

УДК 539.3

*С.Н.СКЛЕПУС, А.З. ГАЛИШИН***О ПРОГНОЗИРОВАНИИ ВРЕМЕНИ ДО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК***90-летию академика НАН Украины**Ю.Н. Шевченко посвящается*

Рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния, повреждаемости и длительной прочности полых цилиндров и цилиндрических оболочек, работающих при ползучести. Решения для оболочек различной толщины, основанные на гипотезах прямолинейного элемента, сопоставляются с пространственными решениями для осесимметрично нагруженных полых цилиндров. Исследовано влияние соотношения геометрических размеров на точность оболочечного решения. Разработан способ прогнозирования времени до разрушения в пространственной постановке на основе данных о времени до разрушения полученных по оболочечной теории, и наоборот.

**Ключевые слова:** ползучесть, повреждаемость, время до разрушения, прогнозирование, полый цилиндр, цилиндрическая оболочка.

**1. Введение.** В современной технике находят широкое применение элементы конструкций в виде тел вращения, работающие в условиях ползучести. С целью снижения компьютерных затрат для таких объектов зачастую принимается расчетная схема в виде

оболочки вращения [1-8 и др.]. При этом привлекаются как классическая теория, так и различные уточненные теории оболочек, учитывающие деформации поперечного сдвига. Погрешность решения, полученного в рамках той или иной теории оболочек, зависит от

соотношения геометрических размеров, граничных условий, условий нагружения, механических характеристик материала и пр. Одновременно изучить влияние всех факторов является сложной задачей. Одним из возможных путей исследования погрешностей приближенных теорий оболочек является сопоставление полученных на их основе решений с результатами решения трехмерных задач [9]. Анализ применимости классической и уточненных теорий в задачах упругого деформирования оболочек дан в работах [9, 10 и др.]. В то же время, исследованию применимости оболочечных моделей в задачах ползучести, повреждаемости и длительной прочности цилиндрических оболочек посвящены единичные работы. Так, в статье [11], были исследованы ползучесть и повреждаемость вследствие ползучести полого цилиндра в рамках осесимметричной пространственной постановки и на базе гипотез Кирхгофа-Лява. В этой работе учитывалось различное поведение сплава АК4-1Т при растяжении и сжатии в условиях ползучести. В отличие от [11], в настоящей статье используется уточненная модель, основанная на гипотезах прямолинейного элемента. Свойства ползучести считаются независимыми от вида напряженного состояния. Результаты решения задачи ползучести и повреждаемости для оболочек различной толщины сопоставляются с результатами пространственного решения для осесимметрично нагруженных полых цилиндров.

В литературе также отсутствуют работы, посвященные прогнозированию времени до разрушения полых цилиндров вследствие ползучести.

Цели работы:

- сопоставить результаты решения задачи повреждаемости вследствие ползучести полых цилиндров в рамках пространственной и оболочечной постановок;
- разработать способ прогнозирования времени до разрушения в пространственной постановке на основе данных о времени до разрушения, полученных по оболочечной теории, и наоборот.

**2. Постановка и метод решения начально-краевой задачи ползучести цилиндра в рамках пространственной модели.** Рассмотрим круговой осесимметрично нагруженный полый изотропный цилиндр в цилиндрической системе координат  $O\varphi z$ . Ось  $Oz$  совпадает с осью вращения. Полагаем, что температура цилиндра  $T(r, z, t)$  неизменна во времени  $t$  и выполняется условие  $T(r, z, 0) = T_0$ , где  $T_0$  – начальная температура (температура естественного, ненапряженного и недеформированного состояния).

Задачу будем решать в геометрически линейной, квазистатической постановке и в предположении, что в процессе деформирования пластические деформации не возникают. Принимаем, что компоненты скоростей упругих деформаций  $\dot{\varepsilon}_{kl}^e$  и скоростей необратимых деформаций ползучести  $\dot{p}_{kl}$  аддитивны:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{p}_{kl}, \quad (k, l = \overline{1,3}).$$

Для описания ползучести и повреждаемости воспользуемся уравнениями работы [12], которые представим в виде:

$$\dot{p}_{kl} = \frac{3}{2} A \frac{\sigma_i^m}{(1-\psi)^n} s_{kl}; \quad \dot{\psi} = B \frac{\sigma_i^k}{(1-\psi)^q}. \quad (1)$$

Здесь  $A, B, m, n, k, q$  – константы материала;  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $s_{kl}$  – компоненты девиатора напряжений;  $\psi = \psi(r, z, t)$  – скалярный параметр повреждаемости:  $\psi(r, z, 0) = 0, \psi(r, z, t_*) = 1$ , где  $t_*$  – время до разрушения.

В цилиндрической системе координат имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{rr}^e(r, z, t) + \dot{p}_{rr}(r, z, t); \\ \dot{\varepsilon}_{zz}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{zz}^e(r, z, t) + p_{zz}(r, z, t); \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^e(r, z, t) + \dot{p}_{\varphi\varphi}(r, z, t); \\ \dot{\varepsilon}_{rz}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{rz}^e(r, z, t) + \dot{p}_{rz}(r, z, t). \end{aligned}$$

Здесь и далее точка над символами означает полную производную по времени.

Основные неизвестные задачи ползучести и повреждаемости вследствие ползучести в произвольной точке цилиндра, в том числе в точках пространственной дискретизации краевой задачи, можно найти из решения задачи Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [7]

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} &= \dot{u}_r; \quad \frac{du_z}{dt} = \dot{u}_z; \\ \frac{d\varepsilon_{rr}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{r,r}; \quad \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{z,z}; \quad \frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}}{dt} = \frac{\dot{u}_r}{r}; \\ \frac{d\gamma_{rz}}{dt} &= 2 \frac{d\varepsilon_{rz}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{r,z} + \dot{\varepsilon}_{z,r}; \\ \frac{d\sigma_{rr}}{dt} &= \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{p}_{rr}) + \lambda(\dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{zz} - \dot{p}_{\varphi\varphi}); \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dt} &= \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{zz}) + \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\varphi\varphi}); \\ \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dt} &= \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{\varphi\varphi}) + \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{zz}); \\ \frac{d\sigma_{rz}}{dt} &= G(\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{p}_{rz}); \\ \frac{dp_{rr}}{dt} &= \dot{p}_{rr}; \quad \frac{dp_{zz}}{dt} = \dot{p}_{zz}; \\ \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} &= \dot{p}_{\varphi\varphi}; \quad \frac{dp_{rz}}{dt} = \dot{p}_{rz}; \quad \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь  $u_r(r, z, t), u_z(r, z, t)$  – перемещения вдоль осей  $Or$  и  $Oz$  соответственно;  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{rz}$  – компоненты тензора полных деформаций;  $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rz}$  – компоненты тензора напряжений;  $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ ,

$\lambda_1 = \lambda + 2G$ ,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , где  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала;  $p_{rr}, p_{zz}, p_{\varphi\varphi}, p_{rz}$  – компоненты тензора деформаций ползучести.

В начальный момент времени деформации ползучести и параметр повреждаемости равны нулю. Начальные условия для остальных неизвестных функций следуют из решения задачи упругого деформирования цилиндра.

Решение начальной задачи для системы уравнений (2) будем проводить методом Рунге-Кутты-Мерсона (РКМ) с автоматическим выбором шага по времени. Правые части уравнений, в моменты времени, соответствующие схеме РКМ, будем находить из решения вариационной задачи для функционала в форме Лагранжа [7]

$$\Lambda(\dot{\mathbf{U}}) = 0,5 \iint_{\Omega} \left[ \lambda_1 \left( \dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + \frac{\dot{u}_r^2}{r^2} \right) + G(\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r})^2 + 2\lambda \left( \dot{u}_{r,r} \dot{u}_{z,z} + \frac{\dot{u}_r(\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z})}{r} \right) \right] r dr dz - \iint_{\Omega} \left[ \dot{u}_{r,r} \dot{N}_r^c + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_z^c + \frac{\dot{u}_r \dot{N}_\theta^c}{r} + \dot{N}_{rz}^c (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \int_{\partial\Omega_p} (\dot{P}_n \dot{u}_n + \dot{P}_\tau \dot{u}_\tau) d\delta\Omega. \quad (3)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{U}} = (\dot{u}_r(r, z, t), \dot{u}_z(r, z, t))$  – вектор скоростей перемещений;  $\Omega$  – меридианное сечение цилиндра;  $\partial\Omega_p$  – часть контура  $\partial\Omega$ , где приложены внешние силы,  $\dot{P}_n, \dot{P}_\tau$  – скорости нормальной и касательной составляющих внешних сил,  $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$  – внешняя нормаль и касательная к контуру  $\partial\Omega$ ;  $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_r + \dot{u}_z n_z$ ,  $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_r - \dot{u}_r n_z$ ;  $n_r, n_z$  – направляющие косинусы нормали  $\mathbf{n}$ . Скорости «фиктивных» сил, обусловленных деформациями ползучести, вычисляются по формулам:

$$\dot{N}_r^c = [\lambda_1 \dot{p}_{rr} + \lambda(\dot{p}_{zz} + \dot{p}_{\varphi\varphi})]; \quad \dot{N}_z^c = [\lambda_1 \dot{p}_{zz} + \lambda(\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\varphi\varphi})]; \\ \dot{N}_\theta^c = [\lambda_1 \dot{p}_{\varphi\varphi} + \lambda(\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{zz})]; \quad \dot{N}_{rz}^c = 2G\dot{p}_{rz}.$$

Скорости деформаций ползучести в функционале (3) считаются известными и не варьируются.

Вариационные задачи для функционала (3) решаются методом Ритца в сочетании с методом R-функций [13].

**3. Постановка и метод решения задачи на осевом оболочечной теории.** Рассматривая осесимметрично нагруженный полый цилиндр в рамках уточненной теории оболочек, предполагаем, что выполняются гипотезы прямолинейного элемента [9]. В соответствии с данными гипотезами связь между осевым  $u_z$  и нормальным  $u_\zeta$  перемещениями произвольной точки оболочки с соответствующими перемещениями точки срединной поверхности  $u, w$  имеет вид

$$u_z = u + \zeta \psi_z; \quad u_\zeta = w; \quad \psi_z = -w' + \gamma_z, \quad (4)$$

где  $\zeta$  – координата, которая отсчитывается по нормали к срединной поверхности с радиусом  $r = R$ ;  $\psi_z, \gamma_z$  – полный угол прямолинейного элемента и угол, обусловленный поперечным сдвигом, соответственно; штрих означает производную по координате  $z$ . Используя (4) и соотношения Коши, связь между компонентами тензора деформаций в произвольной точке оболочки  $\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{z\zeta}$  компонентами деформации срединной поверхности  $\varepsilon_z, \varepsilon_\varphi$ , параметром изменения ее кривизны  $\kappa_z$  и углом сдвига  $\gamma_z$  представим в виде

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_z + \zeta \kappa_z; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_\varphi / a_\varphi; \quad 2\varepsilon_{z\zeta} = \gamma_z;$$

$$\varepsilon_z = u'; \quad \varepsilon_\varphi = w/R; \quad \kappa_z = \psi_z'; \quad a_\varphi = 1 + \zeta/R. \quad (5)$$

Компоненты напряжений определяются равенствами

$$\sigma_{zz} = B_{11}\varepsilon_{zz} + B_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}^a; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = B_{12}\varepsilon_{zz} + B_{11}\varepsilon_{\varphi\varphi} - \sigma_{\varphi\varphi}^a; \\ \sigma_{z\zeta} = B_{33}\varepsilon_{z\zeta} - \sigma_{z\zeta}^a, \quad (6)$$

где  $B_{ij}$  – жесткостные коэффициенты

$$B_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad B_{12} = \nu B_{11}; \quad B_{33} = 2G.$$

Величины с индексом «а» означают дополнительные напряжения

$$\sigma_{zz}^a = B_{11}(p_{zz} + \nu p_{\varphi\varphi}); \quad \sigma_{\varphi\varphi}^a = B_{11}(p_{\varphi\varphi} + \nu p_{zz}); \\ \sigma_{z\zeta}^a = B_{33}p_{z\zeta},$$

где  $p_{zz}, p_{\varphi\varphi}, p_{z\zeta}$  – компоненты деформаций ползучести, которые зависят от напряжений, констант ползучести и параметра повреждаемости материала и определяются путем численного интегрирования физических уравнений. Как и в случае пространственной задачи, это интегрирование осуществляется методом РКМ.

Вводя в рассмотрение интегральные характеристики напряженного состояния – радиальное  $N_r$ , осевое  $N_z$  усилия и осевой изгибающий момент  $M_z$ , и, используя уравнения равновесия [9], кинематические (5) и физические (6) уравнения, решение задачи сведем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка вида

$$\mathbf{Y}' = P(z)\mathbf{Y} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{Y} = \{N_r, N_z, M_z, u_r, u_z, \psi_z\}, \quad (7)$$

где  $P(z)$  – матрица системы, зависящая от упругих констант материала;  $\mathbf{f}$  – вектор свободных членов, который зависит еще и от деформаций ползучести, и параметра повреждаемости. Решение системы (7) должно удовлетворять граничным условиям на торцах цилиндра. Ненулевые элементы матрицы  $P(z)$  и вектора  $\mathbf{f}$  определяются равенствами

$$p_{12} = -p_{54} = -\mu_1/R; \quad p_{13} = -p_{64} = \mu_2/R; \\ p_{14} = (C_{02} + \mu_1 C_{01} - \mu_2 C_{11})/R^2; \\ p_{31} = -p_{46} = 1; \quad p_{41} = 1/C_{33}; \quad p_{52} = C_{20}/\delta; \\ p_{53} = p_{62} = -C_{10}/\delta; \quad p_{63} = C_{00}/\delta; \\ f_1 = -(\mu_1 N_z^a + N_\varphi^a - \mu_2 M_z^a)/R - q_\zeta; \\ f_2 = -q_z; \quad f_3 = -m_z; \quad f_4 = Q_z^a/C_{33}; \\ f_5 = (C_{20} N_z^a - C_{10} M_z^a)/\delta; \\ f_6 = -(C_{10} N_z^a - C_{00} M_z^a)/\delta, \quad (8)$$

где  $\mu_1 = (C_{10} C_{11} - C_{01} C_{20})/\delta$ ;  $\mu_2 = (C_{00} C_{11} - C_{01} C_{10})/\delta$ ;  $\delta = C_{00} C_{20} - C_{10}^2$ .

Входящие в (7) величины  $q_z, q_\zeta, m_z$  означают приведенные к срединной поверхности распределенные поверхностные нагрузки и момент [9]. Интегральные жесткостные характеристики  $C_{pq}, C_{33}$  а также дополнительные усилия  $N_z^a, N_\varphi^a, Q_z^a$  и момент  $M_z^a$  определяются равенствами

$$C_{pq} = B_{11} F \{ b_q \zeta^p \} \quad (p, q = 0, 1, 2); \quad C_{33} = 2Gh; \\ b_0 = a_\varphi; \quad b_1 = \nu; \quad b_2 = a_\varphi^{-1}; \quad F \{ \dots \} = \int_{-h/2}^{h/2} (\dots) d\zeta;$$

$$\begin{aligned} N_z^a &= F\{\sigma_{zz}^a a_\varphi\}; & N_\varphi^a &= F\{\sigma_{\varphi\varphi}^a\}; \\ Q_z^a &= F\{\sigma_{z\zeta}^a a_\varphi\}; & M_z^a &= F\{\sigma_{zz}^a a_\varphi \zeta\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Входящие в (9) интегралы вычисляются численно на основании процедуры, сочетающей методы Симпсона и Ньютона. На каждом шаге по времени краевая задача (7) решается методом Рунге-Кутты с дискретной ортогонализацией по С. К. Годунову.

Здесь необходимо отметить следующее:

1. Приведенные выше уравнения предназначены для описания деформирования в условиях ползучести цилиндрических оболочек с учетом повреждаемости и при отсутствии тепловых воздействий. В уравнениях учитываются величины  $\zeta/R$ . Удержание этих величин может оказаться целесообразным для оболочек средней толщины и бесполезным для тонких оболочек.

2. Независимо от того учитываются или не учитываются величины  $\zeta/R$ , разрешающие уравнения, основанные на гипотезах Кирхгофа – Лява, могут быть получены с помощью (8), если в них положить  $1/C_{33} = 0$ , а в равенствах (4), (5) положить  $\gamma_z = 0$  [4].

3. В работе [14] показано, что при наличии температурных деформаций учет величин  $\zeta/R$  может привести к появлению значительных «фиктивных» напряжений. Поэтому в температурных задачах этими величинами следует пренебрегать по сравнению с единицей.

**4. Численные результаты.** В первом примере проведено сопоставление результатов решения задачи ползучести и повреждаемости для полого цилиндра и цилиндрической оболочки. В последующих примерах будет описана методика прогнозирования времени до разрушения при ползучести для таких объектов.

*Пример 1.* Рассмотрим ползучесть цилиндра, на наружной поверхности которого приложено давление, изменяющееся по закону

$$P_{out} = P(z) = \frac{1}{2} P_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{l}\right) \right]. \quad (10)$$

Геометрические размеры: длина  $l = 0,1$  м; радиус срединной поверхности  $R = 0,1$  м; толщина  $h = 0,01$  м. Обозначим

$$\xi = h/R. \quad (11)$$

В данном случае  $\xi = 1/10$ . Для величины  $P_0$ , определяющей максимальное значение нагрузки, принято, что  $P_0 = 18,7$  МПа. Упругие константы материала:  $E = 60$  ГПа,  $\nu = 0,35$ . Константы материала в уравнениях

$$(1): \quad A = 5,5 \cdot 10^{-23} \text{ МПа}^{-(m+1)} \text{ ч}^{-1}, \\ B = 5,5 \cdot 10^{-24} \text{ МПа}^{-k} \text{ ч}^{-1}, \quad m = 7, \quad k = 9, \quad n = q = 3.$$

Граничные условия для краевой задачи в рамках пространственной постановки задавались в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u}_r &= 0, \quad \dot{\sigma}_z = 0 \quad \text{для } z = \pm \frac{l}{2}; \\ \dot{\sigma}_r &= \dot{\sigma}_{zr} = 0 \quad \text{для } r = r_{inn} = R - \frac{h}{2}; \\ \dot{\sigma}_r &= -\dot{P}_{out} = 0, \quad \dot{\sigma}_{zr} = 0 \quad \text{для } r = r_{out} = R_0 + \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

Можно показать, что структура решения, удовле-

творяющая кинематическим граничным условиям для скоростей перемещений, имеет вид:

$$\dot{u}_r = \omega \Phi_1; \quad \dot{u}_z = z \Phi_2,$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  – неопределенные компоненты структуры решения;  $\omega = \frac{1}{l} \left( \frac{l^2}{4} - z^2 \right) \geq 0$  – полоса  $\Omega$ , заключенная

между линиями  $z = -l/2$  и  $z = l/2$  ( $\omega = 0$ ,  $\omega_n = -1$  на границе  $\partial\Omega$ ,  $\omega > 0$  внутри полосы). При численной реализации, неопределенные компоненты  $\Phi_1, \Phi_2$  представлялись в виде конечных рядов вида:

$$\Phi_1(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_1} C_n^{(1)}(t) f_n^{(1)}(r, z);$$

$$\Phi_2(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_2} C_n^{(2)}(t) f_n^{(2)}(r, z),$$

где  $C_n^{(1)}(t), C_n^{(2)}(t)$  – неопределенные коэффициенты, которые на каждом временном шаге находятся методом Рунге;  $t$  – некоторый фиксированный момент временной дискретизации схемы РКМ или дискретизации по времени для выдачи результатов расчета;  $\{f_n^{(1)}, f_n^{(2)}\}$  – система линейно независимых базисных функций. Здесь в качестве  $\{f_n^{(1)}, f_n^{(2)}\}$  использовались бикубические сплайны Шенберга. Системы сплайнов строились на регулярной сетке  $K_r \times K_z$ , где  $K_r, K_z$  – количество отрезков дискретизации вдоль осей  $Or$  и  $Oz$ , соответственно.

Решение задачи ползучести цилиндра, сформулированной в рамках пространственной постановки, было получено при следующих параметрах пространственной и временной дискретизации:  $K_r = 10, K_z = 20$ ; начальный шаг по времени  $\Delta_0 t = 10^{-3}$  ч; заданная погрешность вычислений в методе РКМ  $\varepsilon = 10^{-4}$ . При численных расчетах критерием окончания процесса решения и нахождения времени до разрушения было выполнение в какой-либо точке пространственной дискретизации условия  $\psi \geq 0,9$ .

При решении задачи в рамках теории оболочек рассматривалась правая симметричная половина оболочки  $0 \leq z \leq l/2$ . На меридианное сечение оболочки наносилась равномерная сетка, состоящая из 101 точки по  $z$  и 11 точек по толщине. Другие параметры дискретизации принимали значения:  $\Delta_0 t = 10^{-5}$  ч,  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Граничные условия в рамках теории оболочек формулировались в виде

$$N_r = u_z = \psi_z = 0, \quad \text{при } z = 0;$$

$$N_z = M_z = u_r = 0, \quad \text{при } z = l/2.$$

Нагрузка на срединной поверхности оболочки определялась по формуле

$$q_\zeta = - \left( 1 + \frac{h}{2R} \right) P(z).$$

Расчеты показали, что в пространственном и оболочечном решениях разрушение начинается в центре на внутренней поверхности цилиндра. Время до разрушения в пространственном решении  $t_{3D} = 4266$  ч, а в оболочечном –  $t_{SH} = 3305$  ч (символ «\*» для простоты опущен). То есть отличие в определении време-

ни до разрушения составляет 22,5 %. Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 1-5. На рис. 1 показаны графики изменения вдоль оси цилиндра радиальных перемещений срединной поверхности в различные моменты времени. Кривые 1 соответствуют моменту времени  $t = 0$ ; 2 –  $t = 2000$  ч; 3 –  $t = t_*$ . Здесь и далее линии с маркерами соответствуют результатам пространственного решения. На рис. 2 для тех же моментов времени показаны графики изменения параметра повреждаемости на внутренней поверхности

цилиндра, где начинается разрушение.

На рис. 3, а показаны аналогичные графики для окружных  $\sigma_{\phi\phi}$ , а на рис. 3, б осевых  $\sigma_{zz}$  напряжений. Такие же графики для окружных  $p_{\phi\phi}$  и осевых  $p_{zz}$  деформаций ползучести приведены на рис. 4.

Рис. 5 иллюстрирует изменение во времени параметра повреждаемости  $\psi$  (кривые а) и окружных напряжений  $\sigma_{\phi\phi}$  (кривые б) в центре на внутренней поверхности цилиндра.

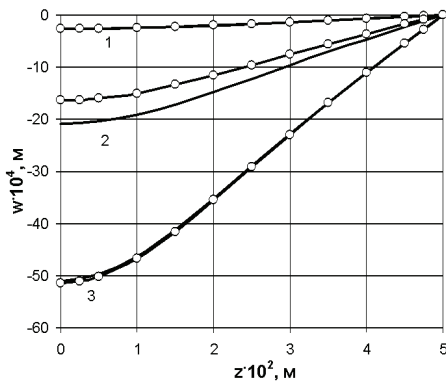


Рисунок 1 – Радиальные перемещения точек срединной поверхности цилиндра в различные моменты времени

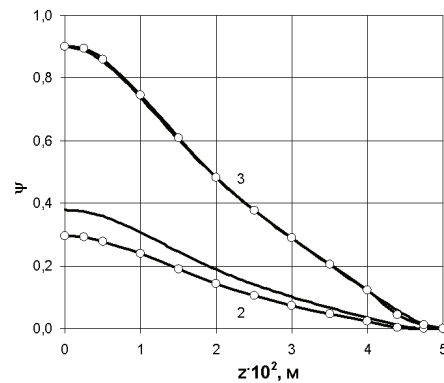


Рисунок 2 – Параметр повреждаемости на внутренней поверхности цилиндра в различные моменты времени

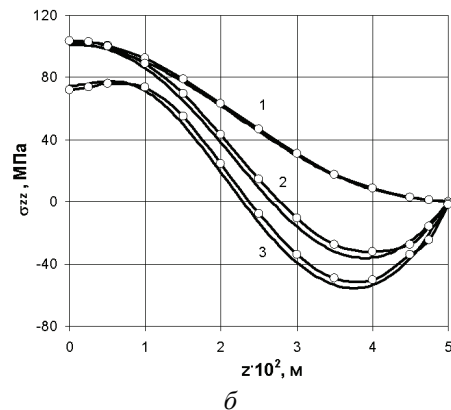
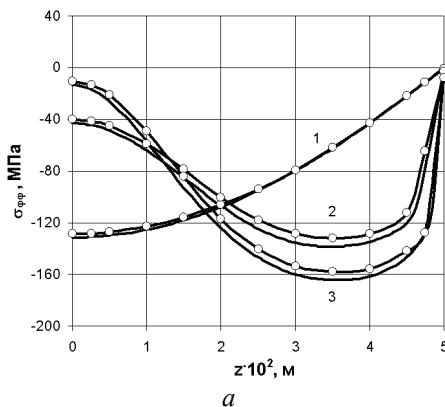


Рисунок 3 – Окружные (а) и осевые (б) напряжения на внутренней поверхности цилиндра в различные моменты времени

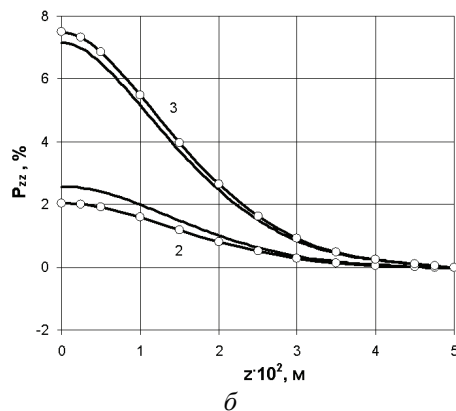
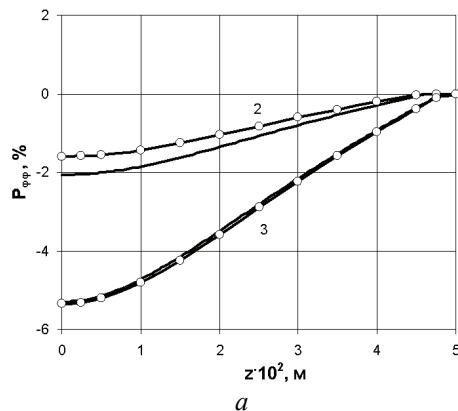


Рисунок 4 – Окружные (а) и осевые (б) деформации ползучести на внутренней поверхности цилиндра в различные моменты времени

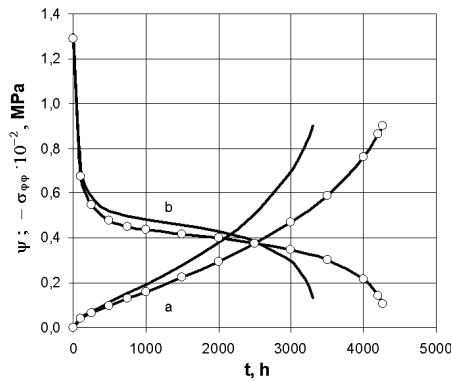


Рисунок 5 – Повреждаемость и окружные напряжения в центре на внутренней поверхности цилиндра

Из рисунков видно, что в начальный момент времени (в уругом решении) получено практически полное совпадение результатов для перемещений и напряжений. С ростом времени расхождение увеличивается.

Например, при  $t = 2000$  ч, наблюдаются заметные (до 28 %) расхождения в перемещениях, деформациях ползучести и для параметра повреждаемости. В то же время напряжения в области максимальных значений отличаются лишь на 5 %. В моменты времени, соответствующие завершению скрытого разрушения, результаты согласуются хорошо. В целом можно сделать вывод о достаточно хорошем совпадении результатов для характеристик напряженно-деформирован-

ного состояния, полученных с помощью пространственной и оболочечной теорий.

Следующие примеры посвящены разработке способа прогнозирования времени до разрушения полых цилиндров на основе данных о времени до разрушения, полученных по оболочечной теории, и наоборот.

**Пример 2.** Рассмотрим цилиндр из предыдущего примера, при тех же граничных условиях, свойствах материала и геометрических размерах, за исключением толщины. Значения  $\xi$  будем варьировать в пределах от 1/50 до 1/8. Величины  $P_0$  (табл. 1) выбирались так, чтобы время до разрушения во всех вариантах расчета было близко. Как и ранее разрушение для всех значений  $\xi$  начинается в центре цилиндра, на внутренней поверхности. В табл. 1 приведены значения  $t_{3D}$  времени до разрушения, полученные в расчетах по пространственной модели, и значения  $t_{SH}$  времени до разрушения, полученные на основе оболочечной модели. В табл. 1 также помещены значения относительного отклонения для времени до разрушения

$$\Delta = \frac{t_{3D} - t_{SH}}{t_{3D}} \tag{12}$$

Видно, что во всех рассмотренных случаях  $t_{3D} > t_{SH}$ , поэтому отклонения (12) всюду положительны. Из таблицы также видно, что с ростом  $\xi$  относительное отклонение  $\Delta$  возрастает.

Таблица 1 – Значения  $t_{3D}$  времени до разрушения, полученные в расчетах по пространственной модели, и значения  $t_{SH}$  времени до разрушения

$\xi$	1/50	1/25	1/20	1/16	1/10	1/8
$P_0$ , МПа	3,17	6,95	8,85	11,3	18,7	23,8
$t_{SH}$ , ч	4096	3750	3806	3623	3305	3108
$t_{3D}$ , ч	4245	4111	4291	4216	4266	4291
$\Delta$	0,035	0,088	0,113	0,141	0,225	0,276
$t_{SH}^{pr}$ , ч	4056	3744	3813	3628	3315	3095
$t_{3D}^{pr}$ , ч	4287	4117	4284	4210	4254	4309

Анализируя зависимость приведенных отклонений  $\Delta$  от величины  $\xi$ , приходим к выводу, что она близка к линейной и ее можно аппроксимировать зависимостью

$$\Delta(\xi) = k\xi \tag{13}$$

Угловой коэффициент  $k$  в (13) определялся методом наименьших квадратов и оказался равным  $k = 2,23$ .

При этом использовались данные для  $\xi = 1/50; 1/25; 1/16; 1/10$ .

Приняв для параметра  $\Delta$  аппроксимацию (13), получим формулу для прогнозирования времени до разрушения по оболочечной теории на основе пространственного решения

$$t_{SH}^{pr} = t_{3D}(1 - k\xi) \tag{15}$$

Из (12), (13) также следует формула, позволяющая базе оболочечного решения прогнозировать время до разрушения в пространственной постановке

$$t_{3D}^{pr} = \frac{t_{SH}}{1 - k\xi} \tag{16}$$

Эта формула привлекательна тем, что для прогнозирования времени до разрушения в пространственной постановке необходимо знать лишь коэффициент  $k$  и значение времени до разрушения в оболочечной постановке. Учитывая, что затраченное время на получение пространственного решения может на несколько порядков превышать соответствующее время в оболочечной постановке, получаем несомненную выгоду.

На основе найденного коэффициента  $k$  (14) по формулам (15), (16) вычислены прогнозируемые значения времени до разрушения в оболочечной  $t_{SH}^{pr}$  и пространственной  $t_{3D}^{pr}$  постановках (см. табл. 1). Можно убедиться, что максимальное отличие расчетных и прогнозируемых значений составляет 1,3 %. Следует отметить, что при определении коэффициента  $k$  не использовались данные для  $\xi = 1/20$  и  $1/8$ , однако полученные расчетные и исходные значения также

хорошо согласуются между собой.

Очевидно, что для построения прямой, исходящей из начала координат на плоскости  $\xi O\Delta$  достаточно знать одну точку. Пусть эта точка соответствует значению  $\xi = 1/10$ . Тогда угловый коэффициент будет равен  $k_1 = 2,25$ , что незначительно отличается от значения (14). Можно легко убедиться, что прогнозируемые в этом случае значения времени до разрушения будут мало отличаться от приведенных в табл. 1.

**Пример 3.** Рассмотрим цилиндр, нагруженный постоянным внутренним давлением

$$P_{inn} = \frac{PR}{r_{inn}} = P \left( 1 - \frac{h}{2R} \right)^{-1},$$

где  $P$  – давление, отнесенное к срединной поверхности (табл. 2). Остальные условия совпадают с условиями предыдущего примера. В табл. 2 представлены расчетные  $t_{SH}$ ,  $t_{3D}$  значения времени до разрушения и значения

отклонения  $\Delta$ . Разрушение для всех значений  $\xi$  начинается в центре цилиндра, на внутренней поверхности. В отличие от примера 2 здесь все отклонения  $\Delta$  (12) отрицательны. Зависимость  $\Delta(\xi)$  также можно аппроксимировать выражением вида (13). При этом коэффициент аппроксимации отрицателен и равен

$$k = -2,21.$$

Прогнозируемые значения времени до разрушения  $t_{SH}^{pr}$ ,  $t_{3D}^{pr}$ , найденные по формулам (15), (16), также помещены в табл. 2. Максимальное отклонение расчетных и прогнозируемых данных наблюдается при  $\xi = 1/8$  и не превышает 1,3%. Линейная зависимость, построенная по одной точке (для  $\xi = 1/10$ ) с коэффициентом  $k_1 = 2,12$ , дает максимальную погрешность 1,6%.

Очевидно, что для цилиндров, рассмотренных во 2-м и 3-м примерах, можно принять единый коэффициент с модулем, равным среднему арифметическому модулей коэффициентов  $k$  при внутреннем и внешнем давлении, то есть  $|k| = 2,22$ .

Таблица 2 – Расчетные  $t_{SH}$ ,  $t_{3D}$  значения времени до разрушения и значения отклонения  $\Delta$

$\xi$	1/50	1/25	1/20	1/16	1/10	1/8
$P$ , МПа	2,55	5,1	6,4	8,0	13,0	16,5
$t_{SH}$ , ч	4594	4707	4688	4892	5200	5422
$t_{3D}$ , ч	4360	4281	4172	4277	4291	4304
$\Delta$	-0,054	-0,099	-0,124	-0,144	-0,212	-0,260
$t_{SH}^{pr}$ , ч	4553	4659	4633	4868	5239	5493
$t_{3D}^{pr}$ , ч	4400	4325	4222	4298	4259	4248

**Пример 4.** Для проверки работоспособности предложенной методики прогнозирования времени до разрушения рассмотрим цилиндр из примера 1, но вдвое большей длины, то есть с  $l = 0,2$  м. В результате расчетов установлено, что  $t_{3D} = 957$  ч и  $t_{SH} = 768$  ч.

Учитывая, что вид нагрузки не изменился и, используя значение коэффициента  $k$  (14) найдем соответствующие прогнозируемые времена до разрушения:  $t_{3D}^{pr} = 988$  ч и  $t_{SH}^{pr} = 744$  ч. То есть расхождения с расчетными значениями составляют около 3,2%, что подтверждает эффективность предложенного подхода.

**Пример 5.** Исследуем применимость предложенного подхода для прогнозирования времени до разрушения толстостенных цилиндрических оболочек и цилиндров. Заметим, что для оболочек с  $\xi > 1/8$  отклонение расчетного времени до разрушения  $t_{SH}$  от  $t_{3D}$  превышает 30%. В этих случаях, для получения более достоверного решения, нужно использовать более сложные теории оболочек, учитывающие, например, поперечное обжатие. Отметим также, что для толстостенных оболочек зависимость отклонения  $\Delta(\xi)$ , полученная на основе теории оболочек средней толщины, может сильно отклоняться от линейного закона.

Рассмотрим цилиндр под действием наружного давления, изменяющегося по закону (10) и цилиндр под действием постоянного внутреннего давления. Для обоих случаев отношение  $h/R = 1/5$ . Граничные условия и свойства материала – те же что и в приме-

рах 2, 3. Для наружного и внутреннего давлений примем:  $P_0 = 40,4$  МПа,  $P = 28,2$  МПа.

Для цилиндра под действием наружного давления получены следующие расчетные значения времени до разрушения:  $t_{3D} = 4307$  ч,  $t_{SH} = 2471$  ч. Используя формулы (15), (16), где  $k = 2,22$ , для прогнозируемых значений времени до разрушения получим:  $t_{3D}^{pr} = 4444$  ч и  $t_{SH}^{pr} = 2395$  ч. Отличие прогнозируемого и расчетного времени до разрушения в пространственном случае составляет 3,2%, а по теории оболочек – 3,1%.

Для цилиндра под внутренним давлением получено:  $t_{3D} = 4203$  ч,  $t_{SH} = 5562$  ч. Используя формулы (15), (16), где  $k = -2,22$ , для прогнозируемых значений времени до разрушения получим  $t_{3D}^{pr} = 3852$  ч и  $t_{SH}^{pr} = 6069$  ч. Соответствующие погрешности составляют 8,4% и 9,1%.

Таким образом, получено удовлетворительное совпадение расчетных и прогнозируемых значений времени до разрушения. Если принять во внимание большой разброс экспериментальных данных на третьей стадии ползучести, где значения времени до разрушения могут отличаться в 2 раза, то можно сделать вывод о применимости предложенного подхода для прогнозирования времени до разрушения толстостенных оболочек и цилиндров.

Предложенный способ прогнозирования времени

до разрушения, основанный на линейной аппроксимации вида (13), применим в широком диапазоне изменения относительной толщины цилиндра и для нахождения коэффициента  $k$  требует всего двух расчетов при каком-то фиксированном значении  $\zeta$ . В этом заключается его несомненное достоинство. В других случаях (например, для других граничных условий или вида нагрузки) необходимо проверять приемлемость данной аппроксимации. Определение рамок применимости линейной или какой-либо другой аппроксимации требует дополнительных исследований.

**5. Выводы.** Разработан способ прогнозирования времени до разрушения в условиях ползучести полых цилиндров и цилиндрических оболочек, находящихся под действием поперечной нагрузки. Предложенный подход основан на анализе отклонения оболочечного решения от пространственного. Он позволяет достаточно точно прогнозировать время до разрушения в пространственной постановке, используя результаты оболочечного решения, и наоборот – прогнозировать время до разрушения в оболочечной постановке на основе пространственного решения.

**Список литературы:** 1. Бурлаков А.В. Длительная прочность оболочек / А.В. Бурлаков, Г.И. Львов Г.И., О.К. Морачковский. – Х.: Вища шк., 1981. – 104 с. 2. Локощенко А.М. Долговечность цилиндрических оболочек при чистом изгибе в условиях ползучести / А.М. Локощенко, Н.Е. Печенина, С.А. Шестериков // Прикл. математика и механика. – 1989. – 25, № 12. – С. 73–78. 3. Шевченко Ю.Н. Термовязкоупруго-пластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Ю.Н. Шевченко, М.Е. Бабешко, Р.Г. Терехов. – К.: Наук. думка, 1992. – 329 с. 4. Galishin A.Z. Axisymmetric thermoviscoelastoplastic state of laminar orthotropic shells of revolution with a branched meridian / A.Z. Galishin // Int. Appl. Mech. – 1993. – Vol. 29, No. 1. – P. 61-69. 5. Altenbach H. Zum Kriechen dünner Rotationschalen unter Einbeziehung geometrischer Nichtlinearität sowie der Asymmetrie der Werkstoffeigenschaften / H. Altenbach, O. Morachkovsky, K. Naumenko, A. Sychov // Forschung im Ingenieurwesen. – 1996. – 62, № 3. – S. 47-57. 6. Galishin A. Transversal shear effect in moderately thick shells from materials with characteristics dependent on the kind of stress state under creep-damage conditions: Numerical modeling / A. Galishin, A. Zolochevskiy, A. Kühhorn, M. Springmann // Techn. Mech. – 2009. – Vol. 29, №. 1. – P. 48-59. 7. Золочевский А.А. Нелинейная механика деформируемого твердого тела / А.А. Золочевский, А.Н. Скленус, С.Н. Скленус. – Х.: «Бизнес Инвестор Групп», 2011. – 720 с. 8. Shevchenko Yu.N. Thermoviscoelastoplastic deformation of compound shells of revolution made of a damageable material / Yu.N. Shevchenko, A.Z. Galishin, M.E. Babeshko // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51, № 6. – P. 607-613. 9. Григоренко Я.М. Теория оболочек переменной жесткости / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко. – К.: Наук.

думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т. 4). 10. Сало В.А. Краевые задачи статки оболочек с отверстиями / В.А. Сало. – Х.: НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с. 11. Zolochevsky A. A comparison between the 3D and the Kirchhoff-Love solutions for cylinders under creep-damage conditions / A. Zolochevsky, S. Sklepus, A. Galishin, A. Kühhorn, M. Kober // Techn. Mech. – 2014. – Vol. 34, № 2. – P. 104-113. 12. Dunne F.P.E. Representation of uniaxial creep curves using continuum damage mechanics / F.P.E. Dunne, A.M. Othman, F.R. Hall, D.R. Hayhurst // Int. J. Mech. Sci. – 1990. – 32, № 11. – P. 945-957. 13. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 14. Galishin A.Z. Calculating the thermoelastic stress state of medium-thickness shells of revolution / A.Z. Galishin, Yu.N. Shevchenko // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, № 5. – P. 526-533.

**Bibliography (transliterated):** 1. Burlakov A.V., Lvov G.I., Morachkovskij O.K. Dlitel'naja prochnost' obolochek. Kharkiv: Visha shk., 1981, 104 s. 2. Lokoshenko A.M., Pechenina N.E., Shesterikov S.A. Dolgovechnost' cilindricheskikh obolochek pri chistom izgibe v usloviyah polzuchesti. Prikl. matematika i mehanika. 25, No 12, 1989, p. 73-78. 3. Shevchenko Yu.N., Babeshko M.E., Terehov R.G. Termoviazkoplachesticheskie processi slozhnogo deformirovaniya elementov konstrukcij. Kyiv: Nauk. dumka, 1992, 329 s. 4. Galishin A.Z. Axisymmetric thermoviscoelastoplastic state of laminar orthotropic shells of revolution with a branched meridian. Int. Appl. Mech. 1993, vol. 29, No. 1, p. 61-69. 5. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A. Zum Kriechen dünner Rotationschalen unter Einbeziehung geometrischer Nichtlinearität sowie der Asymmetrie der Werkstoffeigenschaften. Forschung im Ingenieurwesen. 1996, 62, № 3, p. 47-57. 6. Galishin A., Zolochevsky A., Kühhorn A., Springmann M. Transversal shear effect in moderately thick shells from materials with characteristics dependent on the kind of stress state under creep-damage conditions: Numerical modeling. Techn. Mech., 2009, vol. 29, No 1, p. 48-59. 7. Zolochevskij A.A., Sklepus A.N., Sklepus S.N. Nelinejnaja mehanika deformiruemogo tverdogo tela. Kharkiv: «Biznes Investor Grupp», 2011. 720 p. 8. Shevchenko Yu.N., Galishin A.Z., Babeshko M.E. Thermoviscoelastoplastic deformation of compound shells of revolution made of a damageable material. Int. Appl. Mech, 2015, vol. 51, No 6, p. 607-613. 9. Grigorenko Ja.M., Vasilenko A.T. Teorija obolochek peremenoj zhestkosti. (Metodi rascheta obolochek v 5 T., T4). Kyiv: Nauk. dumka, 1981, 544 p. 10. Salo V.A. Kraevye zadachi statiki obolochek s otverstijami. Kharkiv: NTU «ХПИ», 2003, 203 p. 11. Zolochevsky A., Sklepus S., Galishin A., Kühhorn A., Kober M. A comparison between the 3D and the Kirchhoff-Love solutions for cylinders under creep-damage conditions. Techn. Mech. 2014. vol. 34, No 2, p. 104-113. 12. Dunne F.P.E., Othman A.M., Hall F.R., Hayhurst D.R. Representation of uniaxial creep curves using continuum damage mechanics. Int. J. Mech. Sci. 1990, 32, No 11, p. 945-957. 13. Rvachev V.L. Teorija R-funkcij i nekotorie ee prilozhenija. Kyiv: Nauk. dumka, 1982, 552 p. 14. Galishin A.Z., Shevchenko Yu.N. Calculating the thermoelastic stress state of medium-thickness shells of revolution. International Applied Mechanics. 2008, vol. 44, No 5, p. 526-533.

Поступила (received) 10.07.2016.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Скленус Сергей Николаевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ИПМаш НАН Украины, г. Харьков, тел. (050) 522-49-01 (моб.), (0572) 67-54-95 (д.), e-mail: ssklepus@rambler.ru

**Sklepus Sergej Nikolaevich** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Officer, IPMash NAS of Ukraine, Kharkiv, tel.: (050) 522-49-01, (0572) 67-54-95, e-mail: ssklepus@rambler.ru

**Галишин Александр Закирьянович** – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев, e-mail: galishin55@mail.ru

**Galishin Aleksandr Zakir'yanovich** – Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher, S.P.Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kyiv, e-mail: galishin55@mail.ru