*Бєломитцев А.С., Дружинін Є.І., Морачковський О.К.*
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна

# АЛГОРИТМ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

**Постановка проблеми.** Однією з важливих наукових проблем природознавства є вирішення задачі про поведінку досліджуваного об'єкта в часі і просторі на основі певних знань про його початковий стан. Зазначена проблема безумовно є математичною задачею і потребує в якості об'єкта дослідження розглядати так звані «динамічні системи» у математичному розумінні цього поняття [1].

**Аналіз публікацій.** Відомо, що звичайні диференціальні рівняння, які описують поведінку нелінійних динамічних систем, мають три типи рішень, відповідних періодичному, квазіперіодичному і хаотичному рухам. Цим рішенням відповідають атрактори системи у вигляді граничного циклу, квазіперіодичного атрактора (Р-мірного тора) і хаотичного або «дивного атрактора». Важливим є те, що найпростіші типи квазіперіодичних і хаотичних атракторів можуть реалізуватися в динамічних системах з розмірністю фазового простору не менше трьох. З точки зору механіки і математики, аналіз хаотичних процесів в детермінованих нелінійних дисипативних системах є однією з фундаментальних проблем, що цікавить багатьох дослідників. В [2, 3] переконливо доведено, що в нелінійних системах причина генерування складних коливальних процесів, які можуть не відрізнятися за фізичними характеристиками від істинно випадкових, криється не в кількості ступенів вільності і не в наявності флуктуацій, як раніше вважалося, а в експоненціальній нестійкості режимів, що породжує суттєву залежність від точності завдання початкового стану системи. Дослідження стійкості режиму функціонування динамічної системи є надзвичайно важливим з практичної точки зору. Ще більш важливою проблемою є аналіз стійкості складних багатокомпонентних систем. У багатьох силових установках вимушені нелінійні коливання є причиною втомних руйнувань елементів передач і вимагають спеціального розрахункового дослідження. Особливо актуальною є задача розрахунку таких коливань в установках, що містять потужне джерело збудження у вигляді поршневого двигуна внутрішнього згоряння, що характерно для колісних та гусеничних транспортних машин,сільськогосподарської техніки, суднових і тепловозних установок. Окрім того, при вивченні коливальних процесів в механічних системах, підданих дії періодичних збурюючих сил, дослідника зазвичай цікавить функціональна залежність деяких параметрів, що характеризують коливальний процес, від частоти збурюючого впливу. Ці залежності можуть бути неоднозначні і мати точки розгалуження. Визначення останніх представляє особливий інтерес, тому що в цих точках беруть початок або закінчуються окремі гілки рішень. Слід зазначити, що отримання нових, ефективних прийомів оцінки стійкості періодичних режимів складних нелінійних систем стало можливим у зв'язку з розробкою ітераційних чисельних алгоритмів аналізу. Розглянуті нижче способи оцінки стійкості спираються на дослідження стійкості за першим наближенням і пов'язані з ітераційними процесами визначення періодичних рішень. Ці способи вимагають незначного в порівнянні з самим визначенням періодичного розв'язку обсягу обчислень і зводяться до визначення власних значень деяких матриць, обчислюваних в ході ітераційних процесів.

**Опис алгоритму.** Розглянемо систему з $n$ степенями вільності, рух якої описується неавтономним векторним диференціальним рівнянням у формі Коші

$$\dot{\vec{y}} = \vec{\varphi}\left(t, \vec{y}\right), \tag{1}$$

де $\vec{y}$ – $2n$-мірний вектор стану; $\vec{\varphi}\left(t, \vec{y}\right)$ – $2n$-мірна вектор-функція; $T_1$ – періодична по явно вхідному часу $t$: $\vec{\varphi}\left(t, \vec{y}\right) = \vec{\varphi}\left(t + T_1, \vec{y}\right)$ .

Визначення періодичного розв'язку диференціального рівняння (1) еквівалентно знаходженню нерухомої точки точкового відображення і може бути зведене до розв’язання неявно заданого рівняння:

$$\vec{y}_T\left(\vec{y}_0\right) - \vec{y}_0 = \vec{0}, \tag{2}$$

де $\vec{y}_0 = \vec{y}(0), \vec{y}_T = \vec{y}(T)$ – вектори стану системи в моменти часу $t = 0$ і $t = T$, період $T$ дорівнює або кратний періоду $T_1$ правої частини рівняння (1): $T = rT_1$.

Для розв’язання рівняння (2) використовується ітераційний процес методу Ньютона:

$$\begin{cases} \left[\left(\dfrac{\partial \vec{y}_T}{\partial \vec{y}_0}\right)_\nu - E\right]\vec{z}^{\,\nu} = \vec{y}_T\left(\vec{y}_0^{\,\nu}\right) - \vec{y}_0^{\,\nu} \\ \vec{y}_0^{\,\nu+1} = \vec{y}_0^{\,\nu} - \vec{z}^{\,\nu}, \nu = 0,1,2,..., \end{cases} \tag{3}$$

який дозволяє не тільки визначати періодичні рішення рівняння (1), але і оцінювати їх стійкість за Ляпуновим.

Для оцінки стійкості і аналізу біфуркацій періодичних коливань обчислюються мультиплікатори $\lambda_i$ рівняння у варіаціях:

$$\dot{\vec{x}} = \left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\vec{y}}\right)_{\vec{y}=\vec{\xi}(t)} \cdot \vec{x}, \tag{4}$$

де $\left(\partial\vec{\varphi}/\partial\vec{y}\right)_{\vec{y}=\vec{\xi}(t)}$ – матриця Якобі, яка обчислюється на періодичному рішенні $\vec{y}=\vec{\xi}(t)$. Таким чином, (4) містить періодичні коефіцієнти і дослідження стійкості його тривіального рішення, еквівалентно дослідженню стійкості періодичного рішення $\vec{y}=\vec{\xi}(t)$ рівняння (1) і проводиться згідно теорії Флоке.

Мультиплікатори $\lambda_i$ є корені рівняння $det\left[\boldsymbol{\Phi}(T)-\lambda E\right]=0$, де $\boldsymbol{\Phi}(T)$ - матриця монодромії, рівна матриціанту (4) при $t=T$.

Найбільший інтерес представляють біфуркації, при яких періодичні рішення втрачають стійкість, так як у відповідних біфуркаційних точках якісно змінюється структура можливих сталих рухів нелінійної системи. При побудові АЧХ системи зміна частоти збурюючого діяння призводить до зміни мультиплікаторів рівняння у варіаціях, внаслідок чого мультиплікатори рухаються уздовж певних траєкторій. Аналіз цих траєкторій дозволяє зробити висновки відносно стійкості періодичних коливань та їх можливих біфуркацій у точках втрати стійкості.

Періодичне рішення рівняння (1) $y=\xi(t)$ є асимптотично стійким, якщо спектральний радіус рівняння в варіаціях (4)

$$\rho = \max_i\left|\lambda_i\right| < 1, \tag{5}$$

таким чином, втрата стійкості пов'язана з виходом одного або пари мультиплікаторів з кола одиничного радіусу. Цей вихід може здійснюватися трьома способами: 1) з'являється дійсний мультиплікатор $\lambda_i < -1$; 2) з'являється дійсний мультиплікатор $\lambda_i > 1$; 3) з'являється пара комплексно спряжених мультиплікаторів $\left|\lambda_i\right| = \left|\lambda_{i+1}\right| > 1$. У першому випадку відбувається біфуркація подвоєння періоду: у точці втрати стійкості $T$ – періодичного розв'язку народжуються 2 гілки $2T$ – періодичних стійких розв'язків. Друга біфуркація характерна для, так званої, точки повороту, в якій крива залежності періодичного розв'язку від параметра "повертає" у протилежний бік, стаючи багатозначною. Для розрахунку періодичних коливань в околі такої точки зручно використовувати алгоритм інвертування крайового завдання. Третя біфуркація призводить до народження майже періодичних коливань.

**Висновки.** Наведений вище алгоритм дозволяє виявити вузькі частотні діапазони існування стійких рішень на гілках АЧХ, відповідних нестійким рішенням, а також ілюструє методику дослідження сталих коливань в системах, що описуються сукупністю звичайних диференціальних рівнянь. Крім того, перевірка критерію стійкості і умов розгалуження добре вписується в обчислювальні схеми розроблених ітераційних процесів і вимагає невеликого обсягу обчислень. Таким чином, на першому етапі проводиться розрахунок основних періодичних коливань, який дозволяє визначити області існування неперіодичних сталих рухів і періодичних рухів збільшеного періоду. Далі знаходяться рішення, які відповідають хаотичному руху нелінійної системи. Але ж, звичайно, ніколи не можна бути впевненим, що виявлені всі можливі усталені рухи нелінійної системи, наприклад, залишається відкритим питання пошуку періодичних рішень, що утворюють замкнуті гілки.

**ЛІТЕРАТУРА**

1. Современные проблемы хаоса и нелинейности / Симо К., Смейл С., Шенсине А. и др. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 304 с.

2. Фегенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем / М. Фегенбаум // Успехи физических наук. – 1983. – т.141. – Вып.2. – С. 243-374.

3. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса / Ю.Л. Климонтович. - М.: Наука, 1990. – 257 с.