежандра говорить про сильний мінімум, що підтверджується отриманим результатом: значення функціонала на екстремалі менше, ніж на іншій допустимій функції. Спробуйте обчислити значення функціонала не тільки на прямій M_1 - M_2 , а на якій-небудь іншій допустимій кривій, досить близькій до екстремалі. Наприклад, можна накласти на екстремалі кілька півхвиль синусоїди, зміщеної і деформованої уздовж осі O - x так, що $[0 \ \pi] \Rightarrow [x_1 \ x_2]$.

10. І нарешті, будуємо графік. Задаємо масив аргументів для рисування графіка функції і обчислюємо значення функції. Рисуємо графік, підписуємо заголовок і координатні осі встановленим шрифтом.

```

xpl=linspace(x1,x2); % задаємо масив абсцис

```

```

y21=subs(Sol21,x,xpl); % обчислили ординати
figure % фігура
plot(xpl,y21, '-r') % рисуємо графік червоною лінією
set(get(gcf, 'CurrentAxes'),...
'FontName', 'Times New Roman Cyr', 'FontSize',12)
title('\bfПриклад 4') % заголовок
xlabel('\itx') % мітка осі OX
ylabel('\ity\rm(\itx\rm) ') % мітка вісі OY

```

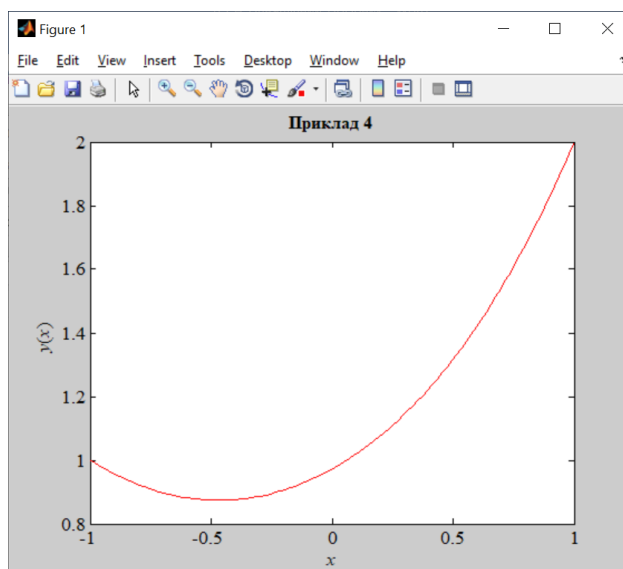


Рисунок 13.1 – Графік екстремалі прикладу 4

Приклад 5.

Знайти екстремаль функціонала:

$$J(y) = \int_{-1}^1 \left((y')^2 + 2y' \operatorname{sh}(x) - 5x^2 \right) dx, \quad \begin{cases} y(-1) = 2; \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

Дослідити на виконання достатніх умов екстремуму. Побудувати графік розв'язання. У цьому прикладі підінтегральна функція $F(x, y, y')$ не залежить явно від y .

1. Складемо програму для розв'язання цієї варіаційної задачі. Спочатку введемо вихідні дані. У нас буде перший інтеграл рівняння Ейлера, тому ні сама функція y , ні її друга похідна y'' нам не потрібні, і ми їх не описуємо.

```

clear all % видалили все
disp('Розв'язуємо приклад 5') % заголовок задачі
syms x Dy % описали символічні змінні
F=Dy^2+2*Dy*sinh(x)-5*x^2; % підінтегральна функція
x1=-1; % граничні умови
y1=2;
x2=1;
y2=3;
disp('Вихідні дані: ')
fprintf(['Підінтегральна функція '...
'F(x,y')=%s\n'],char(F))
fprintf('Гранична умова ліворуч: y(%d)=%d\n',x1,y1)
fprintf('Гранична умова праворуч: y(%d)=%d\n',x2,y2)

```

Результат:

Розв'язуємо приклад 5

Вихідні дані:

Підінтегральна функція $F(x,y')=2*Dy*\sinh(x) + Dy^2 - 5*x^2$

Гранична умова зліва: $y(-1)=2$

Гранична умова справа: $y(1)=3$

2. Будуємо перший інтеграл і розв'язуємо отримане диференціальне рівняння. Назви констант C_1 і C_2 використовуються в команді *dsolve*, тому при складанні 1-го інтеграла рівняння Ейлера позначимо константу C . Всі використані тут функції й оператори *MATLAB* були описані раніше у прикладі 4.

```

dFdY1=simple(diff(F,Dy)); % Fy'
deqEuler=[char(dFdY1) '=C']; % склали рівняня
disp('Перший інтеграл рівняння Ейлера: ')
fprintf('%s\n',deqEuler)
Sol=dsolve(deqEuler, 'x'); % розв'язуємо рівняння Ейлера
if length(Sol)~=1 % рішення немає або більше одного розв'язку
    error('Немає розв'язку або більш одного одного розв'язку! ');
else
    disp('Загальний розв'язок рівняння Ейлера: ')
    fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol))
end

```

Результат:

Перший інтеграл рівняння Ейлера:

$$2*Dy + 2*\sinh(x)=C$$

Загальний розв'язок рівняння Ейлера:

$$y(x)=C5 - \cosh(x) + (C*x)/2$$

3. У змінній *Sol* отримано загальний розв'язок, довільні постійні позначені C і C_5 . Знайдемо їх. Для цього підставимо в *Sol* граничні точки. Прирівняємо отримані вирази відповідно до y_1 і y_2 . Тим самим ми сформуємо систему рівнянь.

```
SolLeft=subs(Sol,x,sym(x1)); % підставили x1
SolRight=subs(Sol,x,sym(x2)); % підставили x2
EqLeft=[char(SolLeft) '=' char(sym(y1))]; % =y1
EqRight=[char(SolRight) '=' char(sym(y2))]; % =y2
disp('Рівняння для граничних умов: ')
fprintf('%s\n',EqLeft,EqRight)
```

Результат:

```
Рівняння для граничних умов:
C5 - C/2 - cosh(1)=2
C/2 + C5 - cosh(1)=3
```

4. Розв'яжемо отриману систему – знайдемо довільні постійні C і C_2 . Підставимо їх у розв'язок *Sol*. Обмежимо розв'язок 14 знаками. Надрукуємо рівняння знайденої екстремалі.

```
Con=solve(EqLeft,EqRight, 'C,C5'); % розв'язуємо
C=Con.C; % прирівнюємо отримані розв'язки
C5=Con.C5; % символічним змінним C та C5
Sol22=vpa(eval(Sol),14); % підставили C5, C
disp('Рівняння екстремалі: ')
fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol22))
```

Результат:

```
Рівняння екстремалі:
y(x)=0.5*x - 1.0*cosh(x) + 4.0430706347152
```

5. Подальші дії не відрізняються від описаних у прикладі 4. Рисуємо графік і обчислюємо $Fy'u'$, яка потрібна для перевірки достатніх умов екстремуму за ознакою Лежандра.

```
xpl=linspace(x1,x2); % задали масив абсцис
y22=subs(Sol22,x,xpl); % обчислили ординати
figure % фігура
plot(xpl,y22, '-r') % рисуємо графік червоною лінією
set(get(gcf, 'CurrentAxes'),...
'FontName', 'Times New Roman Cyr', 'FontSize',12)
```

```

title('\bfПриклад 5') % заголовок
xlabel('\itx') % мітка осі OX
ylabel('\ity\rm(\itx\rm) ') % мітка осі OY
Leg=diff(dFdy1,Dy); % Fy'y'
disp ('Достатня умова Лежандра: ')
fprintf('Fy'y'=%s\n',char(Leg))

```

Результат:

Достатня умова Лежандра:
 $Fy'y'=2$

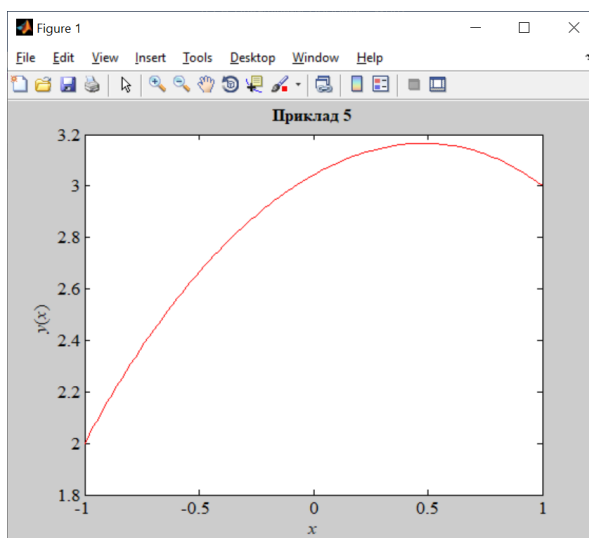


Рисунок 13.2 – Графік екстремалі прикладу 5

13.3 Завдання для самостійної роботи

Для свого варіанта функціоналів 1 та 2 знайти екстремалі, побудувати їх графіки та дослідити на виконання достатніх умов екстремуму. Порівняти знайдене значення з лінійною функцією, що задовольняє граничні умови, надані в завданні. d, m – відповідно день та місяць народження студента.

Варіант 1

$$1. J(y) = \int_{-1}^1 \left((y')^2 - 4y^2 + 2xy - x^2 \right) dx, \quad y(-1) = m; \quad y(1) = d.$$

$$2. J(y) = \int_0^2 \left((y')^2 - 4y' \sin(2x) - x^2 \right) dx, \quad y(0) = m; \quad y(2) = d.$$

Варіант 2

1. $J(y) = \int_{-1}^1 \left((y')^2 + 4y^2 + 4x^2y + x \cos(x) \right) dx, \quad y(-1) = m; \quad y(1) = d.$

2. $J(y) = \int_0^2 \left((y')^2 - 4y' \cos(2x) + 5 \sin(3x) \right) dx, \quad y(0) = m; \quad y(2) = -d.$

Варіант 3

1. $J(y) = \int_0^2 \left((y')^2 + 9y^2 + 2xy - x \sin(x) \right) dx, \quad y(0) = m; \quad y(2) = d.$

2. $J(y) = \int_1^3 \left((y')^2 - \frac{4y'}{x} + x \sin(x) \right) dx, \quad y(1) = m; \quad y(3) = -d.$

Варіант 4

1. $J(y) = \int_{-2}^0 \left((y')^2 - 4y^2 + 2y + x e^{2x} \right) dx, \quad y(-2) = m; \quad y(0) = d.$

2. $J(y) = \int_{-1}^1 \left((y')^2 - 2y' e^x + \cos(x) \right) dx, \quad y(-1) = m; \quad y(1) = d.$

Варіант 5

1. $J(y) = \int_0^1 \left((y')^2 - 9y^2 + 2y \sin(x) - x^2 e^x \right) dx, \quad y(0) = m; \quad y(1) = d.$

2. $J(y) = \int_{-1}^1 \left((y')^2 - \frac{2y'}{1+x^2} + e^{2x} \right) dx, \quad y(-1) = m; \quad y(1) = d.$

Варіант 6

1. $J(y) = \int_{-1}^1 \left((y')^2 + 4y^2 + 6y e^x + 2x \cos(x) \right) dx, \quad y(-1) = m; \quad y(1) = d.$

2. $J(y) = \int_{-1}^1 \left((y')^2 - 4y' e^x \cos(x) - \sin(x) \right) dx, \quad y(-1) = m; \quad y(1) = d.$

Варіант 7

1. $J(y) = \int_{-1}^1 \left((y')^2 + y^2 + 4ye^x - x\sin(x) \right) dx, \quad y(-1) = m; \quad y(1) = d.$

2. $J(y) = \int_1^3 \left((y')^2 - y' \ln(x) + 2x \right) dx, \quad y(1) = m; \quad y(3) = -d.$

Варіант 8

1. $J(y) = \int_{-1}^1 \left((y')^2 + 4y^2 + 8ye^{2x} + 3x^2 \right) dx, \quad y(-1) = m; \quad y(1) = d.$

2. $J(y) = \int_{-1}^1 \left(y' + (y')^2 \cos^2(x) - \sin^2(x) \right) dx, \quad y(-1) = m; \quad y(1) = -d.$

Варіант 9

1. $J(y) = \int_0^2 \left(2(y')^2 + 2y^2 + y\cos(x) - 5x \right) dx, \quad y(0) = m; \quad y(2) = d.$

2. $J(y) = \int_1^3 \left(y' + (y')^2 \sin^2(x) + e^{2x} \right) dx, \quad y(1) = -m; \quad y(3) = 4.$

Варіант 10

1. $J(y) = \int_0^2 \left(2(y')^2 + 2y^2 + x y \sin(x) + 6x e^x \right) dx, \quad y(0) = m; \quad y(2) = d.$

2. $J(y) = \int_0^2 \left(y' + (y')^2 e^x - \sin(x) \right) dx, \quad y(0) = m; \quad y(2) = -d.$

Контрольні запитання

1. Як формулюється елементарна задача варіаційного числення?
2. Яке основне рівняння Ейлера-Лагранжа?
3. Які часткові випадки підінтегральної функції можуть бути в елементарній задачі варіаційного числення?

4. Що таке екстремум функції?
5. Що таке функціонал?
6. Що таке екстремаль?
7. Як визначити тип отриманого екстремуму?
8. Для чого використовуються умови Лежандра?
9. Яке основне рівняння Ейлера-Пуассона?

За допомогою якої функції виконується знаходження розв'язання диференціальних рівнянь у пакеті *MATLAB*?

14 РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЕТЕРМІНОВАНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

14.1 Задача оптимального керування як задача Лагранжа варіаційного числення

Задача оптимального керування детермінованими об'єктами зі звичайними параметрами може бути сформульована таким чином.

Нехай функціонування об'єкта описується системою звичайних диференціальних рівнянь вигляду (14.1):

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f[x_i(t), u(t), t], \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14.1)$$

з граничними умовами

$$x_i(t_0) = x_{i0}^*; \quad x_i(t_1) = x_{i1}^*. \quad (14.2)$$

Якість роботи системи описується функціоналом:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[\dot{x}_i(t), x_i(t), u(t), t] dt, \quad (14.3)$$

де $x_i(t)$ – вектори стану об'єкта управління (фазові координати); $u(t)$ – управління; t_0, t_1 – відповідно початковий та кінцевий час управління.

Задача оптимального керування при цьому полягає в знаходженні функцій стану $x_i(t)$, що задовольняють граничні умови (14.2) та управління $u(t)$, які мінімізують функціонал (14.3).

Для розв'язання цієї задачі може бути використане варіаційне числення.

Розглянемо задачу оптимального управління як задачу Лагранжа варіаційного числення. Для знаходження необхідних умов екстремуму застосуємо теорему Ейлера – Лагранжа. Функція Лагранжа має вигляд

$$\Lambda = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F \left[\dot{x}_i(t), x_i(t), u(t), t \right] + \lambda_{1i}^T(t) \left(\dot{x}_i - f[x_i(t), u(t), t] \right) \right\} dt + l,$$

де $l = \lambda_{2i}^T (x_i(t_0) - x_{i0}^*) + \lambda_{3i}^T (x_i(t_1) - x_{i1}^*)$ – граничні умови.

Лагранжіан L має вигляд

$$L \left(\dot{x}_i(t), x_i(t), u(t), \lambda(t), t \right) = F \left[\dot{x}_i(t), x_i(t), u(t), t \right] + \lambda_{1i}^T(t) \left[\dot{x}_i - f[x_i(t), u(t), t] \right],$$

де $\lambda_{1i}^T, \lambda_{2i}^T, \lambda_{3i}^T$ – множники Лагранжа.

Необхідні умови екстремуму відповідно до цієї теореми мають вигляд:

1) стаціонарність за u : $\frac{\partial L}{\partial u} = 0$;

2) стаціонарність за x_i (рівняння Ейлера за відповідною змінною):

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0;$$

3) трансверсальність за x_i : $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(t_0) = \frac{\partial l}{\partial x_i}(t_0)$; $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(t_1) = -\frac{\partial l}{\partial x_i}(t_1)$.

Необхідні умови екстремуму становлять основу для визначення оптимальних траєкторій.

14.2 Рішення задачі оптимального керування аналітичним методом та за допомогою процедур пакету *MATLAB*

Нехай маємо одновимірний об'єкт керування, який описується рівнянням

$$y''(t) = u(t)$$

з граничними умовами: $y(0) = 0$; $y(10) = 10$; $y'(0) = 0$; $y'(10) = -5$.

Якість його функціонування описується за допомогою функціонала

$$J = \int_0^{10} u^2(t) dt$$

Необхідно знайти таке управління $u(t)$, яке мінімізує J та переводить об'єкт управління з початкового стану в кінцевий. Такий функціонал використовується при мінімізації енергетичних витрат.

Розв'язання.

Виконаємо заміну рівняння другого порядку, що описує роботу об'єкта, системою рівнянь першого порядку згідно (14.1), а саме:

$$y = y_1; y' = y_1' = y_2; y'' = y_1'' = y_2' = u.$$

Тоді:

$$\begin{cases} y_1' - y_2 = 0; \\ y_2' - u = 0. \end{cases}$$

Складемо функцію Лагранжа з використанням невизначених множників λ_i :

$$J^* = \int_0^{10} (u^2(t) + \lambda_1(t)(y_1' - y_2) + \lambda_2(t)(y_2' - u)) dt.$$

Застосуємо необхідні умови екстремуму (1) – (2).

Запишемо рівняння Ейлера для кожної функції, що входить до функції Лагранжа.

Рівняння Ейлера для y_1 :

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0;$$

Рівняння для u :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u'} = 0;$$

Рівняння для λ_2 :

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \lambda_2'} = 0.$$

Рівняння Ейлера для y_2 :

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y_2'} = 0;$$

Рівняння для λ_1 :

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \lambda_1'} = 0;$$

Підставивши у відповідні рівняння функцію F , отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1) \lambda'_1 = 0; & 2) -\lambda_1 - \lambda'_2 = 0; & 3) 2u - \lambda_2 = 0; \\ 4) y'_1 - y_2 = 0; & 5) y'_2 - u = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь та підставивши значення початкових умов, отримуємо:

$$\begin{cases} \lambda_1 = C_1; \\ \lambda_2 = -C_1 t + C_2; \\ u = \lambda_2 / 2 = (-C_1 t + C_2) / 2; \\ y_2 = (-C_1 t^2 / 2 + C_2 t) / 2 + C_3; \\ y_1 = (-C_1 t^3 / 6 + C_2 t^2 / 2) / 2 + C_3 t + C_4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2(0) = (-C_1 0^2 / 2 + C_2 0) / 2 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0; \\ y_1(0) = (-C_1 0^3 / 6 + C_2 0^2 / 2) / 2 + C_3 0 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2(10) = (-C_1 10^2 / 2 + C_2 10) / 2 = -5; \\ y_1(10) = (-C_1 10^3 / 6 + C_2 10^2 / 2) / 2 = 10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0.84; \\ C_2 = 3.2. \end{cases}$$

Отже рівняння для управління має вигляд

$$u = (-C_1 t + C_2) / 2 = 1.6 - 0.42 t.$$

Обчислимо значення функціонала, що оцінює якість управління:

$$J = \int_0^{10} u^2(t) dt = \int_0^{10} (1.6 - 0.42t)^2 dt = 2.56t - 1.344t^2 / 2 + 0.1764t^3 / 3 \Big|_0^{10} = 17.2.$$

Рішення цієї задачі і аналогічних їй можемо виконати за допомогою пакету *MATLAB*. Нижче приведено текст програми і послідовність дій обчислення.

1. Очистимо пам'ять. Опишемо символічні змінні. Для розв'язання рівняння Ейлера використовуємо прийняті в *MATLAB* позначення похідних: Dy для y' і $D2y$ для y'' . Аргумент позначимо t , а функцію – u .

```
clear all % очистили пам'ять
syms t u y1 Dy1 y2 Dy2 L1 DL1 L2 DL2 % описали символічні змінні
2. Вводимо функцію Лагранжа і граничні умови. Друкуємо їх.
F=u^2+L1*(Dy1-y2)+L2*(Dy2-u) ; % функція Лагранжа
t0=0; % граничні умови
t1=10;
y1_t0=0;
y2_t0=0;
y1_t1=10;
y2_t1=-5;
disp('Вихідні дані:')
fprintf(['Функція Лагранжа'...
'F(t,u,y)=%s\n'],char(F))
```

Результат:

Вихідні дані:
Функція Лагранжа $F(t,u,y)=L2*(Dy2 - u) + L1*(Dy1 - y2) + u^2$

3. Починаємо введення необхідних умов екстремуму (1) – (2). Знайдемо часткові похідні для кожної змінної. Надрукуємо їх.

```
dFdu=diff(F,u); % обчислили Fu
dFdy1=diff(F,y1); % обчислили Fy1
dFdDy1=diff(F,Dy1); % обчислили FDy1
dFdy2=diff(F,y2); % обчислили Fy2
dFdDy2=diff(F,Dy2); % обчислили FDy1
dFdL1= diff(F,L1); % обчислили FL1
dFdL2= diff(F,L2); % обчислили FL2
fprintf('FDy1=%s\n',char(dFdDy1))
fprintf('Fy2=%s\n',char(dFdy2))
fprintf('FDy2=%s\n',char(dFdDy2))
fprintf('FL1=%s\n',char(dFdL1))
fprintf('FL2=%s\n',char(dFdL2))
```

Результат:

```
Fu=2*u - L2
Fy1=0
FDy1=L1
Fy2=-L1
FDy2=L2
FL1=Dy1 - y2
FL2=Dy2 - u
```

4. У рівняння Ейлера входить повна похідна dFy'/dx . Обчислимо її за звичайною формулою диференціювання складної функції:

$$\frac{dF_y}{dx} = \frac{\partial F_y}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} y' + \frac{\partial F_y}{\partial y'} y''.$$

У данному прикладі рівняння Ейлера використовується тільки для змінних y_1 та y_2 . Тому знайдемо повну похідну тільки для цих змінних.

Надрукуємо їх.

```
d_dFDy1_dt=diff(dFdDy1,t); % Fty1't
d_dFDy1_L1=diff(dFdDy1,L1); % Fy1L1

dFy1dt=d_dFDy1_dt+d_dFDy1_L1*DL1; %

d_dFDy2_dt=diff(dFdDy2,t); % Fty1't
d_dFDy2_L2=diff(dFdDy2,L2); % Fy2L2

dFy2dt=d_dFDy2_dt+d_dFDy2_L2*DL2; %
fprintf('dFDy1/dt=%s\n',char(dFy1dt))
fprintf('dFDy2/dt=%s\n',char(dFy2dt))
```

Результат:

```
dFDy1/dt=DL1
dFDy2/dt=DL2
```

5. Складемо ліву частину диференціального рівняння Ейлера для змінних y_1 та y_2 і спростимо її. Перетворимо символічні змінні Euler_y1 та Euler_y2 в рядок. Додамо рівняння для змінних u , $L1$ та $L2$.

```
Euler_y1=simple(dFdy1-dFy1dt); % рівняння Ейлера для y1
deqEuler_y1=[char(Euler_y1) '=0']; % в рядок додали =0
fprintf('Рівняння Ейлера для y1:\n%s\n',deqEuler_y1)
Euler_y2=simple(dFdy2-dFy2dt); % рівняння Ейлера для y2
deqEuler_y2=[char(Euler_y2) '=0']; % в рядок додали =0
fprintf('Рівняння Ейлера для y2:\n%s\n',deqEuler_y2)
eq_u = [char(dFdu) '=0'];
eq_L1 = [char(dFdL1) '=0'];
eq_L2 = [char(dFdL2) '=0'];
fprintf('Рівняння для u:\n%s\n',eq_u)
fprintf('Рівняння для L1:\n%s\n',eq_L1)
fprintf('Рівняння для L2:\n%s\n',eq_L2)
```

Результат:

Рівняння Ейлера для y_1 :

$$-DL1=0$$

Рівняння Ейлера для y_2 :

$$-DL2 - L1=0$$

Рівняння для u :

$$2*u - L2=0$$

Рівняння для $L1$:

$$Dy1 - y2=0$$

Рівняння для $L2$:

$$Dy2 - u=0$$

6. Склали рівняння Ейлера, тепер розв'яжемо систему рівнянь. Функція *dsolve* дозволяє знаходити як загальне розв'язання диференціального рівняння, так і часткове його розв'язання, що задовольняє задані початкові або граничні умови. Знайдемо розв'язок системи диференціальних рівнянь.

```
eq_L22 = char(subs(eq_L2,u,solve(eq_u,u)));  
Sol=dsolve(deqEuler_y1, deqEuler_y2, eq_L1, eq_L22, 'y1(0) = 0', 'y2(0) = 0'); %  
вирішуємо систему рівнянь
```

7. Сформуємо тепер рівняння для граничних умов, підставивши в знайдений аналітичний розв'язок *Sol* граничні точки t_1 і t_2 і дорівнявши їх відповідно до $y1_{t1}$ і $y2_{t1}$.

```
Left_y1=subs(Sol.y1,t,t1); % підставили t1  
Left_y2=subs(Sol.y2,t,t1); % підставили t1  
Eq_y1=[char(Left_y1) '=' char(sym(y1_t1))]; % =y1_t1  
Eq_y2=[char(Left_y2) '=' char(sym(y2_t1))]; % =y2_t1  
disp('Рівняння для граничних умов: ')  
fprintf('%s\n',Eq_y1,Eq_y2)
```

Результат:

Рівняння для граничних умов:

$$(500*C3)/3 + 50*C4=10$$

$$50*C3 + 10*C4=-5$$

7. Розв'язуємо отриману систему кінцевих рівнянь – знаходимо значення довільних постійних $C3$ і $C4$. Присвоюємо знайдені розв'язки символічним константам, отриманим при розв'язанні системи диференціальних рівнянь.

Тепер обчислюємо аналітичний розв'язок Sol_U . Таке обчислення зводиться до того, що в нього будуть підставлені знайдені значення констант $C3$ і $C4$. Друкуємо знайдене управління.

```
U= solve(char(subs(eq_u,L2,Sol.L2)),u);
Con=solve(Eq_y1,Eq_y2, 'C3,C4'); % розв'язуємо систему
C3=Con.C3; % прирівнюємо отриманні розв'язки
C4=Con.C4; % символічним константам C2 и C3
Sol_y1=vpa(eval(Sol.y1),10); % підставили C3,C4
Sol_y2=vpa(eval(Sol.y2),10); % підставили C3,C4
Sol_U=vpa(eval(U),10); % підставили C3,C4
disp('Рівняння управління')
fprintf('u(t)=%s\n',char(Sol_U))
```

Результат:

Рівняння управління
 $u(t)=1.6 - 0.42*t$

9. Обчислимо значення функціонала, що оцінює якість управління.

```
JJ = u^2;
Jlextr=subs(JJ,{u},{Sol_U});
Jextr=eval(int(Jlextr,t,t0,t1))
```

Результат:

Jextr =
 17.2000

10 Будуємо графік. Задаємо масив аргументів для рисування графіка функції і обчислюємо значення функції. Рисуємо графік, підписуємо заголовок і координатні осі встановленим шрифтом.

```
tp1=linspace(t0,t1); % задаємо масив абсцис
U2=subs(Sol_U,t,tp1); % обчислили ординати
figure % фігура
plot(tp1,U2, '-r') % рисуємо графік червоною лінією
set(get(gcf, 'CurrentAxes'),...
'FontName', 'Times New Roman Cyr', 'FontSize',12)
title('\bfУправління') % заголовок
xlabel('\itt') % мітка осі OX
ylabel('\itU\rm(\itt\rm) ') % мітка осі OY
```

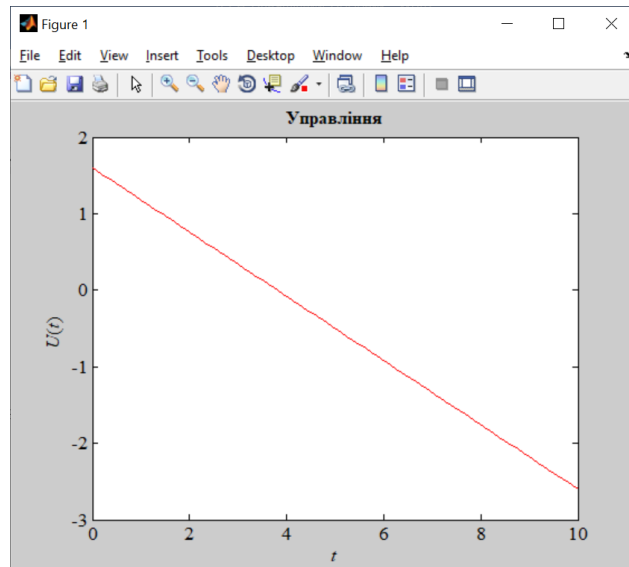


Рисунок 14.1 – Графік зміни управління

14.3 Завдання для самостійної роботи

Для об'єкта управління, що описується заданною системою рівнянь з граничними умовами, якість якої описується за допомогою функціоналу, необхідно:

1. використовуючи невизначені множники Лагранжа, скласти допоміжний функціонал;
2. записати систему рівнянь Ейлера відповідно до всіх змінних;
3. знайти управління $U(t)$, яке переводить об'єкт управління із початкового стану в кінцевий та доставляє функціоналу J екстремальне значення;
4. знайти постійні інтегрування;
5. оцінити значення функціонала.

Варіант 1

$$\begin{cases} y_1' = y_2; \\ y_2' = u, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(10) = 100; \quad y_2(0) = 0; \quad y_2(10) = 20;$$

$$J = \int_0^{10} \dot{u}^2 dt, \quad u(0) = 0; \quad u(10) = 10.$$

Варіант 2

$$\begin{cases} y_1' = y_2; \\ y_2' = u, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(10) = 10; \quad y_2(0) = 0; \quad y_2'(10) = 20;$$

$$J = \int_0^{10} (\dot{u}^2 - 2ut) dt, \quad u(0) = 0; \quad u(10) = 5.$$

Варіант 3

$$\begin{cases} y_1' = y_2; \\ y_2' = u, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(4) = 5; \quad y_2(0) = 0; \quad y_2'(4) = -10;$$

$$J = \int_0^4 (\dot{u}^2 - 10u^2) dt, \quad u(0) = 0; \quad u(4) = 15.$$

Варіант 4

$$\begin{cases} y_1' = y_2; \\ y_2' = u, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(10) = 15; \quad y_2(0) = 0; \quad y_2'(10) = -10;$$

$$J = \int_0^{10} (10\dot{u}^2 + 3u^2) dt, \quad u(0) = 0; \quad u(10) = 20.$$

Варіант 5

$$\begin{cases} y_1' = y_2; \\ y_2' = u, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(10) = 100; \quad y_2(0) = 0; \quad y_2'(10) = 20;$$

$$J = \int_0^{10} (3\dot{u}^2 + 4tu + 10) dt, \quad u(0) = 0; \quad u(10) = 10.$$

Варіант 6

$$\begin{cases} y_1' = y_2; \\ y_2' = u, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(10) = -10; \quad y_2(0) = 0; \quad y_2'(10) = -20;$$

$$J = \int_0^{10} \ddot{u}^2 dt, \quad u(0) = 0; \quad u(10) = 10, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad \dot{u}(10) = 30.$$

Контрольні запитання

1. Як формулюється задача оптимального управління детермінованими об'єктами зі звичайними параметрами?
2. Яке основне рівняння Ейлера-Лагранжа?
3. Що таке функція Лагранжа і як її задати?
4. Що таке лагранжіан?
5. Що таке екстремаль?
6. Як необхідні умови екстремуму в задачі оптимального управління?
7. Для чого використовуються умови Лежандра?
7. В якому випадку необхідно використовувати рівняння Ейлера-Пуассона в задачі оптимального управління?

15 ПРИНЦИП МАКСИМУМУ

15.1 Особливості використання принципу максимуму для оптимізації систем

Метод розроблено Л. С. Понтрягіним. Цей метод можливо ефективно використати для оптимізації об'єктів, які описуються системою диференціальних рівнянь виду:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_k), \quad (15.1)$$

де x_i – фазові координати, u_k – управління. На відміну від методу загальної задачі Лагранжа, тут час « t » в явному вигляді не входить. Крім того координати в принципі максимуму розділяються на фазові координати і управління (у варіаційному численні всі координати рівноправні). Це зручно, якщо обмеження накладаються тільки на управління. При цьому на фазові координати обмеження не накладаються.

Якщо обмеження є комбінаціями фазових координат і управлінь, то для рішення задачі оптимізації більш доцільно використовувати варіаційне числення.

Загальною задачею оптимізації за допомогою методу принципу максимуму є знаходження управлінь $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$, за допомогою яких система (об'єкт) переводиться за час T із початкового положення $x_i(0) = x_{i0}$ в положення $x_i(T) = x_{iT}$ і при цьому досягається мінімум функціонала

$$J = \int_0^T (x_i, u_i) dt. \quad (15.2)$$

Окремим випадком є задача оптимізації управління швидкодією, де функціоналом є час « T », в процесі якого здійснюється перехід системи із положення x_{i0} в положення x_{iT} .

Можливо любу задачу оптимізації управління розглядати як задачу про швидкодію. Для цього до рівняння (15.1) необхідно додати рівняння

$$\frac{dx_0}{dt} = f(x_i, u_j) \quad (15.3)$$

і тоді задача мінімізації функціонала (15.2) стане еквівалентно задачі оптимальної швидкодії для розширеної системи $(n+1)$ рівняння рівнянь (15.1) і (15.3).

В подальшому будемо розглядати задачу максимальної швидкодії.

В принципі максимуму оптимальні управління $u_j(t)$ знаходять зразу у класі кусочно-неперервних або просто вимірювальних функцій, на відміну від варіаційного методу, де екстремалі знаходяться в класі гладких функцій. Відносно використання системи (15.1) допускається можливість миттєвої зміни управлінь. Це можливо, постільки як управління можливо використовувати швидкість, або для конкретної системи такі управління, які в межах різної точності рахувати як безінерційні.

Тут, в принципі максимуму замість невизначених множників Лагранжа $\lambda_i(t)$ і допоміжної функції L (перехід до нового функціоналу) використовується нова функція H (гамільтоніан) і функції ψ_i . При цьому

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_k). \quad (15.4)$$

За допомогою цієї функції і основної системи рівнянь (15.1), рівняння які необхідні для визначення допоміжних функцій, записуються в симетричному вигляді:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dH}{d\psi_i}; \quad (15.5)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{dH}{dx_i}. \quad (15.6)$$

Умови оптимальності слідуєть із теореми про максимум.

15.1.1 Теорема про максимум: якщо $u_j(t)$ - оптимальне управління, то воно доставляє максимум функції H (15.4). Крім того в кінцевий термін часу " t " повинна виконуватися умова

$$H[\psi(t); x(t_1); u(t_1)] \geq 0. \quad (15.7)$$

В принципі максимуму необхідно розрізняти три випадки.

1. Загальний випадок нелінійної керованої системи (тобто нелінійної відносно фазових координат і управлінь).

2. Систему, рівняння якої лінійні відносно фазових координат і управлінь при обмеженнях тільки на управління.

3. Систему, рівняння якої лінійні відносно управлінь але не відносно фазових координат при обмеженнях тільки на управління.

В загальному випадку нелінійної керованої системи, коли гамільтоніан H залежить від управління не лінійно, із теореми про максимум слідує, що необхідною умовою екстремуму є умова

$$\frac{dH}{du} = 0, \quad (15.8)$$

тобто умова максимуму гамільтоніана всередині допустимої області, або умова $u = \pm 1$.

Умова (15.7) співпадає з необхідною умовою екстремуму (в даному випадку максимуму) рівняння Ейлера класичного варіаційного числення і для загального випадку нелінійних управлінь (наприклад u^2) систем теорема про максимум повністю еквівалентна узагальненій теоремі Ейлера: екстремум в замкнутій області досягається на змішаній кривій, складеній із кусків екстремалей, тобто рішень системи рівнянь (15.5), (15.6), (15.7) і частин границі області $u = \pm 1$.

Для загального випадку нелінійної системи принцип максимуму з обчислювальної сторони не вносить нічого принципово нового. Тому нелінійні задачі краще рішати класичними методами, використовуючи узагальнену теорему Ейлера, постільки вони забезпечують найбільшу простоту і наочність рішення.

15.2 Використання принципу максимуму для оптимізації лінійних систем

Для лінійних систем принцип максимуму має суттєві переваги, так як по виду гамільтоніана в ряду випадків можливо визначити функцію, яка доставляє йому максимум (тобто без рішення $\frac{dH}{du} = 0$).

Розглянемо лінійну керовану систему з постійними коефіцієнтами, рівняння якої мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{1.1}x_1 + a_{1.2}x_2 + \dots + a_{1.n}x_n + b_1u; \\ &\dots\dots\dots; \\ \dot{x}_n &= a_{n.1}x_1 + a_{n.2}x_2 + \dots + a_{n.n}x_n + b_nu. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Знайдемо управління, яке забезпечує мінімальний час перевodu системи із стану $X_i(0) = X_{i.0}$ в стан $X_i(T) = X_{iT}$ при обмеженнях на управління $|u| \leq 1$, тобто вирішимо задачу максимальної швидкодії.

Гамільтоніан H в даному випадку має вигляд:

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_iu \right). \quad (15.10)$$

Безпосередньо видно, що при обмеженнях $|u| \leq 1$ його максимум доставляється функцією

$$u = \text{Sign} \sum_{i=1}^n \psi_i(t)b_i. \quad (15.11)$$

Отже, оптимальне управління $u = +1$ при $\sum_{i=1}^n \psi_i b_i > 0$ і $u = -1$ при

$\sum_{i=1}^n \psi_i b_i < 0$. При $\sum_{i=1}^n \psi_i b_i = 0$ - управління не визначене. Однак $\sum_{i=1}^n \psi_i b_i = 0$ може

і не бути, постільки управління носить релейний характер.

Для повного визначення оптимального управління $u(t)$ необхідно вчислити функції $\psi_i(t)$, які знаходяться із рівнянь (15.5) і (15.6):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{d\psi_i}; \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{dH}{dx_i}.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{dH}{dx_1} = -a_{1.1}\psi_i - a_{2.1}\psi_2 - \dots - a_{n.1}\psi_n; \\ &\dots\dots\dots; \\ \frac{d\psi_n}{dt} &= -\frac{dH}{dx_n} = -a_{1.n}\psi_1 - a_{2.n}\psi_2 - \dots - a_{n.n}\psi_n. \end{aligned} \tag{15.12}$$

Отримали лінійну систему диференціальних рівнянь, які подібні вихідній системі, тільки другі змінні і знаки перед ними – навпаки і відсутня функція управління. Строки матриці коефіцієнтів міняються на стовпці. Таку систему управлінь називають пов’язаною вихідній системі (15.9).

Якщо вирішимо завдання інтегрування пов’язаної системи (знайдемо ψ_i) – це завдання називають завданням (1), то із (15.11) $\left\| u = \text{Sign} \sum_{i=1}^n \psi_i b_i \right\|$ знайдемо управління – це завдання (2). Після цього підставимо управління у вихідну систему – знайдемо оптимальні траєкторії $x_i(t)$ (завдання (3)). Завдання (3) являє собою рішення неоднорідної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами і кусочно - постійною правою частиною.

Таким чином знаходження оптимального управління для об’єкта, який описується системою рівнянь (15.9) зводиться до послідовного виконання математичних функцій: рішення системи диференціальних рівнянь і операції знаходження суми (для знаходження $u = \text{Sign} \sum_{i=1}^n \psi_i b_i$).

Основна складність полягає в рішенні завдання (1), постільки для системи не задані граничні умови (задані тільки для фазових координат). До того ж не відомо як визначати граничні умови для знаходження функцій ψ_i . Однак, від вибору функцій залежить управління "u" і "x_i", тобто управління і фазові координати. Значить від ψ_i залежать і граничні умови $x_{i,T}$.

Звичайно початкові умови для ψ_i знаходяться підбором. Тобто в початку задаються довільно і отримуємо значення $x_i(T)$, яке відрізняється від заданого. Після цього виконуємо корегування початкових умов $\psi_i(0)$, поки не отримаємо рівності $x_i(t) = x_{iT}$ (метод пристрілки).

15.2.1 Теорема про n - інтервали (теорема Фельдбаума).

Теорема може бути використана для лінійних систем з дійсними коренями характеристичного рівняння. В такому разі спрощується знаходження оптимальних управлінь.

Теорема: якщо корні характеристичного рівняння системи

$$\dot{x}_i = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n + b_i u \quad (15.13)$$

мають дійсні значення, то оптимальне по швидкодії управління $U(t)$ при наявності обмежень $|u| \leq 1$ приймає тільки значення $+1$ і -1 і для любых початкових значень має не більше $n-1$ переключень (тобто n рівнів постійності), де n – число, яке рівне порядку системи (15.13).

15.3 Використання принципу максимуму для оптимізації систем, які лінійні відносно управлінь

Диференціальні рівняння систем, які лінійні відносно управлінь, але не відносно фазових координат, можуть бути записані у вигляді:

$$\frac{dx_1}{dt} = q_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + u h_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

....., (15.14)

$$\frac{dx_n}{dt} = q_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + u h_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Будемо вважати, що в системі (15.14) присутнє тільки одне управління.

Максимум гамільтона H

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i [q_i(x) + u h_i(x)] \quad (15.15)$$

при наявності обмежень $|u| \leq 1$ надається функцією

$$u = \text{Sign} \sum_{i=1}^n \psi_i h_i(k). \quad (15.16)$$

Якщо сума $\sum_{i=1}^n \psi_i h_i(k)$ не дорівнює нулю на кінцевому відрізку часу, то оптимальне по швидкодії управління є релейним (± 1).

Для повного визначення управління $U(t)$ необхідно ще знайти функції $x_i(t)$ і $\psi_i(t)$ шляхом сумісного рішення рівнянь функції $\psi_i(t)$

$$\dot{\psi}_i = \frac{dH}{dx_i}$$

і системи (15.14), тобто в загальному випадку знайти рішення диференціальних рівнянь порядку $2n$. Однак уже, да же без рішення системи диференціальних рівнянь знаємо, що управління носить релейний характер.

15.4 Рішення задач оптимізації з використанням методу принципу максимуму

Приклад 1. Знайти рішення завдання оптимальної швидкодії для лінійної системи, яка описується диференціальним рівнянням виду:

$$\dot{x}_1 - x_2 = 0;$$

$$\dot{x}_2 - u = 0.$$

Ці рівняння можливо представити у формі Коші:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = u.$$

Тоді:

$$f_1(x, u) = x_2;$$

$$f_2(x, u) = u.$$

Для даної системи функція H буде мати вид:

$$H = x_2 \psi_1 + u \psi_2.$$

Виходячи з того, що визначення екстремуму виконується згідно виразу

$$\frac{dH}{du} = 0,$$

то в даному випадку видно, що якщо на управління накладено обмеження $|u| \leq 1$, максимум H досягається при $u = \text{Sign}\psi_2$. При цьому:

$\text{Sign } x = +1$ при $x > 0$; $\text{Sign } x = -1$ при $x < 0$; для $x = 0$ $\text{Sign } x$ не визначено.

Функції ψ_1 і ψ_2 знаходяться із рівнянь:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{dH}{dx_1} = 0;$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{dH}{dx_2} = -\psi_1.$$

Тоді: $\psi_1 = C_1$; $\psi_2 = C_2 - C_1 t$.

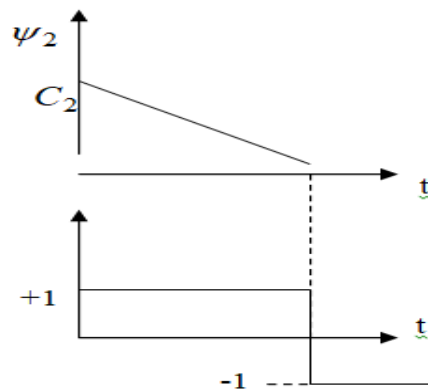


Рисунок 15.1 – Графіки функцій $\psi_2 = C_2 - C_1 t$ і управління $u = \text{Sign}\psi_2$

Оптимальне управління $u = \text{Sign}\psi_2$ представляє собою кусочно-лінійну функцію, яка міняє знак один раз, як приведено на рис. 15.1.

Це завдання можливо вирішити за допомогою методу варіаційного числення, однак рішення складніше.

Приклад 2. Знайти мінімум функціонала

$$J = \int_0^2 x^2 dt$$

з граничними умовами $x(0) = 1$; $x(2) = 0$ при обмеженнях $|\dot{x}| \leq 1$.

Це завдання еквівалентне завданню швидкодії для системи:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u; \\ \dot{x}_2 &= x^2.\end{aligned}$$

Складемо гамільтоніан:

$$H = \psi_1 u + \psi_2 x_1^2.$$

Відповідно до теореми про максимум, оптимальним буде управління

$$u = \text{Sign} \psi_1.$$

Допоміжна функція ψ_1 знаходиться із рівнянь:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{dH}{dx_1} = -2\psi_2 x_1$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{dH}{dx_2} = 0.$$

$$\text{Тоді: } \psi_2 = C_1; \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -2C_1 x_1; \quad \psi_1 = -C_1 x_1^2 + C_2.$$

В цьому завданні безпосередньо видно, що мінімум функціонала при граничних умовах $x(0) = 1$ і $x(2) = 0$ досягається в тому випадку, якщо $U = -1$ при $0 \leq t \leq 1$ і $U = 0$ при $1 \leq t \leq 2$.

В нашому випадку $x = 1 - t$, при $0 \leq t \leq 1$; $x = 0$ при $1 \leq t \leq 2$.

Тому що $\dot{x} = u$, то:

$$1. \quad x = -t + c_2; \quad x(0) = 1; \quad c_2 = 1.$$

$$2. \quad \dot{x} = 0; \quad x = c_3; \quad x(2) = 0; \quad c_3 = 0; \quad x = 0.$$

Визначимо точку перетину x з вісю t .

$$x = -t + c_2; \quad x = -t + 1. \quad \text{При } x = 0 \quad t = 1.$$

Дійсно заданий функціонал не може бути негативним і мінімум його буде досягатися в тому випадку, якщо $x(t)$ буде зменшуватися від начального значення до нуля з найбільш можливою швидкістю, а після цього залишиться із нульовим значенням.

При $t \geq 1$, функція $\psi_2 = 0$.

Для $1 \leq t \leq 2$ має місце особливе управління, постільки в цьому інтервалі часу теорема про максимум, яка в даному випадку виражається рівністю $U = \text{Sign } \psi_1$ уже не визначає управління $U(t)$, так як функція $\text{Sign } \psi_1$ при $\psi_1 = 0$ може приймати любі значення.

Контрольні запитання

1. Яка відмінність методу принципу максимуму від методу загального завдання Лагранжа?
2. Чи присутня рівноправність координат в принципі максимуму?
3. В яких випадках доцільно використовувати при оптимізації систем принцип максимуму?
4. Що собою являє задача оптимізації управління швидкістю?
5. Як побудувати оптимізаційну модель управління швидкістю?
6. Якого вигляду (класу) проводиться пошук оптимальних управлінь?
7. Який вигляд (математична модель функції (H) - гамільтоніана)?
7. Які рівняння необхідні для визначення допоміжних функцій?
9. Які умови оптимальності системи. Теорема про максимум?
10. Які три випадки в принципі максимуму необхідно розрізняти?
11. Теорема про n -інтервали.
12. Як формулюється задача принципу максимуму?

16 ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

16.1 Постановка задачі лінійного програмування

Однією з задач оптимізації, є так звана задача лінійного програмування (ЗЛП), в якій як цільова функція, так і всі обмеження лінійні.

Постановки задач лінійного програмування, які зустрічаються на практиці, передбачають ще одне додаткове обмеження. Це умова невід'ємності значень всіх змінних. Далі, обмеження типу нерівностей $p_i(x) \geq 0$ або $p_i(x) \leq 0$ введенням додаткових змінних $z_i \geq 0$ з невід'ємними значеннями перетворюються в рівності $p_i(x) - z_i = 0$ або $p_i(x) + z_i = 0$. Крім того, простою зміною знаке цільової функції задача знаходження максимуму зводиться до задачі знаходження мінімуму. Таким чином, в лінійному програмуванні можна обмежитись лише розв'язанням задачі мінімізації.

Стандартна постановка задачі лінійного програмування полягає в тому, щоб знайти мінімум лінійної функції

$$L(x, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

при обмеженнях

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad x_i \geq 0.$$

Задача лінійного програмування може не мати розв'язку в таких випадках:

1. Система S рівнянь $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$ несумісна, тобто взагалі не

має розв'язків;

2. Система S не має жодного невід'ємного розв'язку;

3. На множині M невід'ємних розв'язків системи S цільова функція $L(x, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ може приймати як завгодно великі за абсолютною величиною від'ємні значення, тобто $\min L(x_i) = -\infty$.

16.2 Різновидності рішення задач лінійного програмування

Найбільш поширеними методами рішення ЗЛП є: симплексний – метод; транспортна задача; цілочислове лінійне програмування.

16.2.1 Симплексний метод – це один з найбільш розповсюджених методів розв’язування задачі лінійного програмування в стандартній постановці, який полягає в послідовному застосуванні до лінійних функцій так званих симплексних перетворень, що являють собою розв’язки одного з обмежувальних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

відносно деякого невідомого x_j , і підстановку знайденого таким чином значення x_j до всіх обмежувальних рівнянь і в цільову функцію

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

16.2.2 Транспортна задача. В деяких окремих випадках розв’язання задачі лінійного програмування може бути значно спрощено. Одним з таких випадків є так звана транспортна задача, яку називають іноді задачею про призначення. Суть її полягає в мінімізації цільової функції

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j$$

при $m+n$ обмеженнях типу рівнянь

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j.$$

Додатково припускається зберігання рівняння шляхом перетворення моделей від відкритої до закритої форми

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

інакше задача не буде мати розв’язання.

Назву транспортної задача, задача, одержала тому, що до неї зводиться оптимізація плану перевезень вантажів з m пунктів відправлення з запасами a_1, \dots, a_m до n пунктів призначення з об'ємами споживання b_1, \dots, b_n . Роль коефіцієнтів c_{ij} в цільовій функції виконують питомі вартості, тобто вартості перевезення однієї одиниці вантажу з пункту i в пункт j . Задача полягає в мінімізації загальної вартості перевезення вантажів за умови, що вантажі повністю вивезені з усіх пунктів відправлення і потреби всіх пунктів призначення виявились повністю задоволеними.

Розв'язання транспортної задачі передбачає два етапи. На першому етапі виконується розподілення начальному (базовому) плану перевезень згідно одному із методів: північно-західного кута, мінімальної вартості та інше. На другому етапі – мінімізація перевезень шляхом їх перерозподілу.

16.2.3 Цілочислове лінійне програмування. В загальному випадку одержання цілочислового розв'язку потребує застосування спеціальних методів, серед яких найчастіше використовують метод Гоморі та методи відтинання та розгалужень і меж.

Метод Гоморі базується на двійковому алгоритмі рішення ЗЛП.

Методи відтинання базуються на наступному. Спочатку розв'язується звичайна задача лінійного програмування A_0 (з тимчасово відкинутою вимогою цілочислового розв'язку). Якщо координати точки $a(a_1, \dots, a_n) = 0$, яка одержана в результаті розв'язання задачі A_0 цілі числа, то ця точка надає розв'язок не тільки задачі A_0 , але й початкової задачі цілочислового лінійного програмування.

Якщо хоча б одна з координат точки a_0 , наприклад, a_j , не є цілим числом, то до початкової задачі цілочислового лінійного програмування додається нове обмеження, що побудоване з використанням інформації, яка є в таблиці симплекс-методу і відповідає кроку, на якому побудований розв'язок a_0 .

В результаті виходить нова задача A_1 , до якої знов застосовується та ж сама процедура. Таким чином, методи відтинання будують і розв'язують послідовність лінійних задач A_0, A_1, \dots , кожна з яких відрізняється від попередньої лише одним новим обмеженням.

16.3 Розв'язання задачі лінійного програмування симплекс-методом

До задач лінійного програмування входять задачі, у яких цільова функція $Z = z(\bar{x})$ й функції $\varphi_i(\bar{x})$ ($i = \overline{1, m}$), що належать до системи обмежень відносно вхідних у систему невідомих x_j – лінійні.

16.3.1 Основні види запису ЗЛП. Загальною задачею лінійного програмування називають задачу

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (16.1)$$

при можливих обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m_1}); \quad (16.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{m_1 + 1, m_2}); \quad (16.3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{m_2 + 1, m_3}); \quad (16.4)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n_1}); \quad (16.5)$$

$$x_j - \text{довільні} \quad (j = \overline{n_1 + 1, n}), \quad (16.6)$$

де c_j, a_{ij}, b_i – задані дійсні числа; (16.1) – цільова функція; (16.2) – (16.6) – обмеження; $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – план задачі.

У розгорнутому вигляді, наприклад, обмеження (16.2) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1; \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2; \\
&\dots\dots \\
a_{m_1 1}x_1 + a_{m_1 2}x_2 + \dots + a_{m_1 n}x_n &\leq b_{m_1}.
\end{aligned}$$

Симетричною другою формою запису ЗЛП називають задачу:

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j; \quad (16.7)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (16.8)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (16.9)$$

або задачу:

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j; \quad (16.10)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (16.11)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (16.12)$$

16.3.2 Канонічна форма запису ЗЛП. Має вигляд:

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j; \quad (16.13)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (16.14)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (16.15)$$

Канонічна форма потрібна для застосування симплекс-методу.

При необхідності задачу мінімізації можна замінити задачею максимізації і навпаки. Найчастіше використовуються методи розв'язання ЗЛП для задач, записаних у канонічній формі. Тому необхідно вміти здійснювати перехід ЗЛП до канонічного вигляду.

Нехай вихідна ЗЛП має вигляд:

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j ; \quad (16.16)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m_1}); \quad (16.17)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{m_1 + 1, m}); \quad (16.18)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (16.19)$$

Перетворимо її до канонічного вигляду. Введемо m додаткових (балансових) не негативних змінних $x_{n+i} \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$). Для того щоб нерівності типу \leq (16.17) перетворити в рівності, до їхніх лівих частин додамо додаткові змінні x_{n+i} ($i = \overline{1, m_1}$), після чого система (16.17) набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{1, m_1}). \quad (16.20)$$

Для того щоб нерівності типу \geq (16.17) перетворити в рівності, з їхніх лівих частин віднімемо додаткові змінні x_{n+i} ($i = \overline{m_1 + 1, m}$). Одержимо:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{m_1 + 1, m}). \quad (16.21)$$

Систему рівнянь (16.20) – (16.21) за умови незаперечності називають еквівалентною схемою нерівностей (16.17) – (16.19).

У цільову функцію (16.16) додаткові змінні x_{n+i} ($i = \overline{1, m}$) вводяться з коефіцієнтами, рівними 0.

Отримаємо задачу:

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n 0 \cdot x_{n+i} ; \quad (16.22)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{1, m_1}); \quad (16.23)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{m_1 + 1, m}); \quad (15.24)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad x_{n+i} \geq 0 \quad (j = \overline{1, m}). \quad (16.25)$$

Задача (16.22) – (16.25) має канонічну форму.

16.4 Симплекс-метод розв'язання ЗЛП

16.4.1 Побудова початкового опорного плану. Симплекс-метод передбачає:

1. уміння знаходити початковий опорний план;
2. наявність ознаки оптимального опорного плану;
3. уміння переходити до негіршого опорного плану.

Нехай ЗЛП представлена системою обмежень у канонічному вигляді:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, b_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}). \quad (16.26)$$

Якщо кожне обмеження – рівність ЗЛП у канонічному вигляді містить змінну, що входить у ліву частину з коефіцієнтом, який дорівнює одиниці, а всі інші – з коефіцієнтом, який дорівнює нулю (при $b_i \geq 0$), то система обмежень представлена в кращому вигляді. У цьому випадку легко знайти її опорне рішення (базисне з не негативними координатами): всі вільні змінні необхідно прирівняти до нуля, тоді базисні змінні будуть дорівнювати вільним членам. Якщо отриманий план буде мати не більш, ніж m відмінних від нуля координат, то він буде опорним. Кращі змінні – базисні. Змінні, які прирівнюються до нуля, – вільні.

У випадку, коли після введення додаткових змінних, система обмежень не має кращого вигляду, вводиться так званий штучний базис. До лівих частин обмежень, що не мають кращого вигляду, додають штучні змінні ω_i . У цільову функцію змінні ω_i вводяться з коефіцієнтами M у випадку розв'язання задачі на мінімум, і з коефіцієнтами $(-M)$ – для задачі на максимум, де M – велике позитивне число. Отримана задача називається M - M задачею, що відповідає вихідній задачі. Вона завжди має кращий вигляд.

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j; \quad (16.27)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (16.28)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (16.29)$$

Причому жодне з рівнянь не має кращої змінної. M -задача запишеться так:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j - (+) \sum_{i=1}^m M \omega_i; \quad (16.30)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - \omega_i = b_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (16.31)$$

$$x_j \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad \omega_i \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (16.32)$$

де знак мінус у функції (16.30) відноситься до задачі на максимум. Задача (16.30) – (16.32) має кращий вигляд. Її початковий опорний план:

$$\bar{x}_0 = (\underbrace{0; 0; \dots; 0}_n; b_1; b_2; \dots; b_n).$$

Якщо будь-яке з рівнянь (16.28) має кращий вигляд, то в нього не слід вводити штучні змінні.

16.4.2 Ознаки оптимальності опорного плану. Симплексні таблиці.

Будь-яку ЗЛП можна подати в еквівалентом кращому вигляді:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j; \quad (16.33)$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad \beta_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}); \quad (16.34)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (16.35)$$

Виразимо базисні змінні x_1, x_2, \dots, x_m з рівностей (16.35) через вільні $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ і підставимо їх у цільову функцію. Після групування подібних членів отримаємо:

$$\begin{aligned} Z = & (c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + \dots + c_m \beta_m) - ((c_1 \alpha_{1,m+1} + c_2 \alpha_{2,m+1} + \dots + c_m \alpha_{m,m+1}) - c_{m+1}) x_{m+1} \\ & + ((c_1 \alpha_{1,m+2} + c_2 \alpha_{2,m+2} + \dots + c_m \alpha_{m,m+2}) - c_{m+2}) x_{m+2} + \dots \\ & + ((c_1 \alpha_{1,m+n} + c_2 \alpha_{2,m+n} + \dots + c_m \alpha_{m,m+n}) - c_{m+n}) x_{m+n}. \end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$\Delta_0 = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_m\beta_m = \vec{c}_B \vec{A}_0; \quad (16.36)$$

$$\Delta_j = (c_1\alpha_{1j} + c_2\alpha_{2j} + \dots + c_m\alpha_{mj}) - c_j = \vec{c}_B \vec{A}_j - c_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad (16.37)$$

де $\vec{c}_B = (c_1; c_2; \dots; c_m)$ – вектор коефіцієнтів цільової функції при базисних змінних; $\vec{A}_0 = (\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_m)^T$ – вектор-стовпець вільних членів; $\vec{A}_j = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m)^T$ – вектор-стовпець коефіцієнтів при змінних x_j ;

З урахуванням рівностей (16.36) – (16.37) задача (16.33) – (16.34) набуває вигляду:

$$\max(\min) Z = \Delta_0 - \sum_{j=m+1}^n \Delta_j x_j; \quad (16.38)$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad \beta_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}); \quad (16.39)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}), \quad (16.40)$$

де $\Delta_0 = \vec{c}_B \vec{A}_0$; $\Delta_j = \vec{c}_B \vec{A}_j - c_j \quad (j = \overline{1, n})$.

Задачу (16.38) – (16.40) записують у таблицю, яка називається симплексною. Останній $(m + 1)$ рядок називають індексним рядком (рядок цільової функції).

Число $\Delta_0 = \vec{c}_B \vec{A}_0$ – значення цільової функції для початкового опорного плану \vec{x}_0 , тобто $\Delta_0 = z(x_0) = \vec{c}_B \vec{A}_0$. Числа $\Delta_j = \vec{c}_B \vec{A}_j - c_j \quad (j = \overline{1, n})$ називають оцінками вільних змінних.

За умови, що вихідна задача розв'язується на максимум і якщо для деякого опорного плану всі оцінки $\Delta_j \quad (j = \overline{1, n})$ не негативні, то такий план – оптимальний. Якщо вихідна задача розв'язується на мінімум і для деякого опорного плану всі оцінки $\Delta_j \quad (j = \overline{1, n})$ непозитивні, то такий план – оптимальний.

Таблиця 16.1 – Симплексна таблиця

БП	c_B	A_0	x_1	x_2	...	x_i	...	x_m	x_{m+1}	...	x_j	...	x_n
			c_1	c_2	...	c_i	...	c_m	c_{m+1}	...	c_j	...	c_n
x_1	c_1	β_1	1	0	...	0	...	0	α_{1m+1}	...	α_{1j}	...	α_{1n}
x_2	c_2	β_2	0	1	...	0	...	0	α_{2m+1}	...	α_{2j}	...	α_{2n}
...
x_i	c_i	β_i	0	0	...	1	...	0	α_{im+1}	...	α_{ij}	...	α_{in}
...
x_m	c_m	β_m	0	0	...	0	...	1	α_{mm+1}	...	α_{mj}	...	α_{mn}
$z_j - c_j$	Δ_0	0	0	...	0	...	0	Δ_{n+1}	...	Δ_j	...	Δ_n	

16.4.3 Алгоритм симплекс-методу розв’язання ЗЛП. Розв’язання задач симплекс-методом проходить у два етапи. Перший етап – знаходження однієї довільної вершини багатогранника обмежень, координати якого визначають початковий опорний план $\bar{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Другий етап – послідовний впорядкований перехід від однієї вершини багатогранника до іншої, суміжної з даною. Оскільки прилеглих вершин багато, те щораз вибирається така вершина, при переході до якої забезпечується найбільше зростання лінійної форми. На кожному кроці процесу поліпшення плану виконується перевірка на оптимальність. План буде оптимальним, якщо серед вершин, що прилягають до даної, немає такого плану, при переході до якого відбувається зростання лінійної форми. Визначення вихідного базисного плану здійснюється на підставі кращих рівнянь або шляхом введення додаткових і штучних змінних. При використанні ПК при розв’язанні ЗЛП – перший етап виконується вручну (перетворення рівнянь і визначення базисних змінних). Обчислювальний процес щодо знаходження оптимального плану має ітераційний характер. Кожна ітерація складається із двох етапів. Перший етап полягає в дослідженні базисного рішення на оптимальність. Якщо розглянутий план задовольняє умову оптимальності, то задача розв’язана, у

протилежному випадку переходять до другого етапу. На другому етапі визначається вектор \vec{A}_k , що повинен бути введений у базис, і вектор \vec{A}_r , який необхідно виключити з базису, тобто виходить новий базисний план з більшим значенням лінійної форми.

Щоб знайти вектори \vec{A}_k й \vec{A}_r , заміна яких забезпечує найбільше зростання лінійної форми, виразимо всі вектори, що не входять у базис, через базисні вектори:

$$\vec{A}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{A}_i, \quad (16.41)$$

де a_{ij} – проєкції вектора \vec{A}_j на вектор \vec{A}_i .

Систему обмежень у векторній формі можна подати як

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{A}_i - \bar{\theta} \vec{A}_k + \bar{\theta} \vec{A}_r = \vec{B}. \quad (16.42)$$

Оскільки $\vec{A}_k = \sum_{i=1}^m a_{ik} \vec{A}_i$, то

$$\sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{\theta} a_{ik}) \vec{A}_i + \bar{\theta} \vec{A}_k = \vec{B}. \quad (16.43)$$

Вираз (16.43) дає розв'язок тільки в тому випадку, коли коефіцієнти при векторах \vec{A}_k і \vec{A}_i у новому базисі будуть не негативними, тобто

$$\bar{x}_i^* = \bar{x}_i - \bar{\theta} a_{ik} \geq 0 \text{ і } \bar{\theta} \geq 0. \quad (16.44)$$

Відповідно нове значення лінійної форми має вигляд

$$z^* = \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{\theta} a_{ik}) \bar{c}_i + \bar{\theta} c_k = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i \bar{c}_i + \bar{\theta} (\bar{c}_k - \sum_{i=1}^m a_{ik} \bar{c}_i). \quad (16.45)$$

Нехай

$$d_j = \sum_{i=1}^m a_{ik} \bar{c}_i - \bar{c}_j,$$

тоді значення лінійної форми в новій вершині багатогранника можна знайти з виразу

$$\bar{z}^*(x) = \bar{z}(x) - \bar{\theta} d_j. \quad (16.46)$$

Величину d_j називають оцінкою плану. Знаки d_j дозволяють визначити, чи є опорний план оптимальним. Якщо $d_j \geq 0$ для всіх j , то даний опорний план є оптимальним, тому що на підставі (7.47) і через $\theta \geq 0$ перехід до будь-якої нової вершини призведе до зменшення лінійної форми.

Якщо опорний план не оптимальний, то можливі два випадки:

1) є хоча б один індекс $j = k$, для якого $d_k < 0$ і всі відповідні компоненти $a_{ik} \leq 0$ ($i = \overline{1, m}$). У цьому випадку лінійна форма необмежена зверху й задача не має розв'язку;

2) для деяких j $d_j < 0$ і для такого j принаймні одна із проєкцій $a_{ij} > 0$. Тоді згідно (7.47), при переході до наступної вершини лінійна форма зростає й план поліпшується. Для найбільш швидкого зростання z необхідно в базис включити той вектор \vec{A}_k , для якого оцінка $d_k < 0$ і максимальна за модулем.

Алгоритм симплексного методу складається з таких етапів:

1. Обчислити елементи рядка оцінки плану $d[0:n]$.
2. Знайти номер k вектора \vec{A}_k , який має максимальну за абсолютним значенням негативну оцінку. Якщо всі оцінки плану позитивні, то план оптимальний (при розв'язанні задачі на максимум). Якщо ні, то необхідно обчислити стовпець значень θ у вигляді елементів матриці:

$$T[i] = \begin{cases} a[i,0]/a[i,k], & \text{якщо } a[i,k] > 0; \\ M, & \text{якщо } a[i,k] = 0; \\ -1, & \text{якщо } a[i,k] < 0. \end{cases}$$

3. Знайти рядок з номером r , де $\theta = \min T[i]$ для всіх $T[i] > 0$. Якщо такого рядка немає, – задача не має розв'язку.

4. Замінити у векторі $h[1:m]$ номер r на k , а у векторі $c_i[1:m]$ значення $c_j[r]$ на $c_j[k]$, тобто нові значення коефіцієнта лінійної форми.

Перетворити матрицю $a[1:m,0:n]$ за наступними формулами (тобто знайти проєкцію векторів у новому базисі):

– елементи стовпця з номером k :

$$a^*[i, k] = \begin{cases} 1, & \text{якщо } h[i] = k; \\ 0, & \text{якщо } h[i] \neq k. \end{cases}$$

– елементи рядка з номером r :

$$a^*[r, j] = \frac{a[r, j]}{a[r, k]}.$$

– інші елементи матриці ($i \neq r, j \neq k$):

$$a^*[i, j] = a[i, j] - \frac{a[i, k] \cdot a[r, j]}{a[r, k]}.$$

5. Перейти до нової ітерації, тобто скласти нову симплексну таблицю і т.д.

Допустимо, що $\theta_{ok} = \min(x_i / x_{ik}) = x_r / x_{rk}$ досягається для вектору базису, що перебуває в l -му рядку. Тоді вектор \vec{A}_l виключається з базису. Елемент x_{rk} називається розв'язним, а стовпець і рядок, на перетинанні яких він перебуває – напрямними. Новому опорному плану відповідає базис, що складається з векторів $\vec{A}_1, \vec{A}_L, \vec{A}_{i-1}, \vec{A}_k, \vec{A}_{l+1}, \dots, \vec{A}_m$. Щоб обчислити новий опорний план і перевірити його на оптимальність, необхідно всі вектори \vec{A}_0, \vec{A}_j ($j = \overline{1, n}$) розкласти на вектори базису.

16.5 Розв'язання ЗЛП двоїтим симплекс-методом

Маючи математичну модель однієї задачі, можна легко побудувати модель двоїстої задачі, а саме:

1. Якщо пряма задача на максимум, то двоїста до неї – на мінімум.
2. Коефіцієнти C_j цільової функції прямої задачі є вільними членами обмежень двоїстої задачі.
3. Вільні члени прямої задачі є коефіцієнтом цільової функції двоїстої задачі.
4. Матриці обмежень прямої і двоїстої задач є транспонованими одна до одної.

5. Якщо пряма задача на максимум, то її система обмежень подається у вигляді нерівностей типу « \leq ». Якщо двоїста задача розв'язується на мінімум, то її система обмежень має вигляд нерівностей типу « \geq ».

6. Кількість обмежень прямої задачі дорівнює кількості змінних двоїстої, а кількість обмежень двоїстої – кількості змінних прямої.

7. Усі змінні обох задач не негативні.

При розв'язанні вихідної задачі можна перейти до двоїстої (якщо це вигідно) і цією задачею визначити оптимальний план, тобто оптимальне рішення. Однак перехід до двоїстої задачі не обов'язковий. Проаналізувавши симплексну таблицю побачимо, що коли в стовпцях записана вихідна задача, у рядках буде двоїста. Причому оцінками плану вихідної задачі є коефіцієнти C_j , а оцінками плану двоїстої задачі – B_i (тобто праві частини системи обмежень).

Розв'яжемо двоїсту задачу за симплексною таблицею, у яку записана вихідна задача; знайдемо оптимальний план двоїстої задачі, а разом з ним і оптимальний план вихідної задачі. Цей метод зветься двоїстим симплекс-методом.

Нехай необхідно розв'язати вихідну ЗЛП, поставлену в загальному вигляді: мінімізувати функцію $Z = \vec{C} \vec{X}$ при $\vec{A} \vec{X} = \vec{A}_0$, $\vec{X} \geq 0$. Тоді у двоїстої задачі необхідно максимізувати функцію $f = Y A_0$ при $Y A \leq C$.

Припустимо, що обрано такий базис $D = (A_1, A_2, \dots, A_l, \dots, A_m)$, при якому хоча б один з компонентів вектора $\vec{X} = D^{-1} \vec{A}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_m)$ негативний (напр. $x_i < 0$), але для всіх векторів \vec{A}_j виконується співвідношення $Z_j - C_j \leq 0$. ($j = \overline{1, n}$). Тоді на підставі теореми двоїстості $Y = C_{\text{баз}} D^{-1}$ – план двоїстої задачі. Цей план неоптимальний, оскільки, з одного боку, при обраному базисі містить негативний компонент і не є планом вихідної задачі, а з іншого боку, оцінки оптимального плану двоїстої задачі повинні бути не негативними.

Таким чином, вектор A_i , що відповідає компоненту $x_i < 0$ варто виключити з базису вихідної задачі, а вектор, що відповідає негативній оцінці, включити в базис двоїстої задачі.

Для вибору вектору, що включається в базис вихідної задачі, переглядаємо l -й рядок: якщо він не містить $x_{ij} < 0$, то лінійна функція двоїстої задачі необмежена на багатограннику розв'язань, а вихідна задача не має розв'язань.

Якщо ж деякі $x_{ij} < 0$, то для стовпців, що містять ці негативні значення, обчислюються $\theta_{0j} = \min(x_i/x_{ij}) \geq 0$. І визначається вектор, що відповідає $\max\{\theta_{0j} (Z_j - C_j)\}$ при розв'язанні вихідної задачі на мінімум і $\min\{\theta_{0j} (Z_j - C_j)\}$ при розв'язанні задачі на максимум. Цей вектор і включається в базис вихідної задачі. Вектор, який необхідно виключити з базису вихідної задачі, визначається напрямним рядком (що визначається як $\max\{|x_i|/x_{ij}\}, x_i < 0$).

Якщо $\theta_{0j} = \min(x_i/x_{ij}) = 0$, тобто $x_i = 0$, то x_{ij} береться за розв'язний елемент тільки в тому випадку, коли $x_{ij} > 0$. Такий вибір розв'язного елемента на даному етапі не приводить до збільшення кількості негативних компонентів вектора X .

Процес продовжується до одержання $X \geq 0$; при цьому знаходимо оптимальний план двоїстої задачі, а отже, і оптимальний план вихідної задачі. У процесі обчислень за алгоритмом двоїстого симплекс-методу умову $(Z_j - C_j) \leq 0$ можна не враховувати до виключення всіх $x_i < 0$, потім оптимальний план знаходиться звичайним симплекс-методом. Це зручно використовувати, якщо всі $x_i < 0$; тоді для переходу до плану вихідної задачі за одну ітерацію необхідно θ_{0j} визначити не за мінімумом, а за максимумом відносин, тобто $\theta_{0j} = \max(x_i/x_{ij})$.

Двоїстим симплекс-методом можна розв'язувати ЗЛП, системи обмежень яких при позитивному базисі містять вільні члени будь-якого знаку.

Цей метод дозволяє зменшити кількість перетворень системи обмежень, а також розміри симплексної таблиці.

16.6 Приклади рішення ЗЛП аналітичним симплекс-методом та за допомогою процедур пакету *MATLAB*

Приклад 1. Знайти максимальне значення функції

$$L = 7 x_1 + 6 x_2$$

при обмеженнях:

$$4 x_1 + 3 x_2 \leq 27;$$

$$2 x_1 + 3 x_2 \geq 6;$$

$$3 x_2 \leq 19;$$

$$x_1 \leq 6;$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Рішення задачі проведемо за допомогою використання симплексної таблиці.

Перед тим, як побудувати симплексну таблицю, необхідно привести задану систему обмежень до канонічного вигляду шляхом введення додаткових змінних та знайти базисні змінні. Тобто для обмеження типу « \leq » додається допоміжна змінна зі знаком «+», а для обмеження типу « \geq » – зі знаком «-».

У результаті отримаємо систему рівнянь:

$$4 x_1 + 3 x_2 + \underline{x_3} = 27;$$

$$2 x_1 + 3 x_2 - x_4 = 6;$$

$$3 x_2 + \underline{x_6} = 19;$$

$$x_1 + \underline{x_7} = 6;$$

$$x_i \geq 0,$$

Отримана система не має кращого вигляду, оскільки друге рівняння містить додаткову змінну x_4 зі знаком «-». Тому введемо штучний базис, шляхом додавання в це рівняння штучної змінної x_5 .

Отримаємо таку систему:

$$4x_1 + 3x_2 + \underline{x_3} = 27;$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_4 + \underline{x_5} = 6;$$

$$3x_2 + \underline{x_6} = 19;$$

$$x_1 + \underline{x_7} = 6;$$

$$x_i \geq 0,$$

цільова функція тоді буде мати вигляд $L_{max} = 7x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 + 0x_6 + 0x_7$, де M – велике позитивне число. Для нашого прикладу візьмемо $M = 100$. В цільову функцію M додано зі знаком «-», оскільки задача розв’язується на максимум. Будуємо симплексну таблицю.

Таблиця 16.2 – Симплексна таблиця для початкового плану

x_6	C_6	A_0	7	6	0	0	-100	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	27	4	3	1	0	0	0	0	9.33
x_5	-100	6	2	3	0	-1	1	0	0	2
x_6	0	19	0	3	0	0	0	1	0	6.33
x_7	0	6	1	0	0	0	0	0	1	—
	Δ_j	-600	-207	-306	0	100	0	0	0	

Виконаємо розрахунок оцінок опорного плану (останній рядок таблиці):

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^4 C_{6i} A_{0i} = 0 \cdot 27 - 100 \cdot 6 + 0 \cdot 19 + 0 \cdot 6 = -600;$$

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^4 C_{6i} x_{1i} - C_1 = 0 \cdot 4 - 100 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 7 = -207;$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^4 C_{6i} x_{2i} - C_2 = 0 \cdot 3 - 100 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 - 6 = -306;$$

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^4 C_{6i} x_{3i} - C_3 = 0 \cdot 1 - 100 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^4 C_{6i} x_{4i} - C_4 = 0 \cdot 1 - 100 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 100;$$

і т.д.

Оскільки не всі оцінки Δ_i ($i = \overline{1, 7}$) є позитивними, то план не є оптимальним. Виконаємо перехід до іншого плану. Для цього необхідно виконати перерахунок симплексної таблиці. Знайдемо стовпчик, де має місце $\max|\Delta_i|$ ($i = \overline{1, 7}$). Це стовпчик x_2 . Тому необхідно додати змінну x_2 у базис. Для визначення змінної, яку необхідно виключити з базису, розрахуємо стовпчик θ : $T[i] = \{28/3; 6/3; 19/3; 6/0\}$. Знайдемо $\theta = \min T[i]$ для всіх $T[i] > 0$. Це рядок x_5 . Тобто змінна x_2 повинна бути додана в базис замість змінної x_5 . Виконаємо перехід до нового плану. Для цього перерахуємо елементи симплексної таблиці за формулами, наведеними в п. 4 алгоритму симплекс-методу. Нове значення елементів в стовпчику x_2 будуть дорівнювати значенням елементів, які знаходяться в стовпчику x_5 . Всі елементи, які знаходяться у рядку x_5 (другий рядок) розраховуються таким чином:

Другий рядок = $\{6/3; 2/3; 3/3; 0/3; -1/3; 1/3; 0/3; 0/3\}$. Елементи, що залишилися, розраховуються так:

$$A_{01} = 28 - \frac{6 \cdot 3}{3} = 22; A_{03} = 19 - \frac{6 \cdot 3}{3} = 13; A_{04} = 6 - \frac{6 \cdot 0}{3} = 6; a_{11} = 4 - \frac{2 \cdot 3}{3} = 2 \text{ і т.д.}$$

В результаті отримаємо таблицю:

Таблиця 16.3 – Симплексна таблиця після першої ітерації

x_6	C_6	A_0	7	6	0	0	-100	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	22	2	0	1	1	-1	0	0	11
x_2	6	2	2/3	1	0	-1/3	1/3	0	0	3
x_6	0	13	-2	0	0	1	-1	1	0	-13/2
x_7	0	6	1	0	0	0	0	0	1	6
		12	-4	0	0	-2	102	0	0	

Далі знову обчислюємо оцінки плану. Для цієї таблиці ще є негативні оцінки. Тому алгоритм необхідно повторювати знову.

Таблиця 16.4 – Побудова симплексної таблиці для подальших ітерацій

x_6	C_6	A_0	7	6	0	0	-100	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	16	0	-3	1	2	-2	0	0	7
x_1	7	3	1	3/2	0	-1/2	1/2	0	0	-6
x_6	0	19	0	2	0	0	0	1	0	—
x_7	0	3	0	-3/2	0	1/2	-1/2	0	1	6
		24	0	6	0	-4	104	0	0	
x_3	0	4	0	3	1	0	0	0	-4	4/3
x_1	7	6	1	0	0	0	0	0	1	—
x_6	0	19	0	3	0	0	0	1	0	6.3
x_4	0	6	0	-3	0	1	-1	0	2	-2
		47	0	-6	0	0	100	0	7	
x_2	6	4/3	0	1	1/3	0	0	0	-4/3	
x_1	7	6	1	0	0	0	0	0	1	
x_6	0	15	0	0	-1	0	0	1	4	
x_4	0	10	0	0	1	1	-1	0	-2	
		56	0	0	2	0	100	0	0	

Після ряду ітерацій дійшли до того моменту, коли усі $\Delta_i \geq 0$. Розв'язання задачі записано у стовпці вектора A_0 .

Відповідь: $L_{\max} = 56$, $x_1 = 6$, $x_2 = 4/3$.

Приклад 2. Знайти максимальне значення функції $L = 7x_1 + 6x_2$ при обмеженнях:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 27;$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6;$$

$$3x_2 \leq 19;$$

$$x_1 \leq 6;$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Згідно з методикою двоїстого симплексного методу, приведемо нерівності до вигляду « \leq » шляхом множення нерівності $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ на «-1» та приведемо до канонічного виду. В результаті отримаємо:

$$4x_1 + 3x_2 + \underline{x_3} = 27;$$

$$-2x_1 - 3x_2 + \underline{x_4} = -6;$$

$$3x_2 + \underline{x_5} = 19;$$

$$x_1 + \underline{x_6} = 6;$$

$$x_i \geq 0, i = (1,6).$$

$$L_{max} = 7x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6.$$

Будуємо симплексну таблицю.

Оскільки у векторі $A_0 = \{27; -6; 19; 6\}$ є тільки один негативний елемент, то з базису необхідно виключити змінну, яка пов'язана з цим елементом, тобто змінну x_4 . Для визначення змінної, яку необхідно додати у базис, розрахуємо $\theta_{0j} = \min(x_i/x_{ij}) \geq 0$, для $x_{ij} < 0$:

$$\theta_{0j} = \min(x_i/x_{ij}) = \min(-6/-2; -6/-3) = 2 (j = 2).$$

Таблиця 16.5 – Симплексна таблиця

X_6	C_6	A_0	7	6	0	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	27	4	3	1	0	0	0	7
x_4	0	-6	-2*	-3*	0	1	0	0	3
x_5	0	19	0	3	0	0	1	0	—
x_6	0	6	1	0	0	0	0	1	6
		0	-7	-6	0	0	0	0	

Задача розв'язується на максимум, відповідно необхідно розрахувати $\min\{\theta_{0j} (Z_j - C_j)\}$ для $x_{ij} < 0$:

$$\min\{\theta_{0j} (Z_j - C_j)\} = \min\{2 \cdot (-7); 2 \cdot (-6)\} = -16. \text{ Тобто це стовпчик } j = 1.$$

Отже, необхідно виключити з базису змінну x_4 , а замість неї додати змінну x_1 . Розрахунок нової симплексної таблиці виконується аналогічно, як і при симплекс-методі.

Отримаємо таблицю 16.6.

Таблиця 16.6 – Симплексна таблиця (друга ітерація)

X_6	C_6	A_0	7	6	0	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	16	0	-3	1	2	0	0	7
x_1	7	3	1	3/2	0	-1/2	0	0	-6
x_5	0	19	0	3	0	0	1	0	—
x_6	0	3	0	-3/2	0	1/2	0	1	6
		24	0	6	0	-4	104	0	

Як видно з табл. 16.6, стовпчик A_0 вже не містить негативних елементів. Це означає, що подальший розрахунок оптимального плану необхідно виконувати звичайним симплекс-методом.

Як видно з табл. 16.6 план не є оптимальним, оскільки існує одна негативна оцінка $\Delta_4 = -4$. тому необхідно продовжувати перехід до нового плану.

В табл. 16.7 наведено результат розрахунку наступних ітерацій.

Таблиця 16.7 – Симплексна таблиця (наступні ітерації)

X_6	C_6	A_0	7	6	0	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	4	0	3	1	0	0	-4	4/3
x_1	7	6	1	0	0	0	0	1	—
x_5	0	19	0	3	0	0	1	0	6.3
x_4	0	6	0	-3	0	1	0	2	-2
		47	0	-6	0	0	100	0	
x_2	6	4/3	0	1	1/3	0	0	-4/3	
x_1	7	6	1	0	0	0	0	1	
x_5	0	15	0	0	-1	0	1	-4	
x_4	0	10	0	0	1	1	0	-2	
		56	0	0	2	0	0	0	

Для останньої таблиці отримали позитивні значення всіх оцінок. Тому задача розв'язана.

Відповідь: $L_{\max} = 56, x_1 = 6, x_2 = 4/3$.

Приклад 3. Знайти рішення графічним методом задачі лінійного програмування:

$$L_{\max} = 7x_1 + 6x_2;$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 27;$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6;$$

$$3x_2 \leq 19;$$

$$x_1 \leq 6;$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Рішення.

Для побудови графіку запишемо систему обмежень у вигляді рівнянь у відрізках:

$$x_1/7 + x_2/9.33 = 1; \tag{1}$$

$$x_1/3 + x_2/2 = 1; \tag{2}$$

$$x_2/6.33 = 1; \tag{3}$$

$$x_1/6 = 1. \tag{4}$$

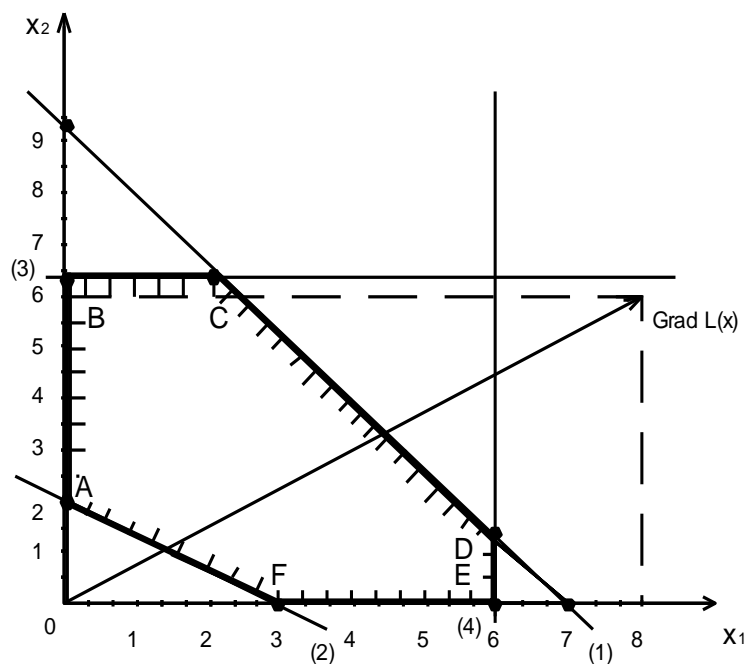


Рисунок 16.1– Графік системи рівнянь обмежень

На рис. 16.1 приведено графік системи рівнянь обмежень і вектор градієнта цільової функції. Як виходить із графіку, що максимальне значення цільової функції досягається у вершині багатокутника D .

Вершина D є перетинанням двох прямих (1) та (4).

Знаходимо її точні координати.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3; \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 28 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -18; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 4 & 28 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4.$$

$$x_2 = \Delta_{x_2} / \Delta = -4 / -3 = 4/3.$$

Координата x_1 – зафіксована і дорівнює 6.

Отже вершина D має координати: $D(6; 4/3)$.

При $x_1 = 6$, $x_2 = 1,33$ отримуємо значення цільовою функції:

$$L_{\max} = 7 \cdot 6 + 6 \cdot 1,33 = 47 + 7 = 56.$$

Приклад 4. Цех малого підприємства повинен виготовити 100 виробів трьох типів. Кожного виробу потрібно зробити не менш 20 штук. На виробі іде відповідно 4, 3.4 і 2 кг металу при його загальному запасі 340 кг, а також по 4,75 , 11 і 2 кг металу при її загальному запасі 700 кг.

Скільки виробів кожного типу (з урахуванням обмежень) x_1 , x_2 і x_3 треба випустити для одержання максимального випуску в грошовому вираженні, якщо ціна виробу складає по калькуляції 40, 30 і 20 грн.

Задача зводиться до обчислення максимуму функції:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 40 x_1 + 30 x_2 + 20 x_3$$

при наявності обмежень:

$$40 \geq x_1 \geq 20, \quad 50 \geq x_2 \geq 20, \quad 60 \geq x_3 \geq 20;$$

$$4 x_1 + 3,4 x_2 + 2 x_3 \leq 340;$$

$$4,75 x_1 + 11 x_2 + 2 x_3 \leq 700;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100.$$

В результаті маємо задачу лінійного програмування. Для її рішення розробити програму в пакеті МАТЛАБ з використанням функції **linprog**.

Рішення.

Для розв'язання задач лінійного програмування у пакеті оптимізації *Optimization Toolbox* використовується функція **linprog**. Вона призначена для розв'язування задачі вигляду:

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min ;$$

$$A \cdot x \leq b;$$

$$A_{eq} \cdot x = b_{eq};$$

$$l_b \leq x \leq u_b,$$

де c , x , b , b_{eq} , l_b , u_b – вектор-стовпчики, A , A_{eq} – прямокутні матриці, і яка має такий синтаксис:

`linprog (c, A, b, Aeq, beq);= linprog (c, A, b, Aeq, beq, lb, ub);= linprog (c, A, b, Aeq, beq, lb, ub, x0);= linprog (c, A, b, Aeq, beq, lb, ub, x0, options);`

`[x, fval] = linprog(...);`

```
[x, fval, exitflag] = linprog(...);  
[x, fval, exitflag, output] = linprog(...);  
[x, fval, exitflag, output, lambda] = linprog(...).
```

Особливості параметрів `exitflag`, `lambda`, `output`, які використовуються в функції `linprog`. Так параметр `exitflag` приймає додатне значення, якщо ітераційний процес завершився у відповідності до заданої точності обчислень; від'ємне значення, якщо ітераційний процес не збігається до розв'язку, і **0**, якщо було перевищено максимальну кількість ітерацій, яка визначається за параметром `MaxIter`, або максимальну кількість обчислень значень цільової функції, яка визначається за параметром `MaxFunEvals`.

Параметр `lambda` являє собою структуру з полями, які містять множники Лагранжа для кожної групи обмежень задачі в точці x , що є результатом розв'язування поставленої задачі:

- `ineqlin` – для обмежень-нерівностей;
- `eqlin` – для обмежень-рівнянь;
- `upper` – для прямих обмежень типу $x \leq ub$;
- `lower` – для прямих обмежень типу $lb \leq x$.

При цьому ненульові елементи векторів у полях параметра `lambda` відповідають активним обмеженням для знайденої точки x . Якщо в умові задачі деякі вхідні дані відсутні, то замість відповідних величин треба ставити []. Наприклад, якщо в умові задачі відсутні обмеження-нерівності то треба ввести `A=[]` і `b=[]`.

Функція може використовувати алгоритм великої розмірності `lipsol` або алгоритм середньої розмірності (метод проєкцій).

Функція `linprog` записується у вигляді:

```
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq),  
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub),  
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0),  
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options),  
[x,fval] = linprog(...),
```

```
[x,fval,exitflag] = linprog(...),  
[x,fval,exitflag,output] = linprog(...),  
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(...).
```

Рішення прикладу в пакеті *MATLAB*

```
f=[40;30;20];% вектор коефіцієнтів лінійної цільової функції  
% Матриця коефіцієнтів обмежень – нерівностей  
A=[4 3.4 2; 4.75 11 2];  
b=[340;700]; % вектор обмежень – нерівностей  
Aeq=[1 1 1]; % матриця коефіцієнтів обмежень – рівностей  
beq=[100]; % вектор обмежень – рівностей  
% Задання нижніх та верхніх границь змінних (нулів)  
lb=[20;20;20];  
ub=[40;50;60];  
% Пошук рішень, визначення максимум цільової функції  
[x, fval, exitflag, output]=linprog(-f, A, b, Aeq, beq, lb,ub)
```

Результат

```
x =  
40.0000  
40.0000  
20.0000  
  
fval = -3.2000e+003  
exitflag = 1  
output =  
iterations: 6  
algorithm: 'large-scale: interior point'  
cgiterations: 0  
message: 'Optimization terminated.'  
constrviolation: 2.8422e-014  
firstorderopt: 2.6945e-008
```

В результаті рішення за допомогою приведеної програми видно, що в даній функції застосовано алгоритм *lpsol*, який дає можливість рішення ЗЛП великої розмірності (числа рівнянь обмежень і змінних, які входять в оптимізуємий функціонал), знайдене рішення відповідає умові задачі, повідомлення `exitflag=1` вказує на те, що ітераційний процес завершився у відповідності до заданої точності обчислень.

16.7 Завдання для самостійної роботи

Знайти рішення ЗЛП симплекс-методом та двоїтим симплекс-методом.

1) $L_{\max} = 2x_1 + x_2;$

$$x_1 + x_2 \geq 1;$$

$$4x_1 + 7x_2 \leq 32;$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3;$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2; x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

2) $L_{\min} = 2x_1 - 3x_2;$

$$x_1 + x_2 \leq 4;$$

$$6x_1 + 2x_2 \geq 7;$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 4;$$

$$x_1 \leq 3; x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

$$j = \overline{1, 5}.$$

3) $L_{\min} = 6x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4;$

$$2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2;$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; x_j \geq 0,$$

$$j = \overline{1, 4}.$$

4) $L_{\max} = x_1 - x_2;$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 24;$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 6;$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 2;$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2; x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

5) $L_{\max} = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 - x_5;$

$$2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 2;$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3; x_j \geq 0,$$

$$j = \overline{1, 5}.$$

6) $L_{\max} = 2x_2 - x_3 + 3x_5;$

$$2x_1 + x_2 + 2x_4 = 4;$$

$$3x_1 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 5;$$

$$3x_1 + 6x_4 - 3x_5 = 3; x_j \geq 0,$$

$$j = \overline{1, 5}.$$

7) $L_{\max} = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4;$

$$4x_1 + x_3 + x_4 = 16;$$

$$6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4; x_j \geq 0,$$

$$j = \overline{1, 4}.$$

8) $L_{\max} = x_2 - 2x_3 - 3x_5;$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1;$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 3; x_j \geq 0,$$

$$j = \overline{1, 5}.$$

Контрольні запитання

1. Основна ЗЛП. Стандартна форма. Модель. Лінійна форма.
2. Поняття припустимого розв'язання й оптимального розв'язання.
Умова існування оптимізаційної ЗЛП.
3. Методи розв'язання ЗЛП. Симплекс-метод. Математична основа методу.
4. Визначення вихідного базисного розв'язання:
 - при системі обмежень у вигляді нерівностей;
 - при системі обмежень у вигляді рівностей;
 - при системі обмежень у змішаній формі.
5. Форми запису обмежень і лінійної функції.
6. Симплексна таблиця. Складання симплексної таблиці.
7. Алгоритм симплекс-методу. Основні етапи.
7. Перехід до нового базису. Знаходження векторів для переходу до нового базису.
9. Ознака оптимального плану (розв'язання).
10. Геометрична інтерпретація розв'язання оптимізаційної ЗЛП із використанням симплекс-методу.
11. Двоїстість у лінійному програмуванні.
12. Як побудувати за прямою задачею двоїсту задачу?
13. Двоїстий симплекс-метод. Як отримати вихідне базисний розв'язок?
14. Алгоритм двоїстого симплекс-методу.
15. Коли неможливо знайти рішення двоїстим симплекс-методом?
16. Як виконати перехід до нового плану?
17. Коли необхідно переходити на алгоритм звичайного симплекс-методу?
17. Як отримати кінцевий розв'язок?
19. Як записати оптимальний план для двоїстої задачі?

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Катренко А.В. Системний аналіз: підручник / А.В. Катренко– Львів: «Науковий світ-2000», 2009. – 396 с.
2. Згуровський М.З. Основи системного аналізу: Підручник / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова. – К.: Видавнича група ВНУ, 2007. – 544 с.
3. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 2: навчальний посібник / Р.Н. Кветний, І.В. Богач, О.Р. Бойко, О.Ю. Софіна, О.М. Шушура; за заг. ред. Р.Н. Кветного. – Вінниця: ВНТУ, 2012. – 230 с.
4. Гаєв Є.О. Універсальний математичний пакет MatLab і типові задачі обчислювальної математики : навч. посіб. / Є.О. Гаєв, Б.М. Нестеренко. – Київ : Національний авіаційний університет, 2004. – 176 с.
5. Дудник І.М. Вступ до загальної теорії систем. – К.: Кондор, 2009. 205с.
6. Шамровський О.Д. Системний аналіз: математичні методи та застосування : навчальний посібник / О.Д. Шамровський. – Львів: «Магнолія 2006», 2010. – 275 с.
7. Заполовський М.Й. Теорія інформації і кодування. Навчальний посібник для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 125 – «Кібербезпека» / М.Й. Заполовський, С.М. Порошин, М.В. Мезенцев –Харків: Тов «ДІСА ПЛЮС». – 2020. – 257 с.
7. Черней Н.Б. Теорія систем і системний аналіз: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. /Н.Б. Черней, Р.К. Черней. – К.:МАУП, 2005. – 256 с.
9. Прокопенко Т.О. Теорія систем та прийняття управлінських рішень: навч. посіб. / Т.О. Прокопенко. – Черкаси: ЧДТУ, – 2017. – 177 с.
10. Станжицький О.М. Основи математичного моделювання: навчальний посібник / О.М. Станжицький, Є.Ю. Таран, Л.Д. Гординський. – К.: ВПЦ «Київський університет». – 2006. – 95 с.

11. Варенко В. М. Системний аналіз інформаційних процесів: Навч. посіб. / В.М. Варенко, І.В. Братусь, В.С. Дорошенко, Ю.Б. Смольников, В.О. Юрченко. – К.: Університет «Україна», 2013. – 203 с.
12. Лесечко М.Д. Основи системного підходу: теорія, методологія, практика: Навч. посіб. – Львів: ЛРІДУ УАДУ, 2002. – 300 с.
13. Заполовський М.Й. Системний аналіз та комп'ютерне моделювання. Лабораторний практикум / М.Й. Заповський, М.В. Мезенцев, О.І. Баленко. – Харків: НТУ «ХП». – 2017. – 97 с.
14. О.І. Толочко. Пакети прикладних програм для ПЕОМ. Частина 1. MATLAB, SIMULINK, SIMPOWERSYSTEM. Основи програмування. Лабораторний практикум. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, – 2020.
15. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці: підручник / Л.П. Фельдман, М.З. Згуровський, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва – К.: Вид. група ВНУ, 2006. – 470 с.
16. Програмування комп'ютеризованих систем управління та автоматики / Дубовой В. М., Кветний Р.Н. – Вінниця: ВДТУ, 1997. – 207 с.
17. Kvyetnyu R. Basics of Modelling and Computational Methods / R. Kvyetnyu. – Вінниця: ВДТУ, 2007. – 147 с.
18. Ляшенко М. Я. Чисельні методи : підручник / М.Я. Ляшенко, М.С. Головань – К.: Либідь, 1996. – 277 с.

Навчальне видання

Навчальний посібник

з навчальної дисципліни

«Теорія систем та системного аналізу»

для студентів всіх форм навчання

спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія»

Укладачі: ЗАПОЛОВСЬКИЙ Микола Йосипович,

КУЧУК Ніна Георгіївна,

МЕЗЕНЦЕВ Микола Вікторович

Відповідальний за випуск проф. Заковоротний О.Ю.

Роботу до видання рекомендував проф. Дмитрієнко В. Д.

В авторській редакції

План 2024 р., поз. 36

Підп. до друку 27.06.2024

Видавничий центр НТУ «ХП»

61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5477 від 21.07.2017 р.

Електронне видання