

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"

Н. А. Ткачук, А. А. Зарубина, Е. И. Зинченко,
Г. А. Кротенко, З. С. Сафонова

Методы анализа и синтеза механизмов
Текст лекций по дисциплине «Теория механизмов и машин»
для студентов машиностроительных специальностей

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол № 2 від 07.12.11

Харьков
НТУ «ХПИ»
2014

УДК 621
ББК 34.41
М 54

Рецензенты: *В. В. Офий*, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПИ»;
Н. Л. Рябчиков, д-р. техн. наук, проф. УИПА

М 54 Методы анализа и синтеза механизмов : Текст лекций по дисциплине «Теория механизмов и машин» для студентов машиностроительных специальностей / Н. А. Ткачук, А. А. Зарубина, Е. И. Зинченко и др. – Х.: НТУ «ХПИ», 2014. – 138 с. – Рос. мовою.

ISBN

В конспекте лекций рассматриваются основные вопросы курса ТММ. Предназначено для студентов машиностроительных специальностей.

Ил._____. Табл._____. Библиогр.: _____ назв.

УДК 621
ББК 34.41

ISBN

© Н. А. Ткачук, А. А. Зарубина,
Е. И. Зинченко, 2014
© НТУ «ХПИ», 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
ВВЕДЕНИЕ.....	6
Тема 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ТММ.....	6
1.1 Машина, виды машин, циклограмма работы.....	6
1.2. Механизмы и их классификации.....	8
1.3 Кинематические цепи и их классификация.....	11
Тема 2. СТРУКТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ.....	12
2.1. Формула Сомова-Малышева.....	13
2.2. Общие связи в механизме. Степень подвижности плоской кинематической цепи. Формула П.Л. Чебышева.....	14
2.3. Пассивные связи и лишние степени подвижности.....	15
2.4. Строение рычажных механизмов. Структурные группы Ассура.....	15
2.5. Классификация структурных групп (групп Ассура) И.И. Артоболевского. Виды групп Ассура второго класса второго порядка.....	16
2.6. Класс механизма.....	18
2.7. Структурная схема механизма.....	18
Тема 3. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ.....	19
3.1. Задача кинематического исследования. Исходные данные.....	19
3.2. Последовательность кинематического анализа.....	20
3.3. Этапы кинематического исследования.....	20
3.4. Методы кинематического исследования механизмов.....	21
3.5. Кинематическое исследование графоаналитическим методом.....	22
3.6. Кинематическое исследование плоских шарнирно-рычажных механизмов аналитическим методом.....	29
Тема 4. ТРЕНИЕ В МАШИНАХ.....	33
4.1. Виды трения.....	33
4.2. Трение скольжения.....	34
4.3. Трение качения.....	47
Тема 5. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ.....	50
5.1. Задача силового расчета плоских рычажных механизмов. Основные предположения для расчета.....	51
5.2. Последовательность силового расчета плоского рычажного механизма.....	51
5.3. Силовой расчет структурных групп второго класса.....	52
5.4. Силовой расчет с учетом сил трения.....	56
5.5. Силовой расчет начального звена.....	58
5.6. Проверка правильности силового расчета.....	59
Тема 6. ДИНАМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МАШИН.....	61
6.1. Основные задачи динамики машинного агрегата.....	61
6.2. Силы, действующие на звенья машинного агрегата.....	62
6.3. Механические характеристики сил.....	62
6.4. Жесткая модель машинного агрегата.....	63
6.5. Приведение сил и масс в машинных агрегатах с плоскими механизмами.....	64
6.6. Уравнения движения машинного агрегата.....	67
6.7. Определение мощности и коэффициента полезного действия машины.....	69
6.8. Режимы движения машинного агрегата.....	70
6.9. Исследование установившегося движения машинного агрегата.....	71
Тема 7. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МАСС МАШИНЫ.....	79
7.1. Условия уравновешивания масс механизма.....	79
7.2. Статическое уравновешивание масс плоских механизмов по методу заменяющих масс.....	80

7.3. Уравновешивание с помощью одного противовеса на кривошипе.....	82
Тема 8. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ.....	83
8.1. Общие сведения о кулачковых механизмах.....	83
8.2. Типы кулачковых механизмов и их особенности.....	86
8.3. Требования, предъявляемые к кулачковым механизмам при их проектировании.....	87
8.4. Циклограмма работы кулачкового механизма.....	88
8.5. Законы движения толкателя.....	88
8.6. Центральной (теоретической) и рабочий профили кулачковых механизмов.....	92
8.7. Угол давления.....	93
8.8. Кривизна кулачка.....	95
8.9. Подрезание профиля в кулачковых механизмах.....	95
8.10. Определение основных параметров кулачковых механизмов.....	97
8.11. Синтез кулачковых механизмов с плоским толкателем (ПТ).....	99
8.12. Построение профиля кулачка.....	101
8.13. Определение жесткости замыкающей пружины.....	104
Тема 9. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ.....	105
9.1. Основная теорема зацепления (теорема Виллиса).....	105
9.2. Классификация зубчатых передач.....	107
9.3. Элементы зуба.....	109
9.4. Начальные окружности.....	110
9.5. Элементы и параметры зубчатых колес.....	110
9.6. Эвольвентные зубчатые колеса.....	114
9.7. Линия зацепления эвольвентных зубчатых колес.....	116
9.8. Методы нарезания зубчатых колес.....	117
9.9. Исходный производящий контур инструментальной рейки.....	118
9.10. Подрезание зуба при нарезании зубчатых колес рейкой.....	119
9.11. Геометрические параметры зубчатых колес.....	122
9.12. Межосевое расстояние пары зубчатых колес.....	123
9.13. Качественные показатели зацепления эвольвентных зубчатых колес.....	124
9.14. Требования, предъявляемые к зубчатой передаче.....	129
9.15. Корректирование зубчатых колес.....	130
9.16. Сложные зубчатые механизмы.....	132
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	140

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория механизмов и машин (ТММ) является одной из основных общеинженерных дисциплин, на которой базируется изучение специальных дисциплин машиностроительных направлений. Теория механизмов и машин рассматривает строение и классификацию механизмов, методы кинематического и динамического исследования, проектирование различных схем механизмов. Эти знания необходимы инженерам-механикам для создания новых современных машин, а также для исследования и совершенствования существующих машин.

Текст лекций по ТММ, в первую очередь, написан для студентов, изучающих данный курс, а также для преподавателей и научных работников технических специальностей.

Усвоение круга вопросов, связанных с проектированием механизмов, требует теоретических, а также практических знаний в областях кинематики, динамики, машиностроительного проектирования, решающего практические вопросы конструкций. В этой связи был заключен договор о сотрудничестве Национального технического университета “Харьковский политехнический институт” (НТУ “ХПИ”) с Публичным акционерным обществом (ПАО) “Азовмаш”. В рамках этого договора кафедрой “Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин” (ТММиСАПР) были проведены ряд теоретических и практических разработок, в результате которых удалось представить данный текст лекций в следующем виде.

ВВЕДЕНИЕ

ТММ – наука, изучающая общие методы структурного и динамического анализа и синтеза различных механизмов и механику машин.

ТММ базируется на курсах математики, физики, теоретической механики, знаниях и умениях работать с вычислительной техникой.

Цель курса научить студента:

- общим методам анализа и синтеза механизмов, машин и приборов;
- понимать общие принципы реализации движения с помощью механизмов, взаимодействие механизмов в машине, обеспечивающее требуемые кинематические и динамические свойства;
- использовать измерительную аппаратуру для определения кинематических и динамических характеристик механизмов (на лабораторных работах);
- научиться разрабатывать алгоритмы для расчета параметров механизмов, а также использовать вычислительную технику для реализации этих алгоритмов.

Тема 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ТММ

Под основными понятиями дисциплины подразумевают: машина, механизм, кинематическая схема, кинематическая пара, кинематическая цепь.

1.1 Машина, виды машин, циклограмма работы

Машина – это устройство для преобразования энергии, материалов и информации.

Виды машин:

1. Энергетические машины. Преобразуют энергию. Это ДВС, паровые, газовые и гидротурбины, электрические двигатели.
2. Технологические машины. Преобразуют форму, размеры, свойства, состояние исходных материалов и заготовок. Это металлорежущие станки, кузнечно-прессовое оборудование, компрессоры, прокатные станы, литейное оборудование.
3. Транспортные машины. Перемещают объекты в пространстве. Это автомобили, тракторы, транспортеры и т.п.
4. Информационные машины. Преобразуют вводимую информацию для контроля, регулирования и управления требуемым процессом. Это различные приборы, счетно-вычислительные машины и т.п.

Технологические, транспортные и информационные машины называются

«рабочие машины». Они могут работать только совместно с энергетической машиной. Соединение двигателя и рабочей машины называют машинным агрегатом.

ТММ изучает ту сторону работы машин, которая подчинена законам механики.

Требования к современным машинам:

- высокая производительность;
- надежность и простота;
- долговечность;
- качество (точность) работы;
- экономичность.

Удовлетворения всех этих требований достигают оптимальным проектированием машин методами, которые излагаются в данном конспекте лекций.

Большинство машин имеет цикловой характер работы. За период цикла осуществляется определенная совокупность работ и процессов, в результате чего система приходит в состояние, которое было в начале периода. Если периодически повторяются параметры движения, то имеет место кинематический цикл. Если повторяется изменение мощности, то это энергетический цикл. Если повторяется совокупность операций технологической машины – это рабочий цикл.

Графическое изображение последовательности движения исполнительных органов механизма за цикл называется циклограммой (рис. 1.1). Бывают линейные, рис. 1.1, *а* и круговые циклограммы, рис. 1.1, *б*.

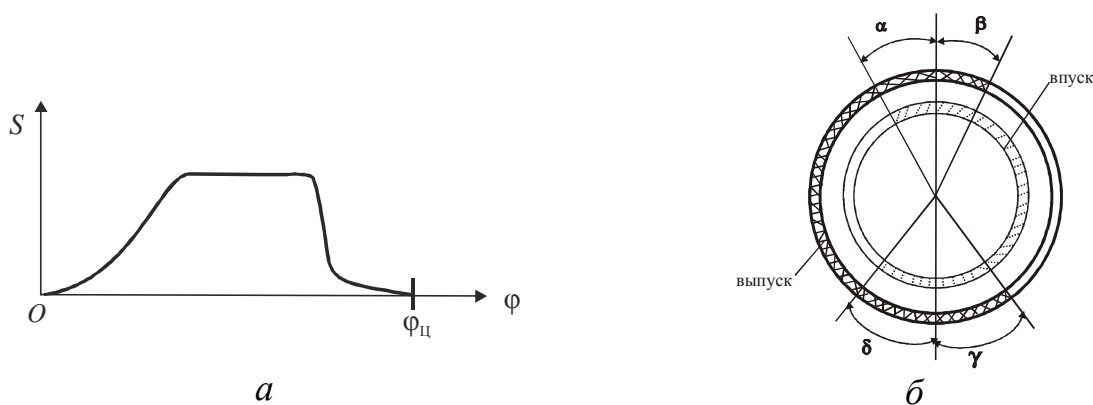


Рис. 1.1. Циклограмма машины: *а* – линейная циклограмма (S – перемещение исполнительного органа, φ – угол поворота ведущего вала); *б* – круговая циклограмма работы клапанов двигателя внутреннего сгорания (α , β , δ , γ – углы опережения и запаздывания открытия клапанов)

Машина осуществляет свой рабочий процесс посредством выполнения закономерных механических движений, которые обеспечиваются различными

механизмами.

Циклограмма используется для анализа требуемой синхронизации перемещений исполнительных органов машины.

1.2. Механизмы и их классификация

Механизм – это система тел, предназначенная для преобразования заданного движения одного или нескольких твердых тел в требуемые движения других твердых тел. Механизм может включать жидкие или газообразные элементы – это гидравлический и пневматический механизм. В ТММ изучаем только механизмы, состоящие из твердых тел.

Существует множество механизмов различных типов, отличающихся назначением, строением, способом передачи движения, принципом действия и другими признаками.

Механизмы группируют по определенным признакам.

Если главным признаком классификации принять кинематику, то различают механизмы с вращательным, поступательным, плоскопараллельным и пространственным движением.

Если в основу классификации положить конструктивно-функциональные признаки, то различают шарнирно-рычажные, кулачковые, зубчатые, фрикционные, винтовые, клиновые, мальтийские, храповые и другие механизмы.

1.2.1 Звено

Твердые тела, из которых образуется механизм, называют звеньями. Звено – это одна деталь или группа жестко соединенных между собой деталей, которые движутся как одно целое, т.е. являются кинематически неизменяемой системой.

Звенья различают:

1. По конструктивным признакам – коленчатый вал, шатун, поршень, зубчатое колесо, кулачок и др.

2. По характеру движения звеньев:

кривошип – звено, которое совершает полный оборот вокруг неподвижной точки (это может быть коленчатый вал);

коромысло – звено, совершающее неполный оборот, т.е. совершающее качательное движение относительно неподвижной точки;

ползун – звено, которое движется поступательно;

стойка – неподвижное звено;

шатун – звено, у которого нет точки контакта со стойкой и совершающее сложное движение.

1.2.2 Кинематическая схема механизма

Кинематическая схема – это условное изображение механизма в определенном масштабе, содержащее все данные, необходимые для выполнения кинематических расчетов (длины всех звеньев, координаты неподвижных точек и т.д. – т.е. метрику механизма). Например, покажем, как изображается на кинематической схеме шатун (рис. 1.2) и зубчатые колеса (рис. 1.3).

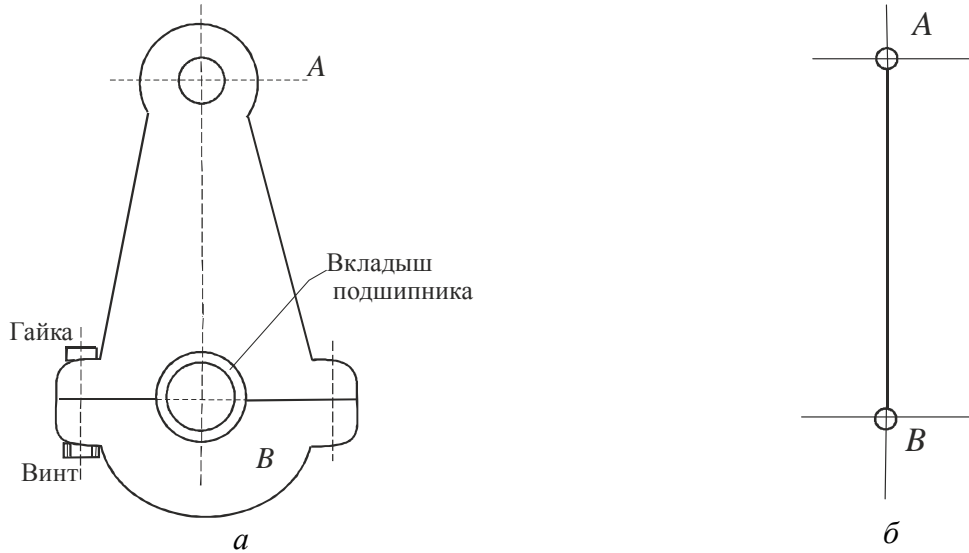


Рис. 1.2. Изображение шатуна: *a* – конструктивно; *б* – на кинематической схеме

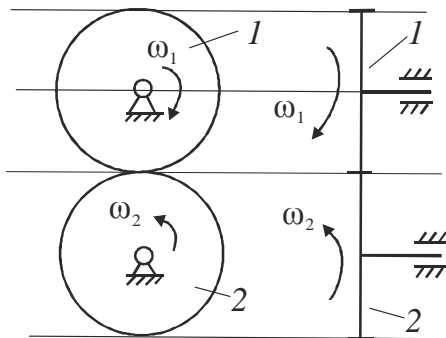


Рис. 1.3. Изображение на кинематической схеме зубчатых колес

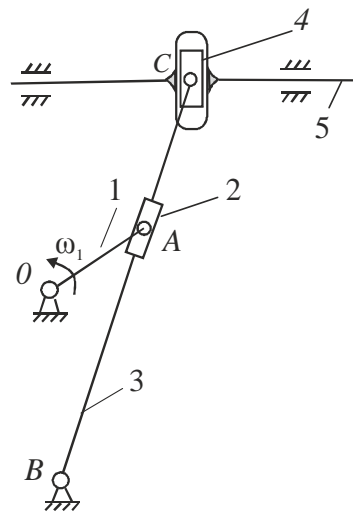


Рис. 1.4. Кинематическая схема шарнирно-рычажного механизма: 1 – кривошип; 2, 4, 5 – ползуны; 3 – коромысло или кулиса – подвижная направляющая ползуна; 0 – стойка (на кинематической схеме выделяют штриховкой)

На рис. 1.4 изображен плоский шарнирно-рычажный механизм. Шарниры показаны в виде окружностей, звенья – рычаги. На кинематической схеме звенья обозначают цифрами (стойка – 0; звено, которое приводится в движение внешним источником, обозначается цифрой 1). Шарнирные точки соединения

звеньев обозначаются латинскими буквами (O, A, B, C).

Звено, движение которого задается, называют входным, ведущим или начальным. На рис. 1.4 это звено 1. Выходным (ведомым или исполнительным) называют звено, совершающее движение, для которого предназначен механизм. На рис. 1.4 это звено 5.

1.2.3 Кинематическая пара. Элемент кинематической пары. Замыкание кинематической пары

Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее определенное относительное их движение, называется кинематической парой.

Совокупность поверхностей, линий и точек звена, входящих в соприкосновение (контакт) с другим звеном пары, называют элементом пары. Для того, чтобы элементы пары находились в постоянном соприкосновении, применяют замыкание кинематической пары. Различают:

– геометрическое замыкание, при котором постоянный контакт обеспечивается конструктивной формой элементов пары. Например, паз в виде «ласточкина хвоста» (рис. 1.5);

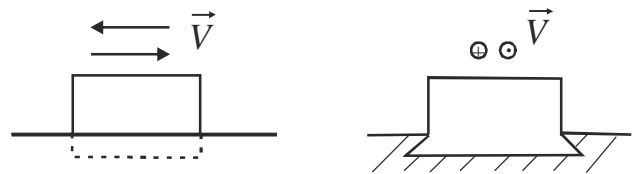


Рис. 1.5. Геометрическое замыкание низшей пары

– силовое замыкание, при котором постоянный контакт обеспечивается за счет силы тяжести звена, силы упругости пружины и др. На рис. 1.6 показано, как пружина обеспечивает контакт кулачка и толкателя.

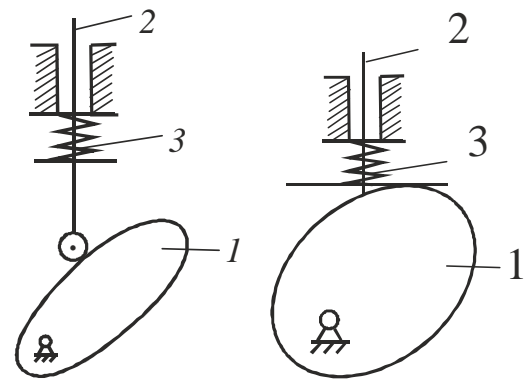


Рис. 1.6. Силовое замыкание высшей пары: а – роликовый механизм; б – механизм с плоским толкателем; 1 – кулачок, 2 – толкатель, 3 – пружина

Если элемент пары только поверхность, то пара низшая. Если элемент пары – линия или точка, то пара высшая. Такая классификация кинематической пары – классификация Рёло (немецкий ученый).

1.2.4 Классификация кинематических пар по характеру относительного движения (классификация И.И. Артоболевского)

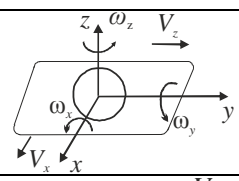
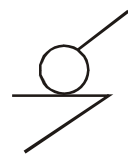
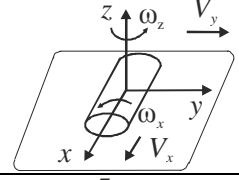
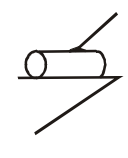
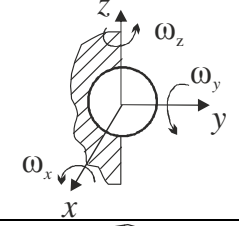
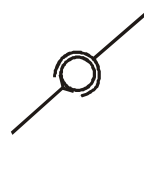
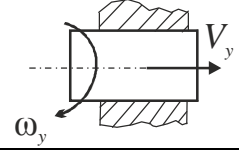

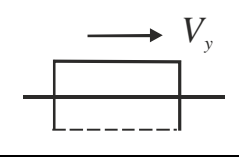
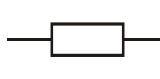
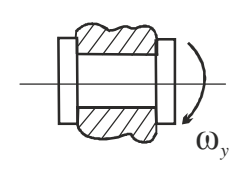
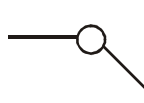
Эта классификация предполагает, что класс пары – это число условий связи, накладываемых парой на относительное движение образующих её звеньев.

Свободное тело в пространстве имеет 6 степеней свободы, т. е. шесть независимых движений: три поступательных – вдоль осей ox , oy , oz и три вращательных вокруг этих же осей.

Представим кинематические пары различных классов в таблице 1.1.

Пара винт-гайка – пара пятого класса, так как только одно движение в этой паре – независимое, а второе возникает как следствие первого.

Таблица 1.1. Разновидности кинематических пар

Кинематическая пара	Высшая или низшая	Число возможных движений D	Класс КП $K=6-D$	Условное изображение на кинематической схеме	Название КП. Вид замыкания
	Высшая пара. Контакт в точке	5 – $V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$	1		Шар на плоскости. Силовое замыкание
	Высшая пара. Контакт – по линии	4 – $V_x, V_y, \omega_x, \omega_z$	2		Цилиндр на плоскости. Силовое замыкание
	Низшая пара. Контакт – сферическая поверхность	3 – $\omega_x, \omega_y, \omega_z$	3		Сферический шарнир. Геометрическое замыкание
	Низшая пара. Контакт – по цилиндрической поверхности	2 – V_y, ω_y	4		Цилиндрический шарнир. Геометрическое замыкание
	Низшая пара. Контакт – по плоскости	1 – V_y	5		Поступательная пара. Геометрическое замыкание
	Низшая пара. Контакт – по цилиндрической поверхности	1 – ω_y	5		Шарнир или вращательная пара. Геометрическое замыкание

1.3 Кинематические цепи и их классификация

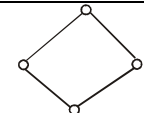
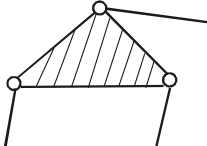
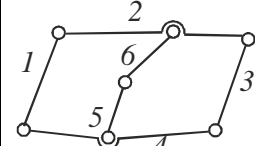
Система звеньев, образующих между собой кинематические пары, называется **кинематической цепью** (КЦ).

По характеру относительного движения звеньев кинематические цепи делят на плоские, если точки ее звеньев описывают траектории, лежащие в одной

плоскости или в параллельных плоскостях, и пространственные, если траектории неплоские или лежат в непараллельных плоскостях.

Кинематические цепи делят на простые и сложные. Кинематическую цепь называют простой, если каждое звено входит не более чем в две кинематические пары. Кинематическую цепь называют сложной, если есть звенья, входящие более чем в две кинематические пары (табл. 1.2).

Таблица 1.2. Разновидности кинематических цепей

Цепи	Незамкнутые	Замкнутые	Класс кинематических пар цепи
Простые			5
Сложные			5

Кинематические цепи могут быть замкнутыми (если все звенья образуют не менее двух кинематических пар, рис. 1.7, б) и незамкнутыми (если есть звенья, образующие одну кинематическую пару, рис. 1.7, а).

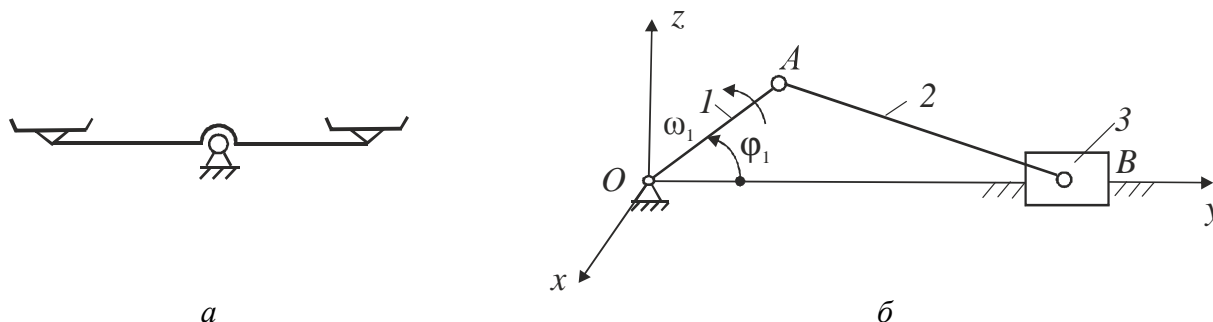


Рис. 1.7. Примеры кинематических цепей: а – незамкнутая цепь – весы; б – замкнутая цепь – кривошипно-ползунный механизм

Тема 2. СТРУКТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ

Степень подвижности кинематической цепи – это число независимых движений, которые можно сообщить звеньям этой цепи относительно стойки. Обозначаем буквой W . В большинстве механизмов степень подвижности совпадает с числом независимых (обобщенных) координат q , которыми задается положение всех звеньев. Эти координаты могут быть как полярными, так и декартовыми. Например, для кривошипно-ползунного механизма (см. рис. 1.7):

$$W = 1(\omega_1); \quad q = 1(\varphi_1).$$

2.1. Формула Сомова-Малышева

Рассмотрим, как подсчитать степень подвижности пространственной кинематической цепи.

Пусть имеем цепь, в которую входит n подвижных звеньев. Эти звенья образуют:

p_5 – число кинематических пар пятого класса;

p_4 – число кинематических пар четвертого класса;

p_3 – число кинематических пар третьего класса;

p_2 – число кинематических пар второго класса;

p_1 – число кинематических пар первого класса.

Если каждое из звеньев было бы свободным телом в пространстве, т.е. не образовывало бы кинематические пары, то оно имело бы 6 независимых движений, а т. к. звеньев всего n , то число независимых движений у всех этих звеньев было бы $6n$.

Каждая кинематическая пара пятого класса отнимает у этих звеньев 5 движений, а так как таких пар p_5 , то они отбирают $5p_5$ движений. Аналогично рассуждаем для пар четвертого, третьего, второго и первого класса и получаем формулу, позволяющую подсчитать степень подвижности пространственной кинематической цепи:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

Рассмотрим для механизмов, представленных на рис.2.1, примеры применения формулы Сомова-Малышева:

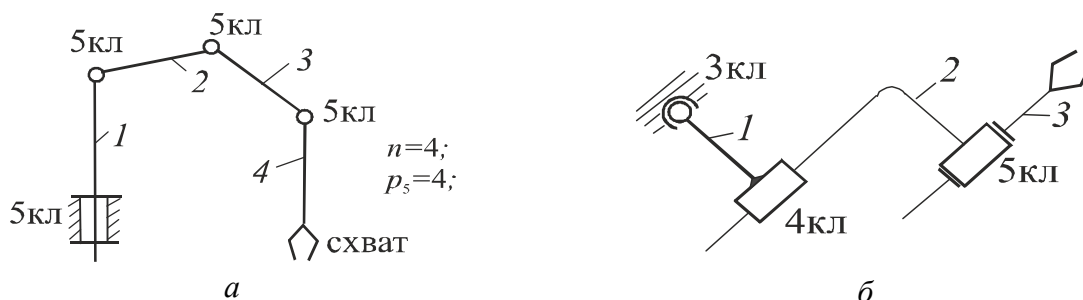


Рис. 2.1. Механизмы роботов: $a - W = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 4$; $b - W = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 6$

2.2. Общие связи в механизме. Степень подвижности плоской кинематической цепи. Формула П. Л. Чебышева

Общими связями будем называть те, которые наложены одновременно на все звенья механизма. Например, для плоского кривошипно-ползунного механизма (рис. 1.7, б) общими условиями связи будут:

- отсутствие возможности поступательного движения вдоль оси x : $V_x = 0$;
- отсутствие возможности вращательного движения относительно осей z и y : $\omega_z = \omega_y = 0$.

Таким образом, на плоские механизмы налагаются три общих условия связи. Поэтому формула Сомова-Малышева примет вид:

$$W = (6 - 3)n - (5 - 3)p_5 - (4 - 3)p_4 = 3n - 2p_5 - p_4.$$

В формуле отсутствуют пары первого, второго и третьего класса, так как они не могут существовать в плоскости.

Итак, степень подвижности плоского механизма определяется по формуле П. Л. Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4.$$

Если определяется степень подвижности плоского механизма, то необходимо использовать формулу Чебышева, а не Сомова-Малышева. В противном случае будет ошибочный результат. Рассмотрим на примере кривошипно-ползунного механизма (см. рис. 1.7).

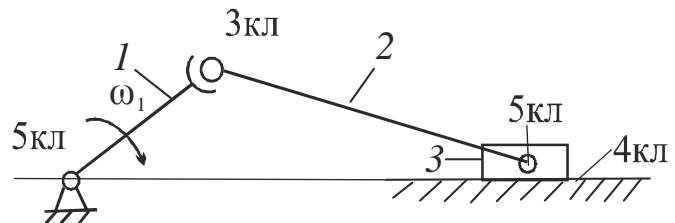


Рис. 2.2. Пространственный кривошипно-ползунный механизм

Число подвижных звеньев $n = 3$, число кинематических пар пятого класса $p_5 = 4$ (1–0, 1–2, 2–3 – вращательные и 3–0 – поступательная). Если считать степень подвижности по формуле Сомова-Малышева, то получим $W = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = -2$. Это означает, что если оси вращательных пар будут расположены в пространстве произвольно (а не параллельно, как положено для плоского механизма), то такой механизм собираться не будет. Это будет дважды статически неопределимая задача. Поэтому чтобы механизм работал, нужно строго выдерживать параллельность осей. Решетов предложил другой выход – поставить сферический шарнир, т. е. пару третьего класса (рис. 2.2). При этом поступательная пара 3–0 будет парой четвертого класса (ползун будет двигаться не вдоль оси, а по плоскости). Тогда подсчет степени подвижности дает $W = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1$. Вот такой пространственный механизм будет собираться и работать. Этот механизм применяется в случае, если ось вращения входного звена не перпендику-

лярна к плоскости, в которой движется ползун, например, в устройствах шасси самолета.

2.3. Пассивные связи и лишние степени подвижности

Связи, не влияющие на движение звеньев, называются **пассивными**. При подсчете W пассивные связи нужно исключать из рассмотрения, так как иначе получим неверный результат (например, $W=0$).

В механизме могут иметь место лишние степени свободы, которые не влияют на закон движения ведомого звена. Например, это вращение ролика в кулачковом механизме. Ролик не влияет на закон, а нужен лишь для замены трения скольжения трением качения (рис. 1.6, а).

2.4. Строение рычажных механизмов. Структурные группы Ассура

Рассмотрим строение плоских шарнирно-рычажных механизмов, в которых есть кинематические пары только пятого класса, т.е. структурная формула для них будет иметь вид:

$$W = 3n - 2p_5 .$$

Основной принцип образования механизмов был впервые сформулирован в 1914 году русским ученым из Санкт-Петербурга Л. В. Ассуром:

Схема любого механизма может быть составлена последовательным присоединением к ведущему звену (или к ведущим звеньям) групп звеньев с нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, к которым группа присоединяется (рис. 2.3).

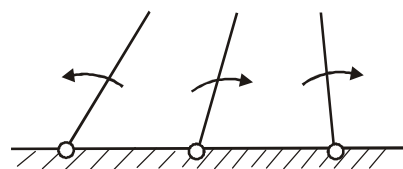


Рис. 2.3. Исходная кинематическая цепь

Если добавляется кинематическая цепь, то $W_{\text{мех-ма}} = W_{\text{исх}} + W'$, $W_{\text{исх}}$ равно числу ведущих звеньев, $W' = 0$.

Итак, для плоского шарнирно-рычажного механизма получили, что на исходную цепь можем наслаивать только цепь, удовлетворяющую условию:

$$W = 3n - 2p_5 = 0, \tag{2.1}$$

то есть $p_5 = \frac{3n}{2}$.

Кинематическая цепь, имеющая нулевую степень подвижности относительно исходной кинематической цепи или стойки и не распадающаяся на другие группы, удовлетворяющие этому условию, называется структурной группой или группой Ассура.

Так как число кинематических пар может быть только целым, то число звеньев, образующих группу, удовлетворяющую условию (2.1), может быть только четным. Тогда, возможные сочетания чисел звеньев и кинематических пар:

$$n: 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad \dots$$

$$p_5: 3 \quad 6 \quad 9 \quad 12 \quad \dots$$

2.5. Классификация структурных групп (групп Ассура)

И. И. Артоболевского. Виды групп Ассура второго класса второго порядка

Рассмотрим простейшее сочетание $n = 2$ и $p_5 = 3$. Это группы *второго класса второго порядка*.

Порядок группы определяется числом свободных элементов, которыми группа присоединяется к исходной для нее кинематической цепи.

Таблица 2.1. Двухповодковые группы разных видов

	Вид группы	Кинематическая схема	Кинематические пары	Структурная схема группы
1	II класс, 2-й порядок – двухповодковая группа первого вида		СВ (шарнир В) КВ (шарнир А) КВ (шарнир D)	
2	II класс, 2-й порядок – двухповодковая группа второго вида		СВ (шарнир G) КВ (шарнир А) КП	
3	II класс, 2-й порядок – двухповодковая группа третьего вида		СП КВ (шарнир E) КВ (шарнир F)	
4	II класс, 2-й порядок – двухповодковая группа четвертого вида		СВ (шарнир M) КП КП	
5	II класс, 2-й порядок – двухповодковая группа пятого вида		СП КП КВ (шарнир G)	

В табл. 2.1 обозначим кинематические пары, которыми звенья соединяются между собой в группу, буквой «С» (средняя), а кинематические пары, которыми группа присоединяется к исходной кинематической цепи, т.е. те, которые определяют порядок группы, – буквой «К» (крайняя). По характеру движения пары обозначаем буквами «В»– вращательная и «П»– поступательная.

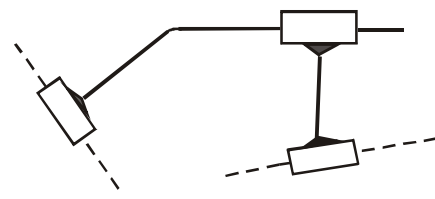


Рис.2.4. Структурная группа клинчатого механизма

Группа шестого вида с тремя поступательными парами вида СП, КП, КП относится к клинчатым механизмам, а не к шарнирно-рычажным (рис. 2.4).

Рассмотрим виды групп Ассура класса выше второго. Рассмотрим n и p_5 . Они представлены на рис. 2.5.

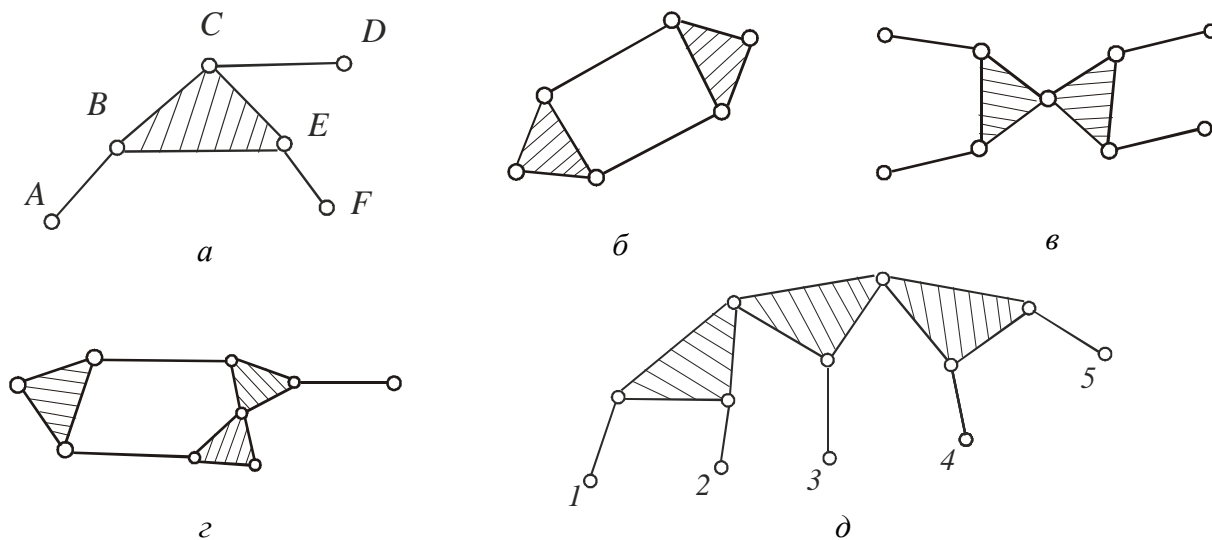


Рис. 2.5. Виды групп Ассура: a – III класс, 3 порядок, 3-х поводковая группа, $n = 4$, $p_5 = 6$; $б$ – IV класс, 2 порядок, $n = 4$, $p_5 = 6$; $в$ – III класс, 4 порядок, 4-х поводковая, $n = 6$, $p_5 = 9$; $г$ – V класс, 3 порядок, $n = 6$, $p_5 = 9$; $д$ – III класс, 5 порядок, 5-ти поводковая $n=8$, $p_5=12$

Класс группы по Артоблевскому определяется числом пар, образующих замкнутый контур наивысшего порядка.

2.6. Класс механизма

Класс механизма определяется наивысшим классом из групп Ассура, образующих этот механизм.

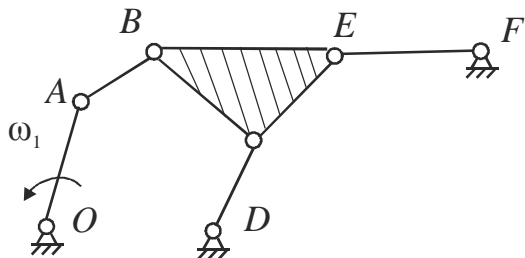


Рис. 2.6. Механизм III класса

Например, на рис. 2.6 – механизм III класса (имеет в своем составе одну группу III класса).

Если же механизм образован двумя группами: группой IV класса и груп-

пой III класса, то он должен быть отнесен к механизмам IV класса. При определении класса механизма необходимо указывать, какие из звеньев являются ведущими, ибо в зависимости от выбора ведущих звеньев может изменяться класс механизма. Если на рис. 2.6 за ведущее звено принять EF, то механизм будет механизмом II класса как образованный двумя группами II класса.

2.7. Структурная схема механизма

Структурная схема механизма есть такое условное его изображение, на котором каждое звено показано в виде многоугольника (или отрезка) с числом вершин, равным числу кинематических пар, в которые входит это звено в механизме. При этом все кинематические пары условно изображаются как вращательные. В отличие от кинематической схемы, которая строится в масштабе, структурная выполняется без масштаба. Структурная схема нужна для распознавания групп Ассур. Рассмотрим на примерах (рис. 2.7, 2.8, 2.9).

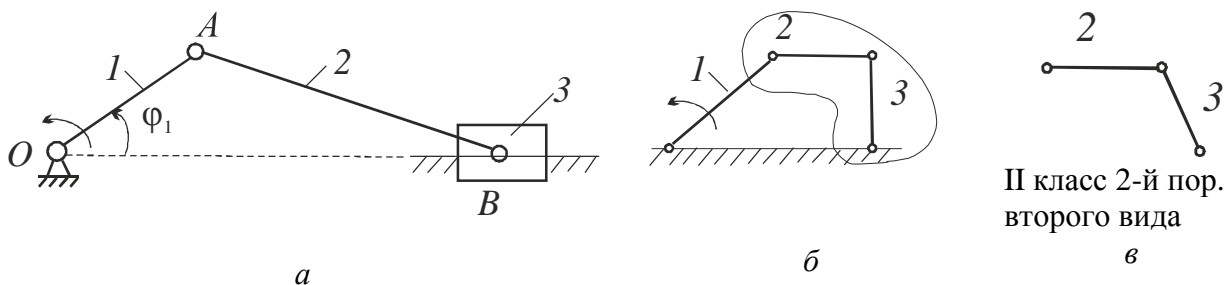


Рис. 2.7. Кривошипно-ползунный механизм:

a – кинематическая схема; *б* – структурная схема; *в* – группа Ассур на структурной схеме

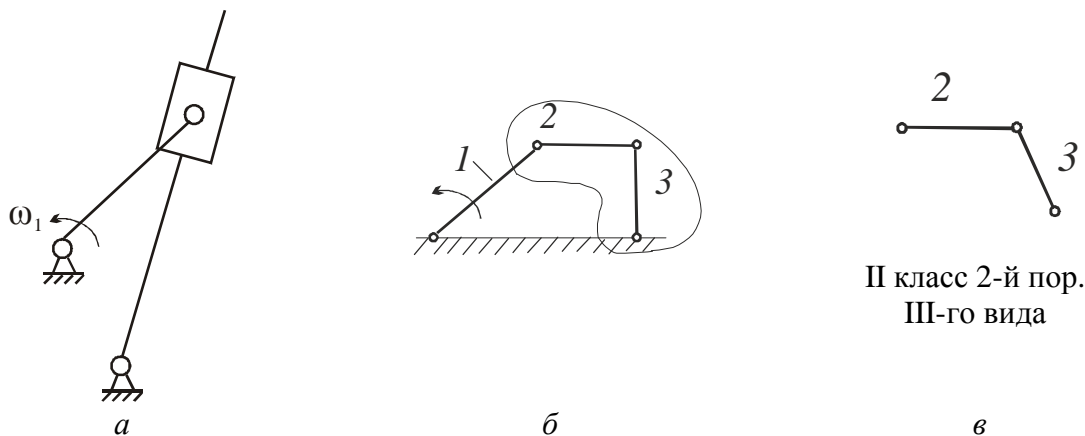


Рис. 2.8. Кулисный механизм:

a – кинематическая схема; *б* – структурная схема; *в* – группа Ассур на структурной схеме

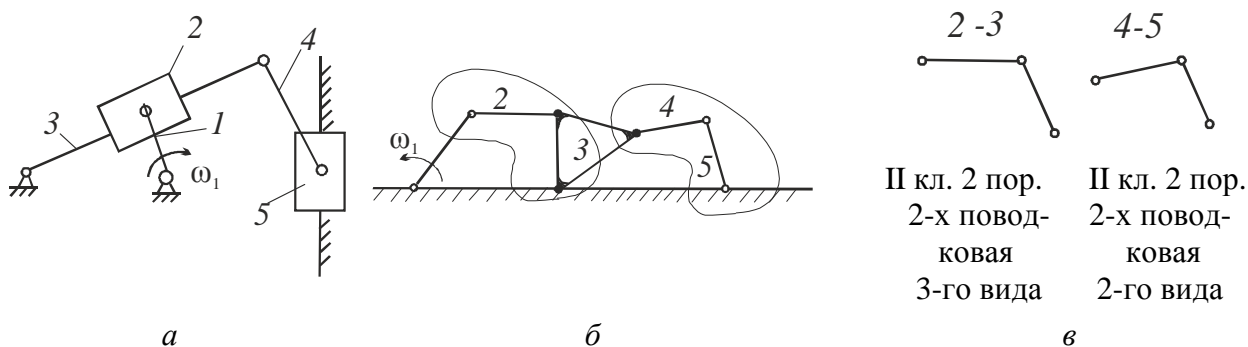


Рис.2.9. Механизм брикетировочного автомата (кулисный шестизвенный механизм):
а – кинематическая схема; *б* – структурная схема; *в* – группы Ассура

Для выделения с помощью структурной схемы групп Ассура надо пытаться от конца (начало – ведущее звено, которому задается движение) отсоединить два звена (если не получается два, то четыре, шесть и т.д.) так, чтобы все оставшиеся звенья образовывали замкнутую цепь или (после отсоединения последней группы Ассура) – исходную кинематическую цепь (стойка + начальное звено *1*), которая никогда не входит в группы Ассура.

Тема 3. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ

3.1. Задача кинематического исследования. Исходные данные

Цель кинематического исследования – определить координаты, скорости и ускорения осей шарниров, а также углы поворота, угловые скорости и угловые ускорения звеньев для ряда конкретных последовательных положений начального звена в пределах цикла работы механизма.

Знание каждого из перечисленных параметров необходимо для практического использования при конструировании машин. Например, траектории некоторых точек механизма нужны для определения хода звеньев, установления очертания (конфигурации) картеров и корпусов машины и т.п.

Определение угловых ускорений звеньев и линейных ускорений центров масс необходимо для проведения соответствующих динамических расчетов, из которых находят усилия, возникающие в кинематических парах.

Исходными данными для кинематического исследования являются постоянные геометрические параметры, определяющие кинематическую схему механизма. Например, для кривошипно-ползунного механизма такими геометрическими параметрами будут длины звеньев l_{OA}, l_{AB} и ордината y_B направляющей ползуна (рис. 3.1).

Кроме геометрических параметров, для кинематического исследования не-

обходимо знать закон движения начального звена, а именно: угол поворота φ_1 , угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 . Мы будем иметь дело с механизмами, для которых при кинематическом исследовании можно считать угловую скорость $\omega_1 = \text{const}$, а угловое ускорение $\varepsilon_1 = 0$.

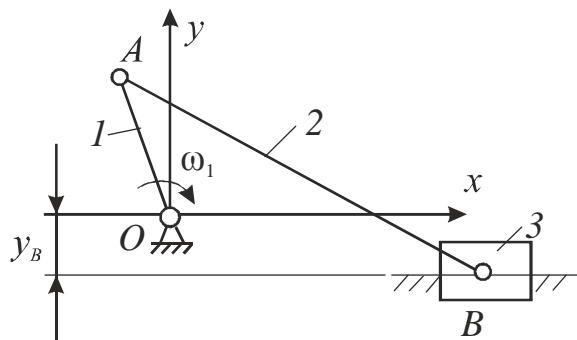


Рис. 3.1. Кривошипно-ползунный механизм

При кинематическом исследовании необходимо рассмотреть ряд положений механизма, соответствующих изменению угла поворота начального звена φ_1 с постоянным шагом $\Delta\varphi_1$.

Большинство используемых в технике плоских шарнирно-рычажных механизмов состоит из нескольких двузвенных групп Ассур, т.е. групп 2-го класса. В дальнейшем будем рассматривать в нашем курсе только такие механизмы.

3.2. Последовательность кинематического анализа

Кинематическое исследование проводится последовательным рассмотрением групп Ассур, т.е. начиная с первой, присоединяемой к исходной кинематической цепи, и дальше в порядке присоединения, который определяется по структурной схеме.

3.3. Этапы кинематического исследования

Исследование каждой группы Ассур состоит из последовательных этапов: подготовительный, 1-й, 2-й и 3-й.

На подготовительном этапе определяют координаты, скорости и ускорения точек присоединения (внешних кинематических пар) группы к механизму. 1-й этап – определяют координаты осей шарниров x_i и y_i и углы поворота звеньев φ_i , 2-й этап – определяют скорости осей шарниров V_i и угловые скорости звеньев ω_i , 3-й этап – определяют ускорения осей шарниров a_i и угловые ускорения звеньев ε_i .

3.4. Методы кинематического исследования механизмов

Существуют три метода кинематического исследования: первый – графический; второй – графоаналитический; третий – аналитический.

Графический метод предполагает определение всех кинематических па-

раметров механизма путем графических построений. Сначала вычерчивают планы положений механизма (рис. 3.2), по которым строится диаграмма перемещений звеньев. Скорости и ускорения можно получить по диаграмме перемещений методом графического дифференцирования. Этот метод имеет невысокую точность, но этой точности обычно достаточно для проведения оценочных расчетов. Главное достоинство этого метода – его простота и быстрое получение результатов.

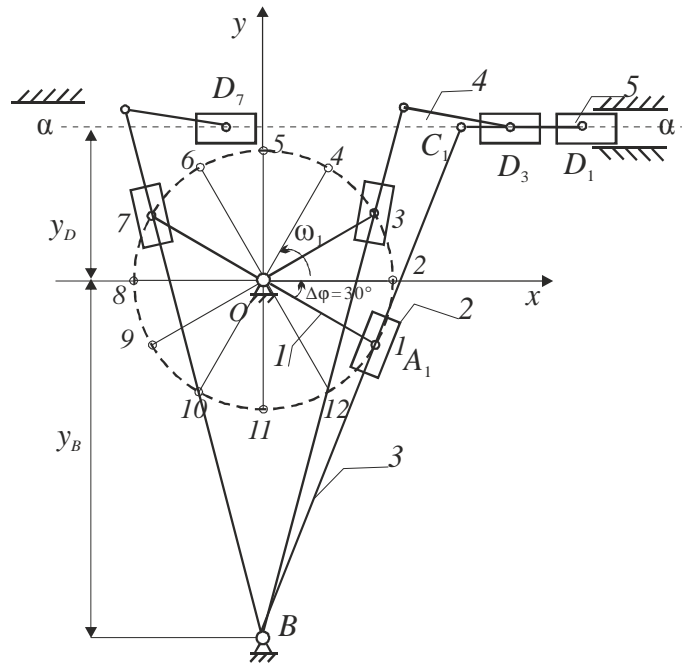


Рис. 3.2. Построение планов положений механизма

Графоаналитический метод имеет умеренную трудоемкость и среднюю точность вычислений (95%), которая зависит от аккуратности графических построений и удачного выбора масштабов.

Аналитический метод предполагает использование компьютера. На первом этапе (определение координат и углов поворота) применяется метод замкнутого векторного контура. Второй и третий этап можно выполнить различными способами.

Первый способ: после нахождения функций положения (на первом этапе) дифференцируют эти функции – получают функции скоростей, еще раз дифференцируют полученные функции скорости – получают функции ускорений. Такой путь часто бывает громоздким и трудным для проверки.

Второй способ: после нахождения на первом этапе функций положения задачи второго и третьего этапов выполняют одним из методов численного дифференцирования. Этот подход универсален, прост. При исследовании различных механизмов меняется только блок вычислений 1-го этапа. Блоки 2-го и 3-го этапов, содержащие реализацию метода численного дифференцирования, будут одинаковы для любых механизмов.

Третий способ: можно проектировать на оси координат уравнения скоро-

стей и ускорений. Недостаток – для каждого механизма нужно составлять свои уравнения проекций. Достоинство – легко контролировать, так как каждое уравнение имеет выраженный физический смысл.

3.5. Кинематическое исследование графоаналитическим методом

Рассмотрим этот метод применительно к механизму строгального станка.

Дано: l_{OA}, l_{CB}, l_{CD} ; координаты шарнира B : $x_B = 0, y_B$; координата оси ползуна y_D ; $\omega_1 = \text{const}, \varepsilon_1 = 0$.

Определить: координаты осей шарниров, их скорости и ускорения, а также угловые положения звеньев, их угловые скорости и угловые ускорения.

Решение проводим в три этапа.

1 этап: определение положений звеньев и координат шарниров (рис. 3.2).

Выбираем неподвижную систему координат xOy , связанную с центром вращения начального звена. Далее выбираем шаг расчета, например, $\Delta\varphi_1 = 30^\circ$, т.е. будем рассматривать 12 последовательных положений механизма. В качестве первого выбираем положение, соответствующее началу рабочего хода. Это то положение, в котором кулиса касательна к траектории точки A начального звена. От этого положения с шагом $\Delta\varphi_1 = 30^\circ$ строим остальные. Эти положения называют планами положений механизма. Планы положений механизма строят в масштабе μ_l . Его выбирают из соображений наглядности чертежа.

Масштаб $\mu_l = l_{OA} / OA$, где l_{OA} – истинная длина этого звена в метрах, OA – отрезок, которым хотим изобразить это звено на чертеже. Строим окружность с радиусом OA – траекторию движения точки A на кривошипе. Отрезки, которыми будут на чертеже изображаться размеры остальных звеньев и координаты шарнира B и оси ползуна y_D , пересчитываем через масштаб: $BC = l_{CB} / \mu_l$; $CD = l_{CD} / \mu_l$; $OB = y_B / \mu_l$; $OD' = y_D / \mu_l$. Координаты шарниров и угловое расположение звеньев замеряют на плане положений механизма (графический способ).

2 этап: содержит аналитическую часть и графическую. Для любой конфигурации записываем уравнения скоростей (аналитическая часть), а затем решаем их графически (графическая часть).

Для записи уравнений скоростей на 2-м этапе (ускорений на 3 этапе) нам необходимо вспомнить некоторые сведения из курса теоретической механики.

При кинематическом анализе плоских шарнирно-рычажных механизмов нам будут встречаться два случая сложных движений:

Теорема 1: звено совершает сложное плоско-параллельное движение и на этом звене нам надо связать скорости (ускорения) двух точек (рис. 3.3).

$$\begin{aligned} \vec{V}_A &= \vec{V}_B + \vec{V}_{AB}, & \vec{a}_A &= \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^\tau; \\ \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, & \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \end{aligned}$$

i – номер звена: $\omega_i = \frac{V_{AB}(V_{BA})}{l_{BA}}, \quad \epsilon_i = \frac{a_{AB(BA)}^\tau}{l_{BA}}.$

Теорема 2: два звена соединены поступательной парой и нам нужно связать скорости точек на ползуне и на направляющей (рис. 3.4).

$$\begin{aligned} \vec{V}_{A_2} &= \vec{V}_{A_3} + \vec{V}_{2-3}; & \vec{a}_{A_2} &= \vec{a}_{A_3} + \vec{a}_{2-3}^{\text{кор}} + \vec{a}_{2-3}^{\text{отн}}; \\ \vec{V}_{A_3} &= \vec{V}_{A_2} + \vec{V}_{3-2}; & \vec{a}_{A_3} &= \vec{a}_{A_2} + \vec{a}_{3-2}^{\text{кор}} + \vec{a}_{3-2}^{\text{отн}}. \end{aligned}$$

В этих уравнениях слева стоит неизвестная величина, а справа – вектора, известные по величине и направлению или только по направлению (это определяем на подготовительном этапе).

На 2-м и 3-м этапе кинематического анализа решение проводится по группам Ассур в порядке их присоединения к начальному звену.

Итак, рассматриваем сначала группу 2–3 (рис. 3.2). Точки присоединения этой группы к исходной кинематической цепи – т. A_2 и т. B . На подготовительном этапе нужно определить скорости этих точек. Скорость т. A_2 : $V_{A_2} = \omega_1 l_{OA}$ ($\omega_1 = \pi n_1 / 30$, где n_1 – обороты звена); скорость т. B : $V_B = 0$ (эта точка принадлежит стойке).

Для этой группы нужно записать два уравнения (по одному для каждого звена). Уравнения записываются для точки, которая принадлежит элементу внутренней кинематической пары (пары, в которой звенья объединяются в группу Ассур, рис. 3.5). Скорость (ускорение) этой точки связывается одним из уравнений (в соответствии с теоремой 1 или 2) с точкой, принадлежащей

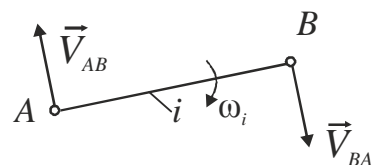


Рис. 3.3. К первой теореме механики

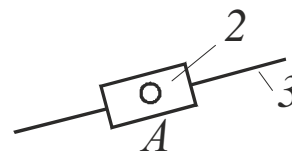


Рис. 3.4. Ко второй теореме механики

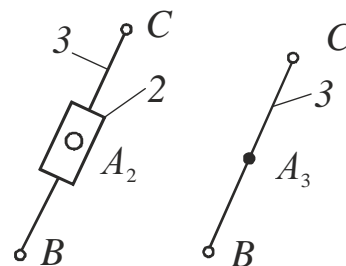


Рис. 3.5. Точки на ползуне A_2 и на направляющей A_3

внешней КП. Скорость (ускорение) точки внешней КП (точки присоединения) будет предварительно определена на подготовительном этапе.

Для группы 2–3 уравнения скоростей будут выглядеть так:

$$\begin{cases} 2: \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{A_2} + \vec{V}_{3-2}, \\ 3: \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB}, \end{cases}$$

$$\omega_3 = \frac{V_{AB}}{l_{BA}}; \quad V_B = 0; \quad \vec{V}_{AB} \perp AB, \quad \vec{V}_{3-2} \parallel BC, \quad \text{где } V_{A_2} = \omega_1 l_{OA}, \quad \omega_2 = \omega_3.$$

Направления векторов соблюдаем в соответствии с кинематической схемой в каждом положении механизма (рис. 3.2), т.е. планов скоростей должно быть столько, сколько положений механизма рассматриваем.

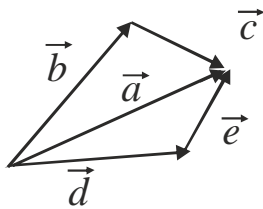


Рис. 3.6. Сложение векторов

В этой системе будем искать вектор \vec{V}_{A_3} . Справа от знака равенства стоит вектор \vec{V}_{A_2} , который известен по величине ($V_{A_2} = \omega_1 l_{OA}$) и направлению – он перпендикулярен радиусу траектории вращения т. А, т.е. направлен в сторону ω_1 . Во втором уравнении вектор $\vec{V}_B = 0$, а вектор \vec{V}_{AB} известен по направлению – он перпендикулярен кулисе AB . Вспомним, как складываются вектора. Например, нужно сложить $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ или $\vec{a} = \vec{d} + \vec{e}$ (рис. 3.6).

Воспользуемся этим для решения нашей системы уравнений. Будем ее решать графически с помощью построения так называемого плана скоростей.

Планом скоростей механизма называют чертеж, на котором в масштабе изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и направлению скоростям различных точек механизма в данной конфигурации механизма. Точка плана, из которой построены векторы абсолютных скоростей, называется полюсом плана скоростей. Между концами абсолютных скоростей на плане будут располагаться относительные скорости.

Для построения плана скоростей предварительно выбираем масштабный коэффициент плана скоростей: $\mu_v = \frac{V_{A_2}}{(pa_2)}$, где pa_2 – отрезок, которым будем изображать вектор \vec{V}_{A_2} на плане скоростей. pa_2 выбираем произвольно, например, $pa_2 = 50–60$ мм.

Построение плана скоростей выполним, например, для положения 3 механизма (рис. 3.2).

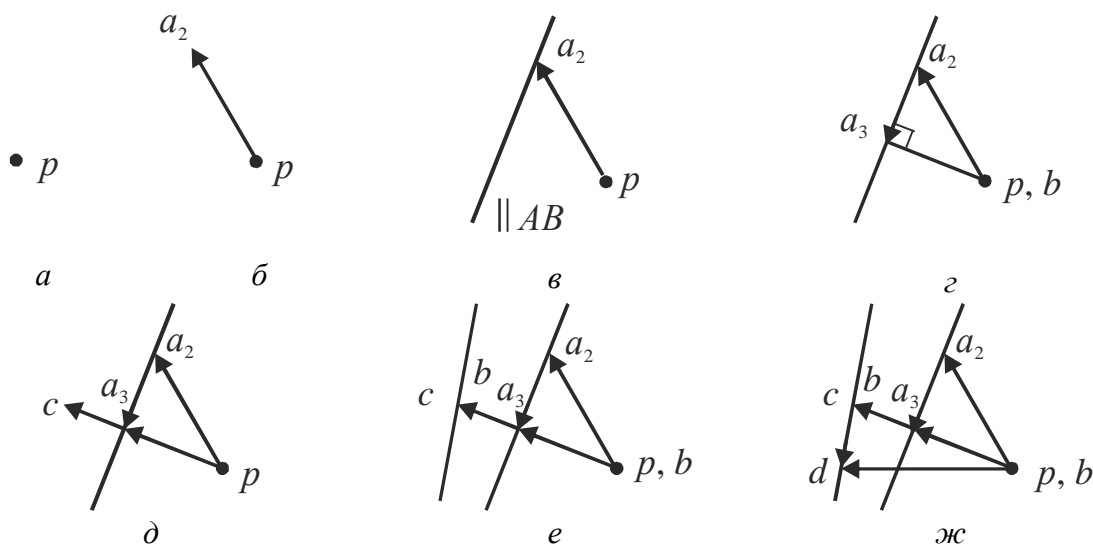


Рис. 3.7. План скоростей

Выбираем точку на плоскости – полюс плана скоростей (рис. 3.7, а). Из этой точки будет выходить пучок векторов, соответствующих абсолютным скоростям (в уравнении скоростей). Проводим (pa_2) : $(\vec{V}_{A_2}) \perp OA$ (в сторону ω_1); рис. 3.7, б.

$$b \equiv p; (V_b = 0);$$

$$pa_3: (\vec{V}_{A_3}) \perp AB \quad (\vec{V}_{AB} \text{ перпендикулярен } AB),$$

$V_{AB} = V_{A_3}$ соответствует отрезку pa_3 .

С помощью плана скоростей определяем угловые скорости звеньев по величине и направлению. Величина $\omega_2 = \omega_3$ (угловая скорость (ускорение) ползуна равна угловой скорости (ускорению) его направляющей); $\omega_3 = V_{AB} / l_{AB}$. Чтобы определить направление угловой скорости, нужно вектор относительной скорости \vec{V}_{AB} мысленно поместить в точку А на плане механизма и посмотреть, в какую сторону этот вектор вращает звено 3 относительно т. В. В нашем случае он вращает звено 3 против часовой стрелки. Следовательно, и угловая скорость этого звена будет направлена в ту же сторону, т.е. против часовой стрелки.

Теперь можно перейти к группе Ассур 4–5. Точки присоединения этой группы к механизму – т. С и т. D_0 . Точка D_0 принадлежит стойке 0, которая является направляющей ползуна 5. Для звеньев группы 4–5 общей точкой является точка $D_{4,5}$. Запишем уравнения для этой точки, связав ее соответствующими уравнениями с точками присоединения группы. Звено 4 совершает плоскопараллельное движение, и на нем мы можем связать две точки D и C (это пер-

вая теорема). Звено 5 – ползун. Для ползуна запишем вторую теорему, связав точку D_5 на ползуне с точкой присоединения D_0 на направляющей.

$$\begin{cases} \vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{DC}, & \omega_4 = \frac{V_{DC}}{l_{DC}}; \\ \vec{V}_{D5} = \vec{V}_{D0} + \vec{V}_{5-0}, & \omega_5 = 0. \end{cases}$$

В этих уравнениях нужно на подготовительном этапе определить скорости точек присоединения C и D_0 . Скорость т. C можно найти двумя способами:

1) по найденной из анализа группы 2–3 угловой скорости звена 3 и размерам звеньев механизма: $V_C = \omega_3 \cdot l_{BC} = V_{CB}$;

2) по правилу подобия: если точки на звене образуют некоторую фигуру, то одноименные точки на планах скоростей и ускорений образуют подобную ей фигуру, причем направление обхода от точки к точке на кинематической схеме механизма и на планах скоростей и ускорений сохраняется.

В нашем случае т. C является третьей точкой на звене 3 – т. B , т. A_3 и т. C лежат на одной прямой, и тогда по правилу подобия

$$\frac{pc}{pa_3} = \frac{BC}{BA}; \quad pc = pa_3 \cdot \frac{BC}{BA}.$$

Откладываем этот отрезок в соответствии с правилом подобия на плане скоростей. Скорость второй точки присоединения – т. D_0 равна нулю (это точка на стойке), поэтому точка D_0 располагается в полюсе.

Продолжаем строить план скоростей для группы 4–5. К вектору скорости т. C прибавляем вектор \vec{V}_{DC} , который перпендикулярен линии DC на кинематической схеме (рис. 3.7). Далее, из полюса проводим вектор \vec{V}_{5-0} , который параллелен направляющей $\alpha - \alpha$. Искомый вектор скорости т. D – на пересечении проведенных линий \vec{V}_{DC} и \vec{V}_{5-0} .

Величину и направление ω_4 определим аналогично ω_3 по вектору относительной скорости \vec{V}_{DC} :

$$\omega_4 = \frac{cd \cdot \mu_v}{l_{cd}}.$$

3 этап: на этом этапе находим ускорения (см. рис. 3.2). Начинаем с группы 2–3. Используем уравнения, написанные на этапе 2. Первое уравнение напи-

сано на основе теоремы 2, а второе – на основании теоремы 1, поэтому уравнения ускорений будут выглядеть так:

$$\begin{cases} \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{A_2} + \vec{a}_{3-2}^{\text{кор}} + \vec{a}_{3-2}^{\text{отн}}; \\ \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^{\tau}. \end{cases}$$

В этих уравнениях справа от знака равенства два вектора известны по величине и направлению, а третий – только по направлению. Как и при решении аналогичной системы уравнений скоростей, искомый вектор получаем соединением полюса с точкой пересечения линий, соответствующих направлениям последних слагаемых системы.

Рассмотрим каждое из слагаемых системы.

Ускорение \vec{a}_{A_2} . Точка A совершает вращательное движение вокруг т. O с постоянной угловой скоростью. Поэтому ее ускорение состоит только из нормальной составляющей, которая определяется так:

$$\vec{a}_{A_2} = a_{AO}^n = \omega_1 l_{OA}.$$

Нормальное ускорение направлено по радиусу вращения от рассматриваемой точки к центру вращения, т.е. от т. A к т. O .

Следующее слагаемое – $\vec{a}_{3-2}^{\text{кор}}$. Из курса теоретической механики известно, что его модуль равен $2V_{3-2}\omega_3$, а направление определяется следующим образом: вектор относительной скорости V_{3-2} (его находим на плане скоростей – в соответствии с уравнением это будет вектор, который выходит из конца вектора ra_2 и заканчивается в точке a_3 , т.е. a_2a_3 на рис. 3.7) повернуть на 90° в сторону ω_3 (рис. 3.8).

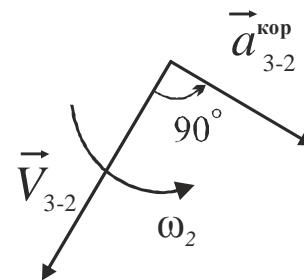


Рис. 3.8. К определению направления кориолисова ускорения

$\vec{a}_{3-2}^{\text{отн}}$ – величина его неизвестна, а направлен он перпендикулярно кориолисову ускорению.

$a_B = 0$ – точка принадлежит стойке.

$a_{AB}^n = \omega_3^2 \cdot l_{AB}$ – и направлен параллельно AB от т. A к т. B .

a_{AB}^{τ} – по величине неизвестен, а направлен перпендикулярно нормальному ускорению.

Аналогично для группы 4–5. Уравнения записываем с учетом полученной

на 2 этапе системы уравнений скоростей:

$$\begin{cases} \vec{a}_{D_4} = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^n + \vec{a}_{DC}^\tau; \\ \vec{a}_{D_5} = \vec{a}_{D_0} + \vec{a}_{5-0}^{\text{кор}} + \vec{a}_{5-0}^{\text{отн}}. \end{cases}$$

В этой системе, как и в предыдущей, два первых вектора после знака равенства известны по величине и направлению, а последний – только по направлению.

Теперь приступим к решению полученных систем уравнений графическим способом, т.е. построением плана ускорений (рис. 3.9).

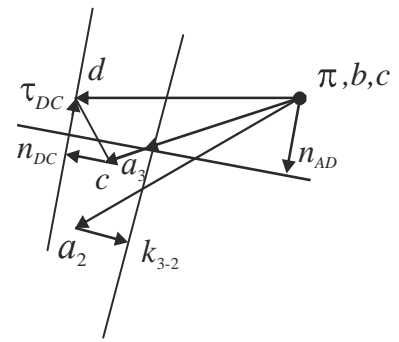


Рис. 3.9. План ускорений

Чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и направлению ускорениям различных точек звеньев механизма в данный момент движения (в рассматриваемой конфигурации), называют планом ускорений механизма. Полюс плана – точка, из которой берут начало абсолютные ускорения точек механизма (обозначается буквой π).

Для построения плана ускорений выбираем масштабный коэффициент. Его можно выбрать так: зная ускорение \vec{a}_{A_2} и отрезок, которым нам удобно будет его изобразить, считаем масштабный коэффициент:

$$\mu_a = \frac{|\vec{a}_{A_2}|}{\pi a_2} \left[\frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{мм}} \right].$$

Выбираем на чертеже точку – полюс плана ускорений. Построение проводим в соответствии с уравнениями. Искомые ускорения будут \vec{a}_{A_3} и \vec{a}_D :

$$a_{A_3} = (\pi a_3) \mu_a; a_D = (\pi d) \mu_a.$$

С помощью построенного плана ускорений можем определить ускорение любой интересующей нас точки на механизме, используя правило подобия.

Построенный план ускорений позволяет нам определить угловые ускорения звеньев:

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = \frac{|\vec{a}_{AB}^\tau|}{l_{AB}}, \epsilon_4 = \frac{|\vec{a}_{DC}^\tau|}{l_{DC}}.$$

Направления угловых ускорений определяем аналогично направлению угловых скоростей: нужно вектора тангенциальных ускорений приложить в соответствующие точки на кинематической схеме и посмотреть, в какую сторону

они «поворачивают» рассматриваемое звено.

На основании результатов, полученных вследствие построения планов механизма, скоростей и ускорений, можно построить графики изменения перемещения, скорости и ускорения любой интересующей нас точки или звена. На этом заканчивается третий этап и кинематическое исследование графоаналитическим способом в целом.

3.6. Кинематическое исследование плоских шарнирно-рычажных механизмов аналитическим методом

Рассмотрим этот метод на примере механизма поперечно-строгального станка, рис. 3.10.

Дано: $l_{OA}, l_{BC}, l_{CD}, y_B, y_D$ – длины звеньев, координаты неподвижного шарнира B и направляющей ползуна, $\omega_1 = \text{const}$.

Найти: линейные перемещения, скорости, ускорения шарнирных точек механизма и угловые положения, угловые скорости и угловые ускорения звеньев.

Решение:

Выбираем систему координат XOY , помещая ее начало в центр вращения начального звена. Отсчет углов ведем от положительного направления оси X против часовой стрелки.

Кинематический анализ делаем по группам Ассур. Их две: группа звеньев 2–3 и группа 4–5.

Начинаем с группы 2–3.

I этап. Применяем метод замкнутого векторного контура. Для этого покажем на схеме вектора: l_1, l_3, l_{y_B} , которые образуют замкнутый контур.

$$\vec{l}_{y_B} + \vec{l}_1 = \vec{l}_3.$$

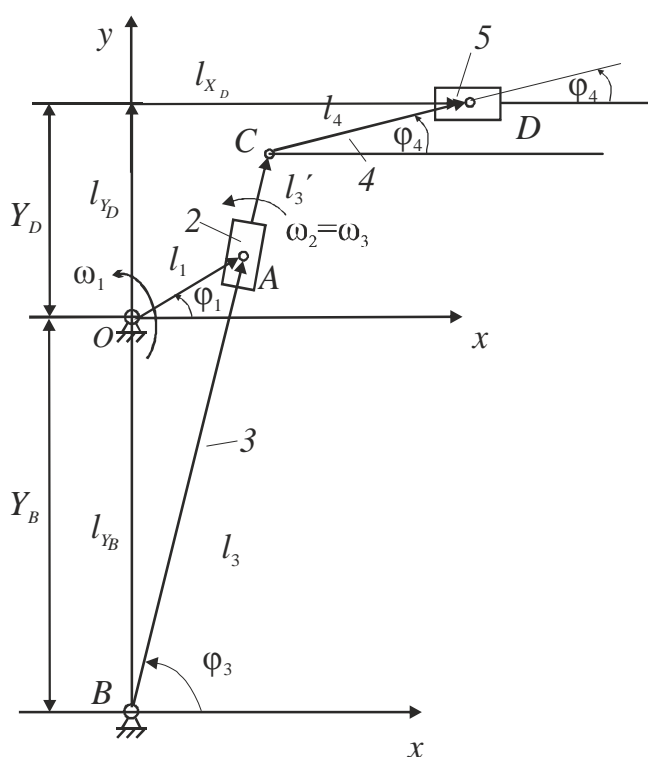


Рис. 3.10. Механизм поперечно-строгального станка

Это векторное уравнение необходимо спроектировать на оси OX и OY :

$$\begin{cases} x: l_1 \cos \varphi_1 = l_3 \cos \varphi_3; \\ y: y_B + l_1 \sin \varphi_1 = l_3 \sin \varphi_3. \end{cases}$$

Неизвестные: φ_3 определяет угловое положение звена 3; l_3 определяет линейное перемещение ползуна 2 вдоль направляющей.

Для решения этой системы двух уравнений относительно двух неизвестных надо, например, возвести обе части этих уравнений в квадрат и сложить почленно левую и правую части обоих уравнений, откуда находим l_3 и φ_3 .

Для группы 4–5:

Покажем вектора $l'_3, l_4, l_{y_D}, l_{x_D}$ и свяжем их уравнением:

$$l_1 + l'_3 + l_4 = l_{y_D} + l_{x_D}.$$

Спроектируем эти вектора на координатные оси:

$$\begin{cases} x: l_1 \cos \varphi_1 + (l_{CB} - l_3) \cos \varphi_3 + l_4 \cos \varphi_4 = x_D; \\ y: l_1 \sin \varphi_1 + (l_{CB} - l_3) \sin \varphi_3 + l_4 \sin \varphi_4 = y_D. \end{cases}$$

В этой системе неизвестные: x_D определяет линейное положение ползуна 5; φ_4 – угловое положение звена 4.

Решаем эту систему относительно φ_4 и x_D .

Переходим к этапам II и III – определим скорости и ускорения. Применим метод проектирования векторных уравнений на оси координат.

Итак, для группы 2–3:

$$\begin{cases} \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{A_2} + \vec{V}_{3-2}; \\ \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь $\vec{V}_B = 0$.

Приравняем правые части:

$$\vec{V}_{A_2} + \vec{V}_{3-2} = \vec{V}_{AB}. \quad (3.2)$$

Аналогично получим для группы 2–3 уравнение ускорений.

$$\vec{a}_{A_2} + \vec{a}_{3-2}^{\text{кор}} + \vec{a}_{3-2}^{\text{отн}} = \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^{\tau}. \quad (3.3)$$

Уравнения (3.2) и (3.3) нужно проектировать на оси OX и OY . Для этого

определим, какие углы составляют вектора в этих уравнениях с осями OX и OY .

Сведения о векторах и проекциях приведем в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Векторы скоростей

Вектор	Модуль	Угол с осью OX	Множитель для проекции на OX	Множитель для проекции на OY
\vec{V}_{A_2}	$\omega_1 l_1$	$\varphi_1 + \frac{\pi}{2}$	$-\sin \varphi_1$	$\cos \varphi_1$
\vec{V}_{3-2}	V_{3-2}	$\varphi_3 + \pi$	$-\cos \varphi_3$	$-\sin \varphi_3$
\vec{V}_{AB}	$\omega_3 l_3$	$\varphi_3 + \frac{\pi}{2}$	$-\sin \varphi_3$	$\cos \varphi_3$

Тогда уравнение (3.2) примет вид:

$$\begin{cases} x: -\omega_1 l_1 \sin \varphi_1 - V_{3-2} \cos \varphi_3 = -\omega_3 l_3 \sin \varphi_3; \\ y: \omega_1 l_1 \cos \varphi_1 - V_{3-2} \sin \varphi_3 = \omega_3 l_3 \cos \varphi_3. \end{cases}$$

Неизвестные – V_{3-2} и ω_3 . Решаем эту систему относительно неизвестных.

Составим таблицу 3.2 для векторов ускорений.

Таблица 3.2. Векторы ускорений

Вектор	Модуль	Угол с осью OX	Множитель для проекции на OX	Множитель для проекции на OY
\vec{a}_{A_2}	$\omega_1^2 l_1$	$\varphi_1 + \pi$	$-\cos \varphi_1$	$-\sin \varphi_1$
$\vec{a}_{3-2}^{\text{кор}}$	$2V_{3-2} \omega_3$	$\varphi_3 - \frac{\pi}{2}$	$\sin \varphi_3$	$-\cos \varphi_3$
$\vec{a}_{3-2}^{\text{отн}}$	a_{3-2}	$\varphi_3 + \pi$	$-\cos \varphi_3$	$-\sin \varphi_3$
\vec{a}_{AB}^n	$\omega_3^2 l_3$	$\varphi_3 + \pi$	$-\cos \varphi_3$	$-\sin \varphi_3$
\vec{a}_{AB}^r	$\varepsilon_3 l_3$	$\varphi_3 + \frac{\pi}{2}$	$-\sin \varphi_3$	$\cos \varphi_3$

Уравнение (3.3), спроектированное на оси OX и OY , примет вид:

$$\begin{cases} x: -\omega_1^2 l_1 \cos \varphi_1 + 2V_{3-2} \omega_3 \sin \varphi_3 - a_{3-2} \cos \varphi_3 = -\omega_3^2 l_3 \cos \varphi_3 - \varepsilon_3 l_3 \sin \varphi_3; \\ y: -\omega_1^2 l_1 \sin \varphi_1 - 2V_{3-2} \omega_3 \cos \varphi_3 - a_{3-2} \sin \varphi_3 = -\omega_3^2 l_3 \sin \varphi_3 + \varepsilon_3 l_3 \cos \varphi_3. \end{cases}$$

В этих уравнениях неизвестные – a_{3-2} и ε_3 . Их нетрудно найти.

Теперь перейдем к группе 4–5. Уравнение скоростей: $\vec{V}_c + \vec{V}_{DC} = \vec{V}_{5-0}$.

Уравнение ускорений: $\vec{a}_c + \vec{a}_{DC}^n + \vec{a}_{DC}^r = \vec{a}_{5-0}$.

В этих уравнениях из предыдущего анализа известно:

$$V_C = \omega_3 l_{BC},$$

$$a_C = a_{CB}^n + a_{CB}^\tau = \omega_3^2 l_{CB} + \epsilon_3 l_{CB}.$$

Уравнение скоростей примет вид: $\omega_3 l_{BC} + \omega_4 l_{CD} = V_{5-0}$. Неизвестные – ω_4 и V_{5-0} . Уравнение ускорений для группы 4-5: $\vec{a}_C = \vec{a}_{DC}^n + \vec{a}_{DC}^\tau = \vec{a}_{5-0}$. Тогда: $\omega_3^2 l_{CB} + \epsilon_3 l_{CB} + \omega_4^2 l_{CD} + \epsilon_4 l_{CD} = a_{5-0}$. Неизвестные – ϵ_4 и a_{5-0} .

Далее поступают аналогично – проектируют эти уравнения на оси OX и OY и решают полученные системы.

Напомним, что 2-й и 3-й этапы мы могли выполнить с помощью других способов, а именно – дифференцировать уравнения замкнутого контура аналитически или одним из методов численного дифференцирования.

Тема 4. ТРЕНИЕ В МАШИНАХ

Трение – это явление противодействия движению одного тела относительно другого. Сила этого сопротивления называется силой трения. Поверхности, которыми соприкасаются тела, называются поверхностями трения.

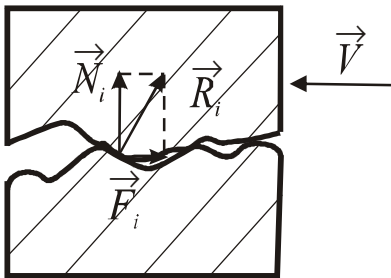


Рис. 4.1. Возникновение силы трения

Возникновение трения можно объяснить двумя основными причинами (рис. 4.1):

1. Поверхности трения имеют неровности. В точках соприкосновения неровностей возникают реакции \vec{R}_i , направленные по нормали к площадке микроконтакта. Реакцию можно разложить на составляющие:

\vec{N}_i – перпендикулярно направлению движения; \vec{F}_i – параллельно движению. Совокупность $\sum \vec{F}_i = \vec{F}$ составляет силу трения – силу сопротивления движению.

2. Между телами возникают силы молекулярного взаимодействия, которые тоже препятствуют движению.

Трение – это сложный комплекс физических и химических явлений.

Трение – одно из наиболее распространенных явлений. Оно может быть полезным и вредным. Трение полезно, так как благодаря нему двигаются тела. Вредно, так как из-за трения тела изнашиваются, и происходит лишняя затрата энергии. Подсчитано, что 33% мировых энергоресурсов затрачивается на рабо-

ту по преодолению трения.

Трение изучали ученые Амонтон (17 век) и Кулон (18 век). Все вопросы в теории трения не решены и сейчас. На практике пользуются законами Амонтона-Кулона.

4.1. Виды трения

1) По характеру поверхностей трения различают:

Сухое трение – трение несмазанных поверхностей (рис. 4.2).

Жидкостное трение – поверхности полностью разъединены слоем смазки (рис. 4.3). В этом случае силы трения – это силы сопротивления сдвигу отдельных слоев смазки.

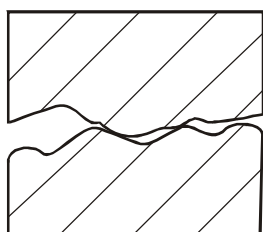


Рис. 4.2. Сухое трение

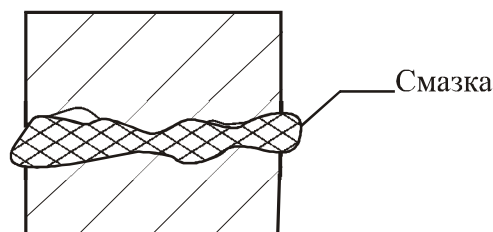


Рис. 4.3. Жидкостное трение

Полусухое (полужидкостное) трение – комбинация 1-го и 2-го видов.

Сухое и жидкостное трение совершенно различны по своей природе. Поэтому различны методы их учета. Фрикционные, ременные и другие передачи – сухое трение. В смазанных подшипниках, подпятниках – жидкостное трение.

2) По характеру относительного движения взаимодействующих тел различают:

- трение скольжения (лыжи по снегу);
- трение качения (колеса вагона по рельсам).
- трение вращения (торец вращающегося вала об опору, так называемое «трение в пяте»).

4.2. Трение скольжения

Для выявления закономерностей этого вида трения можно провести эксперименты на установке, которая называется трибометр (tribos – трение, метрия – мерить). Она изображена на рис. 4.4.

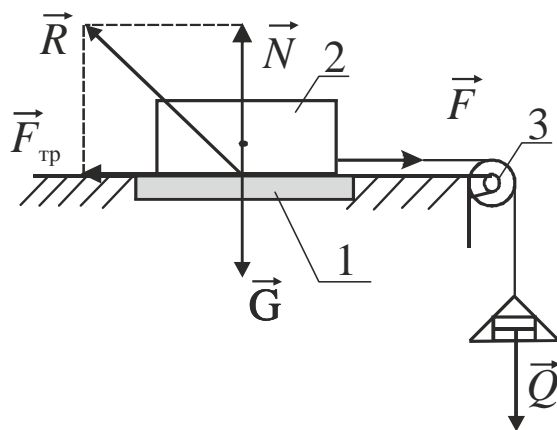


Рис. 4.4. Исследование закономерностей трения на трибометре

На пластину 1 ставим тело 2 весом G (вес можем менять, ставя на тело гири). Нормальная реакция пластины $\vec{N} = -\vec{G}$. К телу 2 привяжем нить, перекинув ее через блок 3. На конце нити подвесим чашку. Будем чашку нагружать гирями. Тело 2 остается в покое до тех пор, пока $F = Q$ не достигнет некоторого значения, вполне конкретного для данного сочетания трущихся поверхностей тел 1 и 2. Это говорит о том, что на тело 2 кроме сил \vec{N} и \vec{G} действует еще одна реакция $\vec{F}_{\text{тр}} = -\vec{F}$ – сила трения. Прделав множество опытов, Амонтон и Кулон сделали такие выводы:

Законы Амонтона-Кулона

1. Сила трения возникает только при наличии сдвигающей силы и направлена в сторону, противоположную относительной скорости движения.
2. Сила трения при прочих равных условиях не зависит от размеров трущихся поверхностей.
3. Максимальное значение силы трения возникает в момент начала движения. Эта сила называется силой трения покоя, и она прямо пропорциональна нормальному давлению (нормальной реакции \vec{N}) одного тела на другое:

$$F_0^{\text{тр}} = F_{\text{max}} = f_0 \cdot N \quad - \text{закон Амонтона-Кулона.}$$

Здесь f_0 – коэффициент трения покоя. Это безразмерная величина

$$f_0 = F_{\text{тр}} / N.$$

На горизонтальной плоскости $N = G$ (весу тела), рис. 4.5. На наклонной плоскости $N = G \cdot \cos \alpha$, где α – угол наклона плоскости (рис. 4.6).

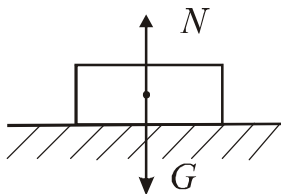


Рис. 4.5. Ползун на горизонтальной плоскости

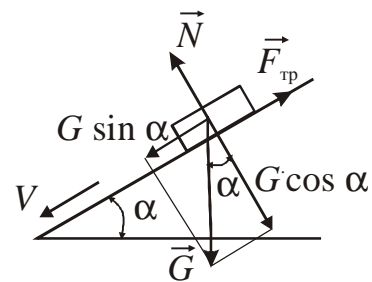


Рис. 4.6. Ползун на наклонной плоскости

4. Модуль силы трения в состоянии равновесия не больше силы трения покоя

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_0^{\text{тр}}, (F_0^{\text{тр}} = f_0 \cdot N).$$

Сила трения движения меньше силы трения покоя:

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N \leq f_0 \cdot N.$$

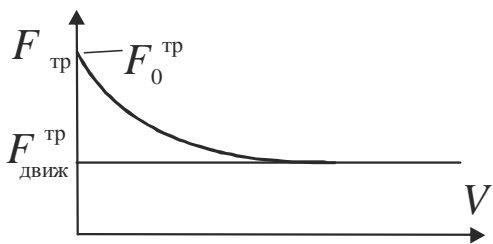


Рис. 4.7. Зависимость силы трения от скорости

При возрастании скорости движения сила трения уменьшается, приближаясь к некоторому постоянному значению (рис. 4.7).

5. Коэффициент трения зависит:

- от материалов тел контакта;
- от физического состояния трущихся поверхностей (шероховатость, наличие смазки, влажность, температура и др.)

Например, зависимость от материалов представлена в таблице 4.1. Эти значения приводятся в различных технических справочниках.

Таблица 4.1. Зависимость коэффициента трения от материалов

Материалы трущихся поверхностей	Коэффициент трения покоя (сухое трение)	Коэффициент трения движения (сухое трение)
Сталь-сталь	0,15	0,13
Сталь-чугун	0,3	0,18
Сталь-бронза	0,15	0,13
Кожа-чугун	0,6	0,3...0,5

Материалы, которые имеют большие коэффициенты трения, называются фрикционными материалами. Это кожа, резина, асбест, текстолит и др.

Материалы, имеющие низкие коэффициенты трения – антифрикционные. Это бронза, баббит, серый чугун, некоторые пластмассы.

4.2.1. Угол трения и конус трения

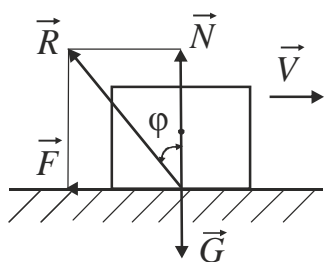


Рис. 4.8. Угол трения

Рассмотрим тело на плоскости (рис. 4.8).

Если нет трения – это т.н. идеальная связь, и есть только нормальная реакция N . Если есть трение, то полная реакция

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}.$$

Угол, на который отклоняется полная реакция от нормальной (т.е. реальная от идеальной) называется углом трения.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F}{N} = f; F = f \cdot N.$$

Т. е. угол трения $\varphi = \operatorname{arctg}f$; $\varphi_0 = \operatorname{arctg}f_0$;

Тангенс угла трения равен коэффициенту трения скольжения.

Если тело перемещать по *плоскости* в различных направлениях, то \vec{F} опишет в плоскости круг, а полная реакция \vec{R} опишет коническую поверхность. Эта поверхность называется конусом трения. Его значение таково:

- если равнодействующая \vec{P} внешних сил, приложенных к телу, будет располагаться за пределами конуса трения, то тело будет двигаться ускоренно, рис. 4.9;
- если равнодействующая внешних сил будет располагаться внутри конуса трения, тело двигаться не будет, рис. 4.10;
- если равнодействующая располагается на поверхности конуса трения – тело сохраняет равновесие, т.е. равномерно движется или находится в покое.

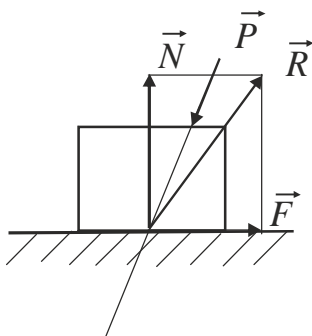


Рис. 4.9. Равнодействующая приложенных сил P располагается за пределами конуса трения

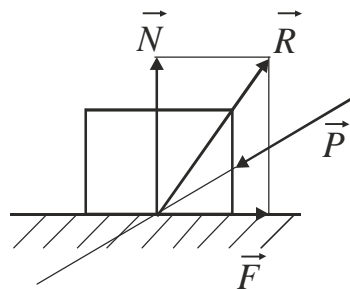


Рис. 4.10. Равнодействующая приложенных сил P располагается внутри конуса трения

4.2.2. Трение в поступательных кинематических парах

По конструкции поступательные пары бывают плоские (рис. 4.11, а), клинчатые (рис. 4.11, б), цилиндрические (рис. 4.11, в).

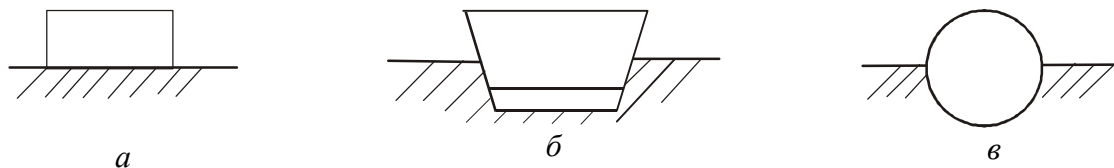


Рис.4.11. Виды поступательных пар:
а – плоская; б – клинчатая; в – цилиндрическая

Трение на наклонной плоскости

Рассмотрим случай равномерного движения тела вверх по наклонной плоскости и определим силу, которую необходимо приложить для равномерного движения вверх (рис. 4.12).

Здесь α – угол, который плоскость образует с горизонтом; \vec{G} – вес ползуна; \vec{P} – сила, движущая ползун вверх по наклонной плоскости; $n-n$ – нормаль к наклонной плоскости; β – угол, который \vec{P} образует с нормалью.

Раскладываем \vec{G} на две составляющие: $G\cos\alpha$ – придавливает ползун к плоскости; $G\sin\alpha$ – способствует движению ползуна вниз по наклонной плоскости.

На ползун действует нормальная реакция плоскости $N = G\cos\alpha$ и сила трения \vec{F} , тогда полная реакция плоскости на ползун $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}$ отклонена, как сказано выше, от нормали на угол трения $\varphi = \text{arctg}f$, где f – коэффициент трения в данной паре.

Рассмотрим условие равномерного движения ползуна:

$$\vec{G} + \vec{P} + \vec{R} = 0.$$

Представим это векторное уравнение графически. Для определения углов проведем ось y , рис. 4.12.

Запишем для треугольника на рис.4.13 теорему синусов:

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{G}{\sin[180^\circ - (\beta + \varphi)]} = \frac{G}{\sin(\beta + \varphi)}.$$

Определим величину силы \vec{P} , которая обеспечит равномерное движение ползуна вверх по наклонной плоскости:

$$P = \frac{G\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)}.$$

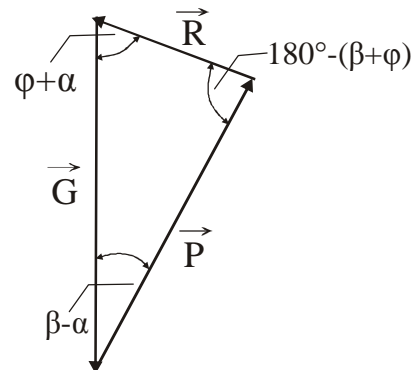
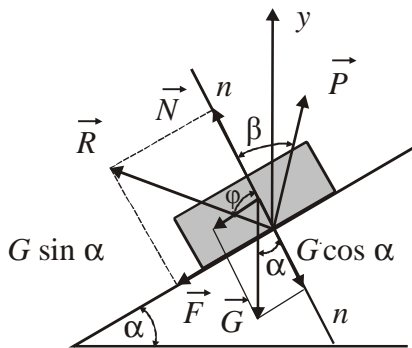


Рис.4.12. Ползун на наклонной плоскости

Рис.4.13. Векторный многоугольник сил

Рассмотрим частные случаи для \vec{P} :

1) Если \vec{P} параллельна наклонной плоскости, то $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi) = \cos \varphi$, $P = \frac{G\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$.

2) Если \vec{P} горизонтальна, то $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha + \varphi) = \cos(\alpha + \varphi)$ и $P = G\text{tg}(\alpha + \varphi)$.

Движение тела вниз по наклонной плоскости

Если тело будет двигаться вниз, то \vec{F} направлена в обратную сторону, и \vec{R} отклоняется под углом $-\varphi$:

$$P = \frac{G \sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)} \text{ – в общем случае;}$$

$$P = \frac{G \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \text{ – если } P \text{ параллельна наклонной плоскости;}$$

$$P = G \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \text{ – если } P \text{ направлена горизонтально.}$$

Условие самоторможения:

Если груз под действием собственного веса не опускается вниз по наклонной плоскости, то плоскость будет **самотормозящей**.

Если «скатывающая» составляющая (см. рис. 4.12) меньше силы трения, которая удерживает тело на плоскости, то это и будет условие самоторможения: $G \sin \alpha \leq F$.

$$F = f \cdot N = f \cdot G \cos \alpha \quad (\text{закон Амонтона – Кулона}).$$

$$G \sin \alpha \leq f \cdot G \cos \alpha ,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \leq f, \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi .$$

$\alpha \leq \varphi$ – условие самоторможения.

К.п.д. наклонной плоскости

Рассмотрим случай, когда вектор \vec{P} направлен горизонтально (рис. 4.14).

К.п.д. при движении вверх:

$$\eta = \frac{A_{\text{п.с.}}}{A_{\text{д}}} = \frac{G \cdot h}{P \cdot l} = \frac{G}{P} \operatorname{tg} \alpha = \frac{G \operatorname{tg} \alpha}{G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)},$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)},$$

где $A_{\text{п.с.}}$ – работа сил полезного сопротивления,

$A_{\text{д}}$ – работа движущих сил

К.п.д. при движении тела вниз: $\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}$. При движении вниз дви-

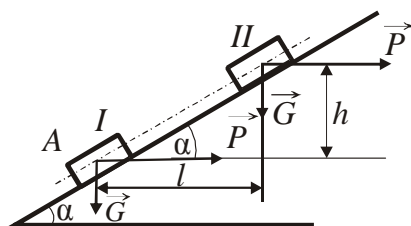


Рис. 4.14. Определение к.п.д. наклонной плоскости

жущая сила $G \sin \alpha$ – составляющая от силы веса.

Трение ползуна в клинчатых направляющих

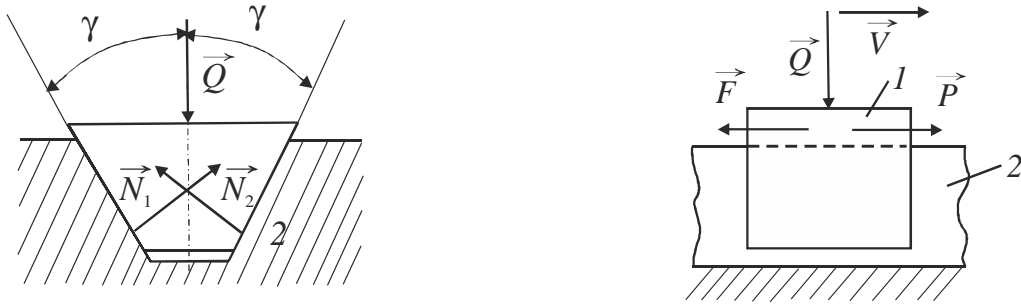


Рис. 4.15. Ползун в клинчатых направляющих

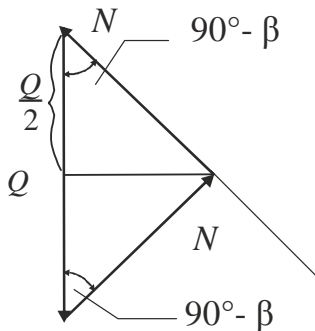


Рис. 4.16. Векторный треугольник сил для ползуна в клинчатых направляющих (рис. 4.16).

Q – нагрузка на ползун. F' – величина силы трения на одной грани: $F' = f \cdot N$. По граней две, поэтому полная сила трения:

$$F = 2F' = 2f \cdot N. \quad (4.1)$$

Определим величину N из условия:

$$\vec{Q} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{Q} + \vec{N} + \vec{N} = 0,$$

где $N_1 = N_2 = N$.

Представим это уравнение графически

$$N = \frac{Q}{2 \cdot \cos(90^\circ - \beta)} = \frac{Q}{2 \cdot \sin \beta}.$$

Подставим это выражение в формулу (4.1)

$$F = 2f \frac{Q}{2 \sin \beta} = \frac{f}{\sin \beta} Q = f' \cdot Q,$$

где $f' = \frac{f}{\sin \beta}$ – приведенный коэффициент трения клинчатого ползуна.

Так как $\beta < 90^\circ$ всегда, то $f' > f$, т.е. трение в клинчатом ползуне больше, чем в обычном плоском. Это свойство клинчатого ползуна используют во фрикционных передачах. В случаях, когда рассматривается трение клинчатого ползуна, пользуются формулами для плоского ползуна, но подставляют коэффициент трения $f' = \frac{f}{\sin \beta}$ и $\phi' = \arctg f'$.

Трение в цилиндрическом ползуне:

$$F = f' \cdot Q, \quad f' = 1,27 f, \quad f - \text{коэффициент трения плоского ползуна.}$$

4.2.3. Трение в винтовой паре

При рассмотрении трения в винтовой паре делают следующие допущения:

1) Т. к. закон распределения нагрузки по поверхности контакта «винт-гайка» (по винтовой нарезке) неизвестен, допускают, что равнодействующая этой нагрузки приложена по средней линии нарезки, которая отстоит от оси винта на расстоянии $r_{\text{ср}}$ (рис. 4.17):

$$d_{\text{ср}} = \frac{d_{\text{н}} + d_{\text{вн}}}{2} = 2r_{\text{ср}}, \quad d_{\text{н}}, d_{\text{вн}} - \text{приводятся}$$

в справочниках.

2) Допускают, что действие сил в винтовой паре можно свести к действию сил на ползун, который находится на наклонной плоскости, т.е., разворачивая среднюю линию винтовой нарезки на плоскость, сводят пространственную задачу к плоской.

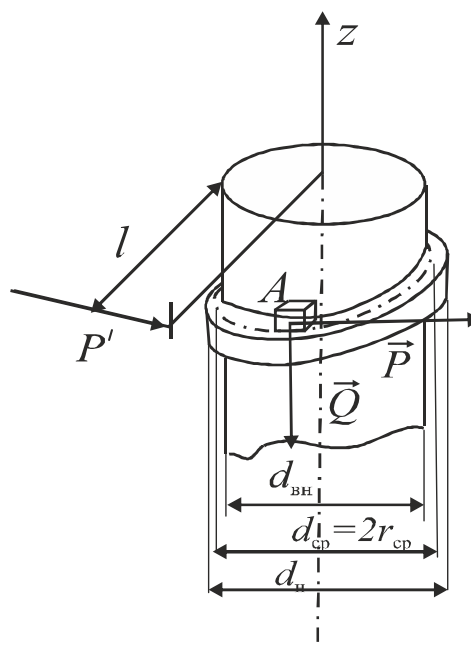


Рис. 4.17. Пара винт-гайка (А)

Рассмотрим случай прямоугольной резьбы. Покажем виток резьбы и гайку в виде элементарного кубика А.

На гайку действует сила \vec{Q}, \vec{P} – сила, которая равномерно перемещает гайку по резьбе. Для создания этой силы воспользуемся неким рычагом (рис. 4.17):

$$M_{\text{дв}} = M_{\text{винт}}^{\text{тр}} = P' \cdot l = P \cdot r_{\text{ср}} \quad (\text{движущий момент}).$$

Развернем виток резьбы (рис. 4.18).

Здесь h – высота подъема средней винтовой линии резьбы; α – угол подъема резьбы, $h = k \cdot s$ – для многозаходных резьб; k – число заходов; s – шаг резьбы.

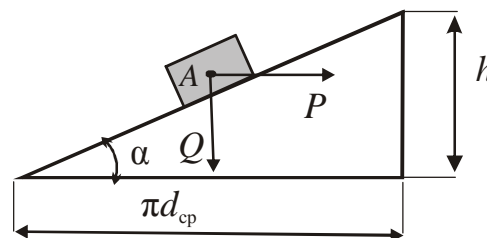


Рис. 4.18. Виток винтовой линии, развернутый на плоскость

$$h = \pi d_{\text{ср}} \cdot \text{tg} \alpha, \quad \text{tg} \alpha = \frac{h}{\pi \cdot d_{\text{ср}}}.$$

Из рассмотренного выше случая движения тела по наклонной плоскости для случая горизонтальной движущей силы $\bar{P}(\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha)$ известно, что $P = Q \cdot \text{tg}(\alpha \pm \varphi)$ (перед φ «+», если гайка закручивается вверх, и «-», если закручивается вниз).

$$M_{\text{винт}}^{\text{тр}} = Q r_{\text{ср}} \cdot \text{tg}(\alpha + \varphi).$$

Условие самоторможения: $\eta_{\text{обр.хода}} \leq 0$ – к.п.д. обратного хода.

Его можно определить так:

$$\eta_{\text{обр.хода}} = \frac{1}{\eta'},$$

где η' – к.п.д. прямого хода с переменной знаков перед всеми углами трения и коэффициентами трения.

Например, для винтовой пары

$$P = Q \text{tg}(\alpha + \varphi) \text{ – движущая сила;}$$

$$P_{\text{ид}} = Q \text{tg} \alpha \text{ – движущая сила при отсутствии трения (идеальная);}$$

$$\eta = \frac{P_{\text{ид}}}{P} = \frac{Q \text{tg} \alpha}{Q \text{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{\text{tg} \alpha}{\text{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

$$\text{Тогда } \eta_{\text{обр.хода}} = \frac{1}{\eta} = \frac{\text{tg}(\alpha - \varphi)}{\text{tg} \alpha}.$$

Трение в винтовых парах с треугольной и трапецидальной резьбой

Из рис. 4.19 видно, что такие винтовые пары можно рассматривать, как наклонную плоскость с клинчатым ползуном, у которого угол между вертикалью и стенками желоба $90^\circ - \beta$, а 2β – угол профиля резьбы.

Для треугольной резьбы $2\beta = 60^\circ$; для трапецидальной – $2\beta = 40 \div 55^\circ$.

Тогда приведенный коэффициент трения равен

$$f' = \frac{f}{\cos \beta}, \text{ а приведенный угол трения –}$$

$$\varphi' = \text{arctg } f'.$$

Выводы:

Сила трения для треугольной и трапеци-

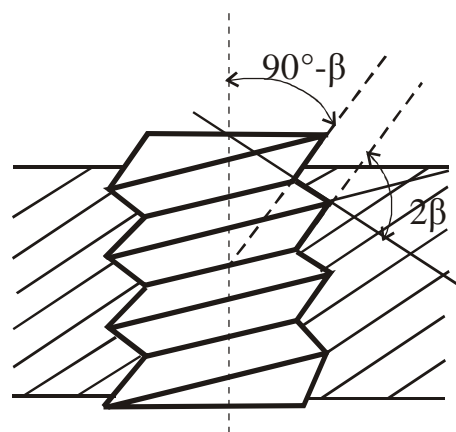


Рис. 4.19. Треугольная резьба

дальной резьбы больше, чем для прямоугольной. Поэтому все детали резьбовых соединений (болты, винты, шпильки, гайки), где нужно устранить самоотвинчивание деталей, делают с треугольной резьбой, а где нужно уменьшить трение (винтовые механизмы) – с прямоугольной, реже – с трапецеидальной.

$$P = Q \frac{r_{\text{ср}}}{l} \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi),$$

в формуле знак «+» – если направление перемещения гайки не совпадает с направлением силы Q , «-» – если совпадает.

4.2.4. Трение во вращательных кинематических парах

Наиболее распространена такая пара, которая образована цапфой вала или оси и их опорами.

Цапфа – та часть вала, которой он соприкасается с опорой.

Покажем вал с опорами (рис. 4.20).

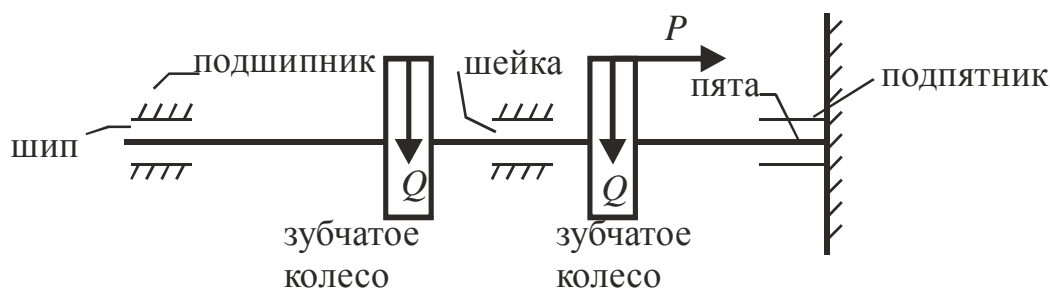


Рис.4.20. Вал с зубчатыми колесами на опорах: Q – радиальная нагрузка, P – осевая нагрузка

Цапфы, расположенные на концах вала и воспринимающие радиальные нагрузки, называют шипами, а посередине – шейками. Опоры – подшипники.

Если цапфа передает осевую нагрузку – это пята, а опирается она на подпятник (неподвижное звено).

Трение в паре шип-подшипник

В паре есть зазор, и вал из нижнего положения перекачивается в положение A (рис. 4.21), в котором наступает равновесие между движущими силами и силами сопротивления. r – радиус цапфы. \vec{Q} – радиальная нагрузка, \vec{F} – сила трения, \vec{N} – нормальная реакция.

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F},$$

где \vec{R} – реакция подшипника, которая отклоняется от нормальной на угол трения φ .

Силы \vec{Q} и \vec{R} образуют пару, момент которой есть момент сопротивления. Для равновесия требуется, чтобы:

$$M_{\text{сопр}} = M_{\text{дв}}. \quad (4.2)$$

Чтобы найти $M_{\text{дв}}$ надо зать $M_{\text{сопр}}$.

Момент сил сопротивления

$$M_{\text{сопр}} = R \cdot \rho = N \frac{\rho}{\cos \varphi}. \quad (4.3)$$

Момент сил трения, который также есть момент сил сопротивления:

$$M_{\text{сопр}} = F \cdot r = f \cdot N \cdot r. \quad (4.4)$$

Приравняем (4.3) и (4.4)

$$f r N = N \frac{\rho}{\cos \varphi}; \quad f r = \frac{\rho}{\cos \varphi}.$$

Так как φ мало, то можно принять $\cos \varphi \approx 1$, тогда $\rho \approx f \cdot r$. Учитывая, что $N=Q$, подставим в формулу (4.4) и получим:

$$M_{\text{сопр}} = Q \cdot f \cdot r = Q \cdot \rho = M_{\text{дв}}.$$

Круг радиуса ρ называют кругом трения (рис. 4.22).

$$\text{Т.к. } f = \text{tg } \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \text{ а } \cos \varphi \approx 1, \text{ то } \rho = f \cdot r = r \cdot \sin \varphi \quad [\text{м}].$$

Круг трения имеет свойства конуса трения:

- 1) если равнодействующая сил, приложенных к валу, проходит за пределами круга трения, то вал движется ускоренно;
- 2) если равнодействующая сил, приложенных к валу, располагается касательно, то вал вращается равномерно;
- 3) если равнодействующая сил, приложенных к валу, находится внутри круга трения – вал движется замедленно вплоть до остановки.

Трение пяты в подпятнике

Опора вала может быть сплошным кругом или кольцом.

Реакция подпятника распределяется в виде равносторонней гиперболы (рис. 4.23).

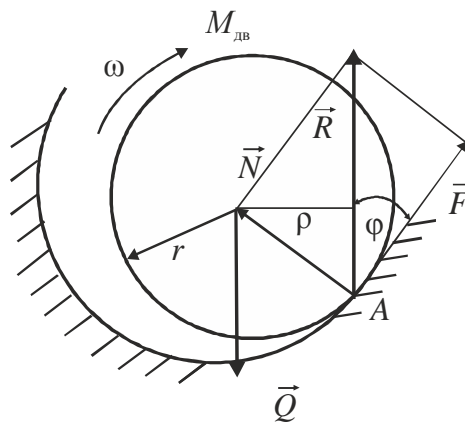


Рис. 4.21. Пара шип-подшипник

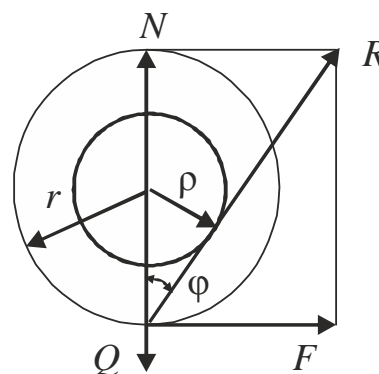


Рис. 4.22. Силы, возникающие в паре шип-подшипник

Для определения момента трения в плоской кольцевой пяте будем пользоваться двумя гипотезами.

Гипотеза 1 – для новых (неприработанных) пят: удельное давление p распределяется по площадке контакта равномерно, т.е.

$$p = \frac{Q}{\pi(R^2 - r^2)} = \text{const.} \quad (4.5)$$

Элементарный момент сил трения dM на элементарном кольце шириной dp (см. рис. 4.23):

$$dM = dF \cdot \rho, \quad (4.6)$$

где dF – сила трения в зоне элементарного кольца; ρ – радиус кольца.

По формуле Амонтона-Кулона

$$dF = f \cdot dN, \quad (4.7)$$

где N – давление на кольцо:

$$dN = p \cdot ds, \quad (4.8)$$

где ds – площадь элементарного кольца, которую можно найти как площадь прямоугольника:

$$ds = 2\pi\rho \cdot dp, \quad (4.9)$$

т. е.

$$dN = p \cdot 2\pi\rho dp. \quad (4.10)$$

Запишем (4.7) с учетом (4.10)

$$dF = f \cdot p \cdot 2\pi\rho dp.$$

Теперь момент трения по формуле (4.6):

$$dM = f \cdot p \cdot 2\pi\rho^2 dp.$$

Полный момент трения по поверхности кольца – это интеграл.

$$M = \int_r^R dM = 2\pi \cdot f \cdot p \int_r^R \rho^2 d\rho = 2\pi f \cdot p \frac{R^3 - r^3}{3}.$$

Учтем формулу (4.5), и тогда

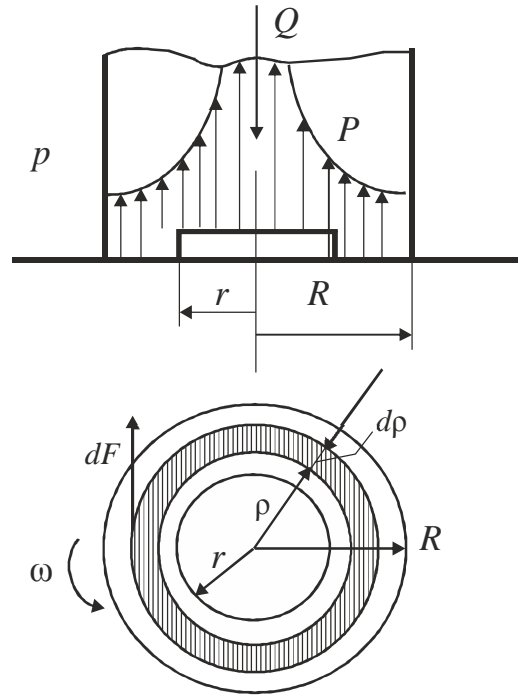


Рис. 4.23. Пара пята-подшипник

$$M = \frac{2}{3} f \cdot Q \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

Величину $\rho = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ называют радиусом трения кольцевой пяты.

$$M = f \cdot Q \cdot \rho = F \cdot \rho - \text{момент трения в пяте.}$$

Для сплошной пяты $r = 0$ и $\rho = \frac{2}{3} \cdot R$; $M = \frac{2}{3} R \cdot f \cdot Q$.

Гипотеза 2 – для изношенных (приработавшихся) пят:

износ в направлении осевой нагрузки одинаковый. Тогда для кольцевой пяты:

$$M = \frac{1}{2} f \cdot Q \cdot (R - r),$$

для сплошной пяты

$$M = \frac{1}{2} f \cdot Q \cdot R.$$

Выводы: кольцевые пяты лучше сплошных, так как в них после приработки поверхностей трения удельные давления во всех зонах усредняются. Опыт показывает, что наиболее удаленные от оси вращения поверхности сплошной пяты изнашиваются быстрее (их линейные скорости больше: $V = \omega R$, и чем больше R , тем больше V). Поверхности сплошной пяты, расположенные вокруг центра вращения, изнашиваются медленнее (малые R , т.е. малые $V = \omega R$). Но здесь удельные давления $p = \infty$ (гипербола). Поэтому часть поверхности вокруг центра удаляют.

4.2.5. Трение гибкого звена

В технике широко распространены механизмы с гибкими звеньями: ременные передачи, ленточные тормоза, транспортеры и др. Гибкое звено – лента. Зависимость между натяжением сбегающей ветви T_2 и набегающей T_1 (рис. 4.24) выведена Эйлером в 1765 году.

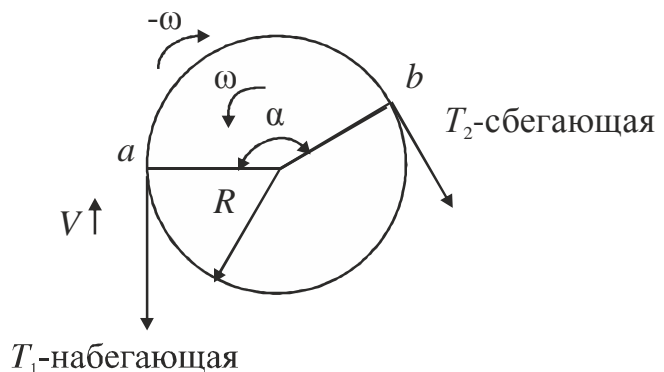


Рис. 4.24. Трение гибкого звена о барабан

Если лента неподвижна, а вращается барабан (как в ленточном тормозе),

то чтобы определить, какая ветвь набегающая, а какая сбегающая, применяют метод инверсии: мысленно останавливают барабан, т. е. сообщают всей системе угловую скорость $-\omega$. Тогда лента начинает условно двигаться с угловой скоростью $-\omega$ на неподвижный барабан, и становится ясно, какая набегающая ветвь, а какая – сбегающая.

Дуга ab , по длине которой лента прилегает к барабану, называется дугой обхвата, а угол α , стягивающий эту дугу, – углом обхвата. R – радиус барабана. Формула Эйлера: $T_2 = T_1 \cdot e^{f\alpha}$, где T_2 – натяжение сбегающей ветви, T_1 – натяжение набегающей ветви, $e = 2,72$.

Угол α в этой формуле надо представлять выраженным в радианах, f – коэффициент трения ленты о барабан.

Чем больше α , тем больше отличаются T_2 и T_1 . Например, для остановки речных и морских судов у пристани применяются неподвижные шпиль (рис. 4.25).

Примем угол обхвата $\alpha = 8\pi$ (обмотали 4 раза). Коэффициент трения, например, $f = 0,33$.

$$T_1 = \frac{T_2}{(2,72)^{0,33 \cdot 8 \cdot 3,14}} \approx \frac{T_2}{4000},$$

т.е. удерживающая судно сила T_1 в 4 тыс. раз меньше силы T_2 .

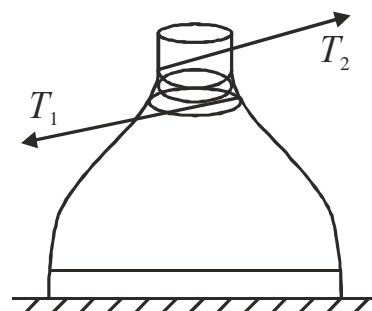


Рис. 4.25. Шпиль причала

4.3. Трение качения

Трение качения – это сопротивление, которое возникает при перекатывании одного тела по поверхности другого. Это сопротивление возникает из-за того, что тела не абсолютно твердые и всегда деформируются в месте соприкосновения. Это сопротивление зависит от упругих свойств тел контакта, кривизны в месте контакта и силы сжатия.

Рассмотрим цилиндр на плоскости (рис. 4.26).

В состоянии покоя эпюра распределения напряжений в зоне контакта будет симметрична и реакция N пройдет по одной линии с внешней нагрузкой Q . Приложим к этому цилиндру движущую силу P . Произойдет перераспределение напряжений и реакция N сместится в сторону перекатывания на величину k . Эта величина k называется коэффициентом трения качения и измеряется в единицах длины. Приведем некоторые значения k в табл. 4.2.

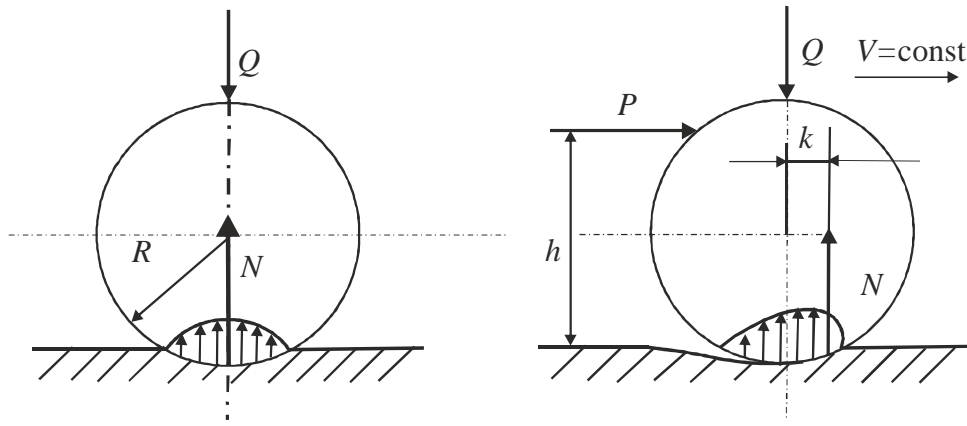


Рис. 4.26. Деформация зоны контакта при качении

Таблица 4.2. Значения коэффициентов трения качения для различных видов соприкасающихся поверхностей

Материал	k , мм
Сталь по стали	0,005
Дерево по дереву	0,05–0,06
Сталь по стали в шарико- и роликоподшипниках	0,0005–0,001

Будем рассматривать равномерное качение колеса по плоскости с постоянной скоростью, тогда уравнения равновесия будут иметь вид:

$$M_{\text{дв}} = M_{\text{сопр}} : P \cdot h = N \cdot k, \text{ и найдем движущую силу } P = N \cdot \frac{k}{h}.$$

Вывод: движущая сила прямо пропорциональна внешней нагрузке (так как $N = Q$) и коэффициенту трения качения и обратно пропорциональна плечу движущей силы h .

Передвижение груза на катках

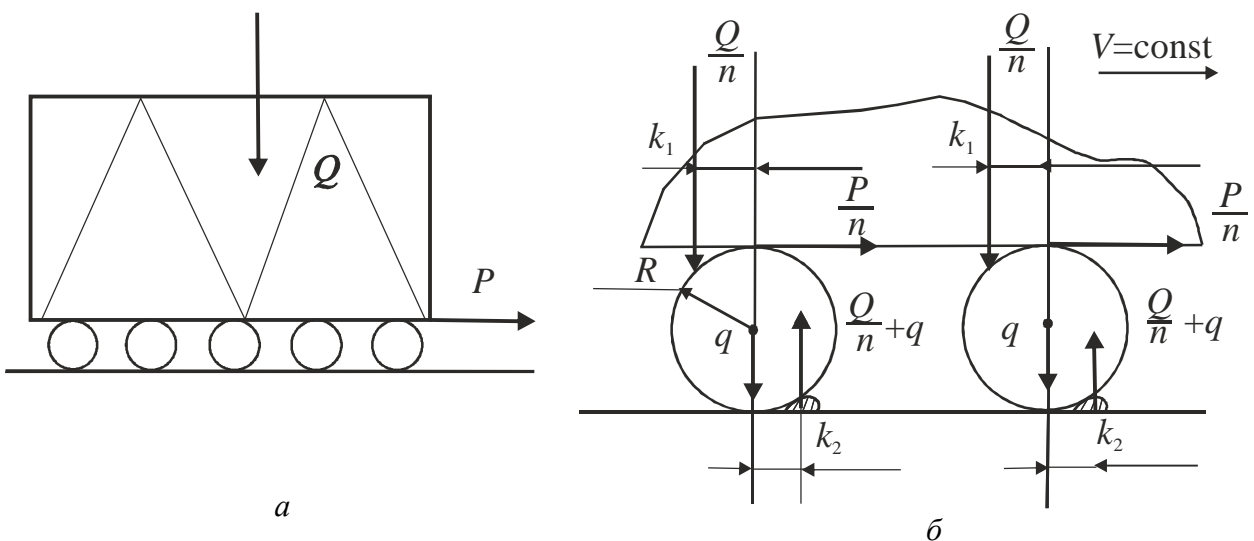


Рис. 4.27. Передвижение груза на катках: а – тележка на катках; б – фрагмент тележки на катках

Допустим, что перемещаем на катках груз Q (рис.4.27, а). Определим движущую силу P . Покажем фрагмент (рис.4.27, б).

На рисунке обозначено: Q – вес груза на катках; q – вес катка; R – радиус катков; k_1, k_2 – коэффициенты трения качения.

Примем $k_1 = k_2 = k$.

P – движущая сила;

n – число катков, на которых лежит груз.

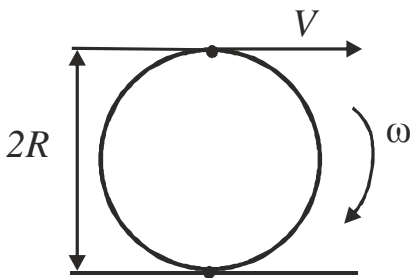


Рис. 4.28. Определение угловой скорости через линейную для катка

Запишем условие равновесия в виде равенства мощностей движущих сил и сил сопротивления:

$$N_{\text{дв}} = N_{\text{сопр}};$$

$$N_{\text{дв}} = P \cdot V \cos 0^\circ = P \cdot V.$$

Для катка выразим угловую скорость ω через линейную V (рис. 4.28):

$$\omega = \frac{V}{2R}, \quad N_{\text{сопр}} = \left[\frac{Q}{n} + \left(\frac{Q}{n} + q \right) \right] \cdot n \cdot k \cdot \omega = (2Q + q \cdot n) \cdot k \cdot \frac{V}{2R},$$

$$N_{\text{сопр}} = (2Q + q \cdot n) k \cdot \frac{V}{2R},$$

$$P \cdot V = (2Q + q \cdot n) \cdot k \cdot \frac{V}{2R},$$

$$P = (2Q + q \cdot n) \cdot \frac{k}{2R}.$$

Передвижение груза на колесах

Этот случай имеет место в железнодорожном подвижном составе, в трам-

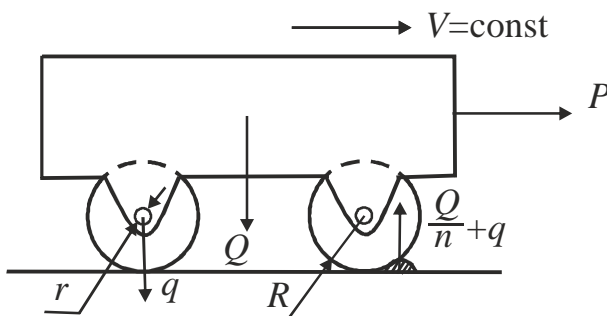


Рис. 4.29. Вагон на колесах

вайных вагонах, всевозможных тележках. Покажем вагон на колесах, рис. 4.29.

Пусть $V = \text{const}$ – скорость вагона, P – движущая сила, Q – вес груза и вагона, q – вес колеса, k – коэффициент трения качения, f – коэффициент трения

скольжения оси колеса о подшипник, n – число колес, r – радиус оси колеса, R – радиус колеса.

Запишем уравнение равновесия в виде уравнения мощностей:

$$N_{\text{дв}} = N_{\text{ск}} + N_{\text{кач}}, \quad N_{\text{дв}} = P \cdot V \cos 0^\circ = P \cdot V, \quad N_{\text{ск}} = M_{\text{ск}}^{\text{тр}} \cdot \omega = f \cdot \frac{Q}{n} \cdot r \cdot \frac{V}{R} \cdot n,$$

$$N_{\text{кач}} = M_{\text{кач}}^{\text{тр}} \cdot \omega = \left(\frac{Q}{n} + q \right) \cdot n \cdot k \cdot \frac{V}{R}, \quad P \cdot V = f \cdot \frac{Q \cdot r}{R} \cdot V + (Q + q \cdot n) \cdot k \cdot \frac{V}{R} \text{ [H]},$$

$$P = Q \frac{fr}{R} + (Q + qn) \cdot \frac{k}{R}.$$

Тема 5. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ

Во время движения механизма в соответствии с функциональным назначением в его кинематических парах возникают силы взаимодействия между звеньями. Знать нагруженность кинематических пар этими силами взаимодействия необходимо для расчета звеньев механизма на прочность, жесткость, вибростойкость, износоустойчивость, для расчета подшипников на долговечность, подбора муфт приводов и т. д.

5.1. Задача силового расчета плоских рычажных механизмов.

Основные предположения для расчета

Механизм представляет собой механическую систему, нагруженную внешними силами (движущими силами, силами полезного сопротивления, силами тяжести и др.), под действием которых между звеньями механизма возникают силы взаимодействия, т.е. реакции в кинематических парах.

В задачу силового расчета входит определение: а) реакций во всех кинематических парах; б) уравновешивающей силы $P_{\text{ур}}$ или уравновешивающего момента $M_{\text{ур}}$ на начальном звене для заданного положения механизма.

Результаты силового расчета используются для прочностных расчетов проектируемого механизма и динамических расчетов машины. Реакции могут определяться без учета сил трения в кинематических парах и с учетом трения. Результаты силового расчета без учета сил трения и с учетом трения позволяют вычислить коэффициент полезного действия механизма.

С целью учета неравномерного движения звеньев в основу силового расчета положен метод кинетостатики, согласно которому все внешние силы, прило-

женные к любой группе звеньев механизма, совместно с силами инерции звеньев образуют систему сил, удовлетворяющую условиям равновесия статики.

Первоначально при силовом расчете трение в кинематических парах не учитывается.

Силовой расчет плоского рычажного механизма производится при следующих предположениях, которые соответствуют жесткой модели механизма:

- все звенья механизма считаются абсолютно жесткими телами;
- все звенья имеют общую плоскость симметрии, в которой располагаются задаваемые силы и реакции; эту плоскость называют основной плоскостью;
- массы звеньев m_i считаются сосредоточенными в центрах их масс S_i ;
- инерция звеньев во вращательном движении учитывается заданными моментами инерции I_{S_i} относительно осей, проходящих через центры масс перпендикулярно основной плоскости;
- реакции в кинематических парах пятого класса (вращательных и поступательных) являются сосредоточенными силами, представляющими равнодействующие сил взаимодействия между звеньями, которые распределены по элементам кинематических пар.

5.2. Последовательность силового расчета плоского рычажного механизма

Реакцию во вращательной паре принято обозначать буквой \vec{R} с индексами $i j$, то есть \vec{R}_{ij} , где первый индекс соответствует номеру i звена, на которое действует реакция, а второй – номеру j смежного звена. Точкой приложения реакции считается центр вращательной пары.

Реакция в поступательной паре обычно обозначается буквой \vec{N} с индексом, имеющим аналогичное значение: \vec{N}_{ij} . Эта реакция перпендикулярна оси направляющей поступательной пары. Очевидно,

$$\vec{R}_{ij} = -\vec{R}_{ji}, \quad \vec{N}_{ij} = -\vec{N}_{ji}. \quad (5.1)$$

Каждая реакция определяется двумя неизвестными величинами. Во вращательной паре это модуль (величина) и направление реакции. В поступательной паре это модуль и положение линии действия реакции (которое определяется, например, расстоянием линии действия реакции до ближайшего шарнира).

Для нахождения реакций в кинематических парах отдельно взятой струк-

турной группы (группы Ассура) необходимо определить $2p_5$ неизвестных, где p_5 – число пар пятого класса в группе. В то же время число уравнений равновесия, которые можно составить для всех n звеньев группы, равно $3n$. В силу нулевого числа степеней подвижности группы ($W = 3n - 2p_5 = 0$) $3n = 2p_5$, а, значит, структурная группа является статически определимой.

Силовой расчет плоского рычажного механизма выполняется путем последовательного рассмотрения равновесия структурных групп, начиная с последней присоединенной группы.

5.3. Силовой расчет структурных групп второго класса

Пусть структурная группа состоит из двух звеньев с номерами i и j , а звенья, соединенные со звеньями рассматриваемой группы во внешних кинематических парах имеют номера k и l соответственно. Для выполнения расчета структурной группы графоаналитическим методом вначале вычерчивается схема нагружения группы, то есть кинематическая схема группы в заданном положении механизма с указанием сил, действующих на звенья группы. Таковыми являются:

- силы \vec{Q}_C или моменты \vec{M}_C полезного сопротивления;
- движущие силы \vec{Q}_D или моменты \vec{M}_D ;
- силы инерции $\vec{P}_i^n = -m_i \vec{a}_{S_i}$ и $\vec{P}_j^n = -m_j \vec{a}_{S_j}$, и моменты сил инерции $\vec{M}_i^n = -I_{S_i} \epsilon_i$, $\vec{M}_j^n = -I_{S_j} \epsilon_j$, где \vec{a}_{S_i} , \vec{a}_{S_j} и ϵ_i , ϵ_j – векторы ускорения центров масс S_i и S_j i -го и j -го звеньев и угловые ускорения звеньев соответственно;
- силы тяжести звеньев группы \vec{G}_i и \vec{G}_j , модули которых $G_i = m_i g$, $G_j = m_j g$, где g – ускорение свободного падения;
- известная реакция в точке присоединения следующей структурной группы (если таковая имеется), для которой силовой расчет уже выполнен.

Кроме того, на схеме нагружения указываются неизвестные реакции \vec{R}_{ik} или \vec{N}_{jl} во внешних кинематических парах группы. При этом во внешних вращательных парах реакции \vec{R}_{ik} раскладываются на две составляющие: тангенциальную \vec{R}_{ik}^τ , направленную параллельно скорости точки приложения реакции в относительном движении звеньев структурной группы, и нормальную \vec{R}_{ik}^n ,

которая перпендикулярна тангенциальной. Во внешних поступательных парах реакция \vec{N}_{jl} перпендикулярна оси направляющей ползуна и прикладывается на некотором неизвестном расстоянии h_{jl} от ближайшего шарнира.

Для определения неизвестных реакций (или их составляющих) могут быть использованы уравнения равновесия как отдельных звеньев структурной группы, так и группы в целом. Схема нагружения группы выполняется в масштабе длин (с коэффициентом μ_l , м/мм). При необходимости использования при расчете уравнения равновесия моментов сил на схеме необходимо показывать плечи всех сил, входящих в эти уравнения, относительно точки, к которой приводятся моменты.

Как правило, тангенциальные составляющие \vec{R}_{ik}^τ определяются аналитически из уравнений равновесия моментов. Нормальные составляющие \vec{R}_{ik}^n и реакции \vec{N}_{jl} в поступательных парах – из уравнений равновесия сил, записанных в векторной форме. Такие уравнения решаются графически путем построения плана сил, то есть замкнутых силовых многоугольников, соответствующих этим уравнениям, и построенных в масштабе сил (с коэффициентом μ_p , Н/мм).

5.3.1. Силовой расчет группы Ассура со средней вращательной парой

Исходные данные (рис. 5.1): 1) кинематическая схема группы в масштабе, результаты кинематического анализа; 2) задаваемые силы: силы веса звеньев, сила полезного сопротивления.

Определить: силы и моменты инерции; искомые реакции и их направление.

Для этого рассмотрим внешние ре-

акции: в шарнире A – это реакция \vec{R}_{21} ; разложим ее на две составляющие: \vec{R}_{21}^n , направленную по звену AB , и тангенциальную $\vec{R}_{21}^\tau \perp \vec{R}_{21}^n$; в шарнире C – это реакция \vec{R}_{34} , которую раскладываем на $\vec{R}_{34}^n \parallel BC$ и $\vec{R}_{34}^\tau \perp \vec{R}_{34}^n$. Внутреннюю реакцию в шарнире B $\vec{R}_{23} = -\vec{R}_{32}$ на составляющие не раскладываем.

Записываем условия равновесия так, чтобы в одно уравнение входила одна неизвестная.

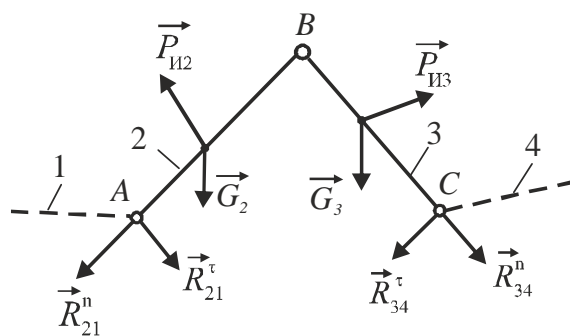


Рис. 5.1. Схема нагружения

Порядок решения.

I этап. Определение внешних реакций.

1) Определение тангенциальных составляющих.

а) Из условия равновесия сил, приложенных к звену 2, в виде $\sum m_B(F_i) = 0$ определим R_{21}^{τ} ;

б) \vec{R}_{34}^{τ} определяем из условия равновесия сил, приложенных к звену 3, в виде $\sum m_B(F_i) = 0$.

2) Определение нормальных составляющих из условия равновесия сил, приложенных к группе 2–3, в виде $\sum \vec{F}_i = 0$.

Запишем векторную сумму всех сил, приложенных к звеньям 2 и 3, в определенном порядке: сначала \vec{R}_{21}^n – неизвестная составляющая, затем все известные силы, приложенные к звену 2, а потом к звену 3, а в конце \vec{R}_{34}^n – неизвестная составляющая. Имеем:

$$\underbrace{\vec{R}_{21}^n + \vec{R}_{21}^{\tau} + \vec{G}_2 + \vec{P}_{И2}}_{2 \text{ звено}} + \underbrace{\vec{G}_3 + \vec{P}_{И3} + \vec{R}_{34}^{\tau} + \vec{R}_{34}^n}_{3 \text{ звено}} = 0$$

Строим план сил в масштабе $\mu_p \left[\frac{\text{Н}}{\text{мм}} \right]$

(рис. 5.2).

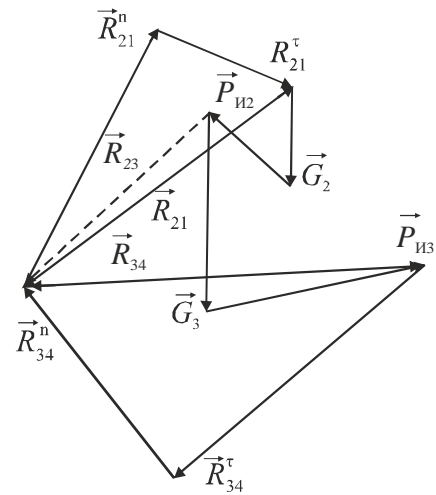


Рис. 5.2. План сил

Из плана сил находим \vec{R}_{21}^n и \vec{R}_{34}^n . Суммарные реакции \vec{R}_{21} и \vec{R}_{34} определим построением на плане сил, а их величины подсчитаем:

$$R_{21} = \sqrt{(R_{21}^n)^2 + (R_{21}^{\tau})^2} ; R_{34} = \sqrt{(R_{34}^n)^2 + (R_{34}^{\tau})^2} .$$

II этап. Определение внутренней реакции.

\vec{R}_{23} определим из условия равновесия сил, приложенных к звену 2, в виде $\sum \vec{F}_i = 0$:

$$\vec{R}_{21}^n + \vec{R}_{21}^{\tau} + \vec{G}_2 + \vec{P}_{И2} + \vec{R}_{23} = 0 .$$

На построенном плане сил строим \vec{R}_{23} , соединив конец вектора $\vec{P}_{И2}$ с началом вектора \vec{R}_{21}^n . На плане реакция \vec{R}_{23} изображена пунктиром.

5.3.2. Силовой расчет группы Ассура со средней поступательной парой

Исходные данные: 1) кинематическая схема; 2) результаты кинематического анализа; 3) силы тяжести, сила полезного сопротивления (рис. 5.3).

Определить:

- 1) силы и моменты сил инерции;
- 2) реакции в кинематических парах и их направления; для этого обозначим направляющую поступательной пары ($\alpha - \alpha$), затем внешние реакции: в шарнирах A и B , которые разложим на две составляющие: тангенциальную, направленную по направляющей $\alpha - \alpha$, и нормальную $-\perp \alpha - \alpha$.

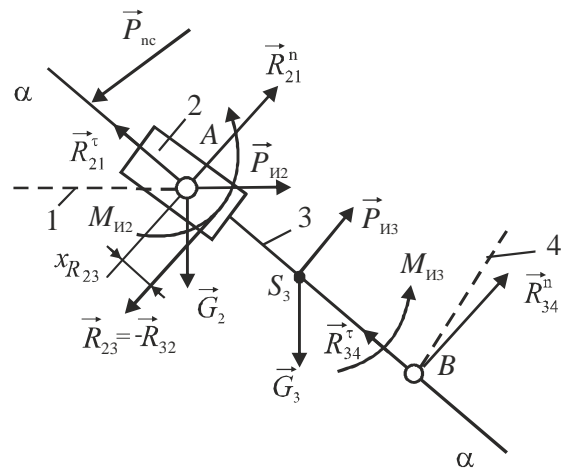


Рис. 5.3. Схема нагружения

Внутренняя реакция в поступательной паре $R_{23} = -R_{32}$; направление ее $\perp \alpha - \alpha$, неизвестна также точка ее приложения относительно шарнира A ($x_{R_{23}}$).

Порядок решения.

I этап. Определение внешних реакций.

1) Из условия равновесия сил, приложенных к звену 2, в виде $\sum_i \text{Pr}_{\alpha-\alpha}(\vec{F}_i) = 0$ определим \vec{R}_{21}^τ – тангенциальную составляющую внешней реакции \vec{R}_{21} .

2) Из условия равновесия сил, приложенных к группе, в виде $\sum m_B(\vec{F}_i) = 0$ определим \vec{R}_{21}^n – нормальную составляющую реакции \vec{R}_{21} .

3) Из условия равновесия сил, приложенных к группе 2–3, в виде $\sum \vec{F}_i = 0$ определим внешнюю реакцию в шарнире B – \vec{R}_{34} .

$$\vec{R}_{21}^n + R_{21}^\tau + \vec{G}_2 + \vec{P}_{и2} + \vec{G}_3 + \vec{P}_{и3} + \vec{P}_{nc} + \vec{R}_{34} = 0.$$

Строим план сил в масштабе $\mu_p \left[\frac{\text{Н}}{\text{мм}} \right]$ (рис. 5.4).

Из плана сил находим \vec{R}_{34} , т.е. находим сразу полную реакцию, а не составляющие \vec{R}_{34}^n и \vec{R}_{34}^τ .

II этап. Определение внутренней реакции

($R_{23} = -R_{32}$).

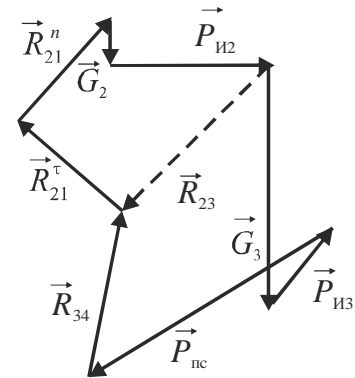


Рис. 5.4. План сил

1) Из условия равновесия сил, приложенных к звену 2, в виде $\sum \vec{F}_i = 0$, из построенного ранее плана сил определим R_{23} (на плане R_{23} обозначена пунктиром):

$$\vec{R}_{21}^n + \vec{R}_{21}^t + \vec{G}_2 + \vec{P}_{и2} + \vec{R}_{23} = 0.$$

2) Плечо приложения внутренней реакции R_{23} определим из условия равновесия сил, приложенных к звену 2, в виде $\sum m_A(\vec{F}_i) = 0$.

$$-R_{23}x_{23} + M_{и2} = 0, \quad x_{23} = \frac{M_{и2}}{R_{23}}.$$

5.4. Силовой расчет с учетом сил трения

При силовом расчете для учета сил трения к звеньям, образующим поступательную пару, следует приложить силы трения, а к звеньям, образующим вращательную пару, – моменты сил трения.

В поступательной кинематической паре, образованной звеньями i и k , следует приложить к звену i силу трения \vec{F}_{ik} со стороны звена k , а к звену k – силу трения \vec{F}_{ki} со стороны звена i . При рассмотрении равновесия сил, приложенных к звену i , учитывают силу \vec{F}_{ik} , а при рассмотрении равновесия сил, приложенных к звену k , – силу \vec{F}_{ki} .

Модуль силы трения \vec{F}_{ik} определяется по формуле:

$$|F_{ik}| = N_{ik} f, \quad (5.2)$$

где f – коэффициент трения, N_{ik} – нормальная реакция в поступательной паре. Сила трения направлена в сторону, противоположную соответствующей относительной скорости (рис. 5.5, а).

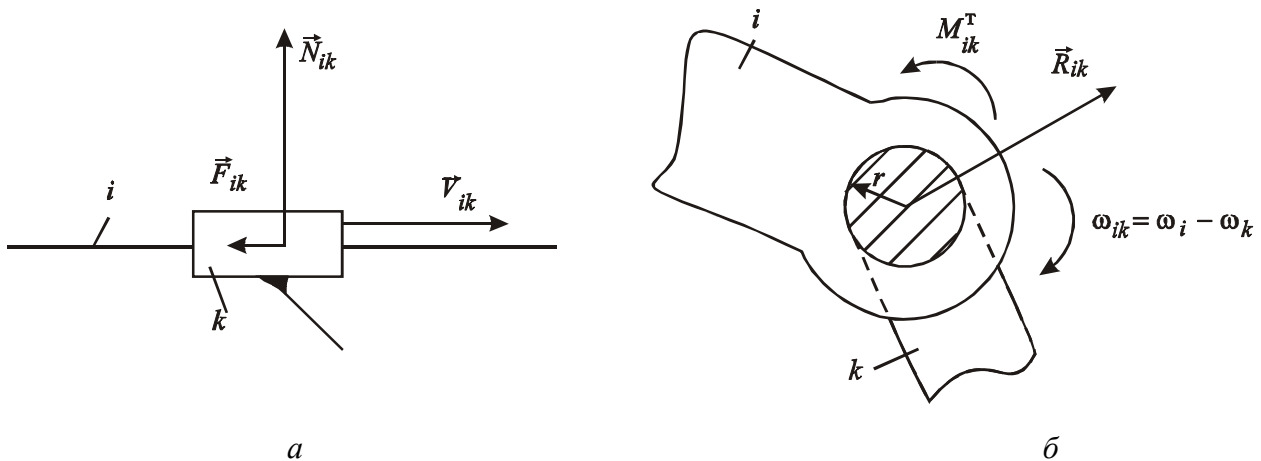


Рис. 5.5. Направление сил и моментов трения

Во вращательной паре возникает момент трения, модуль которого:

$$|M_{ik}| = R_{ik} \rho, \quad (5.3)$$

где R_{ik} – реакция в шарнире, $\rho = rf$ – радиус круга трения, r – радиус цапфы шарнира, f – коэффициент трения. Момент трения направлен в сторону, противоположную относительной угловой скорости ω_{ik} (рис. 5.5, б), ω_i , ω_k – угловые скорости звеньев i и k соответственно, принимаемые как алгебраические величины.

Учет сил трения при силовом расчете производится методом последовательных приближений.

Согласно этому методу силовой расчет без учета сил трения является первым приближением. Используя реакции, найденные в первом приближении, определяют силы и моменты трения, которые добавляют к остальным силам, приложенным к звеньям механизма, и повторяют силовой расчет (силы и моменты трения показывают на схемах нагружения структурных групп и начального звена). Реакции, найденные при этом повторном расчете, будут реакциями второго приближения. По реакциям второго приближения вновь определяют силы и моменты трения, новые значения которых учитывают для расчета по третьему приближению.

Процесс вычисления реакций продолжается до тех пор, пока в пределах требуемой точности значения реакций, найденных в n -м приближении, не совпадут с их значениями в $(n-1)$ -м приближении.

Вследствие малости коэффициентов трения обычно для окончания расчета достаточно трех-четырёх приближений.

5.5. Силовой расчет начального звена

Последовательность силового расчета указана в табл. 5.1. Движение начальному звену передается через пару зубчатых колес или же через муфту.

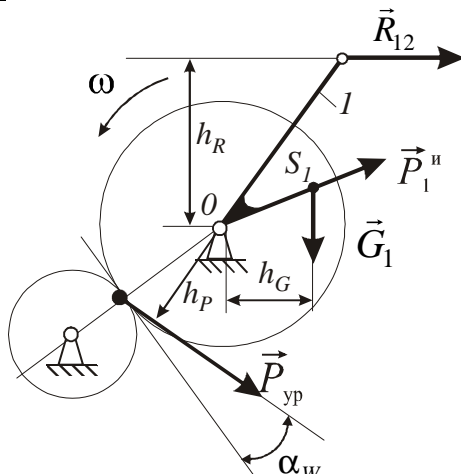
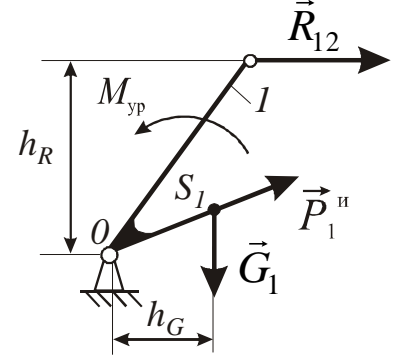
Из уравнения моментов сил относительно точки O : $\sum M_o(\vec{F}) = 0$, то есть:

$$R_{12} h_R - P_{yp} h_p = 0,$$

где плечи сил h_R и h_p определены измерением на схеме нагружения звена, находим уравновешивающую силу

$$P_{yp} = \frac{R_{12} \cdot h_R}{h_p}.$$

Таблица 5.1. Последовательность выполнения силового расчета для различных видов передач движения

Схема нагружения начального звена	Номер этапа	Вид уравнения равновесия	Неизвестные, определяемые на этапе
 <p>Движение передается через пару зубчатых колес, одно из которых закреплено на валу начального звена</p>	1	$\sum M_o(\vec{F}) = 0$	\vec{P}_{yp}
	2	$\sum \vec{F} = 0$	\vec{R}_{10}
 <p>Движение передается через муфту</p>	1	$\sum M_o(\vec{F}) = 0$	M_{yp}
	2	$\sum \vec{F} = 0$	\vec{R}_{10}

Реакция R_{10} находится из условия равновесия начального звена в виде равенства суммы сил в векторной форме (движение передается через зубчатую пару).

$$\vec{P}_{yp} + \vec{G}_1 + \vec{R}_{12} + \vec{R}_{10} = 0.$$

Это уравнение решается относительно неизвестной \vec{R}_{10} графическим способом, а именно путем построением плана сил.

Из уравнения моментов сил относительно точки O : $\sum M_o(\vec{F}) = 0$, то есть:

$$R_{12} h_R - P_{yp} h_p = 0,$$

где плечи сил h_R и h_p определены измерением на схеме нагружения звена, находим уравновешивающую силу

$$P_{yp} = \frac{R_{12} \cdot h_R}{h_p}.$$

Реакция R_{10} находится из условия равновесия начального звена в виде равенства суммы сил в векторной форме (движение передается через зубчатую пару).

$$\vec{P}_{yp} + \vec{G}_1 + \vec{R}_{12} + \vec{R}_{10} = 0.$$

Это уравнение решается относительно неизвестной \vec{R}_{10} графическим способом, а именно путем построением плана сил.

5.6. Проверка правильности силового расчета

Уравновешивающую силу (или уравновешивающий момент) на начальном звене можно найти без предварительного силового расчета механизма, так как на основании общего уравнения динамики мощность, создаваемая уравновешивающей силой (уравновешивающим моментом), равна со знаком «минус» сумме мощностей всех активных сил, а также сил и моментов сил инерции, которые учитывались при силовом расчете структурных групп.

Пусть \vec{P}_i – одна из сил, а M_j – один из моментов сил, приложенных к звеньям механизма; V_i – скорость точки приложения силы \vec{P}_i , а ω_j – угловая скорость звена, к которому приложен момент M_j . Тогда мощность, создаваемая уравновешивающим моментом M_{yp} , будет равна:

$$M_{yp} \omega = -(\sum P_i V_i \cos \alpha_i \pm \sum M_j \omega_j),$$

где ω – угловая скорость начального звена (кривошипа), α_i – угол между векторами силы \vec{P}_i и скорости \vec{V}_i . Знак «+» перед вторым слагаемым ставят, если M_j и ω_j одного направления, знак «-» – если M_j и ω_j разных направлений. Из этого выражения имеем:

$$M_{yp} = -\frac{(\sum P_i V_i \cos \alpha_i \pm \sum M_j \omega_j)}{\omega}.$$

В случае передачи движения начальному звену через пару зубчатых колес уравновешивающая сила P_{yp} связана с уравновешивающим моментом выражением

$$P_{yp} \cdot h_{yp} = M_{yp}.$$

Здесь h_{yp} – плечо уравновешивающей силы относительно неподвижной точки начального звена:

$$h_{yp} = r_w \cos \alpha_w,$$

где r_w – радиус начальной окружности эвольвентного зубчатого колеса, закреп-

ленного на валу кривошипа, а α_w – угол эксплуатационного зацепления. Получим:

$$P_{ур} = - \frac{(\sum P V_i \cos \alpha_i \pm \sum M_j \omega_j)}{\omega r_w \cos \alpha_w}. \quad (5.4)$$

Обозначим через $P_{ур}$ значение уравнивающей силы, полученной в результате силового расчета механизма для заданного положения начального звена, а $P_{ур}^{нр}$ – значение, найденное по формуле (5.4). Силовой расчет считается правильным, если относительная погрешность вычислений определяется выражением:

$$\delta = \left| \frac{P_{ур} - P_{ур}^{нр}}{P_{ур}^{нр}} \right| \cdot 100$$

и не превосходит допустимого значения $[\delta]$.

Как правило, допустимое значение принимается равным 10 %.

Тема 6. ДИНАМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МАШИН

Динамика – раздел механики машин и механизмов, изучающий закономерности движения звеньев механизма под действием приложенных к ним сил.

В общей постановке динамика – изучение каких-либо процессов или явлений в функции времени.

Динамическая модель – модель системы, предназначенная для исследования ее свойств в функции времени (или модель системы, предназначенная для исследования в ней динамических явлений).

В основе динамики лежат три закона, сформулированные Ньютоном.

6.1. Основные задачи динамики машинного агрегата

Прямая задача динамики – определение закона движения системы при заданном управляющем силовом воздействии.

Обратная задача динамики – определение требуемого управляющего силового воздействия, обеспечивающего заданный закон движения системы.

Методы составления уравнений динамической модели системы:

- энергетический (уравнения энергетического равновесия – закон сохранения энергии);
- кинестатический (уравнения силового равновесия по принципу

д' Аламбера).

На решении обратной задачи динамики – по заданному движению определить действующие силы – основывается силовой расчет механизмов. При этом кинематический и силовой анализ механизмов производится в предположении постоянства скорости начального звена.

Однако на практике скорость начального звена отличается от постоянной. Изучение действительного движения начального звена механизма основывается на решении прямой задачи динамики для машинного агрегата.

Машинным агрегатом называется система, состоящая из двигателя, передаточного механизма и главного механизма рабочей машины.

Кроме определения закона движения начального звена механизма, в задаче динамики машинного агрегата входит регулирование заданных режимов движения механизма, установление способов уменьшения динамических нагрузок и уменьшения колебаний угловой скорости начального звена.

Механические характеристики машин

Механической характеристикой машины называется зависимость силы или момента на выходном валу или рабочем органе машины от скорости или перемещения звена или точки ее приложения.

6.2. Силы, действующие на звенья машинного агрегата

Движение отдельных звеньев машинного агрегата происходит под действием приложенных к ним сил. Эти силы разделяются на движущие и силы сопротивления.

Движущие силы развиваются двигателем и стремятся ускорить движение начального звена.

Силы сопротивления стремятся замедлить движение начального звена. Существует два вида этих сил: силы полезного (производственного) сопротивления и силы вредного сопротивления. На преодоление сил полезного сопротивления затрачивается работа, необходимая для выполнения технологического процесса. На преодоление вредного сопротивления затрачивается дополнительная работа. В основном силы вредного сопротивления обусловлены трением в кинематических парах.

Отдельно следует упомянуть силы тяжести. Работа этих сил бывает положительной или отрицательной в зависимости от направления перемещения центра масс звена по вертикали. Совершаемая за полный цикл движения механизма работа сил тяжести равна нулю.

6.3. Механические характеристики сил

При решении задач динамики машинного агрегата указанные выше силы должны быть заданы. Они задаются в виде так называемых механических характеристик.

Механическая характеристика силы – это функциональная зависимость силы от кинематических параметров, в общем случае – от времени, координаты и скорости точки приложения силы. Они могут быть заданы аналитически или в виде диаграмм.

Например, на рис. 6.1 представлены механические характеристики электродвигателей постоянного тока: а) с параллельным возбуждением; б) с последовательным возбуждением. На рис. 6.2 – график механической характеристики асинхронного электродвигателя переменного тока.

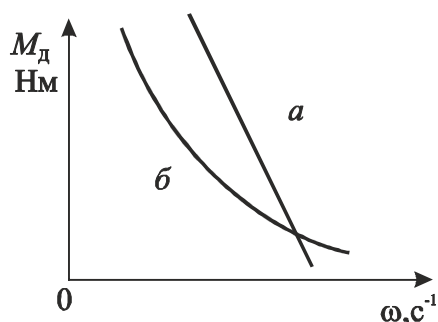


Рис. 6.1. Механическая характеристика электродвигателя постоянного тока

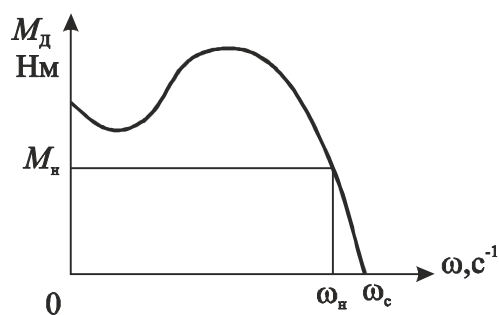


Рис. 6.2. Механическая характеристика асинхронного электродвигателя переменного тока

Здесь M_d – момент, развиваемый двигателем, ω – угловая скорость вращения вала двигателя.

Характеристики сил полезного сопротивления в машинах являются самыми различными в зависимости от вида технологического процесса.

Так, в грузоподъемных машинах, строгальных и долбежных станках, прокатных станах и пр. эти силы являются постоянными. В центробежных насосах, центрифугах и т.п. – зависят от скорости. В поршневых насосах и компрессорах зависят от пути, т.е. являются позиционными. В транспортных машинах силы сопротивления зависят от пути и скорости. Наконец, в камнедробилках, тестомесильных машинах и т.п. эти силы зависят от времени.

6.4. Жесткая модель машинного агрегата

Составление динамической модели механической системы состоит в идеализации реальной системы.

Наиболее простой способ идеализации машинного агрегата – переход от

реальных механизмов к механизмам с жесткими звеньями. Этот переход для агрегатов с плоскими шарнирно-рычажными механизмами основывается на следующих предположениях:

- все звенья главного механизма (и передаточного), являющиеся твердыми телами, считаются абсолютно твердыми телами;
- масса звеньев m_i считается сосредоточенной в центрах масс S_i ;
- инерция звеньев во вращательном движении учитывается заданными моментами инерции I_{S_i} относительно осей, проходящих через центр масс;
- в шарнирах и поступательных парах, а также в кинематических парах передаточного механизма отсутствуют зазоры и деформации поверхностей соприкосновения.

Машинный агрегат, содержащий главный механизм с одной степенью подвижности с жесткими звеньями, обладает одной степенью свободы. В качестве обобщенной координаты выбирается координата начального звена главного механизма. Если начальным звеном является кривошип, то обобщенная координата машинного агрегата – это угол поворота кривошипа φ .

6.5. Приведение сил и масс в машинных агрегатах с плоскими механизмами

6.5.1. Динамическая модель машинного агрегата

Динамическое исследование машинного агрегата с одной степенью свободы значительно упрощается путем приведения сил и масс.

Одна из форм уравнений движения машинного агрегата получается на основании теоремы об изменении кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = A_{1-2}. \quad (6.1)$$

Здесь T_1, T_2 – кинетическая энергия всех звеньев агрегата в положениях 1 и 2 соответственно, когда углы поворота начального звена равны φ_1 и φ_2 , A_{1-2} – работа внешних сил, действующих на звенья главного механизма при его движении из положения 1 в положение 2.

Наиболее простая запись уравнения (6.1) получается путем приведения сил и масс. Приведение сил и масс заключается в рассмотрении одного звена вместо многозвенной механической системы. Это звено называется звеном приведения.

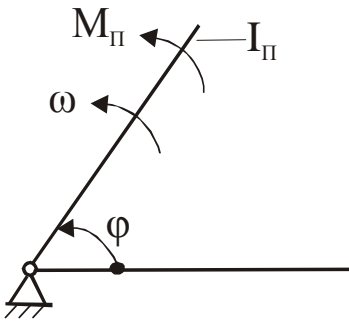


Рис. 6.3. Динамическая модель машинного агрегата

Пусть звеном приведения является начальное звено главного механизма, которое совершает вращательное движение (см.рис. 6.3). Момент инерции этого звена обозначим I_{II} и назовем приведенным моментом инерции. Примем также, что на звено приведения действует пара сил с моментом M_{II} , который называется приведенным моментом сил. Динамика звена приведения должна

быть эквивалентна динамике всего машинного агрегата.

Это возможно лишь в том случае, когда левая и правая части уравнения (6.1), записанные для всего машинного агрегата, будут равны левой и правой частям этого уравнения, записанного для звена приведения.

6.5.2. Приведение сил

Правые части уравнения (6.1) для звена приведения и для машинного агрегата совпадают, если работа приведенного момента на любом бесконечно малом повороте звена приведения равна сумме элементарных работ сил, действующих на звенья машинного агрегата, т.е. при повороте начального звена на угол $d\varphi$:

$$M_{II}d\varphi = M_d d\varphi_p + \sum P_i ds_i \cos(P_i \wedge ds_i) + \sum M_j d\varphi_j . \quad (6.2)$$

Здесь $d\varphi_p$ – угол поворота ротора двигателя, соответствующий повороту начального звена на угол $d\varphi$; ds_i – перемещение точки приложения силы P_i ; $d\varphi_j$ – угол поворота звена j , на которое действует момент M_j ; M_d – движущий момент на валу двигателя. Разделив равенство (6.2) на дифференциал времени dt , преобразуем его в формулу для вычисления приведенного момента сил:

$$M_{II} = M_d \frac{\omega_p}{\omega} + \sum P_i \frac{V_{S_i}}{\omega} \cos(P_i \wedge V_{S_i}) + \sum M_j \frac{\omega_j}{\omega} . \quad (6.3)$$

Указанная сумма может быть и положительной, и отрицательной. Знак минус указывает, что момент M_{II} направлен противоположно угловой скорости звена приведения. Силы инерции в приведенный момент не включаются. Приведение сил может быть выполнено отдельно для каждой группы сил, действующих на механизм (для сил полезного сопротивления, сил тяжести, сил трения и др.).

Таким образом, приведенным моментом сил называется момент пары сил, условно приложенной к звену приведения и определенный из условия равенства элементарной работы этой пары сил сумме элементарных работ сил и пар сил, действующих на звенья машинного агрегата.

6.5.3. Приведение масс

Левые части уравнения (6.1) для звена приведения и для машинного агрегата совпадают, если для любого момента времени кинетическая энергия звена приведения равна сумме кинетических энергий всех звеньев машинного агрегата.

При плоском движении кинетическая энергия звена определяется по формуле:

$$T_i = (m_i V_{s_i}^2 + I_{s_i} \omega_i^2) / 2. \quad (6.4)$$

Кинетическая энергия звена приведения (кривошипа):

$$T = \frac{I_{\Pi} \omega^2}{2}. \quad (6.5)$$

Тогда

$$\frac{I_{\Pi} \omega^2}{2} = \frac{\sum (m_i V_{s_i}^2 + I_{s_i} \omega_i^2)}{2},$$

откуда

$$I_{\Pi} = \sum \left(m_i \frac{V_{s_i}^2}{\omega^2} + I_{s_i} \frac{\omega_i^2}{\omega^2} \right). \quad (6.6)$$

Приведенным моментом инерции машинного агрегата называется такой момент инерции, которым должно обладать звено приведения относительно его оси вращения, чтобы кинетическая энергия этого звена равнялась сумме кинетических энергий всех звеньев машинного агрегата.

Приведенный момент инерции I_{Π} всегда является положительной величиной и функцией угла поворота φ звена приведения.

Приведение движущихся масс частей, входящих в машинный агрегат, производится раздельно, так что:

$$I_{\Pi} = I_{\text{пр}} + I_{\text{ред}} + I_{\text{шгм}}, \quad (6.7)$$

где $I_{\text{пр}}$ – приведенный момент инерции ротора электродвигателя, $I_{\text{ред}}$ – приведенный момент инерции редуктора, $I_{\text{шгм}}$ – приведенный момент инерции главного механизма.

Из формул (6.3) и (6.6) следует, что приведенный момент сил и приве-

денный момент инерции не зависят от величины угловой скорости звена приведения, так как в эти формулы входят только отношения скоростей, которые не изменяются с изменением ω .

Для динамического исследования установившегося режима по методу Мерцалова характерен неучет влияния скорости на действующие силы и моменты. Такой же неучет влияния скорости свойственен и некоторым другим методам (например, Артоболевского-Виттенбауэра).

Пренебрежение влиянием скорости на силы и моменты допустимо по той причине, что скорость начального звена вследствие малой неравномерности его вращения отклоняется от своего среднего значения в большинстве случаев не более чем на $\pm 2\%$. Поэтому изменения сил и моментов, приложенных к начальному звену и зависящих от скорости, также будут небольшими, и ими можно пренебречь.

Однако существуют машины, в которых влияние скорости на силы и моменты выражено очень резко. К ним относятся, в частности, асинхронные электродвигатели, получившие широкое распространение в промышленном электроприводе.

6.6. Уравнения движения машинного агрегата

6.6.1. Уравнение движения в энергетической форме

В результате приведения сил и масс уравнение движения машинного агрегата получается как уравнение движения звена приведения – начального звена главного механизма.

Пусть угол поворота и угловая скорость начального звена изменяются от начальных значений φ_0, ω_0 до некоторых текущих значений φ, ω .

Соответствующие значения приведенного момента инерции машинного агрегата обозначим $I_{п_0}, I_{п}$. Тогда начальное и текущие значения кинетической энергии будут:

$$T_0 = \frac{I_{п_0} \omega_0^2}{2}; T = \frac{I_{п} \omega^2}{2}. \quad (6.8)$$

За время поворота звена на угол $\varphi - \varphi_0$ работа всех сил и моментов, действующих на звенья механизма, будет:

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{п} d\varphi. \quad (6.9)$$

Теперь из теоремы об изменении кинетической энергии получаем уравнение движения машинного агрегата:

$$\frac{I_{\Pi} \omega^2}{2} - \frac{I_{\Pi_0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{\Pi} d\varphi. \quad (6.10)$$

Это уравнение называется уравнением движения машинного агрегата в энергетической форме.

6.6.2. Уравнение движения в дифференциальной форме

Это уравнение записывается в форме уравнения Лагранжа 2-го рода, которое после приведения сил и масс имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\Pi}, \quad (6.11)$$

где $T = \frac{I_{\Pi} \omega^2}{2}$; Q_{Π} – обобщенная сила. Q_{Π} в нашем случае – это приведенный момент: $Q_{\Pi} = M_{\text{д}} - M_{\text{с}}$, где $M_{\text{д}}$ – приведенный момент движущих сил; $M_{\text{с}}$ – приведенный момент сил сопротивления.

$$T = \frac{I_{\Pi}(\varphi) \omega^2}{2} = \frac{I_{\Pi}(\varphi) \omega^2}{2};$$

После дифференцирования получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{\Pi}(\varphi) \dot{\varphi} = I_{\Pi}(\varphi) \omega.$$

Возьмем производную

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} [I_{\Pi}(\varphi) \omega] = \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \omega + \frac{d\omega}{dt} I_{\Pi}(\varphi) = \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} \omega^2 + \varepsilon I_{\Pi}(\varphi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} \omega^2.$$

Подставив результаты дифференцирования в уравнение (6.11), получаем уравнение движения машинного агрегата в дифференциальной форме:

$$\frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} \omega^2 + \varepsilon \cdot I_{\Pi}(\varphi) - \frac{1}{2} \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} \omega^2 = M_{\text{д}} - M_{\text{с}}, \quad (6.12)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} \omega^2 + \varepsilon \cdot I_{\Pi}(\varphi) = M_{\text{д}} - M_{\text{с}}. \quad (6.13)$$

В случае непозиционных сил приведенный момент нельзя представить как функцию только угла поворота начального звена. Уравнение (6.12) – нелинейное 2-го порядка.

$$M_{\text{д}} = f(\omega, \varphi, t); M_{\text{с}} = f(\omega, \varphi, t)$$

Аналитического решения нет, решается приближенными методами.

6.7. Определение мощности и коэффициента полезного действия машины

Мощность и КПД – важнейшие технико-экономические показатели, характеризующие техническое совершенство машины. Для определения этих величин нужно подсчитать работу за цикл технологических сил и сил трения в кинематических парах. Поскольку элементарная работа сил, действующих на механизм, равна элементарной работе приведенного момента сил, то работу за цикл можно подсчитать по формулам:

$$A_C = \int_0^{2\pi} M_C d\phi ; \quad A_F = \int_0^{2\pi} M_F d\phi , \quad (6.14)$$

где A_C, A_F – работа за цикл сил полезного сопротивления и сил трения соответственно.

По физическому смыслу $A_C < 0, A_F < 0$, тогда КПД и мощность определяются по формулам:

$$\eta = \frac{A_C}{(A_C + A_F)} ; \quad P = \frac{-(A_C + A_F)}{t_{ц}} , \quad (6.15)$$

где $t_{ц}$ – время цикла. Если цикловой угол начального звена равен 2π , то

$$t_{ц} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Вычисление работы в соответствии с формулами (6.14) производится путем численного интегрирования функций $M_C(\phi)$ и $M_F(\phi)$. Для этого представляется возможным использовать метод трапеций или метод Симпсона.

6.8. Режимы движения машинного агрегата

В машинных агрегатах с одной степенью свободы различаются обычно

три режима движения: разбег, установившееся движение и выбег.

Тахограмма механизма – кривая $\omega = \omega(t)$ зависимости угловой скорости начального звена от времени – имеет вид, представленный на

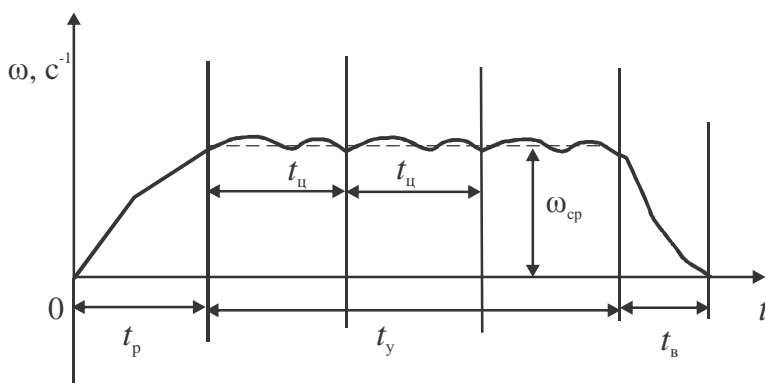


рис. 6.4.

Здесь $t_{ц}$ – время цикла, t_p – время разбега, t_y – время установившегося движения, t_b – время выбега.

Разгон характеризуется возрастанием угловой скорости начального звена от 0 до некоторого среднего значения, соответствующего нормальной работе механизма.

При установившемся движении угловая скорость начального звена колеблется около некоторого среднего значения ω_{cp} и является периодической функцией времени.

Во время выбега происходит убывание угловой скорости ω до нуля.

Период изменения обобщенной скорости механизма как функции времени называется циклом установившегося движения.

В начале и в конце каждого цикла установившегося движения значения кинетической энергии агрегата равны между собой. Отсюда следует, что за каждый цикл установившегося движения работа всех внешних сил, действующих на звенья механизма, равна нулю:

$$A_D + A_C + A_F = 0 ,$$

где A_D – работа движущих сил, A_C и A_F – работа сил полезного сопротивления и работа сил трения, соответственно, за цикл.

6.9. Исследование установившегося движения машинного агрегата

Во время установившегося движения угловая скорость начального звена периодически колеблется около некоторого среднего значения.

Угол, на который поворачивается начальное звено за один период установившегося движения, называется **цикловым углом**. Для большинства механизмов цикловой угол равен 2π .

Характеристикой неравномерности установившегося движения является коэффициент неравномерности хода:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}} ,$$

где ω_{\max} , ω_{\min} – максимальное и минимальное значения угловой скорости на интервале угла поворота начального звена, равном цикловому углу, а ω_{cp} определяется приближенно как:

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} .$$

Причинами колебаний угловых скоростей являются:

- 1) переменные значения кинетической энергии машинного агрегата из-за непостоянного соотношения работы движущих сил и работы сил сопротивления;
- 2) переменные значения приведенного момента инерции из-за переменных скоростей звеньев механизма.

Неравномерность вращения главного вала машины обычно вредно сказывается на выполняемых технологических процессах. Для каждого типа машин величина неравномерности ограничивается предельно допустимыми значениями.

Например:

- для турбогенераторов $\delta = \frac{1}{1000} \div \frac{1}{2000}$;
- для автотракторных двигателей $\delta = \frac{1}{100} \div \frac{1}{200}$;
- для металлообрабатывающих станков $\delta = \frac{1}{50} \div \frac{1}{100}$.

Исследование динамики машинного агрегата позволяет определить на основе исходных данных (геометрических параметров, масс и сил) и результатов кинематического анализа истинный закон изменения угловой скорости начального звена для того, чтобы сравнить фактическую неравномерность с допустимой. Если фактический коэффициент неравномерности превышает допустимый, то следует предусмотреть меры, снижающие неравномерность до допустимых пределов.

Из уравнения движения машинного агрегата в энергетической форме (6.10) при постоянном значении приведенного момента инерции $I_{\Pi} = I_{\Pi_0} = \text{const}$ получим:

$$\Delta\omega^2 = \omega^2 - \omega_0^2 = 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{\Pi} d\varphi / I_{\Pi}.$$

Отсюда видно, что $\Delta\omega = 0$ при $I_{\Pi} \rightarrow \infty$ или при $\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{\Pi} d\varphi \rightarrow 0$.

Приведенный момент инерции машинного агрегата состоит из двух частей – постоянной и переменной.

$$I_{\Pi} = I_{\Pi_1} + I_{\Pi_2}(\varphi), I_{\Pi_1} = \text{const}.$$

Уменьшить неравномерность движения (хода) можно лишь увеличением постоянной части приведенного момента I_{Π_1} , которая не влияет на неуровно-

вешенность машины. Если при фактическом приведенном моменте неравномерность выходит за пределы допускаемой, то необходимо определить величину $I_{П1}$, обеспечивающую $\delta_{доп}$. Разность между расчетным значением $I_{П1}$ и фактическим определит величину приведенного момента, который необходимо добавить. Соответствующие дополнительные массы называются маховыми или маховиком.

Таким образом, первый способ уменьшения неравномерности хода – применение маховых масс.

6.9.1. Исследование движения машинного агрегата методом Виттенбауэра (случай позиционных сил)

Второй способ – применение специальных разгрузочных или динамических носителей – метод Виттенбауэра, рис. 6.5.

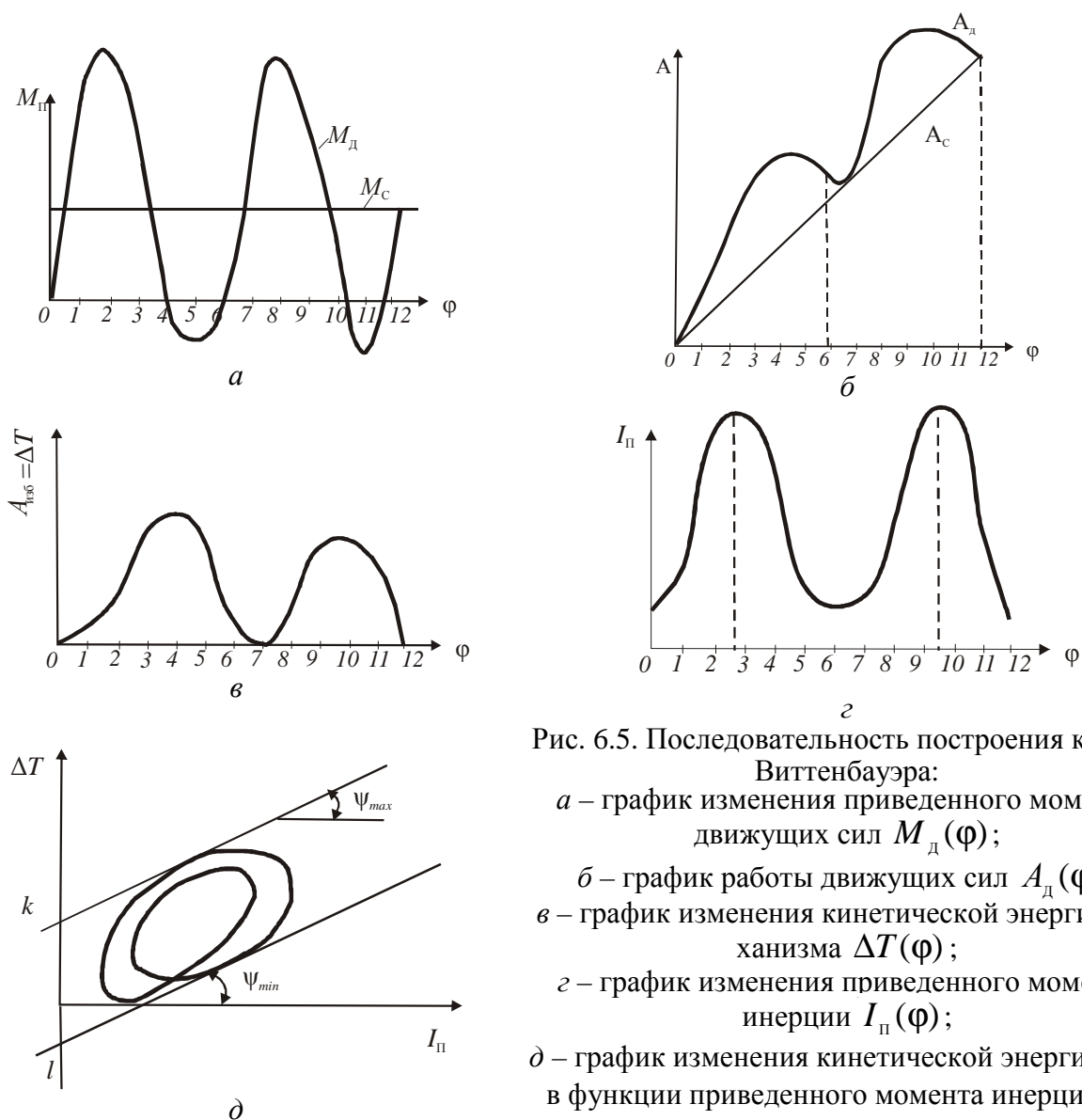


Рис. 6.5. Последовательность построения кривой Виттенбауэра:

a – график изменения приведенного момента движущих сил $M_d(\varphi)$;

б – график работы движущих сил $A_d(\varphi)$;

в – график изменения кинетической энергии механизма $\Delta T(\varphi)$;

г – график изменения приведенного момента инерции $I_{П}(\varphi)$;

д – график изменения кинетической энергии ΔT в функции приведенного момента инерции $I_{П}$ (диаграмма Ф.Виттенбауэра)

По этому методу строится замкнутая кривая, изображающая зависимость изменения кинетической энергии в функции приведенного момента инерции механизма. К этой кривой сверху и снизу проводятся касательные, углы наклона которых соответствуют максимальному и минимальному значению угловой скорости кривошипа (ω_{\max} и ω_{\min}). Тангенсы углов наклона этих касательных равны:

$$\operatorname{tg}\psi_{\max} \approx \frac{\mu_I}{2\mu_T} \omega_{\text{cp}}^2 (1 + \delta), \quad (6.16)$$

$$\operatorname{tg}\psi_{\min} \approx \frac{\mu_I}{2\mu_T} \omega_{\text{cp}}^2 (1 - \delta), \quad (6.17)$$

где μ_I, μ_T – масштабы графика $\Delta T = \Delta T(I_{\Pi})$ по двум осям; δ – коэффициент неравномерности хода машины; ω_{cp} – средняя угловая скорость вала:

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{\pi n_{\text{cp}}}{30}.$$

Точки пересечения касательных с осью ординат определяют отрезок kl , по которому можно найти приведенный момент инерции маховых масс:

$$I_M = \frac{(kl)\mu_T}{\omega_{\text{cp}}^2 \delta}, \quad (6.18)$$

где $(kl)\mu_T = \Delta T_M$ – изменение кинетической энергии маховых масс.

Чтобы построить диаграмму $\Delta T = \Delta T(I_{\Pi})$ для одного полного цикла установившегося движения, нужно предварительно построить график приведенных моментов, работ, изменения кинетической энергии, приведенного момента инерции механизма. Построение этих графиков имеет свои особенности для машин-двигателей и рабочих машин.

По данным подсчетов строим график изменения приведенного момента движущих сил в функции угла поворота звена приведения (рис. 6.5, а). Масштаб по оси абсцисс равен $\mu_{\varphi} = \frac{2\pi}{l}$ рад/мм, где l – отрезок диаграмм, соответствующий углу поворота кривошипа на один оборот.

Графически интегрируя кривую приведенного момента M_d по методу хорд, строим график работы движущих сил A_d (см. рис. 6.5, б). Масштаб полученного графика вычисляется по формуле: $\mu_A = \mu_M \mu_\phi h$, где μ_M – масштаб приведенных моментов, μ_ϕ – масштаб углов, h – полюсное расстояние для графического интегрирования, мм.

Приведенный момент сил полезного сопротивления для машин-двигателей принимается постоянным и действующим в течение всего цикла установившегося движения. Исходя из этого, а также учитывая условия установившегося движения, получаем график работы сил полезного сопротивления A_c в виде прямой линии, соединяющей начало и конец графика работы движущих сил. Здесь пренебрегаем работой сил трения и других вредных сопротивлений. При необходимости эта работа учитывается коэффициентом полезного действия машин η (средним для цикла установившегося движения).

Графически вычитая ординату кривой A_c из ординаты кривой A_d , строим график изменения кинетической энергии механизма (избыточной работы): $\Delta T = A_{изб} = A_d - A_c$ (рис. 6.5, в).

Рассчитываем значения приведенного момента инерции звеньев механизма, исходя из равенства суммы значений кинетических энергий звеньев механизма и звена приведения (6.6). На основании расчетов строим график изменения приведенного момента инерции как функцию угла поворота звена приведения (рис. 6.5, г).

Имея графики $\Delta T = \Delta T(\phi)$ и $I_{II} = I_{II}(\phi)$, строим график изменения кинетической энергии в функции приведенного момента инерции (диаграмму Ф.Виттенбауэра) (рис. 6.5, д). Проводим к кривой $\Delta T = \Delta T(\phi)$ касательные: сверху под углом ψ_{max} и снизу под углом ψ_{min} . Тангенсы этих углов находятся по формулам (6.16), (6.17). Измерив отрезок kl в мм, отсекаемый касательными на оси ΔT , по формуле (6.18) найдем приведенный момент инерции маховых масс.

Маховик обычно выполняется в виде колеса, имеющего массивный обод, соединенный с втулкой спицами. Если пренебречь моментами инерции спиц и втулки и считать массу маховика сосредоточенной на его ободе, то, воспользовавшись формулой для момента инерции тонкого кольца, получим:

$$I_M = \frac{G}{g} \cdot \frac{D^2}{4},$$

где G – вес махового колеса, g – ускорение свободного падения; D – средний диаметр обода.

Из написанного равенства следует:

$$GD^2 = 4gI_M.$$

Произведение веса маховика на квадрат его диаметра называется маховым моментом. На практике вместо момента инерции обычно пользуются маховым моментом.

6.9.2. Исследование установившегося движения машинного агрегата с асинхронным электродвигателем (случай непоозиционных сил)

Основной режим работы большинства машинных агрегатов – это установившееся движение, в процессе которого все параметры агрегата изменяются как периодические функции. При установившемся движении угловая скорость начального звена колеблется периодически около некоторого среднего значения. Угол, на который поворачивается начальное звено за один период установившегося движения, называется цикловым углом. Для большинства механизмов цикловым углом является 2π . Тогда для угловой скорости начального звена $\omega(\varphi) = \omega(\varphi + 2\pi)$.

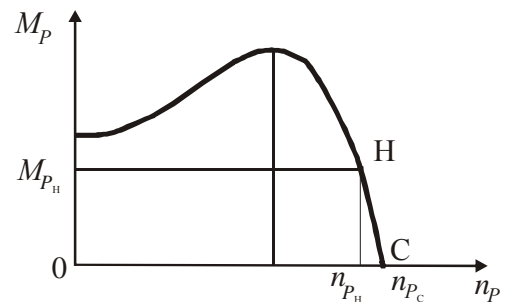


Рис. 6.6. График механической характеристики асинхронного электродвигателя

В машинах в качестве двигателей широко используются асинхронные электродвигатели, имеющие преимущества перед другими типами электрических машин.

Механическая характеристика асинхронного электродвигателя имеет вид, представленный на рис. 6.6.

Она связывает момент M_p , развиваемый двигателем, и частоту вращения n_p его ротора. Участок НС характеристики, ограниченный точкой Н номинального режима и точкой С, соответствующей холостому ходу, является рабочим участком. Номинальный режим соответствует паспортным данным двигателя.

Поэтому

$$M_{P_H} = 9549 \frac{P_H}{n_{P_H}},$$

где M_{P_H} – номинальный момент электродвигателя, Нм; P_H – номинальная (паспортная) мощность, кВт; n_{P_H} – номинальная частота вращения двигателя, об/мин. На холостом ходу двигателя его момент $M_P = 0$, а частота n_{P_C} (синхронная частота вращения) равна частоте вращения магнитного поля.

На участке НС можно приближенно принять, что

$$M_P = A_1 - B_1 n_P^2. \quad (6.19)$$

Приведем величины n_P, n_{P_H}, n_{P_C} и M_P к начальному звену главного механизма. Пусть передаточное отношение редуктора есть $i_{Д1}$.

Тогда

$$\omega = \frac{\pi n_P}{30|i_{Д1}|}, \quad \omega_H = \frac{\pi n_{P_H}}{30|i_{Д1}|}, \quad \omega_C = \frac{\pi n_{P_C}}{30|i_{Д1}|},$$

а приведенный момент движущих сил

$$M_{Д} = M_P |i_{Д1}|.$$

В частности, $M_{Д} = M_{P_H} |i_{Д1}|$, $M_{Д} = M_{P_C} |i_{Д1}|$. Вместо зависимости (6.19) запишем:

$$\frac{M_{Д}}{|i_{Д1}|} = A_1 - B_1 \cdot \frac{30^2 |i_{Д1}|^2}{\pi^2} \omega^2.$$

Или, обозначив $A = A_1 |i_{Д1}|$, $B = \frac{30^2 |i_{Д1}|^2 \cdot B_1}{\pi^2}$, из последнего равенства получим:

$$M_{Д} = A - B \omega^2. \quad (6.20)$$

Т.к. $M_{Д} = M_{Д}(\omega_H)$, а $M_{Д} = M_{Д}(\omega_C) = 0$, то для определения A и B следует записать уравнения:

$$M_{Д} = A - B \omega_H^2;$$

$$0 = A - B \omega_C^2.$$

Отсюда

$$A = \frac{M_D \omega_C^2}{\omega_C^2 - \omega_H^2}, \quad B = \frac{M_D}{\omega_C^2 - \omega_H^2}. \quad (6.21)$$

Разобьем цикловой угол 2π на $n \geq 24$ равных частей и перенумеруем точки разбиения на оси φ . Длина участка разбиения (шаг расчета):

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}. \quad (6.22)$$

Запишем уравнение движения машинного агрегата в энергетической форме для участка с начальным номером $i-1$ и конечным i , когда угол поворота начального звена главного механизма изменяется от φ_{i-1} до φ_i .

$$\frac{I_{\Pi_i} \omega_i^2}{2} - \frac{I_{\Pi_{i-1}} \omega_{i-1}^2}{2} = \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_D d\varphi + \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_C d\varphi. \quad (6.23)$$

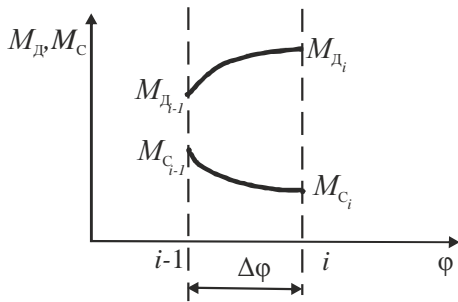


Рис. 6.7. Графики $M_D(\varphi)$ и $M_C(\varphi)$ на участке $\Delta\varphi$ для положений начального $i-1$ и конечного i

Здесь $I_{\Pi_{i-1}}, I_{\Pi_i}$ – значения приведенного момента инерции машинного агрегата, а ω_{i-1}, ω_i – соответствующие значения угловой скорости начального звена; M_D – приведенный момент движущих сил, определяемый равенством (6.20); M_C – приведенный момент сил сопротивления и сил тяжести механизма.

Соответствующие участки графиков $M_D(\varphi)$ и $M_C(\varphi)$ показаны на рис. 6.7.

Первый интеграл из выражения (6.23) представим приближенно как площадь трапеции под отрезком $M_{D_{i-1}} M_{D_i}$. Имеем:

$$\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_D d\varphi \approx \frac{M_{D_{i-1}} + M_{D_i}}{2} \Delta\varphi = \frac{2A - B\omega_{i-1}^2 - B\omega_i^2}{2} \Delta\varphi.$$

С той же степенью приближения определяем второй интеграл из (6.23):

$$\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} M_C d\varphi \approx \frac{M_{C_{i-1}} + M_{C_i}}{2} \Delta\varphi.$$

Теперь уравнение (6.23) с учетом последних вычислений интегралов будет:

$$\frac{I_{\Pi_i} \omega_i^2}{2} - \frac{I_{\Pi_{i-1}} \omega_{i-1}^2}{2} = \frac{2A - B\omega_{i-1}^2 - B\omega_i^2}{2} \Delta\varphi + \frac{M_{C_{i-1}} + M_{C_i}}{2} \Delta\varphi.$$

Из полученного уравнения можно выразить значение угловой скорости ω_i в конце отрезка через значение ω_{i-1} в его начале:

$$\omega_i^2 = \frac{(I_{\Pi_{i-1}} - B\Delta\varphi)\omega_{i-1}^2 + (M_{C_{i-1}} + M_{C_i} + 2A)\Delta\varphi}{I_{\Pi_i} + B\Delta\varphi}. \quad (6.24)$$

Изменяя i от 1 до n , можно шаг за шагом получить значения ω_i на протяжении циклового угла 2π .

Начальное значение ω_0 принимается в пределах рабочего участка механической характеристики, т.е. $\omega_H < \omega_0 < \omega_C$. Затем по формуле (6.24) выполняются вычисления $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Вследствие приближенного задания ω_0 может быть, что $\omega_0 \neq \omega_n$, т.е. условие периодичности не выполняется. В этом случае в качестве ω_0 принимается полученное ранее значение ω_n и выполняется новый цикл расчета. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие:

$$|\omega_n - \omega_0| < \Delta,$$

где Δ – допустимая погрешность в определении периодического движения.

Агрегаты с асинхронным двигателем характеризуются свойством саморегулирования, поэтому обычно бывает достаточно выполнить расчеты для двух оборотов начального звена или для части второго оборота.

После того, как установившееся движение найдено, можно определить коэффициент неравномерности:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}},$$

где $\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$ и сравнить его с допустимым значением $[\delta_{\text{доп}}]$. Если $\delta > [\delta_{\text{доп}}]$, то следует определить момент инерции маховика, который обеспечит снижение δ до допустимой нормы.

Тема 7. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МАСС МАШИНЫ

7.1. Условия уравновешивания масс механизма

Уравновешивание механизма заключается в устранении переменных воздействий стойки механизма на фундамент (или опору стойки). Условием уравновешивания является постоянство главного вектора \vec{F} и главного момента \vec{M} сил давления стойки на фундамент при заданном движении начальных звеньев.

Исключить полностью неуравновешенные силы конструктивно бывает довольно сложно или вообще неосуществимо. Поэтому обычно ограничиваются устранением лишь сил инерции. Уравновешивание путем распределения масс звеньев, устраняющее давление стойки на фундамент от сил инерции звеньев механизма, называется уравновешиванием масс. Условиями уравновешивания масс механизма являются

$$\vec{F} = \sum \vec{R}_i^n = 0 \text{ и } \vec{M} = \sum \vec{M}_i^n = 0,$$

где \vec{F} – главный вектор, а \vec{M} – главный момент сил инерции механизма; \vec{R}_i^n, \vec{M}_i^n – соответствующие величины i -го звена механизма.

Если выполнять оба условия, то уравновешивание называется динамическим; если только первое – статическим; только второе – моментным.

7.2. Статическое уравновешивание масс плоских механизмов по методу заменяющих масс

Условие $\vec{F} = 0$, т.е. равенство нулю главного вектора сил инерции, достигается при неизменном положении центра масс механизма. Распределение масс звеньев механизма, приводящее его центр масс в точку, неподвижную относительно стойки, называется статическим уравновешиванием масс механизма.

Наиболее наглядное и простое решение статического уравновешивания плоских механизмов получается по методу заменяющих масс.

В частном случае статическое размещение заменяющих масс можно получить по двум точкам, лежащим на одной прямой с центром масс.

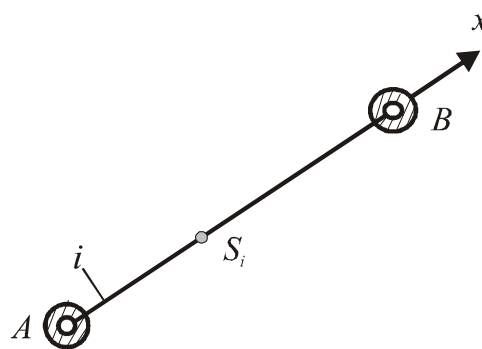


Рис. 7.1. Схема распределения масс на звене i

Пусть центр масс i -го звена механизма находится на оси звена между шарнирами A и B (рис. 7.1). Пусть масса звена – m_i , а S_i – центр масс звена. Свяжем со звеном ось x с началом в точке S_i .

Разместим заменяющие массы m_{A_i} и m_{B_i} в точках A и B таким образом, чтобы суммарная масса была равна массе звена, а центр тяжести заменяющих масс находился в точке S_i :

$$m_{A_i} + m_{B_i} = m_i ; \quad (7.1)$$

$$m_{A_i} x_A + m_{B_i} x_B = 0 . \quad (7.2)$$

Т.к. $x_A = -l_{AS_i}$, $x_B = l_{BS_i}$, то последнее равенство перепишем в виде:

$$m_{A_i} l_{AS_i} - m_{B_i} l_{BS_i} = 0 \quad (7.3)$$

и из уравнения (7.3) найдем выражение для заменяющих масс:

$$m_{A_i} = m_i \frac{l_{BS_i}}{l_i}, m_{B_i} = m_i \frac{l_{AS_i}}{l_i}, \quad (7.4)$$

где $l_i = l_{AB}$ – длина звена.

Воспользуемся этими формулами для статического уравновешивания кривошипно-ползунного механизма (рис. 7.2).

Массу звена 1 заменим двумя массами m_{O_1} и m_{A_1} . При

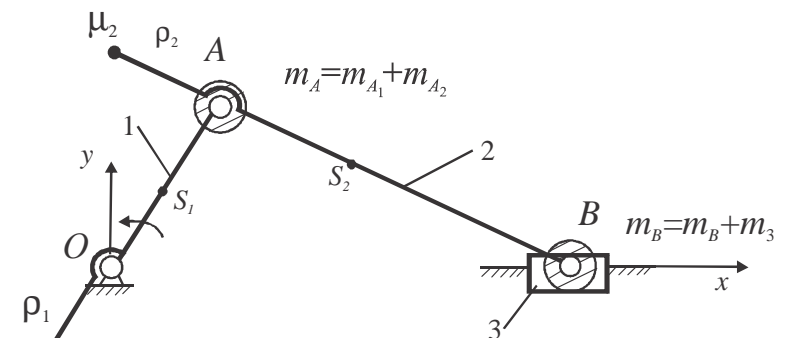


Рис. 7.2. Схема уравновешивания кривошипно-

этом, т.к. т. O неподвижна, для решения задачи надо определить только массу m_{A_1} :

$$m_{A_1} = m_1 \frac{l_{OS_i}}{l_1} .$$

Аналогично заменяем массу звена 2 массами m_{A_2} и m_{B_2} , сосредоточенными в точках A и B . В результате замены получаем только две подвижные массы, сосредоточенные в точках A и B :

$$m_A = m_{A_1} + m_{A_2} = m_1 \frac{l_{OS_1}}{l_1} + m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_2}, m_B = m_2 \frac{l_{AS_2}}{l_2} + m_3 . \quad (7.5)$$

Чтобы уравновесить силы инерции заменяющих масс m_A и m_B , достаточно установить на кривошипе 1 и шатуне 2 противовесы с массами μ_1 и μ_2 , удовлетворяющие условиям:

$$\mu_2 \rho_2 = m_B l_2, \mu_1 \rho_1 = (\mu_2 + m_A + m_B) l_1 \quad (7.6)$$

где ρ_1 и ρ_2 – расстояния от центров масс противовесов до точек O и A , соответственно; l_1 и l_2 – длины звеньев OA и OB , соответственно.

Из (7.6) с учетом (7.5) имеем:

$$\mu_2 \rho_2 = m_2 l_{AS_2} + m_3 l_2, \mu_1 \rho_1 = m_1 l_{OS_1} + (\mu_2 + m_2 + m_3) l_1.$$

7.3. Уравновешивание с помощью одного противовеса на кривошипе

Это уравновешивание производится таким образом, чтобы после установки противовеса остаточная неуравновешенная сила была минимальной.

Введем систему координат $x_1 O y_1$, связанную с кривошипом так, чтобы ось x_1 была направлена по оси кривошипа (рис. 7.3).

Пусть противовес с массой m_{Π} размещен в точке M кривошипа. Силу инерции противовеса представим вектором \vec{F}_0 , как показано на рис. 7.3. Если \vec{F} – главный вектор сил инерции механизма в его положении, заданном углом φ поворота кривошипа относительно оси Ox неподвижной системы координат, то неуравновешенный остаток при закреплении противовеса m_{Π} будет

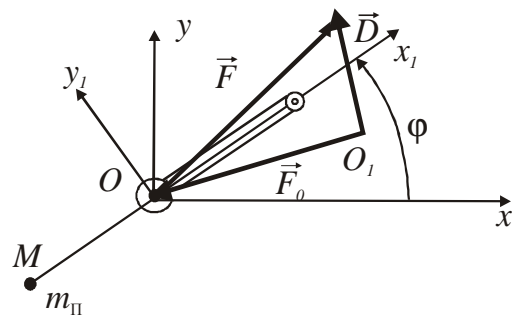


Рис. 7.3. Схема уравновешивания с помощью одного противовеса на кривошипе

$$\vec{D} = \vec{F}_0 + \vec{F}.$$

Так как величина и направление вектора \vec{F} изменяются с изменением угла φ поворота кривошипа в пределах циклового угла 2π , то для решения задачи минимизации неуравновешенной силы \vec{D} строится годограф главного вектора сил инерции \vec{F} в системе координат $x_1 O y_1$, связанной с кривошипом. С этой целью цикловой угол 2π разбивается на n равных частей и для каждого положения кривошипа, т.е. для $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ определяется главный вектор сил

инерции \vec{F}_k ($k = 1, 2, \dots, n$), который поворачивается на угол φ_k .

Годограф получается в результате соединения плавной кривой концов вектора \vec{F}_k (в системе координат x_1Oy_1) (рис. 7.4).

Неуравновешенный остаток сил \vec{D}_k для k -го положения будет равен $\vec{D}_k = \vec{F}_0 + \vec{F}_k$.

Минимизация неуравновешенной силы производится выбором положения точки O_1 в системе координат x_1Oy_1 .

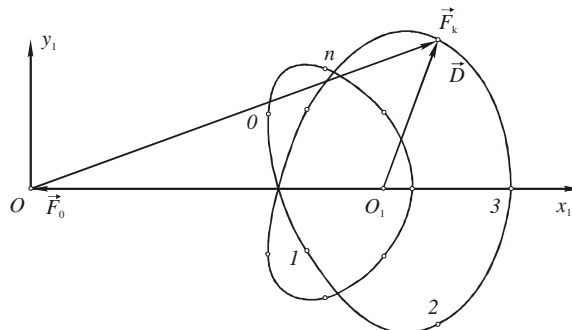


Рис. 7.4. Годограф главного вектора сил инерции \vec{F}_k

Вариант 1. Точку O_1 выбирают в центре окружности, в которую вписан годограф.

Вариант 2. Точку O_1 выбирают с координатами центра масс годографа, который рассматривается как кривая с равномерно распределенной массой. Приближенные координаты x_{O_1}, y_{O_1} точки O_1 определяются по n точкам:

$$x_{O_1} = \frac{\sum x_k}{n}, y_{O_1} = \frac{\sum y_k}{n},$$

где x_k, y_k – координаты точек годографа в системе координат x_1Oy_1 .

Тема 8. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

8.1. Общие сведения о кулачковых механизмах

Одно из важных требований к современным машинам – рабочие звенья должны совершать движения, точно отвечающие определенному закону. При использовании низших кинематических пар это требование в ряде случаев оказывается невыполнимым. Поэтому в механизмах применяют звенья с различными контурными поверхностями. Это – кулачки. Кулачок входит в высшую кинематическую пару с выходным звеном механизма – толкателем или коромыслом.

Кулачок – это звено с криволинейным элементом, который называется *профиль кулачка*. Он является входным звеном; выходным звеном является

толкатель или коромысло, которые осуществляют соответственно поступательное или качательное движение по заданному закону. Закон движения выходного звена определяется профилем кулачка и является главной характеристикой кулачкового механизма, от которой зависят его функциональные свойства, а также динамические и вибрационные показатели.

Кулачковые механизмы по сравнению с другими передаточными механизмами обладают рядом преимуществ. Кулачку можно придать любые очертания, и благодаря этому его легко приспособить к разным требованиям. Его конструирование несложно и он дает возможность весьма точно осуществить требуемое движение ведомого звена. С помощью кулачковых механизмов легко получить конструкцию с заданным характером движения ведомого звена в отношении перемещения, скоростей и ускорений.

Но, кулачковые механизмы обладают и существенными недостатками, связанными с наличием высшей кинематической пары между кулачком и толкателем. Кулачок и толкатель касаются друг друга в точке C , при этом получаем большое удельное давление в точке контакта (рис. 8.1). А это, в свою очередь, ведет к большему износу, чем, например, в шарнирно-рычажных механизмах. Чтобы уменьшить износ, звенья такой пары должны изготавливаться из высококачественных материалов, а их рабочие поверхности – особо обработаны. Кроме того, для уменьшения трения между кулачком и толкателем часто вводится звено – ролик, свободно вращающийся на оси, закрепленной на толкателе или кормысле (рис. 8.2). Однако, введение ролика усложняет конструкцию.

Еще один недостаток – необходимость специального замыкания высшей кинематической пары. Оно бывает двух видов: кинематическое (геометрическое) (рис. 8.3, 8.4) и силовое (рис. 8.5) за счет силы упругости пружины.

При кинематическом замыкании на кулачке выфрезерован паз и в этом пазу двигается ролик толкателя – кинематическое замыкание. Но в этом случае появляется люфт (поскольку ролик во избежание заклинивания должен быть по диаметру чуть меньше ширины паза), который приводит к ударам и стуку при перемене направления движения толкателя (рис. 8.3).

Другой случай кинематического замыкания – толкатель выполнен в виде рамки. В этом случае кулачок должен во всех положениях касаться обеих сторон рамки (рис. 8.4).

Силовое замыкание чаще всего обеспечивается с помощью пружины, которая в каждый момент времени прижимает толкатель к кулачку (рис. 8.5).

Введение пружины усложняет конструкцию кулачкового механизма. А поскольку поломка пружины нарушает работу всего механизма, то механизмы снабжают несколькими пружинами, особенно если они входят в состав ответственных механизмов (например, клапаны авиационных двигателей).

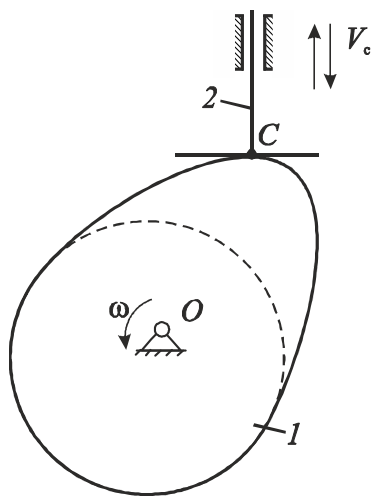


Рис. 8.1. Кулачковый механизм:
1 – кулачок, 2 – толкатель

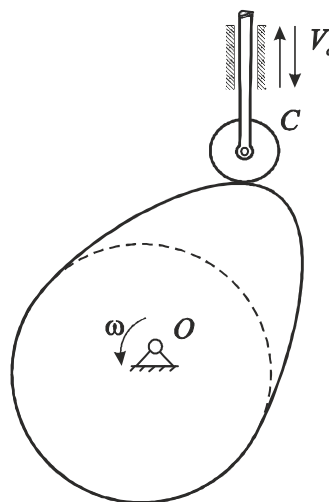


Рис. 8.2. Кулачковый механизм с роликом

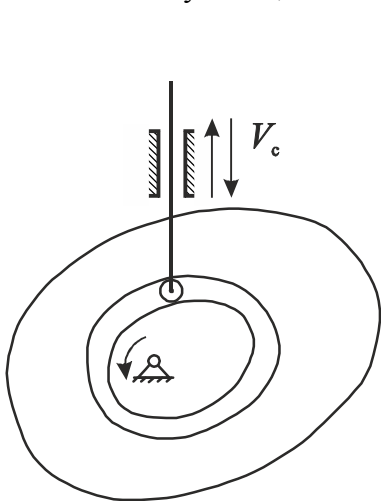


Рис. 8.3. Пример кинематического замыкания: ролик в пазу кулачка

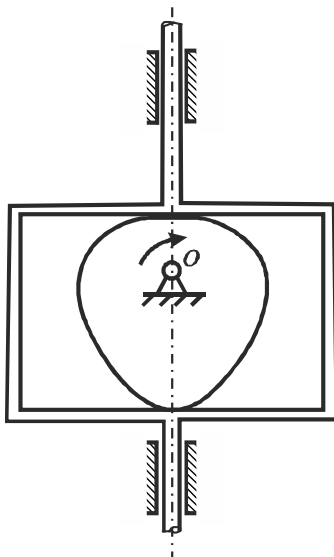


Рис. 8.4. Пример кинематического замыкания: толкатель в виде рамки

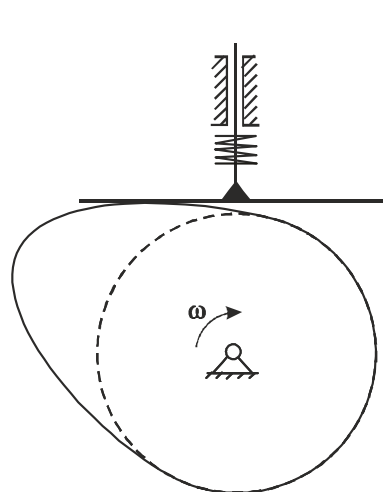


Рис. 8.5. Пример силового замыкания

К недостаткам кулачковых механизмов относится также трудность

изготовления сложного профиля кулачка. Изготовление кулачков производится либо последовательным фрезерованием (в конце изготовления – шлифованием) по отдельным точкам профиля кулачка, либо при помощи копиров.

8.2. Типы кулачковых механизмов и их особенности

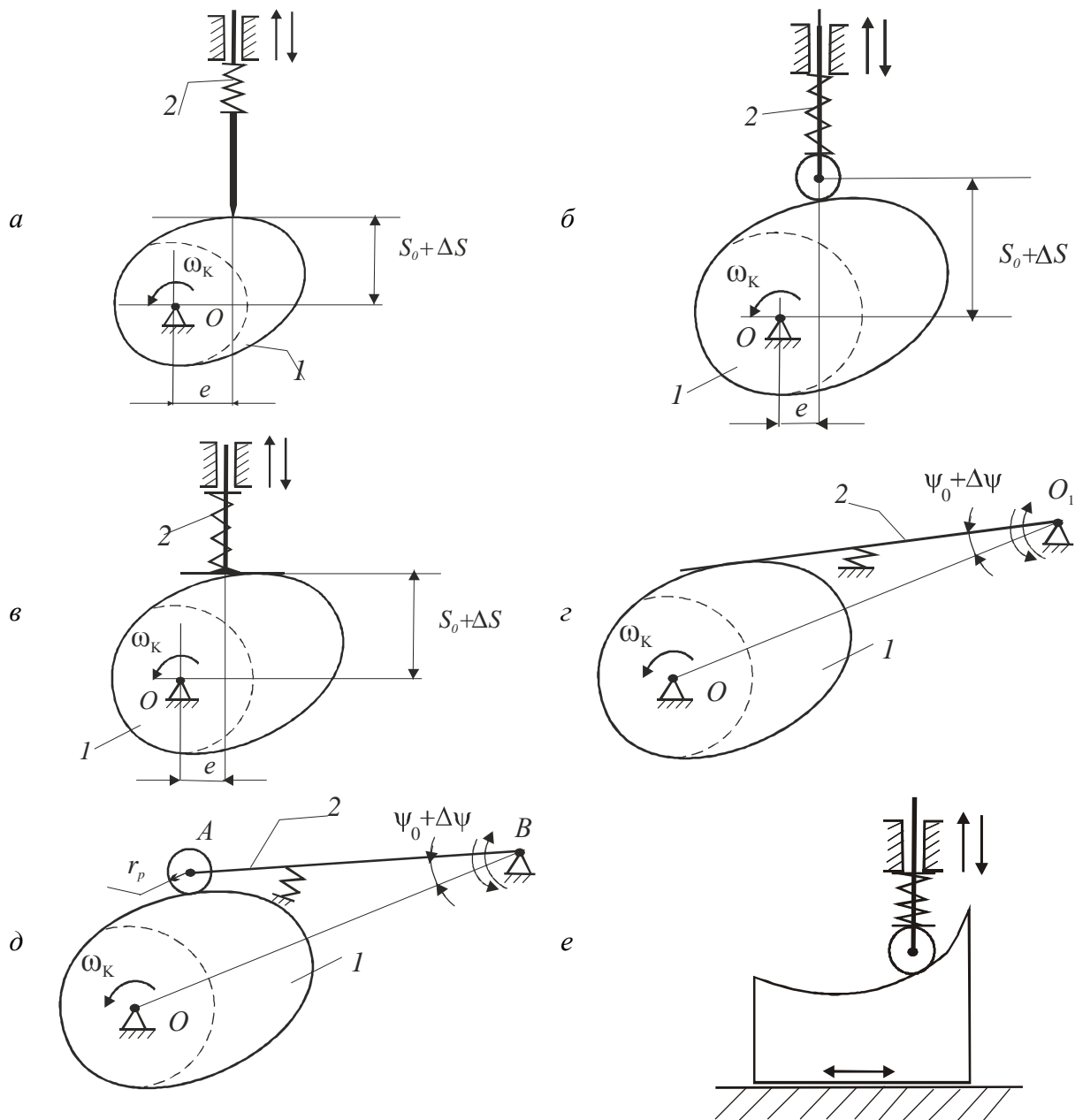


Рис.8.6. Виды кулачковых механизмов

Типы кулачковых механизмов различаются по следующим признакам:

I – по характеру движения входного звена:

а) вращательное движение кулачка (рис. 8.6, а – д);

б) поступательное движение (рис. 8.6, е);

II – по характеру движения выходного звена:

а) поступательное движение толкателя (рис. 8.6, а, б, в, е);

б) качательное движение коромысла (рис. 8.6, з, д);

III – в зависимости от элементов кинематической пары:

а) механизмы с выходным звеном, на котором закреплен ролик для снижения потерь на трение (рис. 8.6, б, д, е);

б) механизмы с плоским коромыслом (рис. 8.6, з, д);

в) с плоским толкателем (рис. 8.6, в);

г) с игольчатым толкателем (рис. 8.6, а).

IV – по характеру замыкания высшей кинематической пары (кулачок-толкатель):

а) механизмы с силовым замыканием с помощью пружин (рис. 8.6);

б) механизмы с геометрическим (кинематическим) замыканием. Примеры таких механизмов приведены на рис. 8.3, 8.4.

Кулачковые механизмы бывают плоскими (рис. 8.6), а также пространственными.

8.3. Требования, предъявляемые к кулачковым механизмам при их проектировании

Задача проектирования кулачкового механизма (КМ) заключается в определении его геометрических параметров и профиля кулачка, обеспечивающих выбранный закон движения ведомого звена.

При проектировании кулачковых механизмов следует учесть функциональные, прочностные и технологические требования. Функциональные требования определяют циклограмма работы механизма, необходимость непрерывного прижатия ведомого звена к кулачку, отсутствие скольжения ролика по кулачку.

К прочностным требованиям можно отнести ограничение контактных напряжений в паре ролик-кулачок, ограничение напряжений при изгибе и кручении кулачкового вала.

Радиусы кривизны профиля должны удовлетворять технологическим требованиям со стороны процесса обработки профиля.

Для решения поставленной задачи проектирования нужно, прежде всего, найти зависимости кинематических и динамических характеристик механизма от его геометрических параметров и заданной циклограммы движения, а затем на основе полученных уравнений решить задачу синтеза механизма в

соответствии с заданными требованиями.

8.4. Циклограмма работы кулачкового механизма

Дальше будем рассматривать только механизмы, в которых кулачок осуществляет вращательное движение. Положение кулачка будем задавать углом поворота φ . В качестве обобщенной координаты, которая задает положение выходного звена, для механизмов с поступательным движением толкателя примем расстояние $S = S_0 + \Delta S$ (рис. 8.6). В механизмах с коромыслом его положение выходного звена задает угол $\psi = \psi_0 + \Delta\psi$ – угол между линией центров и осью коромысла (рис. 8.6). Функции $S(\varphi)$ и $\psi(\varphi)$ называются функциями положения толкателя. Это периодические функции с периодом, равным 2π . Графики этих функций содержат в себе возрастающие убывающие участки. Назовем их соответственно фазами удаления (φ_y) и сближения (φ_c) выходного звена. Между этими фазами могут размещаться участки, на которых функция положения остается постоянной, то есть выходное звено не двигается. Назовем эти участки (фазовые углы) участками дальнего (φ_d) и ближнего (φ_b) выстоя. Типичная функция положения показана на рис. 8.7.

За начало отсчета угла φ принимают положение механизма, которое отвечает началу фазы удаления ведомого звена.

Углы φ_y , φ_d , φ_c , φ_b , которые отвечают участкам удаления, дальнего выстоя, сближения и ближнего выстоя, будем называть фазовыми углами кулачкового механизма. Величина фазовых углов определяется характером технологического процесса, выполнение которого обеспечивает механизм. Этот процесс должен отвечать циклограмме работы машины.

Фазовые углы поворота кулачка связаны между собой зависимостью: $\varphi_y + \varphi_d + \varphi_c + \varphi_b = 360^\circ$. Иногда один или два фазовые углы могут отсутствовать.

8.5. Законы движения толкателя

В зависимости от назначения механизма к закону движения толкателя выдвигаются разные требования, которые можно свести к двум основным случаям.

1. Технологический процесс жестко регламентирует прохождение функции положения во всех точках цикла или в заданном числе контрольных точек. К

этому случаю относится проектирование разных копировальных автоматов.

2. Технологический процесс определяет только начальную и конечную фазы удаления и сближения (точки A, B, C, D на рис. 8.7).

В первом случае конструктор не может изменять закон движения с целью улучшения нагрузки, виброактивности, шумности и долговечности механизма. Во втором случае такая возможность существует.

Рассмотрим на примере участка удаления, каким требованиям должны удовлетворять кинематические параметры механизма.

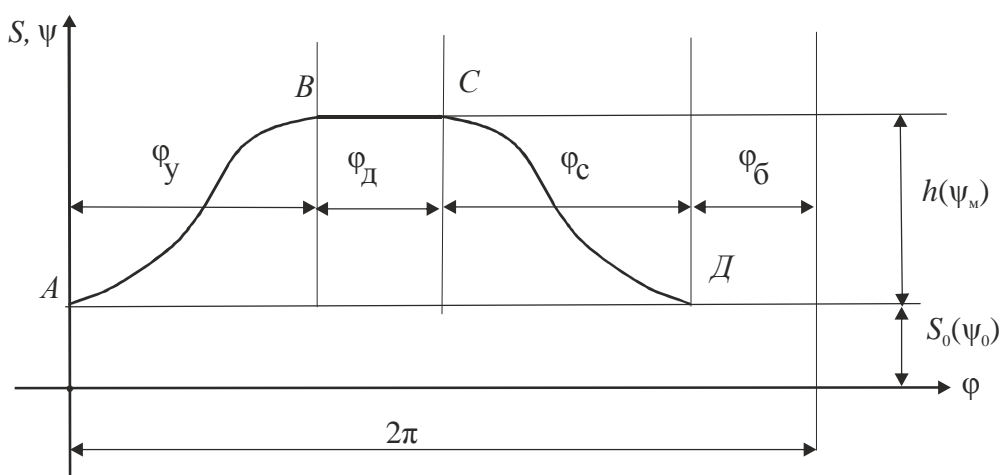


Рис. 8.7. Функция положения выходного звена КМ

График перемещения $S(\varphi)$ (рис. 8.8, а) должен пройти через точки A и B , которые лежат на концах заданного отрезка $(0, \varphi_y)$. Разность ординат этих точек – ход толкателя h (или ψ_M) – заданная величина. Начальное расстояние S_0 (или ψ_0) между осью кулачка и роликом с точки зрения кинематики может быть выбрано произвольно, потому что оно не влияет на скорость и ускорение толкателя и на выполняемый технологический процесс.

Различают три вида законов движения выходного звена: с “жесткими” ударами, с “мягкими” ударами, безударные. Законы движения, в которых ускорения выходного звена изменяются мгновенно на бесконечную величину, вызывают “жесткие” удары (рис. 8.8). Законы движения, в которых ускорения выходного звена изменяется без скачков, называются безударными (рис. 8.9). Законы движения, в которых ускорения выходного звена изменяются мгновенно на конечную величину, вызывают “мягкие” удары (рис. 8.10).

На графике скорости (рис. 8.8, б) зафиксированы точки A' и B' .

Поскольку скорость в начале и в конце удаления должна равняться нулю, не равенство нулю скорости в точках A' и B' , или разрывы на графике скорости толкателя в промежуточных точках называются "жесткими" ударами и недопустимы для условий надежной работы механизма.

Для выполнения требования $V = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_y$ график ускорения (рис. 8.9, в) должен быть выбран так, чтобы положительная и отрицательная площади под кривой $S''(\varphi)$ равнялись друг другу. Таким требованиям отвечают много функций, как непрерывных, так и разрывных.

Например, на рис. 8.11 показаны графики изменения ускорения толкателя, которыми пользуются на практике и которые удовлетворяют описанным требованиям.

Поскольку за независимую переменную принят угол поворота кулачкового вала (φ), то при исследовании кинематики кулачковых механизмов можно пользоваться понятиями об аналогах скорости ($S'(\varphi)$ или $\psi'(\varphi)$) и аналогах ускорения ($S''(\varphi)$ или $\psi''(\varphi)$).

Закон движения толкателя задается обычно в виде зависимости $S''(\varphi)$ (рис.8.11). Например, покажем, как получить уравнение движения при синусоидальном законе изменения аналога ускорения

$$S'' = a \cdot \sin k\varphi, \quad (8.1)$$

где k – угловая частота синусоиды, которая равна $\frac{2\pi}{\varphi_y} = k$; a – амплитуда синусоиды.

Проинтегрируем функцию (8.1) дважды. Первое интегрирование по аргументу φ дает

$$S' = -\frac{a}{k} \cos k\varphi + C_1,$$

где C_1 – постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий: $\varphi = 0, S' = 0$. Тогда $C_1 = \frac{a}{k}$ и функция будет иметь вид:

$$S' = -\frac{a}{k} \cos k\varphi + \frac{a}{k} = \frac{a}{k} (1 - \cos k\varphi). \quad (8.2)$$

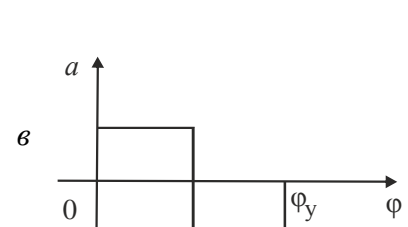
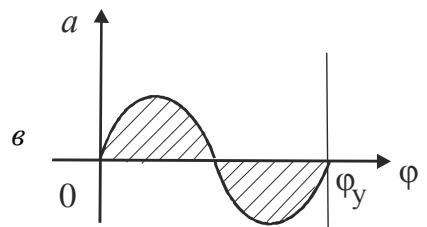
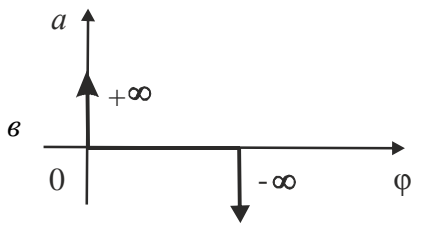
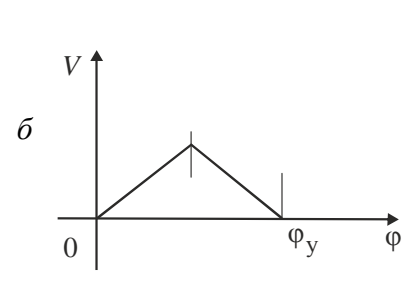
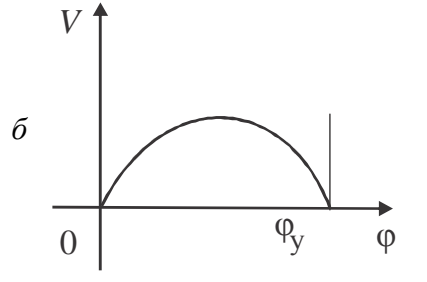
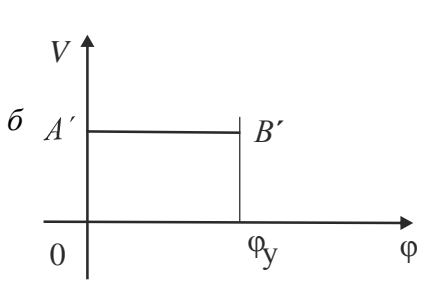
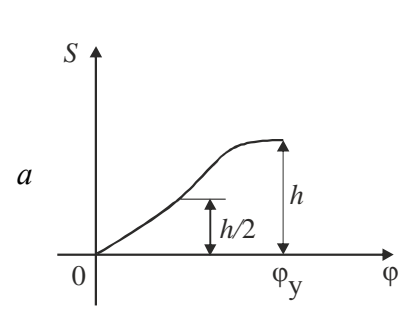
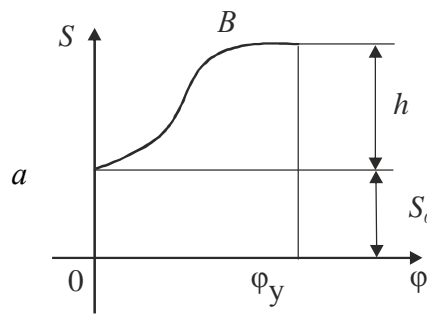
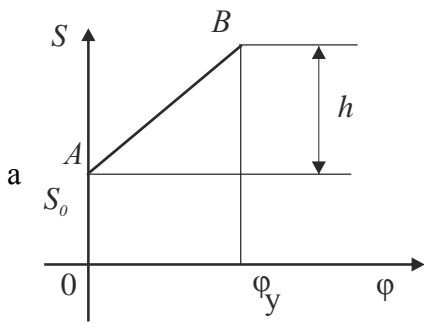


Рис. 8.8. Функция с “жесткими” ударами

Рис. 8.9. Безударная функция

Рис. 8.10. Функция с “мягкими” ударами

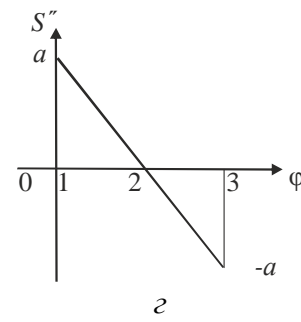
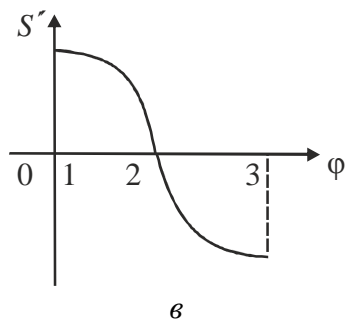
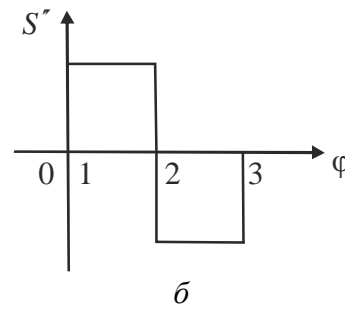
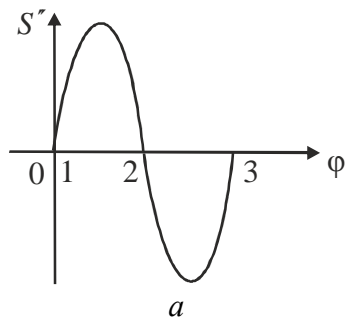


Рис. 8.11. Функции аналогов ускорения толкателя:

$$a - S'' = a \sin k\varphi ; \quad \bar{b} - S'' = \pm a ; \quad \bar{v} - S'' = a \cos k\varphi ; \quad \bar{z} - S'' = a \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_y} \right).$$

Второе интегрирование дает

$$\Delta S = -\frac{a}{k^2} \sin k\varphi + \frac{a}{k} \varphi + C_2,$$

где C_2 – постоянная интегрирования, определяется из начальных условий: $\varphi = 0, \Delta S = 0$. Тогда $C_2 = 0$, функция будет иметь вид:

$$\Delta S = -\frac{a}{k^2} \sin k\varphi + \frac{a}{k} \varphi. \quad (8.3)$$

Параметр a определяем из условия, что $\Delta S_{\max} = h$ при $\varphi = \varphi_y$:

$$h = -\frac{a}{k^2} \sin \frac{2\pi}{\varphi_y} \cdot \varphi_y + \frac{a}{k} \varphi_y, \text{ откуда } a = \varphi_y.$$

Подставляя значение параметра a в функции S'', S' и ΔS , получаем выражения:

$$S'' = \frac{hk}{\varphi_y} \sin k\varphi; \quad S' = \frac{h}{\varphi_y} (1 - \cos k\varphi);$$

$$\Delta S = \frac{hk}{\varphi_y} \left(\frac{\varphi}{k} - \frac{1}{k^2} \sin k\varphi \right).$$

Аналогично решается задача и для других законов, которые показаны на рис. 8.11.

В большинстве случаев для участка сближения используются функции, аналогичные тем, которые были выбраны для участка удаления. Однако такое условие необязательно, и для участка сближения может быть использован любой закон движения, удовлетворяющий требованиям, сформулированным выше для участка удаления.

8.6. Центровой (теоретический) и рабочий профили кулачковых механизмов

На кулачковом механизме с роликовым толкателем выделяют два профиля: теоретический (центровой) и действительный – рабочий (практический). Теоретический профиль удален от рабочего на величину радиуса ролика (рис. 8.12, а, б). Эти два профиля образуют эквидистантные (равноудаленные) кривые. На рис. 8.12, а теоретический профиль обозначен буквой Ц и изображен пунктиром. Это профиль, по которому движется центр ролика в относительном движении вокруг кулачка. Рабочий профиль обозначен буквой Р и изображен

жирной линией. Рабочим профилем называют реальную поверхность кулачка, которая образует с роликом высшую кинематическую пару.

В КМ с плоским толкателем (рис. 8.12, в) рассматривают только рабочий профиль.

Профиль кулачка всегда зависит от выбранного закона движения толкателя.

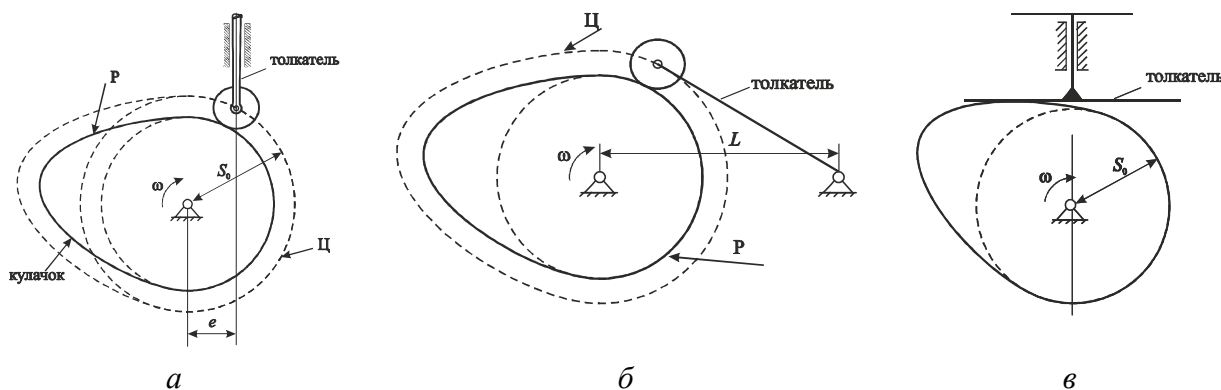


Рис. 8.12. Центрвой и рабочий профили в КМ

8.7. Угол давления

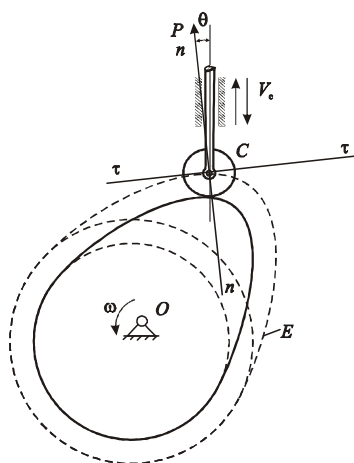


Рис. 8.13. Угол давления в кулачковом механизме с роликовым толкателем, движущимся поступательно

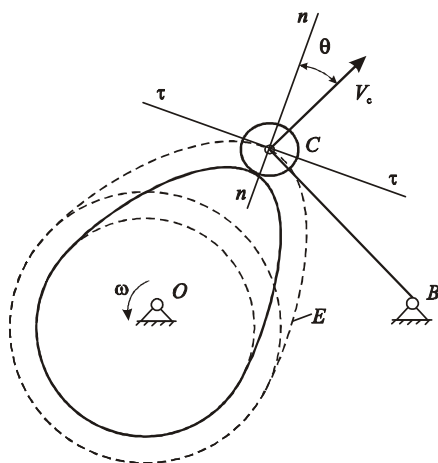


Рис. 8.14. Угол давления в кулачковом механизме с роликом на коромысловом толкателе

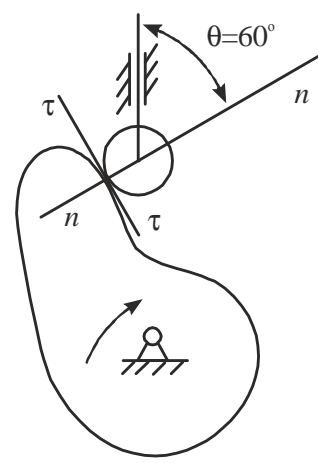


Рис. 8.15. Заклинивание толкателя при угле давления 60°

Углом давления θ называется минимальный угол, образованный направлением силы P , действующей со стороны кулачка на толкатель или ролик, и направлением перемещения толкателя или центра ролика (вектором скорости точки приложения силы). Для кулачкового механизма, если считать связи идеальными, реакция в высшей паре (сила P) направлена по нормали к профилю кулачка в точке контакта и проходит через центр ролика (рис. 8.13). Таким образом, углом давления будем называть угол между направлением

скорости центра ролика и нормалью к профилю кулачка в точке его касания с роликом. На рис. 8.13 – 8.15 угол давления обозначен буквой θ .

Этот угол очень важен при проектировании кулачков, так как он определяет крутизну профиля. Если угол давления слишком велик, механизм лишается плавности и может иметь заклинивание.

Предположим, что угол давления составляет 60° (рис. 8.15). Видно, что в этом случае вращение кулачка по часовой стрелке не будет сообщать толкателю подъема, а будет прижимать его к направляющей, вызывая изгиб. Поэтому ограничивают угол давления, исходя из достижения плавности в работе.

Как правило, для кулачковых механизмов с толкателем, движущимся поступательно, угол давления не должен превышать 30° , а для кулачковых механизмов с коромысловым толкателем не должен превышать 45° .

При плоских толкателях опасность заклинивания не так значительна, потому что угол давления здесь невелик или равен 0° (рис. 8.16). Таким образом, преимущество плоского толкателя перед роликовым заключается в том, что большая крутизна профиля кулачка не вызывает вредного эффекта – заклинивания.

Максимальный угол давления определяет размер кулачка, крутящий момент, нагрузки, ускорения, долговечность и другие важные факторы.

Выведем формулу для определения угла давления для кулачкового механизма с роликовым толкателем (РТ) (рис. 8.17).

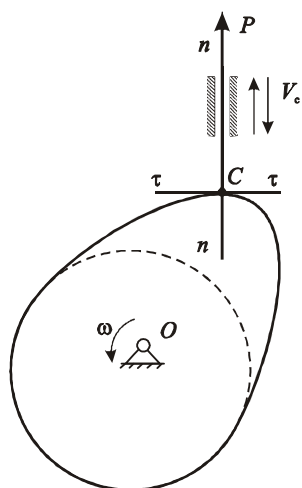


Рис. 8.16. Угол давления $\theta = 0^\circ$ в кулачковом механизме с плоским толкателем

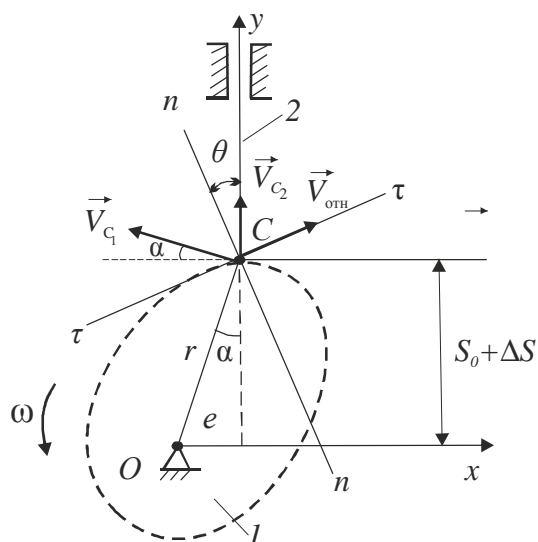


Рис. 8.17. Угол давления в кулачковом механизме типа РТ

Движение точки C_2 можно представить как сложное: вместе с точкой C_1 кулачка и движение относительно кулачка (по касательной $\tau-\tau$ к профилю кулачка в точке C). Тогда

$$\bar{V}_{C_2} = \bar{V}_{C_1} + \bar{V}_{\text{отн}}. \quad (8.4)$$

Спроектируем (8.4) на координатные оси и получим:

$$0 = -V_{C_1} \cdot \cos\alpha + V_{\text{отн}} \cos\theta.$$

$$V_{C_2} = V_{C_1} \sin\alpha + V_{\text{отн}} \sin\theta.$$

С учетом того, что $V_{C_1} = \omega r$, эту систему можно переписать так:

$$V_{\text{отн}} \cdot \cos\theta = \omega r \cdot \cos\alpha;$$

$$V_{\text{отн}} \cdot \sin\theta = V_{C_2} - \omega r \cdot \sin\alpha. \quad (8.5)$$

Разделив второе уравнение системы (8.5) на первое, имеем:

$$\text{tg}\theta = \frac{V_{C_2} - \omega r \cdot \sin\alpha}{\omega r \cdot \cos\alpha}. \quad (8.6)$$

Из рис. 8.17 видно, что $r \cdot \sin\alpha = e$, $r \cdot \cos\alpha = S_0 + \Delta S$. С учетом того, что $V_{C_2} = S'\omega$, из (8.6) находим выражение для тангенса угла давления кулачкового механизма типа РТ:

$$\text{tg}\theta = \frac{S' - e}{S_0 + \Delta S}. \quad (8.7)$$

8.8. Кривизна кулачка

Угол давления непосредственно связан с габаритами кулачка, а именно: предельная величина угла давления определяет размер кулачка. Однако есть и другое условие, которое может воспрепятствовать использованию выбранного размера кулачка. В этом случае центр роликового толкателя не сможет двигаться по расчетному теоретическому профилю и напряжения на профиле кулачка окажутся недопустимо большими.

На рис. 8.18 показан радиус кривизны в точке p профиля. Он непрерывно изменяется по мере перемещения к другим точкам профиля.

8.9. Подрезание профиля в кулачковых механизмах

Подрезание профиля в КМ типа РТ возникает тогда, когда кривизна профиля кулачка не соответствует условиям правильного перемещения

толкателя. Это происходит на выпуклой кривой в случае, когда радиус кривизны теоретического профиля ρ_k меньше, чем радиус ролика R_r , а на вогнутой кривой – когда $\rho_k < 0$ или радиус кривизны профиля кулачка $\rho_c < R_r$ (рис. 8.19).

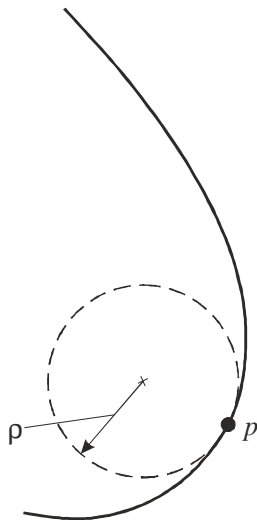


Рис. 8.18. Кривизна контура, ρ – радиус кривизны

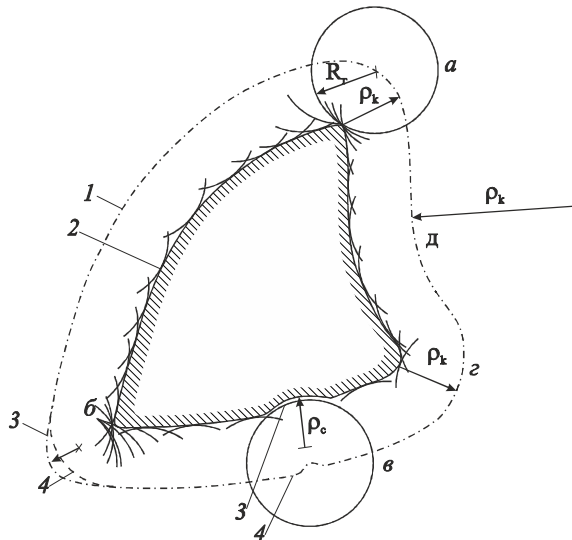


Рис. 8.19. Связь кривизны профиля с кривизной рабочей поверхности толкателя

Из рисунка видно, что в точке *a* соблюдается условие $\rho_k = R_r$. Получается заострение на профиле, что является недопустимым, так как приводит к большим напряжениям и износу. В точке *б* $\rho_k < R_r$. Возникает подрезание и мы не получаем требуемого закона перемещения центра ролика. В точке *в* вогнутой кривой $\rho_k < 0$. В результате образуется лунка. Это вызывает подрезание, так что траектория центра ролика не совпадает с заданной. В точках *г* и *д* – траектория правильная. На рис. 8.19: 1 – теоретический профиль, 2 – действительный профиль, 3 – требуемая траектория, 4 – фактически получаемая траектория.

Для избежания подрезания следует:

- 1) применять ролики меньших диаметров;
- 2) использовать кулачки больших габаритов (хотя это условие ограничивается допустимыми габаритами проектируемой машины).

Известно, что угол давления мало влияет на выбор размеров механизма при плоском толкателе. Здесь фактором, лимитирующим размеры кулачка

является подрезание. На рис. 8.20 схематически показан плоский толкатель в его последовательных положениях 1, 2, 3. Профиль кулачка, который строится по касательным к плоскому толкателю, не может коснуться толкателя в положении 2. Иными словами, положения толкателя 1 и 3 устраняют или подрезают положение 2. Построенный контур не может надлежащим образом приводить в движение толкатель. На рис. 8.21 показан контур кулачка больших габаритов без подрезания.

Таким образом, подрезание ограничивает минимальную величину габаритов кулачка.

Рассмотрим определение основных параметров кулачковых механизмов, влияющих на габариты механизма.

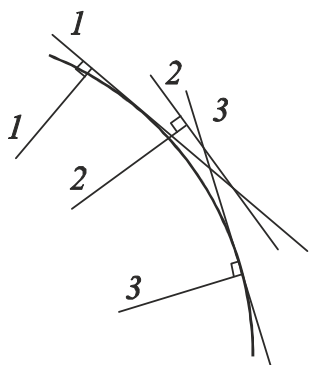


Рис. 8.20. Подрезание при плоском толкателе

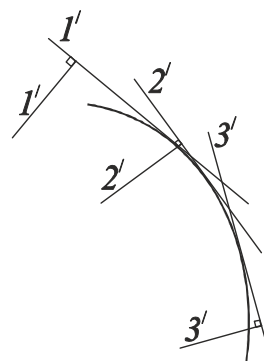


Рис. 8.21. Отсутствие подрезания при увеличенных размерах кулачка

8.10. Определение основных параметров кулачковых механизмов

Задачу синтеза КМ делят на два этапа. На первом этапе, который называется *динамическим синтезом*, определяют основные размеры: минимальный радиус кулачка $S_0(r_0)$, эксцентриситет e , межосевое расстояние L (рис. 8.12). На втором этапе, который называется *кинематическим синтезом*, необходимо по заданному закону движения построить профиль кулачка.

Рассмотрим первый этап синтеза.

К основным параметрам КМ относят: минимальный радиус кулачка S_0 или r_0 и эксцентриситет e (рис. 8.12, а), либо S_0 и L (рис. 8.12, б). Если центр вращения кулачка лежит на продолжении прямолинейной траектории точки толкателя, то такой КМ называют *центральным* (рис. 8.12, в); если центр вра-

щения толкателя отстоит на величину e от оси толкателя, то такой КМ называют механизмом с эксцентриситетом (рис. 8.12, a).

Равенство углов удаления и сближения дает $e = 0$.

Для КМ, снабженных роликом, параметры S_0 и e определяются из условия $\theta_{\max} \leq [\theta]$, где $[\theta]$ – допустимое значение угла давления. Для КМ с толкателем на практике принимают $[\theta] = 20^\circ - 30^\circ$; с коромыслом – $[\theta] = 35^\circ - 45^\circ$.

Рассмотрим алгоритм определения S_0 и e для КМ с роликовым толкателем графически.

Необходимо изобразить в масштабе $\mu_s = \mu_{s'}$ зависимость $S = S(S')$ (рис.8.22). Величины S и S' необходимо взять из просчитанной ранее таблицы зависимостей: $S'' = S''(\varphi)$, $S' = S'(\varphi)$, $S = S(\varphi)$. Если кулачок вращается против часовой стрелки, то S' откладывают влево на фазе удаления и вправо – на фазе сближения. Если кулачок вращается по часовой стрелке, то наоборот.

Далее необходимо провести две касательные к графику под углом $[\theta]$ к оси S . В случае, когда $\varphi_y = \varphi_c$, точка пересечения касательных будет лежать на оси S – центральный КМ. Получим параметр S_0 (рис. 8.22). В случае, когда $\varphi_y \neq \varphi_c$ – механизм с эксцентриситетом, точка пересечения касательных не будет лежать на оси S (рис. 8.23). Получим параметры S_0 , r_0 и e .

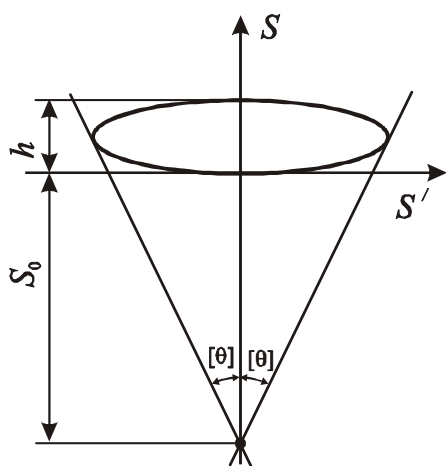


Рис. 8.22. Определение параметра S_0 для центрального КМ типа РТ ($\varphi_y = \varphi_c$)

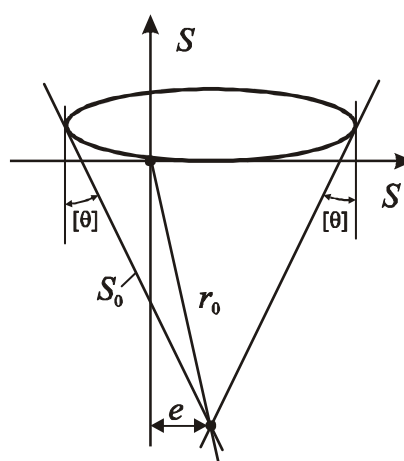


Рис. 8.23. Определение параметров S_0 , r_0 и e для КМ с эксцентриситетом типа РТ ($\varphi_y \neq \varphi_c$)

В КМ с плоским выходным звеном минимальный радиус кулачка выби-

рают так, чтобы профиль кулачка всегда был выпуклым.

8.11. Синтез кулачковых механизмов с плоским толкателем (ПТ)

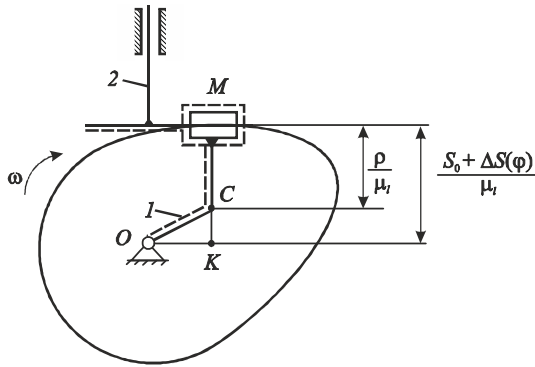


Рис. 8.24. К определению свободного параметра S_0 из условия выпуклости кулачка

В кулачковых механизмах типа ПТ определением параметра S_0 (рис. 8.24) обеспечивается в первую очередь выпуклость профиля кулачка. Выведем формулу для вычисления радиусов кривизны профиля кулачка.

Построим заменяющий механизм (фиктивный, изображен пунктиром). Для него запишем систему векторных уравнений для определения ускорений (8.8 – 8.9):

$$\vec{a}_{C\Phi} = \vec{a}_{C_2} + \vec{a}_{\Phi-2}^{\text{отн}}, \quad \vec{a}_{C_2} = \vec{a}_{C_0} + \vec{a}_{2-0}^{\text{отн}}. \quad (8.8)$$

$$\vec{a}_{C_2} = \vec{a}_{C\Phi} + \vec{a}_{2-\Phi}^{\text{отн}}, \quad (8.9)$$

$$\vec{a}_{C_2} = \vec{a}_{C_0} + \vec{a}_{2-0}^{\text{отн}}. \quad (8.10)$$

Строим план ускорений, совмещенный с кинематической схемой (рис. 8.24).

Полюс плана точка C , масштаб плана

$$\mu_a = \mu_l \omega_1^2 \left[\frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{мм}} \right]. \quad (8.11)$$

На плане ускорений отрезок CO соответствует $\vec{a}_{C\Phi}$ (ускорение точки C на фиктивном механизме), CK соответствует $\vec{a}_{2-\Phi}^{\text{отн}} = S'' \varphi^2 / \mu_a = -S'' / \mu_l$, OK соответствует $\vec{a}_{2-0}^{\text{отн}}$. Из рис. 8.24 видно, что $MK = MK = (S_0 + \Delta S(\varphi)) / \mu_l$. Тогда $MC = \rho / \mu_l = MK - CK = (S_0 + \Delta S(\varphi)) / \mu_l + S'' / \mu_l$; $\rho = \mu_l [(S_0 + \Delta S(\varphi)) / \mu_l + S'' / \mu_l]$,

$$\rho = S_0 + \Delta S(\varphi) + S'' \quad (8.12)$$

Выпуклость профиля обозначает, что $\rho > 0$, следовательно:

$$S_0 + \Delta S + S'' > 0. \quad (8.13)$$

откуда:

$$S_0 > -(S'' + \Delta S). \quad (8.14)$$

Параметр S_0 выбирается так, чтобы всегда выполнялось условие (8.14).

Профиль кулачка должен быть всегда выпуклым, в противном случае какая-то часть профиля не будет взаимодействовать с толкателем.

Если построить график $\Delta S = \Delta S(S'')$ (рис. 8.25) и провести касательную под углом 45° к отрицательной части кривой $\Delta S = \Delta S(S'')$, тогда точка пересечения касательной с осью ординат определит то минимальное значение S_0^* , при котором условие (8.13) превращается в равенство.

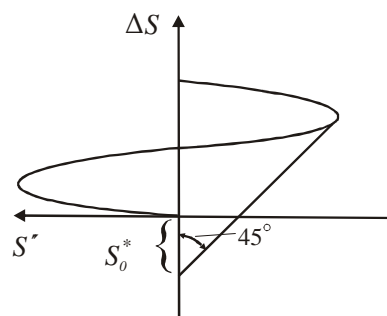


Рис. 8.25. Геометрическое определение параметра S_0 из условия выпуклости

Параметр S_0 нужно выбирать как можно

больше значения S_0^* . В этом случае контактные напряжения в высшей паре будут минимальными. Если S_0^* , то контактные напряжения в одной точке профиля кулачка теоретически должны быть равны бесконечности. Но при этом увеличиваются габариты кулачка. Это тот случай, когда конструктор должен принять обоснованное компромиссное решение: и контактные напряжения должны быть меньше допустимых, и габариты минимальные.

Другой способ определения параметра S_0 состоит в следующем.

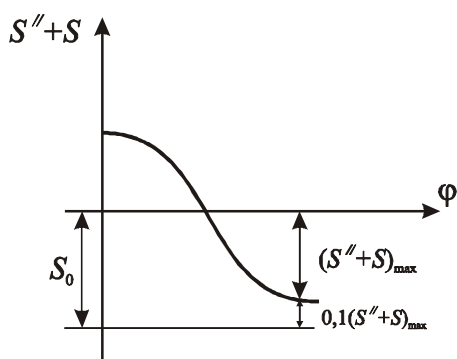


Рис. 8.26. Определение S_0 для КМ типа ПТ

Необходимо изобразить в масштабе $\mu_{S''} = \mu_S$ график зависимости $(S'' + S) = (S'' + S)(\varphi)$ (рис. 8.26). После построения этого графика к максимальной отрицательной ординате следует прибавить 10 % от этого максимума. Расстояние до оси φ определит величину S_0 .

Если построенный по результатам вычислений график не будет содержать

отрицательных значений величины $(S'' + S)$, то S_0 принимают произвольным образом, исходя из конструкторских соображений.

8.12. Построение профиля кулачка

Рассмотрим второй этап синтеза.

Для построения профиля КМ используют метод обращенного движения, который позволяет при проектировании рассматривать вместо абсолютного движения толкателя его движение относительно кулачка; сам кулачок становится как бы неподвижным звеном. Решение задачи с использованием этого метода значительно упрощается.

8.12.1 Рассмотрим построение центрального и рабочего профиля кулачкового механизма с роликовым толкателем.

а) Осевой механизм.

1. Описываем вокруг центра O окружность радиусом S_0 (рис. 8.27) и делим ее на n частей, которые отвечают углам φ_y на фазовом угле уд аления.

Нумерация точек деления окружности ведется в направлении, противоположном вращению кулачка. На фазовом угле сближения откладываем такое же количество точек. Шаг должен быть не более 10° ($\Delta \leq 10^\circ$).

2. Начало отсчета углов начинаем с произвольной точки окружности.

3. Проводим через центр O и точки деления окружности прямые линии.

4. Откладываем на прямых отрезки $\overline{OB_0} = S_0$; $\overline{1B_1} = S_1$; $\overline{2B_2} = S_2$ и так далее, которые берутся из диа-

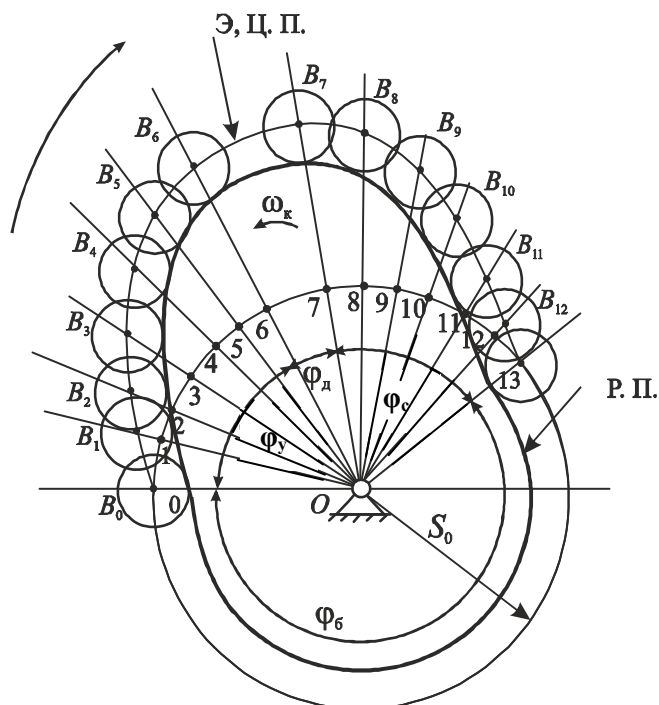


Рис. 8.27. Построение центрального и рабочего профиля кулачкового механизма с роликовым толкателем без эксцентриситета

граммы $[\varphi; S]$. Таким образом, находим точки $B_0, B_1, B_2 \dots B_6$ и так далее. Точки $B_7, B_8, B_9 \dots B_{13}$ на фазовом угле сближения откладываем симметрично точкам $B_6 \dots B_0$.

5. Объединяем все точки B плавной кривой – получаем эквидистантную кривую \mathcal{E} – центровой профиль (Ц. П.). На фазовых углах выстоя ($\varphi_d; \varphi_b$) профиль описывается окружностями радиусов OB_6 и OB_0 соответственно.

6. Выбираем радиус ролика r (описано в 8.11.3).

7. Строим на расстоянии r от кривой \mathcal{E} новую эквидистантную кривую, которая является рабочим профилем кулачкового механизма (Р. П.).

б) Механизм с эксцентриситетом.

1. Вокруг центра O описываем две окружности: радиусом e и радиусом r_0 (рис. 8.28).

2. Окружность радиуса r_0 делим на n частей, которые соответствуют углам φ на фазовом угле удаления. Нумерация точек деления окружности ведется в направлении, противоположном вращению кулачка.

3. Через точки деления проводим линии, касательные к окружности радиуса e .

4. На этих линиях от точек 0, 1, 2, 3 откладываем отрезки $\overline{OB_0} = S_0$; $\overline{1B_1} = S_1$; $\overline{2B_2} = S_2$ и так далее, где S_i откладываем от окружности радиуса r_0 и берем из диаграммы $[\varphi; S]$.

5. Получаем точки $B_0, B_1, B_2 \dots$ и находим центровой и рабочий профили, как находили ранее.

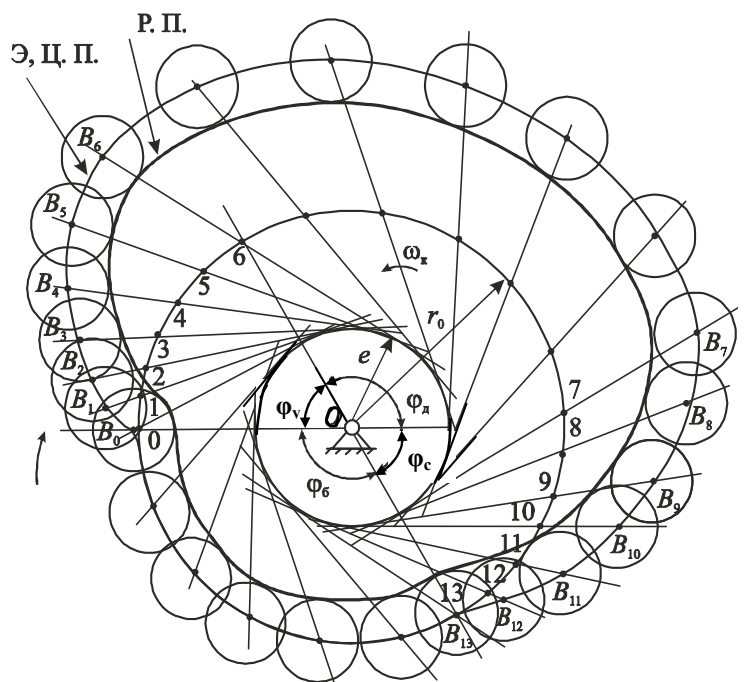


Рис. 8.28. Построение центровой и рабочего профилей кулачкового механизма с роликовым толкателем с эксцентриситетом

8.12.2 Рассмотрим построение рабочего профиля кулачкового механизма с плоским толкателем.

1. Построение профиля кулачка с ПТ начинается также, как и с РТ.

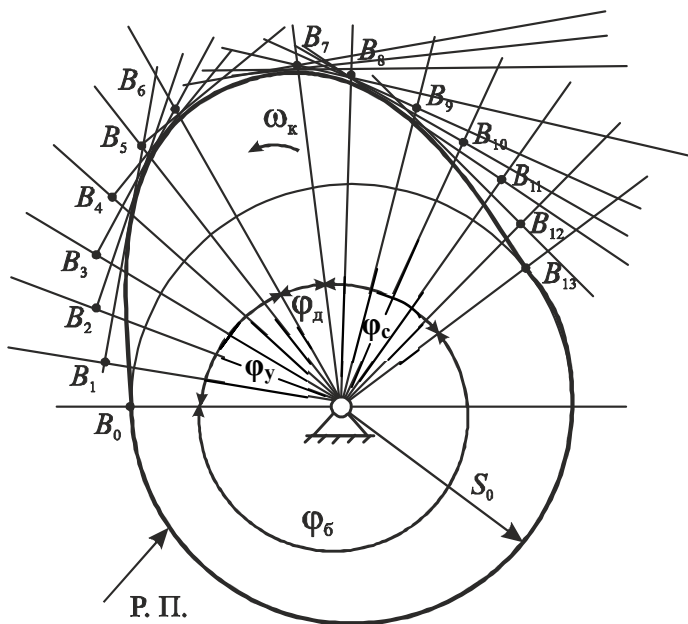


Рис. 8.29. Построение рабочего профиля кулачкового механизма с плоским толкателем

2. Затем через каждую точку B под прямыми углами к линиям, которые проходят через центр O , проводим новые линии. Профиль кулачка должен быть касательным к последним линиям (рис. 8.29).

8.11.3 Выбор радиуса ролика кулачкового механизма типа РТ.

Радиус ролика определяется после построения эквидистантной кривой Э.

Радиус ролика r должен быть меньше минимального радиуса кривизны эквидистантной кривой в ее выпуклой части. В противном случае профиль кулачка будет пересекаться. Кроме того, желательно, чтобы радиус ролика был меньше, чем наименьший радиус кулачка.

Таким образом, радиус ролика будем определять как наименьший, определенный из двух неравенств:

$$r \leq 0,4r_{\min \text{Э}}, \quad r \leq 0,8\rho_{\min \text{Э}},$$

где $r_{\min \text{Э}}$ – наименьший радиус окружности, описанной вокруг центра O , которая прикасается внутри к эквидистантной кривой (S_0 или r_0); $\rho_{\min \text{Э}}$ – минимальный радиус кривизны эквидистантного профиля.

Если для эквидистантной кривой Э составлено уравнение, то величину $\rho_{\min \text{Э}}$ можно найти ана-

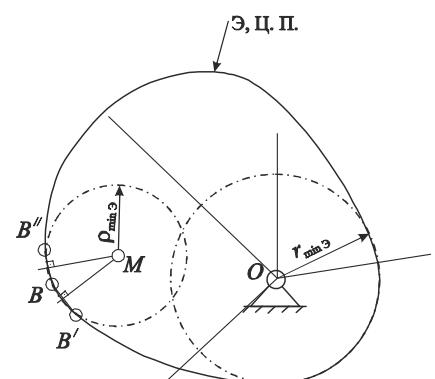


Рис. 8.30. Определение минимального радиуса кривизны центрального профиля

литически. Если нет, то поступим таким образом: выберем на выпуклой части кривой Э (на фазе удаления) такую точку B , в которой кривизна кривой кажется на «глаз» наибольшей. Потом выберем вблизи этой точки еще две точки B' и B'' и найдем центр окружности M , которая будет проходить через три точки: B, B', B'' (рис. 8.30). Радиус этой окружности можно принять за $\rho_{\min\text{Э}}$.

8.13. Определение жесткости замыкающей пружины

При силовом замыкании высшей кинематической пары кулачкового механизма непрерывность контакта толкателя с кулачком обеспечивается с помощью силы упругости предварительно деформированной пружины.

Рабочий ход толкателя на фазе удаления выполняется благодаря действию кулачка на толкатель, обратное движение толкателя осуществляется с помощью силы упругости пружины. Эта фаза движения толкателя почти всегда отвечает фазе холостого хода. С конструктивной и технологической точки зрения (имеется в виду изготовление кулачка) система силового замыкания более простая. Но, в связи с введением в кинематическое звено кулачкового механизма деформированной пружины, динамика значительно усложняется (надежность уменьшается), растут потери на трение, нагрузка элементов кинематических пар и их износ.

Необходимо решить задачу, как подобрать пружину с характеристикой, которая обеспечит непрерывность контакта толкателя с кулачком.

Сила упругости винтовой пружины линейно зависит от деформации:

$$Q_{\text{пр}} = Q_0 + c \cdot \Delta S,$$

где $Q_{\text{пр}}$ – сила упругости пружины, которая соответствует перемещению толкателя на величину ΔS ; Q_0 – начальное значение силы упругости; c – коэффициент жесткости пружины.

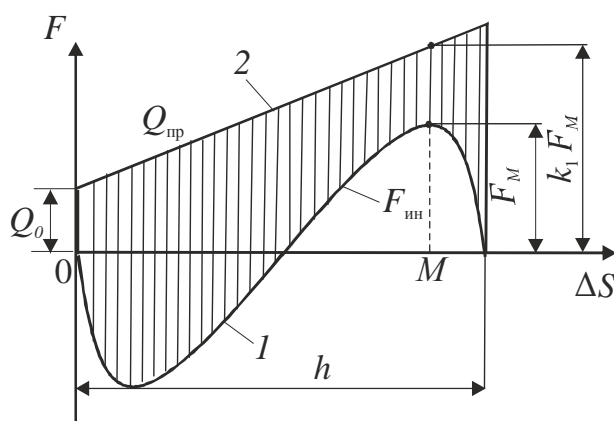


Рис. 8.31. К определению параметров замыкающей пружины

На рис.8.31 показана характеристика винтовой пружины; $Q_{пр} = k_1 \cdot F_M$ – максимальное значение силы упругости пружины при полном ходе толкателя (h), где F_M – максимальное значение силы инерции толкателя; $k_1 = 1,2...1,3$ – коэффициент запаса.

Рассмотрим случай, когда технологическая сила отсутствует. Сила инерции толкателя равна

$$F_{ин} = -m_T S'' \omega_K^2,$$

где m_T – масса толкателя, кг; S'' – аналог ускорения толкателя, м; ω_K – угловая скорость кулачка, c^{-1} .

Жесткость пружины определяем по формуле:

$$c = \frac{F_M}{\Delta S_M} = \frac{m_T \cdot S'' \cdot \omega_K^2}{\Delta S_M},$$

где ΔS_M – значение перемещения толкателя в точке M .

Тема 9. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Механизмы с высшими парами

Эти механизмы позволяют воспроизводить сложные законы движений малым числом звеньев, минимум тремя: ведущее, ведомое и стойка.

Поверхности элементов высшей кинематической пары – это сопряженные поверхности, т.е. такие, которые имеют общую точку контакта. В этой точке поверхности контакта имеют общую нормаль $n-n$ и общую касательную $\tau-\tau$. В этом разделе рассмотрим механизмы с высшими парами, называемые зубчатыми передачами.

9.1. Основная теорема зацепления (теорема Виллиса)

Эта теорема устанавливает связь между геометрическими параметрами сопряженных поверхностей и законом относительного движения элементов пары.

Рассмотрим трехзвенный механизм, звенья которого совершают вращательные движения, рис. 9.1.

Звено 1 и звено 2 касаются в точке M , поверхности контакта – сопряженные поверхности. Звено 1, вращающееся вокруг точки O_1 с угловой скоростью ω_1 , передает вращение звену 2 со скоростью ω_2 , O_1O_2 – межцентровое расстояние. Проведем через т. M общую касательную $\tau-\tau$ и общую нормаль $n-n$ (наличие общей нормали свидетельствует, что сопряженные поверхности

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}. \quad (9.4)$$

Теорема: общая нормаль, проведенная в точке контакта высшей пары, делит межцентровое расстояние на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Из выражения (9.4) следует, что $\omega_1 \cdot O_1P = \omega_2 \cdot O_2P$. Но $\omega_1 \cdot O_1P = V_{P_1}$ – линейная скорость точки P_1 , $\omega_2 \cdot O_2P = V_{P_2}$ – линейная скорость точки P_2 , поэтому $V_{P_1} - V_{P_2} = 0$, т.е. в т. P относительная скорость точек звеньев 1 и 2 равна нулю, следовательно, точка P – это мгновенный центр скоростей. В теории зубчатого зацепления такой мгновенный центр скоростей называется полюсом зацепления.

Отношение $\frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{12}$ называется *передаточным отношением*.

Из основной теоремы зацепления следует вывод:

Чтобы передаточное отношение было постоянным, общая нормаль $n-n$ в точке контакта высшей пары должна занимать неизменное положение, т.е. она всегда проходит через одну и ту же точку P , расположенную на межцентральной оси.

9.2. Классификация зубчатых передач

Звено, состоящее из ряда идентичных, повторяющихся элементов, называется зубчатым колесом. Зуб – это специальный выступ на звене. Зуб одного колеса входит во впадину другого. Зубья обоих колес образуют высшую пару, в которой контакт происходит по линии.

Виды зубчатых передач:

I. В зависимости от числа звеньев

- 1) простые (трехзвенные передачи);
- 2) сложные (передачи, состоящие из трех и более колес).

II. В зависимости от передаточного отношения зубчатые передачи делят на:

- 1) зубчатые передачи с постоянным передаточным отношением ($i = \text{const}$). Такие передачи состоят из круглых колес;
- 2) зубчатые передачи с переменным передаточным отношением ($i \neq \text{const}$). Эти передачи состоят из эллиптических колес.

В дальнейшем будем рассматривать только круглые колеса, обеспечивающие постоянное передаточное отношение.

III. По характеру расположения осей валов, между которыми осуществля-

ется передача движения, различают:

- 1) оси колес параллельны – цилиндрические зубчатые передачи (рис. 9.2);
- 2) оси колес пересекаются – конические зубчатые передачи (рис. 9.3);
- 3) оси колес скрещиваются – гиперboloидные зубчатые передачи. К гиперboloидным относят: винтовые колеса, гипоидные передачи, червячные передачи (рис. 9.4).

IV. По характеру зацепления зубьев цилиндрические зубчатые передачи бывают:

- 1) внешнего зацепления (рис. 9.5, а, з);
- 2) внутреннего зацепления (рис. 9.5, б);
- 3) реечного зацепления (рис. 9.5, в). Реечное зацепление можно рассматривать как случай, когда одно из цилиндрических колес имеет бесконечно большой радиус – это рейка.

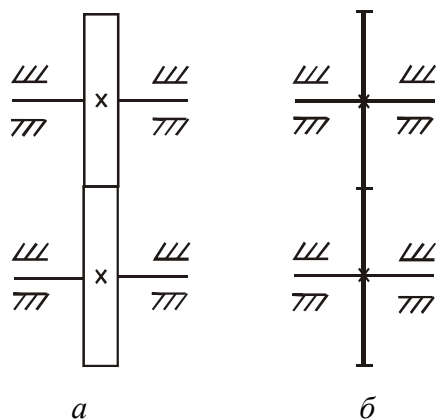


Рис. 9.2. Цилиндрическая передача: а – колеса в зацеплении; б – колеса на кинематической схеме

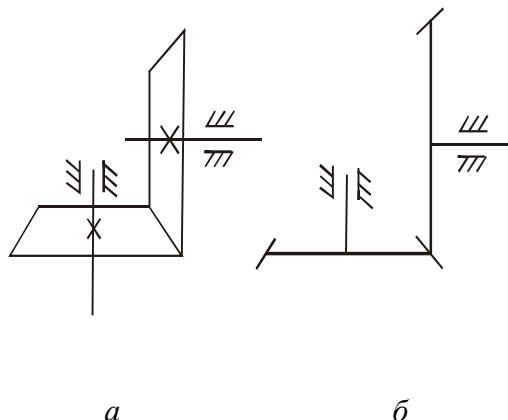


Рис.9.3. Коническая передача: а – колеса в зацеплении; б – колеса на кинематической схеме.

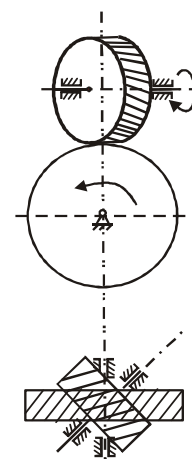


Рис. 9.4. Гиперboloидная зубчатая передача

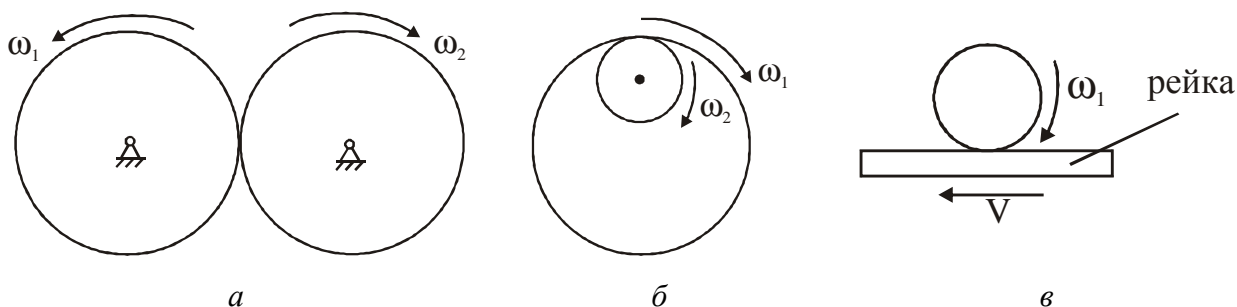


Рис. 9.5. Цилиндрические передачи:

а – внешнее зацепление $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} < 0$; б – внутреннее зацепление: $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$;

в – реечное зацепление: $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \infty$ или $i_{21} = 0$

V. В зависимости от характера расположения линии зуба на колесе зубчатые передачи бывают:

- 1) с прямозубыми колесами (рис. 9.6, а);
- 2) с косозубыми колесами (рис. 9.6, б);
- 3) с шевронными колесами (рис. 9.6, в).

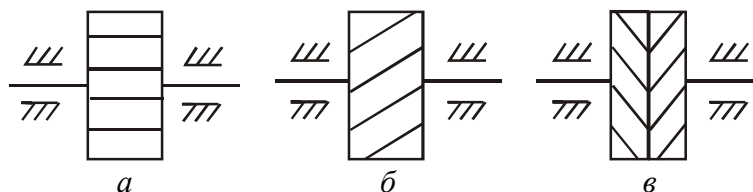


Рис. 9.6. а – прямозубое зубчатое колесо; б – косозубое зубчатое колесо; в – шевронное зубчатое колесо

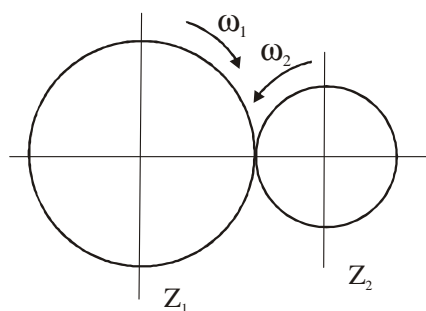


Рис. 9.7. К определению передаточного отношения и передаточного числа

ГОСТ различает передаточное отношение и передаточное число, рис. 9.7.

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ – передаточное отношение, оно имеет знак.}$$

$$|i_{12}| = u_{12} \text{ – передаточное число, всегда положительное.}$$

$$i_{12} = -\frac{z_2}{z_1}; u_{12} = \frac{z_2}{z_1}.$$

9.3. Элементы зуба

Рассмотрим зуб, представленный на рис. 9.8.

Линия зуба – это пересечение боковой поверхности зуба и делительной цилиндрической поверхности.

Если линия зуба параллельна оси колеса, то колесо прямозубое (рис.9.6, а), если нет – то косозубое (рис.9.6, б).

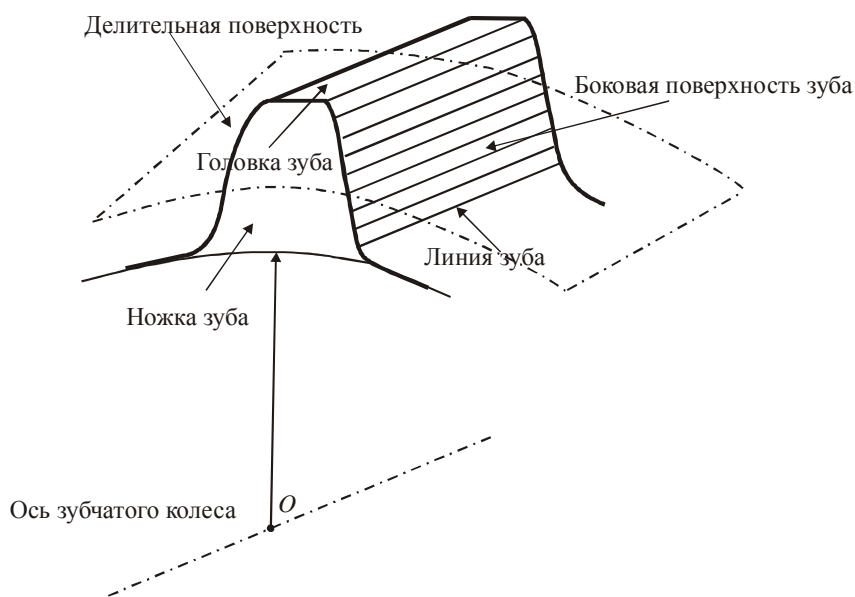


Рис. 9.8. Элементы зуба

9.4. Начальные окружности

Рассмотрим передачу вращательного движения между двумя звеньями 1 и 2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Величина $O_1O_2 = a_w$ – межосевое (или межцентровое) расстояние; т. P – мгновенный центр скоростей; в этой точке $V_1 = V_2$ (рис. 9.9).

$$\omega_1 O_1 P = \omega_2 O_2 P,$$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 P}{O_1 P} = \text{const}, \text{ т.е. } O_1 P \text{ и } O_2 P = \text{const}. \text{ Обозначим } O_1 P = r_{w_1}, O_2 P = r_{w_2}.$$

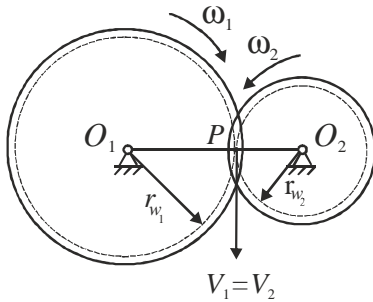


Рис. 9.9. Начальные окружности

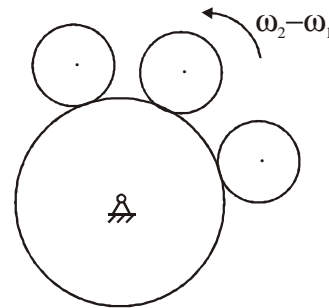


Рис. 9.10. Инверсия шестерни в относительном движении начальных окружностей

Воображаемые окружности, жестко связанные с зубчатыми колесами, которые касаются друг друга в полюсе зацепления, называются начальными (r_{w_i}).

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} - \text{передаточное отношение обратно пропорционально радиусам начальных окружностей.}$$

Если методом инверсии (рис. 9.10) остановить одно из звеньев (например, сообщить системе угловую скорость $-\omega_1$), то второе колесо будет вместе с точкой O_2 вращаться вокруг первого, т.е. одна начальная окружность катится в относительном движении по другой без скольжения.

9.5. Элементы и параметры зубчатых колес

Для косозубых колес различают параметры в торцевом сечении, перпендикулярном оси вращения колеса, которые снабжают индексом t , например, радиус начальной окружности косозубого колеса в торцевом сечении – r_{w_t} , а также в нормальном сечении, перпендикулярном линии зуба – снабжены индексом n , например, r_{w_n} (рис. 9.11).

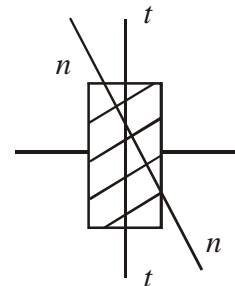


Рис. 9.11. Торцевое $t-t$ и нормальное $n-n$ сечения зубьев

Для прямозубых колес эти сечения совпадают, и параметры записываются без индексов – n и t .

Рассмотрим прямозубое колесо (рис.9.12).

h – высота зуба;

h_a – высота головки зуба;

h_f – высота ножки зуба;

r_a – радиус окружности вершин;

r_f – радиус окружности впадин;

r_w – радиус начальной окружности;

r – радиус делительной окружности.

Высота зуба $h = r_a - r_f$.

Впадина – промежуток между двумя соседними зубьями:

e_w – ширина впадины по начальной окружности;

S_w – толщина зуба по начальной окружности;

$S_w + e_w = p_w = \frac{2\pi r_w}{z}$ – шаг колеса по начальной окружности (шаг зацепления);

z – число зубьев колеса; $\tau = \frac{360^\circ}{z}$ – угловой шаг.

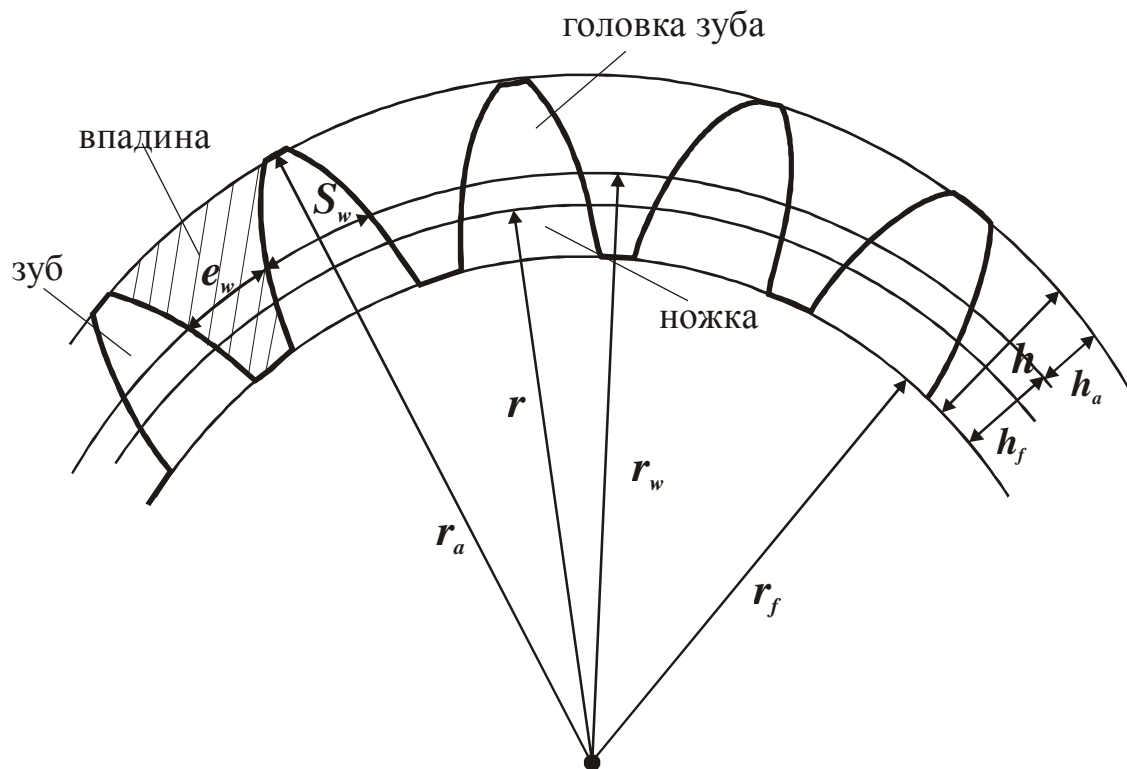


Рис. 9.12. Элементы и параметры прямозубого колеса

Начальная окружность разделяет зуб на головку и ножку. По начальной окружности: $S_{w_1} = e_{w_2}$; $S_{w_2} = e_{w_1}$; $p_{w_1} = p_{w_2}$ – условие плотного контакта, где индексы 1 и 2 обозначают колеса 1 и 2, входящие в зацепление.

9.5.1. Делительная окружность

Если на зубчатом колесе провести произвольную окружность радиуса r_y и ввести размер $p_y = \frac{2\pi r_y}{z}$ – шаг по окружности радиуса r_y , то мы получим шаг иррациональным числом из-за присутствия числа π ; поэтому проводить стандартизацию по шагу нецелесообразно.

Для удобства введем понятие модуля $m_y = \frac{p_y}{\pi}$ – это π -я часть шага.

Для модуля установлены стандартные значения, а окружность, на которой модуль имеет стандартное значение, называется делительной (d – диаметр делительной окружности; $r = \frac{d}{2}$ – радиус). Все величины, относящиеся к делительной окружности, обозначают без индексов:

$$m = \frac{p}{\pi} \text{ – модуль;}$$

s – толщина зуба по делительной окружности и т.д.

Модуль стандартизован:

$m = 0,3; 0,4 \dots 1; \dots 2,5; \dots 5; \dots 22, \dots 30, \dots 50$ и т.д. через 5 мм. Модуль определяют из прочностного расчета и округляют до ближайшего большего из стандартного ряда.

Стандартизация модуля вызвана необходимостью ограничить количество зуборезного инструмента. Инструментом одного модуля можно нарезать колеса с любым числом зубьев. Модуль – основной параметр. Через него выражают все параметры колес и зубчатой передачи.

Итак, радиус делительной окружности: $r = \frac{mz}{2}$; диаметр делительной окружности: $d = mz$; $p = \pi m$ – шаг по делительной окружности.

$$\text{Высота зуба } h = h_a + h_f = h_a^* m + (h_a^* + c^*) m.$$

Здесь h_a^* – коэффициент высоты головки зуба. По ГОСТ $h_a^* = 1$;

c^* – коэффициент радиального зазора. По ГОСТ $c^* = 0,25$.

Тогда $h = m + 1,25m = 2,25m$.

Межосевое расстояние

$$O_1O_2 = a_w = r_{f_1} + r_{a_2} + c = r_{f_2} + r_{a_1} + c,$$

$c = c^* m$ – радиальный зазор.

Покажем колеса в зацеплении

(рис. 9.13).

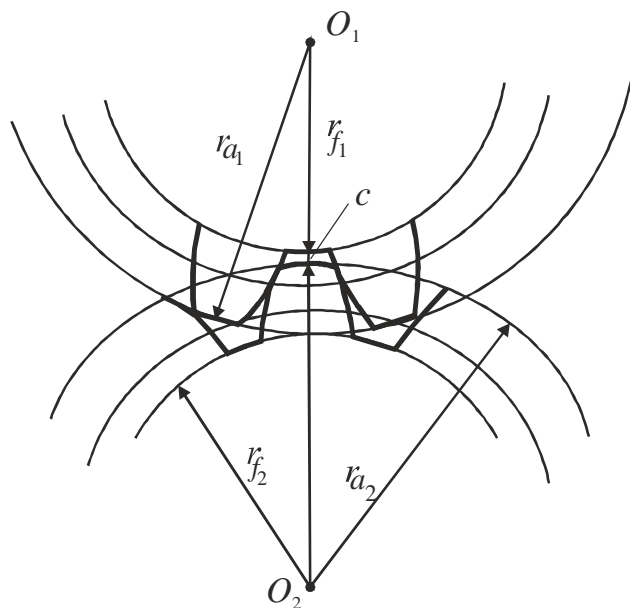


Рис. 9.13. Колеса в зацеплении

9.5.2. Параметры нулевых зубчатых колес

Нулевыми колесами называют такие, у которых $r = r_w$, т.е начальными являются делительные окружности.

Представим параметры в табл. 9.1.

Таблица 9.1. Параметры нулевых зубчатых колес

Наименование	Обозначение	Формула для расчета
1. Число зубьев	z	задается или определяется через передаточное отношение
2. Модуль	m	определяется из прочностного расчета
3. Радиус делительной окружности	$r(= r_w)$	$\frac{1}{2} m \cdot z$
4. Шаг по делительной окружности	p	πm
5. Толщина зуба по делительной окружности (ширина впадины)	$S(e)$	$\frac{\pi m}{2}$
6. Высота головки зуба	h_a	$h_a = h_a^* m = m$
7. Высота ножки зуба	h_f	$h_f = (h_a^* + c^*) m = 1,25 m$
8. Радиус окружности впадин	r_f	$r_f = r - h_f = \frac{1}{2} m z - 1,25 m$
9. Радиус окружности вершин	r_a	$r_a = r + h_a = \frac{1}{2} m z + m$

9.6. Эвольвентные зубчатые колеса

Для нормальной работы высшей пары контактирующие поверхности должны быть сопряженными, т.е. иметь линию или точку контакта. Это условие будет выполняться, если общая нормаль в точке контакта будет перпендикулярна вектору скорости относительного движения элементов пары.

Кроме того, для обеспечения постоянства передаточного отношения необходимо, чтобы полюс зацепления P занимал неизменное положение на линии центров колес.

Этим условиям удовлетворяют многие кривые, которыми можно очерчивать профили зубьев, например, циклоиды, окружности. Но самыми распространенными профилями являются эвольвентные. Они имеют ряд преимуществ перед другими профилями, а именно: допускают в определенных пределах изменение межосевого расстояния, сохраняя постоянное передаточное отношение, чего другие не допускают. Изготовление эвольвентных колес и инструмента для их нарезания является наиболее простым.

9.6.1. Эвольвента и ее свойства

Рассмотрим некоторую окружность с касательной в точке A_0 . Покатим эту касательную по неподвижной окружности без скольжения. Т. A_0 будет занимать последовательные положения $A_0, A_1, A_2 \dots$. Т. A описала кривую, которая и называется эвольвентой. Прямая называется производящей, а окружность – эволютой эвольвенты.

Для зубчатых колес окружность, по которой катится производящая прямая, описывающая эвольвенту зуба, называется основной окружностью.

Свойства эвольвенты:

1. Прямая AM равна дуге A_0M (рис. 9.14), поскольку прямую катим без скольжения.

2. Центр кривизны эвольвенты в некоторой т. A лежит в точке касания M . Радиус кривизны в этой точке $\rho = AM$ (AM – нормаль к эвольвенте в т. A).

Кривая, которая есть геометрическое место точек центров кривизны некоторой кривой, называется эволютой этой кривой. Эволютой эвольвенты явля-

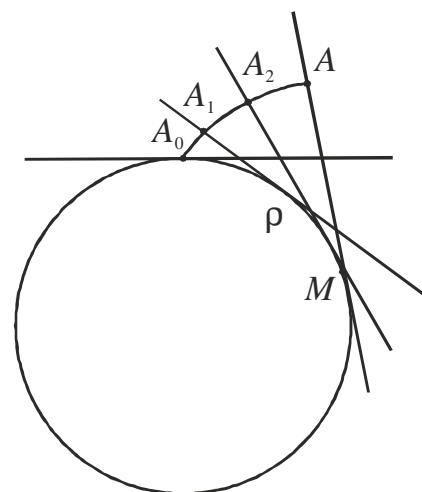


Рис. 9.14. Образование правой ветви эвольвенты

ется основная окружность. Эвольвента зуба начинается от основной окружности, радиус которой r_b .

3. От радиуса основной окружности зависит вид эвольвенты – чем больше r_b , тем больше эвольвента «распрямляется».

4. Эвольвента имеет левую и правую ветвь, которые получаются, если катить прямую по окружности в разные стороны. На рис. 9.14 прямую катим вправо – получается правая ветвь. Покатим влево – левая (рис.9.15).

5. Эвольвента располагается вне основной окружности.

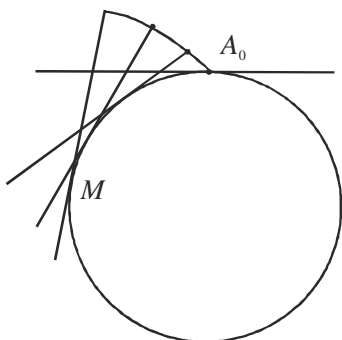


Рис. 9.15. Левая ветвь эвольвенты

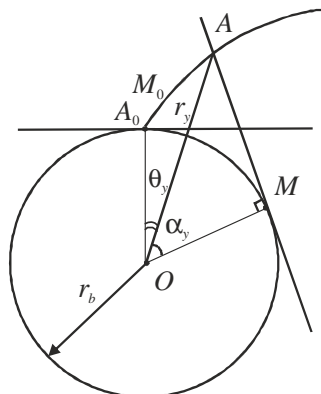


Рис. 9.16. К выводу уравнения эвольвенты

9.6.2. Уравнение эвольвенты в полярных координатах

Рассмотрим эвольвенту, представленную на рис. 9.16, и примем такие обозначения:

r_b – основная окружность;

θ_y – эвольвентный угол профиля;

r_y – радиус-вектор произвольной точки A эвольвенты;

θ_y и r_y – полярные координаты т. A .

Угол α_y называется углом профиля.

Найдем θ_y и r_y .

$$AM = \cup A_0M, AM = r_b \operatorname{tg} \alpha_y (\Delta AOM);$$

$$\cup A_0M = r_b (\theta_y + \alpha_y);$$

$$r_b \operatorname{tg} \alpha_y = r_b (\theta_y + \alpha_y);$$

$$\theta_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y.$$

Выражение $\operatorname{tg} \alpha - \alpha$ называется инволютой угла α (это функция $\operatorname{inv} \alpha$).

Для этой функции составлены таблицы.

Из $\Delta AOM : r_y = \frac{r_b}{\cos \alpha_y}$. Итак:

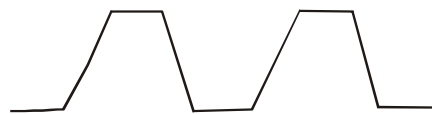
$$\begin{cases} \theta_y = \text{inv} \alpha_y & \text{— уравнение эвольвенты в полярной системе координат.} \\ r_y = r_b / \cos \alpha_y \end{cases}$$

Радиус кривизны эвольвенты $\rho = AM = r_b \text{tg} \alpha_y$, r_b — радиус основной окружности.

Радиусы делительной и начальной окружностей связаны с основной так:

$$r = \frac{r_b}{\cos \alpha}; \alpha \text{ — делительный угол профиля;}$$

$$r_w = \frac{r_b}{\cos \alpha_w}; \alpha_w \text{ — начальный угол профиля.}$$



Из формулы $\rho = r_b \text{tg} \alpha_y$ следует, что если $r_b = \infty$, т.е. основная окружность — прямая линия (зубчатая рейка), то эвольвента тоже превратится в прямую ($\rho = \infty$) (рис. 9.17).

9.7. Линия зацепления эвольвентных зубчатых колес

Итак, если профили зубьев колес очерчены эвольвентой, то такие колеса

называются эвольвентными зубчатыми колесами. Рассмотрим колеса в зацеплении, рис. 9.18.

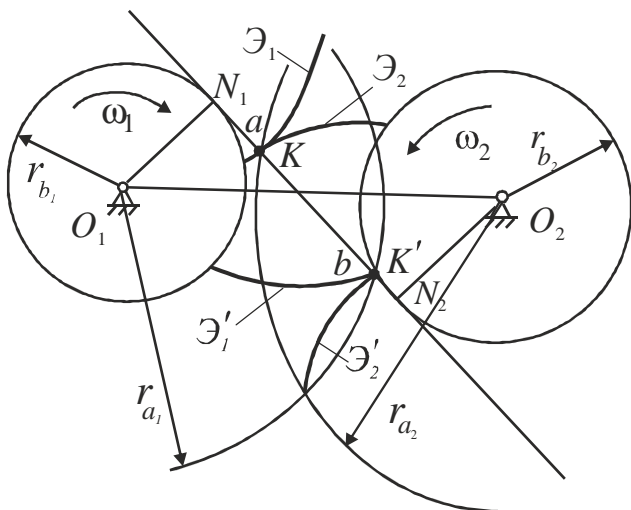


Рис. 9.18. Линия зацепления эвольвентных зубчатых колес

K — точка контакта, K' — положение точки контакта через промежуток времени, когда профили повернулись на некоторый угол. N_1N_2 — общая касательная к основным окружностям. N_1K — нормаль к эвольвенте первого колеса \mathcal{E}_1 , N_2K — нормаль к \mathcal{E}_2 . Таким образом, N_1N_2 —

общая нормаль к сопряженным поверхностям зубьев в точке контакта. Аналогично для точки K' . $K, K' \dots$ — точки зацепления.

Геометрическое место точек контакта в зацеплении на неподвижной

плоскости (стойке) называется линией зацепления.

У эвольвентных зубчатых колес линией зацепления будет общая нормаль N_1N_2 , которая является касательной к основным окружностям двух зубчатых колес.

Т.к. профили зубчатых колес ограничены окружностями вершин, то линия зацепления используется частично: часть линии зацепления (см. рис.9.18), заключенная между точками пересечения ее с окружностями выступов (вершин), называется *активной* или *рабочей* частью линии зацепления (ab).

9.8. Методы нарезания зубчатых колес

На практике в основном приняты два метода изготовления профилей:

- метод копирования;
- метод обкатки.

9.8.1. Метод копирования

Впадину между двумя соседними зубьями фрезеруют дисковой или пальцевой фрезами. Фреза вращается, заготовка движется поступательно вдоль оси.

Делительное движение заготовки $\frac{2\pi}{z}$, т.е. проворот на один зуб. Зубья фрезы имеют очертания впадины нарезаемого зубчатого колеса. Нарезать можно дисковой (рис. 9.19) и пальцевой (рис. 9.20) фрезами.

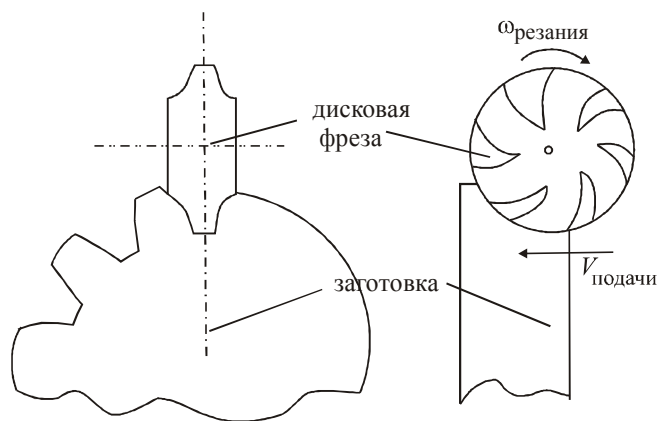


Рис. 9.19. Нарезание зубчатого колеса методом копирования дисковой фрезой

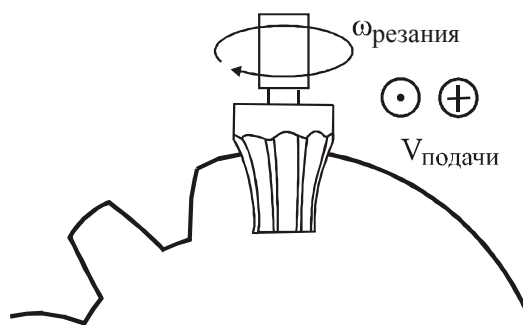


Рис. 9.20. Нарезание пальцевой фрезой

Недостатки метода:

- 1) дисковая и пальцевая фрезы – дорогостоящий и очень сложный инструмент;
- 2) невысокая точность и производительность;

3) при нарезании колес одного модуля, но с разным числом зубьев нужны разные фрезы.

Достоинства: колесо можно нарезать на любом фрезерном станке.

9.8.2. Метод обкатки

Это более совершенный метод. Колеса изготавливают на специальных зуборезных станках. Инструмент – специально изготовленное зубчатое колесо – долбяк, инструментальная рейка – гребенка и червячная фреза.

В процессе нарезания заготовке и инструменту сообщается такое же относительное движение, какое бы они имели в зацеплении. Это движение называется движением обкатки.

а) Инструментом является долбяк (рис. 9.21).

Заготовка совершает вращательное движение с мелким шагом. Долбяк – вращательное (с мелким шагом) + возвратно-поступательное (резание). Цикл нарезки: колесо и долбяк не вращаются, а долбяк идет на заготовку и снимает стружку с боковой поверхности зубьев. Затем долбяк возвращается в исходное положение; заготовка и долбяк поворачиваются на малый угол – цикл закончен.

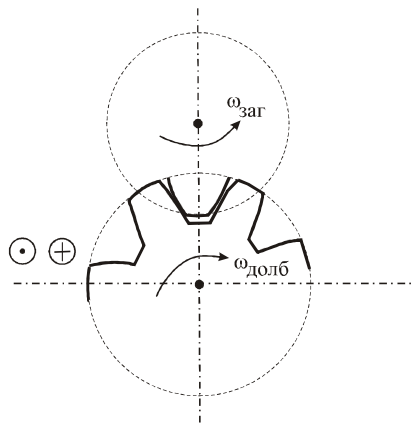


Рис. 9.21. Нарезание колеса методом обкатки (инструмент – долбяк)

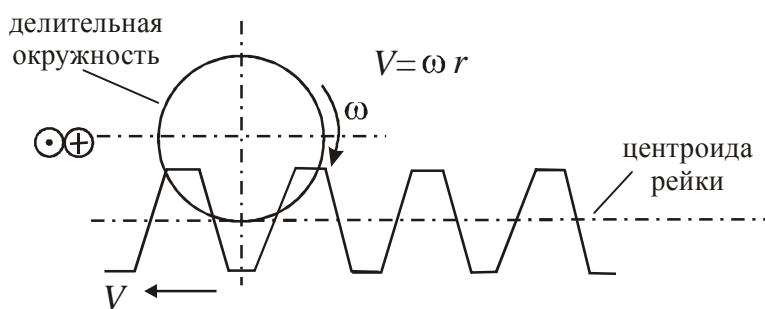


Рис. 9.22. Нарезание колеса зубчатой рейкой

б) Инструментом является рейка (рис. 9.22).

Рейка совершает два движения: подачу и резание. Резание – в направлении оси вращения колеса. Скорости подачи V и ω выбираются так, чтобы в относительном движении центроида рейки перекатывалась без скольжения по делительной окружности заготовки.

9.9. Исходный производящий контур инструментальной рейки

Профиль инструментальной рейки (рис. 9.23), соответствующий ее режущим граням, стандартизован, и этот профиль называется исходным профи-

лем рейки (исходный производящий контур).

На вершине зуба рейки выполнено закругление, рис. 9.24.

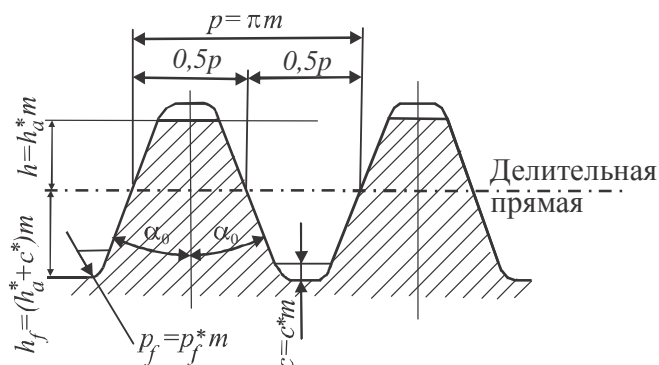


Рис. 9.23. Профиль инструментальной рейки

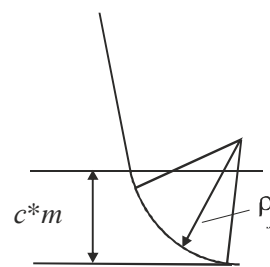


Рис. 9.24. Закругление зуба рейки

h_a^* – коэффициент высоты головки зуба рейки, $h_a^* = 1$ (ГОСТ);

h_f^* – коэффициент высоты ножки зуба рейки ($h_f^* = 1,25$);

ρ_f^* – коэффициент радиуса кривизны переходной кривой, $\rho_f^* = 0,38$ (ГОСТ).

m – модуль;

c – радиальный зазор;

$\alpha_0 = 20^\circ$ (ГОСТ);

c^* – коэффициент радиального зазора;

S – толщина зуба рейки;

p – шаг рейки;

e – ширина впадины.

При нарезании зубчатого колеса по делительной окружности заготовки может перекашиваться как делительная прямая рейки, так и любая другая, ей параллельная, рис. 9.25, т.к. шаг по делительной прямой $p = \pi m$ равен шагу рейки по любой другой прямой, параллельной делительной, т.е. будет обеспечен стандартный модуль на делительной окружности нарезанного колеса.

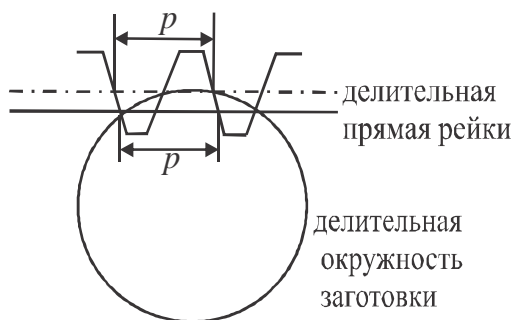


Рис. 9.25. Расположение рейки и нарезаемого колеса

Если при нарезании по делительной окружности перекашивается делительная прямая рейки – колесо без смещения. Если любая другая прямая, параллельная делительной прямой, – колесо со смещением.

9.10. Подрезание зуба при нарезании зубчатых колес рейкой

На рис. 9.26 обозначены: PN – линия зацепления; N – конец теоретической части линии зацепления. За пределами N будет нарушен основной закон зацепле-

ния (т.е. не будет нормального контакта двух сопряженных поверхностей: не будет общей нормали в точке контакта с радиусом основной окружности).

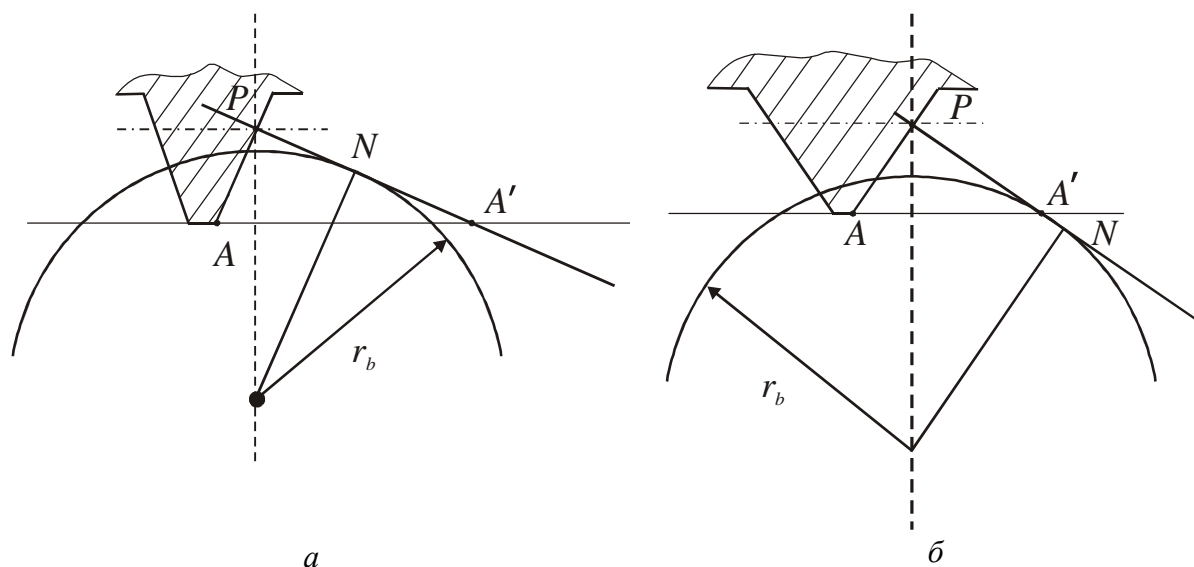


Рис. 9.26. Возможные варианты расположения заготовки и рейки:
a – точка *A* выходит за пределы теоретической части линии зацепления;
б – точка *A* – в пределах теоретической части линии зацепления

На рис. 9.26, *a*, *б* показаны два варианта возможного расположения заготовки r_b и инструментальной рейки. На рис. 9.26, *a* крайняя точка рейки *A* расположена за пределами линии зацепления, и будет нарушен основной закон зацепления. На рис. 9.27, *б* – нет.

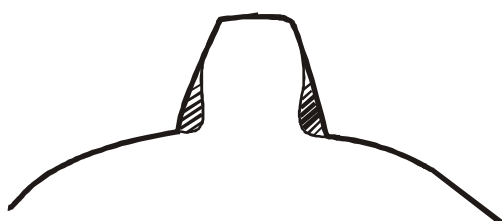


Рис. 9.27. Подрезание зуба

Если рейка будет расположена так, как показано на рис. 9.26, *a*, то при нарезании колеса возникнет *подрезание* зуба. Подрезание (рис. 9.27) имеет следующие вредные последствия:

- 1) срезается эвольвентная часть зуба.
- 2) ослабляется зуб в опасном сечении.

Т. *A* может попасть за пределы *PN*, если радиус основной окружности r_b мал ($r_b = r \cos \alpha$, а $r = \frac{mz}{2}$ т.е. r_b зависит от z).

9.10.1. Минимальное число зубьев z_{\min} , которое можно нарезать рейкой без подрезания зубьев

Покажем предельный случай (рис. 9.28).

$$PO = r = \frac{mz_{\text{пр}}}{2};$$

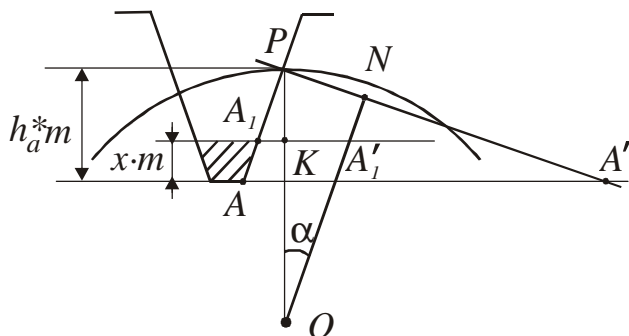


Рис. 9.28. Предельный случай расположения инструментальной рейки и заготовки для нарезания зубьев без подрезания

$PK = h_a^* m$ – высота головки зуба рейки.

$$PN = PO \cdot \sin \alpha; \quad PN = \frac{mz}{2} \sin \alpha.$$

Из $\triangle PKN$: $PN = \frac{PK}{\sin \alpha}; \quad PN = \frac{mz}{2} \sin \alpha.$

$$PN = \frac{h_a^* m}{\sin \alpha_0}, \quad \frac{mz}{2} \sin \alpha = \frac{h_a^* m}{\sin \alpha_0},$$

$$z_{\min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha}. \quad (9.5)$$

Если $z \geq z_{\min}$ – нет подрезания, $z < z_{\min}$ – есть подрезание.

По ГОСТу $h_a^* = 1, \alpha = \alpha_0 = 20^\circ$, тогда $z_{\min} = 17$.

Как видно из формулы (9.5), z_{\min} зависит от угла профиля рейки α (рис. 9.29).

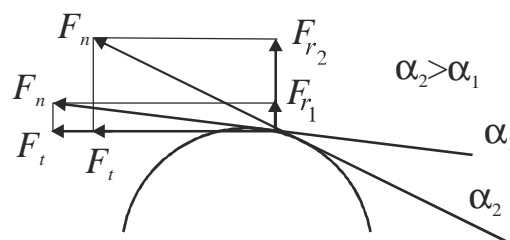


Рис. 9.29. Влияние угла профиля рейки α на величину радиальной составляющей усилия в зацеплении

Увеличивая α , можно снижать z_{\min} . Но при этом поворачивается линия зацепления. По линии зацепления действует усилие F_n , которое имеет вредную составляющую F_r . Если α увеличивается, то увеличивается и распорная составляющая F_r , увеличиваются габариты подшипников.

При $\alpha = 25^\circ$ $z_{\min} = 15$ – т.е. выигрыш незначительный. $\alpha = 20^\circ$ оптимальное с точки зрения габаритов передачи и ее подшипников. А как быть, если надо нарезать $z < z_{\min}$?

9.10. 2. Метод устранения подрезания зубьев

Рассмотрим рис. 9.28. Заштрихованный участок на рейке – виновник подрезания. Возникает идея убрать его. Для этого рейку отодвинем от центра заготовки. Смещение рейки – $x \cdot m$, x – коэффициент смещения рейки.

$$PN = PO \cdot \sin \alpha; \quad PN = \frac{PK}{\sin \alpha}; \quad PN^2 = PK \cdot PO;$$

$$PO = \frac{mz}{2}; PN = \frac{mz}{2} \sin \alpha_0; PK = h_a^* \cdot m - xm = m(h_a^* - x);$$

$$\frac{m^2 z^2}{4} \sin^2 \alpha_0 = m(h_a^* - x) \frac{mz}{2}; \quad \frac{z \cdot \sin^2 \alpha_0}{2} = h_a^* - x.$$

Разделим левую и правую части на h_a^* :

$$\frac{z \cdot \sin^2 \alpha}{2h_a^*} = \frac{h_a^* - x}{h_a^*}; \quad \frac{z}{z_{\text{нр}}} = 1 - \frac{x}{h_a^*}; \quad \frac{x}{h_a^*} = 1 - \frac{z}{z_{\text{мин}}}; \quad x = h_a^* \left(1 - \frac{z}{z_{\text{мин}}} \right).$$

При $h_a^* = 1$ и $z_{\text{мин}} = 17$ получаем $x_{\text{мин}} = 1 - \frac{z}{17}$ – коэффициент смещения рейки для устранения подреза, z – число зубьев нарезаемого колеса.

Смещение рейки применяется как для устранения подрезания зубьев, так и для улучшения качественных показателей зацепления.

9.11. Геометрические параметры зубчатых колес

Представим параметры нулевых зубчатых колес (без смещения) и колес со смещением в табл. 9.2.

В таблице Δy – коэффициент уравнительного смещения: $\Delta y = x_{\Sigma} - y$, где

$$x_{\Sigma} = x_1 + x_2; \quad y = \frac{z_{\Sigma}}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} - 1 \right) - \text{коэффициент воспринимаемого смещения,}$$

где $z_{\Sigma} = z_1 + z_2$; α_w – угол эксплуатационного зацепления, рис. 9.30, а.

Таблица 9.2. Параметры нулевых зубчатых колес – колес без смещения и со смещением

№ п/п	Наименование геометрического параметра	Колесо без смещения	Колесо со смещением
1.	Радиус окружности вершин	$r_a = m \left(\frac{z}{2} + h_a^* \right)$	$r_a = m \left(\frac{z}{2} + h_a^* + x - \Delta y \right)$
2.	Высота зуба	$h = m(c^* + 2h_a^*)$	$h = m(c^* + 2h_a^* - \Delta y)$
3.	Радиус окружности впадин	$r_f = m(z/2 - h_a^* - c^*)$	$r_f = r_a - h = m(z/2 - h_a^* - c^* + x)$
4.	Радиус делительной окружности	$r = mz/2$	$r = mz/2$
5.	Радиус основной окружности	$r_b = \frac{mz}{2} \cos \alpha$	$r_b = \frac{mz}{2} \cos \alpha$
6.	Толщина зуба по делительной окружности	$S = \frac{\pi m}{2}$	$S = \frac{\pi m}{2} + 2xmtg \alpha$

Формула для определения угла α_w выводится из условия плотного контакта: $S_{w_1} + S_{w_2} = p_w$, $S_{w_{1,2}}$ – толщина зубьев колес 1 и 2 по начальным окружностям. $\text{inv}\alpha_w = \text{inv}\alpha_0 + \frac{2x_\Sigma \text{tg}\alpha_0}{z_\Sigma}$, α_0 – угол станочного зацепления (для рейки $\alpha_0 = 20^\circ$ по ГОСТу).

9.12. Межосевое расстояние пары зубчатых колес

Межосевое расстояние пары нулевых колес, рис. 9.30, а, обозначается a , а для колес со смещением (рис. 9.30, б) обозначается a_w .

а) $a = r_1 + r_2 = \frac{m \cdot z_\Sigma}{2}$; r_1, r_2 – радиусы делительных окружностей колес в зацеплении; б) $a_w = \frac{m z_\Sigma}{2} \cdot \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_w}$, т.е. $a_w = a \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_w}$.

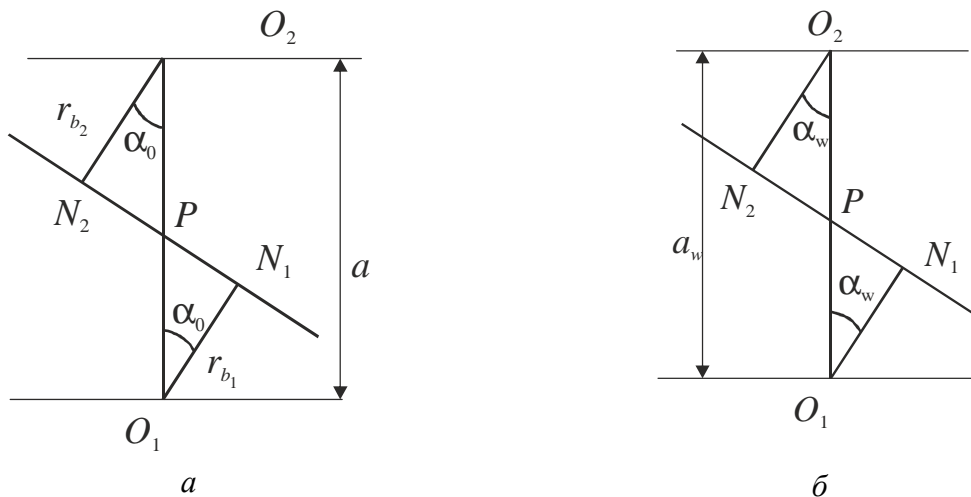


Рис. 9.30. Межосевое расстояние пары зубчатых колес: а – для нулевых колес или нулевой передачи; б – для передач из колес со смещением

Взаимное расположение делительных окружностей пары колес с различными коэффициентами смещения, представлено на рис. 9.31.

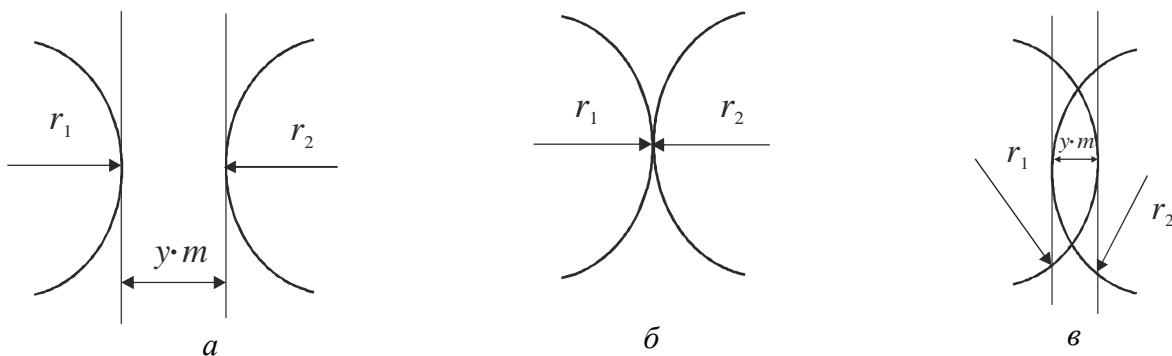


Рис. 9.31. Расположение делительных окружностей колес зубчатой передачи: а – $y \cdot m > 0$ – положительное смещение; б – $y \cdot m = 0$ – нулевая передача; в – $y \cdot m < 0$ – отрицательное смещение

9.13. Качественные показатели зацепления эвольвентных зубчатых колес

Взаимодействие двух сопряженных колес определяется так называемыми качественными показателями зацепления. Мы рассмотрим такие:

- коэффициент перекрытия ε ;
- коэффициенты удельного скольжения ν_1, ν_2 ;
- коэффициент удельного давления γ .

9.13.1 Коэффициент перекрытия пары зубчатых колес

Рассмотрим два зубчатых колеса, находящихся в зацеплении, рис. 9.32. Зуб первого колеса (\mathcal{E}_1) входит в зацепление с зубом второго колеса в точке a , а выходит из зацепления в точке b (\mathcal{E}'_1).

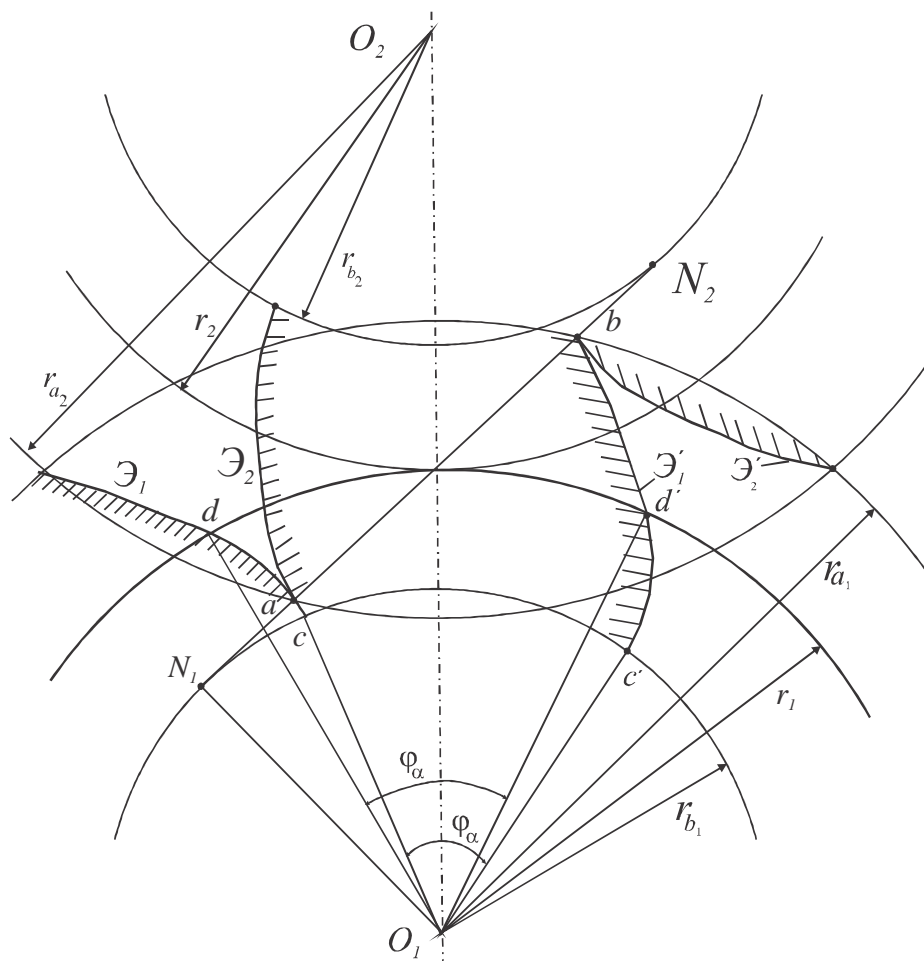


Рис. 9.34. К определению коэффициента перекрытия

Дуга dd' , соответствующая перекатыванию делительных или начальных окружностей за время контакта пары зубьев зубчатых колес называется дугой зацепления, а угол, соответствующий этой дуге, – углом зацепления (φ_α) или углом перекрытия.

Отрезок (ab) на линии зацепления, где происходит контакт пары зубьев, называется активной частью линии зацепления.

Для обеспечения плавности и бесшумности работы зубчатого зацепления угол перекрытия (φ_α) должен быть больше углового шага ($\tau = \frac{2\pi}{z}$). Введем понятие коэффициента перекрытия. Это отношение угла перекрытия к угловому

$$\text{шагу: } \varepsilon_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\tau}.$$

Рассмотрим различные значения коэффициента перекрытия:

1) $\varphi_\alpha > \tau, \varepsilon_\alpha > 1$ – это значит, что в контакте находится одна пара зубьев и на подходе имеется еще следующая пара; в таком зацеплении обеспечивается плавная работа, без ударов;

2) $\varphi_\alpha = \tau, \varepsilon_\alpha = 1$ – в таком зацеплении происходят небольшие удары; явление удара в зацеплении нежелательно;

3) $\varphi_\alpha < \tau, \varepsilon_\alpha < 1$ – в этом случае происходит разрыв зацепления, при этом ведомое колесо притормаживается, а ведущее движется, и в результате происходит сильный удар; это недопустимо для зубчатого зацепления.

Минимальное значение коэффициента перекрытия $\varepsilon_\alpha = 1,05$. Как определить значение коэффициента перекрытия для зубчатого зацепления?

Определим угол перекрытия $\varphi_\alpha = \frac{\cup dd'}{r} = \frac{\cup cc'}{r_b}$ где $\cup cc' = \cup N_1c' - \cup N_1c$.

Используя свойство эвольвенты, заменим дуги касательными; тогда

$$\cup N_1c' = \overline{N_1b}; \cup N_1c = \overline{N_1a}.$$

Подставив эти значения, получим

$$\cup cc' = \overline{N_1b} - \overline{N_1a} = \overline{ab};$$

$$r_b = r \cos \alpha_0 = \frac{mz}{2} \cos \alpha_0.$$

Коэффициент перекрытия

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\overline{ab}}{\frac{mz}{2} \cos \alpha_0 \cdot \frac{2\pi}{z}} = \frac{\overline{ab}}{\pi m \cos \alpha_0}, \quad (9.6)$$

где \overline{ab} – длина активной части линии зацепления,

$\pi m \cos \alpha_0 = p_b$ – шаг по основной окружности.

\overline{ab} можем замерить на картине зубчатого зацепления или определяем по известным формулам:

$$(\overline{ab}) = \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} + \sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2} - a_w \sin \alpha_w,$$

где $r_{a_{1,2}}$ – радиусы окружностей вершин шестерни и колеса в зацеплении; $r_{b_{1,2}}$ – радиусы основных окружностей; a_w – межосевое расстояние; α_w – угол зацепления; m – модуль; α_0 – угол станочного зацепления (для рейки $\alpha_0 = 20^\circ$).

9.13.2. Коэффициент перекрытия косозубых колес

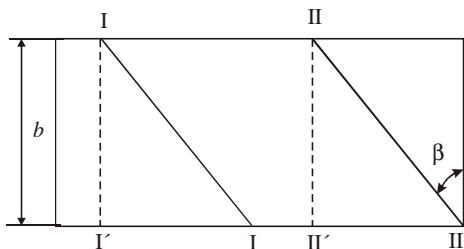


Рис. 9.33. К определению коэффициента перекрытия косозубых колес

На рис. 9.33: β – угол подъема винтовой линии зуба колеса; b – ширина зубчатого венца колеса. I–I' – зуб вошел в контакт; II–II' – зуб вышел из контакта. Пунктир – прямозубое колесо. Зуб прямозубого колеса вышел из контакта в положении II'. Косозубое колесо – выход из контакта в положении II, т.е. у косозубого колеса контакт продлен на величину II–II', равную $b \cdot \operatorname{tg} \beta$, т.е. получаем

добавку к коэффициенту перекрытия $\varepsilon_\beta = \frac{b \cdot \operatorname{tg} \beta}{p_t}$, где p_t – шаг колеса в торцевом сечении.

Полный коэффициент перекрытия косозубых колес: $\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$, $\varepsilon > \varepsilon_\alpha$, т.е. коэффициент перекрытия косозубых колес больше, чем у прямозубых.

9.13.3. Относительное скольжение зубьев в зацеплении. Коэффициенты удельного скольжения

При работе зубчатых колес один профиль перекачивается по другому с проскальзыванием, рис. 9.34. Величину этого проскальзывания характеризуют коэффициенты удельного скольжения.

$$ds_1 = A_1 B_1, ds_2 = A_2 B_2.$$

Величина скольжения – $ds_1 - ds_2$.

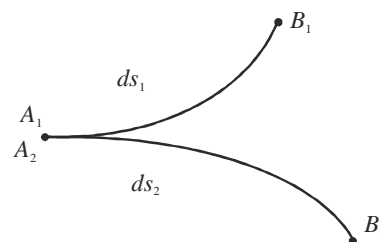


Рис. 9.34. Проскальзывание зубьев

Рассмотрим отношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_1 - ds_2}{ds_1} = v_1 - \text{коэффициенты удельного скольжения колес 1 и 2.} \\ \frac{ds_2 - ds_1}{ds_2} = v_2 \end{array} \right.$$

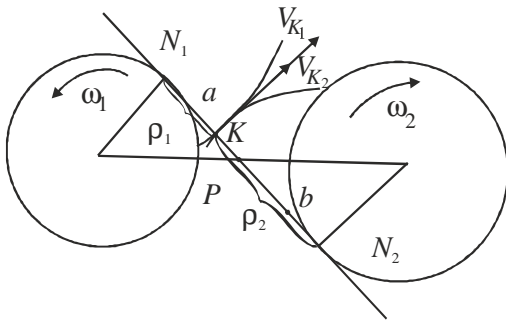
$v_{1,2}$ – это отношение пути, пройденного в относительном скольжении $(ds_1 - ds_2)$ ко всему пути $(ds_{1,2})$. Эти формулы неудобны для расчетов. Разделим почленно на dt :

$$v_1 = \frac{\frac{ds_1}{dt} - \frac{ds_2}{dt}}{\frac{ds_1}{dt}} = \frac{V_{K_1} - V_{K_2}}{V_{K_1}}; \quad v_2 = \frac{V_{K_2} - V_{K_1}}{V_{K_2}},$$

где $V_{K_{1,2}}$ – скорость точки контакта, направленная по касательной к профилю.

Рассмотрим зацепление (рис. 9.35):

ρ_1, ρ_2 – радиусы кривизны эвольвент профилей в точке контакта, $V_{K_1} = |\omega_1| \rho_1, V_{K_2} = |\omega_2| \rho_2$ (этот вывод был сделан при доказательстве основной теоремы зацепления).



$$v_1 = \frac{|\omega_1| \rho_1 - |\omega_2| \rho_2}{|\omega_1| \rho_1} = 1 - |i_{21}| \frac{\rho_2}{\rho_1};$$

$$v_2 = 1 - |i_{12}| \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Рис. 9.35. К определению коэффициентов удельного скольжения

Коэффициенты $v_{1,2}$ позволяют оценить, как изменяются удельные скольжения по мере изменения положения точек контакта вдоль линии зацепления. Износ больше там, где больше v .

Исследуем характер изменения коэффициентов v_1 и v_2 по мере изменения положения точки контакта на линии зацепления. Рассмотрим три характерные точки: N_1, P и N_2 , рис. 9.36.

Износ больше на ножке зуба. ab – активная часть линии зацепления. С точки зрения износа надо уменьшать ab . С точки зрения плавности (ϵ) надо увеличивать ab . Активная часть линии зацепления ab зависит от радиусов ок-

ружностей вершин $r_{a1,2}$, т.е. зависит от коэффициентов смещения x_1 и x_2 .

	ρ_1	ρ_2	v_1	v_2
N_1	0	N_1N_2	$-\infty$	1
P	N_1P	N_2P	0	0
N_2	N_1N_2	0	1	$-\infty$

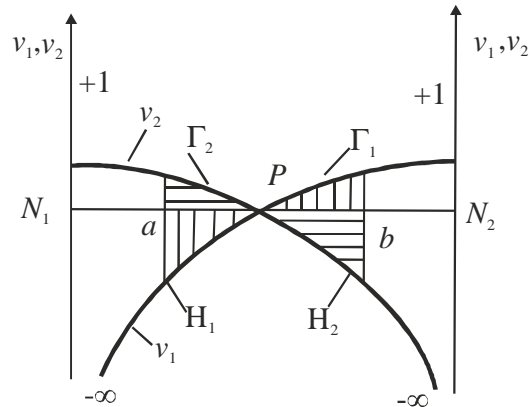


Рис. 9.36. График изменения коэффициентов удельного скольжения Γ_1, Γ_2 – головки зубьев, H_1, H_2 – ножки

9.13.4. Коэффициент удельного давления

Отношение модуля (m) к приведенному радиусу кривизны профилей зубьев называется коэффициентом удельного давления: $\gamma = \frac{m}{\rho_{пр}}$, где

$$\frac{1}{\rho_{пр}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

Приведенный радиус кривизны влияет на величину контактных напряжений, т.е. на прочность зубьев.

Контактное напряжение

$$\sigma_{конт} = A \sqrt{\frac{P \cdot E}{b \cdot \rho_{пр}}}, \quad (9.7)$$

где P – нагрузка в месте контакта; E – модуль Юнга I рода; b – ширина зуба (длина линии контакта); $\rho_{пр}$ – приведенный радиус кривизны; A – уточняющий коэффициент.

Из формулы (9.7) видно, что чем больше $\rho_{пр}$, тем меньше $\sigma_{конт}$. Поэтому $\sigma_{конт}$ минимальное в том месте, где γ минимальное. Рассмотрим изменение γ по длине линии зацепления (рис. 9.37).

Для этого запишем:

$$\gamma = \frac{ml_{N_1N_2}}{\rho_1(l_{N_1N_2} - \rho_1)}.$$

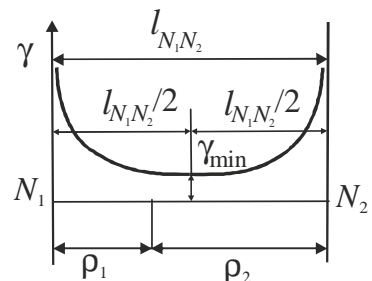


Рис. 9.37. Изменение коэффициента удельного давления

В точках N_1 и N_2 γ принимает значение ∞ , а на рабочей части линии зацепления ($\rho_1 = \frac{l_{N_1 N_2}}{2}$) γ принимает минимальные значения.

9.14. Требования, предъявляемые к зубчатой передаче

1) Отсутствие подреза зубьев.

Для этого выбираем $x_{\min} = h_a^* \left(1 - \frac{z}{z_{\min}} \right)$ – минимальный коэффициент

смещения реечного инструмента для устранения подреза.

2) Коэффициент перекрытия $\epsilon_\alpha \geq 1,05$ (зависит от x_1 и x_2 , для увеличения ϵ_α эти коэффициенты нужно увеличивать).

3) Нужно иметь как можно меньшие v_1 и v_2 (зависят от x_1 и x_2 , их надо уменьшать).

4) Зуб должен удовлетворять изгибной прочности. Прочность зависит от толщины зуба S_i . Например, по делительной окружности $S = \frac{\pi m}{2} + 2m x \operatorname{tg} \alpha_0$, т.е. S_i тоже зависит от коэффициента смещения, и соответствующим подбором x_i можно обеспечивать изгибную прочность (рис. 9.38, а)



Рис. 9.38. К определению прочностных условий зуба:

а – изгибная нагрузка; б – незаострение зуба для исключения скола

5) Зуб не должен иметь заострение: $S_a > 0$. На практике соблюдают $S_a \geq 0,25m$. S_a тоже зависит от x , т.к. S_a зависит от радиуса окружности вершин (рис. 9.38, б).

6) Зуб должен удовлетворять условию контактной прочности:

$\sigma_{\text{конт}} = A \sqrt{\frac{PE}{b\rho_{\text{пр}}}}$. При проектировании зубчатой передачи обязательно надо удовлетворить условия 1), 2), 5). Остальные желательно проверить.

9.15. Корригирование зубчатых колес

Если при нарезании методом обкатки инструмент и заготовка располагаются так, что делительная прямая рейки (делительная окружность долбяка) и делительная окружность заготовки являются одновременно и начальными, т.е. касаются друг друга в полюсе зацепления (и перекатываются друг относительно друга без скольжения), то нарезаются так называемые нормальные или нулевые колеса. Иногда нарезать такие колеса невозможно или невыгодно:

1) если число зубьев нарезаемого колеса меньше z_{min} , т.е. числа зубьев, которые можно нарезать без подрезания;

2) если для соосных передач нулевые колеса не обеспечивают равных межосевых расстояний двух соседних ступеней a_{wI} и a_{wII} .

3) если не обеспечиваются необходимые требования – качественные показатели зацепления или прочностные (контактные или, например, изгибные). Тогда, если нормальная зубчатая передача не удовлетворяет предъявляемым требованиям, приходится ее исправлять.

Исправление зубчатого зацепления с целью улучшения называется корригированием. Корригирование можно выполнять разными способами. Мы рассмотрим корригирование зубчатых колес методом смещения зуборезной рейки при изготовлении колеса.

Шаг рейки одинаковый на всех прямых, параллельных делительной прямой. Поэтому рейку можно двигать относительно нарезаемого колеса, и шаг при этом не изменится (а модуль $m = \frac{p}{\pi}$, т.е. модуль остается стандартным).

1) если делительная прямая рейки касается делительной окружности заготовки, то изготавливается нулевое колесо;

2) если рейка отодвигается от центра нарезаемого колеса, то будет нарезано колесо с положительным смещением ($x > 0$);

3) если придвигается к центру – с отрицательным смещением ($x < 0$).

9.15.1. Выбор коэффициентов смещения

1) если $z < z_{\min}$, то коэффициент смещения $x = h_a^* \left(1 - \frac{z}{z_{\min}} \right)$ (для рейки, у

которой $h_a^* = 1$, $\alpha_0 = 20^\circ$, $z_{\min} = 17$).

2) Система Кудрявцева. В основу выбора коэффициентов по этой системе положен принцип обеспечения максимальной контактной прочности зубьев, т.е. минимального коэффициента удельных давлений. В. Н. Кудрявцевым разработаны таблицы (табл. 9.3).

Таблица 9.3. Коэффициенты смещения по В. Н. Кудрявцеву

z_1/z_2	17	18	19
10	$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$	$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$	$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$	
11	$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$	$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$	$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$	
12	$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$	$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$	$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$	
.....				

Эта система обеспечивает также:

- а) отсутствие подрезания зубьев;
- б) коэффициент перекрытия $\varepsilon_\alpha = 1,05 \dots 1,15$;
- в) выравнивание v_1 и v_2 (т.е. минимальный износ).

Такая система применяется для закрытых передач.

3) Система ЦКБР. В основе – выравнивание коэффициентов удельного скольжения. Коэффициенты смещения по этой системе обеспечивают минимальные значения коэффициентов удельного скольжения.

Недостатки:

- а) малый коэффициент перекрытия $\varepsilon_\alpha = 1,01 \div 1,02$;
- б) возможно заострение зубьев $S_a < 0,25m$.

Такая система применяется при проектировании открытых зубчатых передач, где опасен абразивный износ.

4) Блокирующие контуры. Позволяют выбрать x_1 и x_2 с учетом всех требований. Это самый универсальный способ корригирования. В книге «Справочник по корригированию зубчатых колес» (Болотовская Т.П. и др.) приведены блокирующие контуры для всех встречающихся на практике комбинаций z_1 и z_2 . Рассмотрим, как выглядит блокирующий контур, рис. 9.39. Форма и размещение линий блокирующего контура зависит от числа зубьев зубчатых колес и режущего инструмента, который используется.

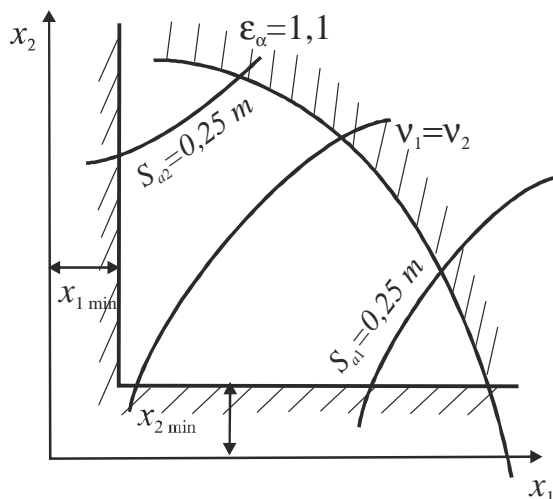


Рис. 9.39. Блокирующий контур

Коэффициенты смещения x_1 и x_2 выбирают в незаштрихованной области блокирующего контура.

9.16. Сложные зубчатые механизмы

Сложные механизмы – это механизмы, которые состоят из 3-х и более звеньев. Их можно разделить на 2 типа:

1. Механизмы с неподвижными осями колес – рядовые и ступенчатые передачи.
2. Механизмы, где есть колеса, оси которых подвижны относительно стойки – планетарные и дифференциальные передачи.

9.16.1. Механизмы с неподвижными осями

Рядовые передачи – последовательное соединение нескольких пар единичных зубчатых колес (рис. 9.40).

Определим передаточное отношение этого ряда колес.

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4}; i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_2}; i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3}.$$

Перемножим левые (отношение ω_i) и правые части (отношение z_i):

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{(-1)^3 z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3} = (-1)^3 \frac{z_4}{z_1}; \frac{\omega_1}{\omega_4} = i_{14}; i_{14} = (-1)^3 \frac{z_4}{z_1}.$$

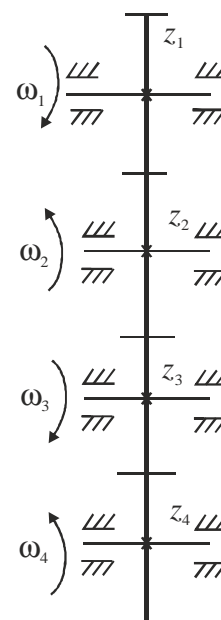


Рис. 9.40. Рядовая зубчатая передача

Итак, формула имеет вид: $i_{1k} = (-1)^p \frac{z_k}{z_1}$ – передаточное отношение рядовой зубчатой передачи, где p – число пар внешнего зацепления, k – число зубчатых колес. z_2 и z_3 называются паразитными шестернями. Их применяют для обеспечения необходимого расстояния между входным и выходным валами или для изменения направления вращения.

9.16.2. Ступенчатые передачи

Это последовательное соединение нескольких пар блочных колес – спаренных, т.е. блок – жесткое соединение 2-х колес с валом (рис. 9.41).

2 – 2', 3 – 3' – блоки шестерен.

$$\text{Найдем } i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4}; i_{I-II} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; i_{II-III} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_{2'}}; i_{III-IV} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_{3'}}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ – угловые скорости валов I, II, III, IV.

Перемножим левые и правые части:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = (-1)^2 \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_{2'} \cdot z_{3'}}$$

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^2 \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_{2'} \cdot z_{3'}}$$

В общем виде формула имеет вид:

$$i_{ik} = (-1)^p \frac{\prod z_{\text{ВМ}}}{\prod z_{\text{ВЩ}}}$$

где p – число пар внешнего зацепления; $\prod z_{\text{ВМ}}$ – произведение чисел зубьев ведомых колес; $\prod z_{\text{ВЩ}}$ – произведение чисел зубьев ведущих колес.

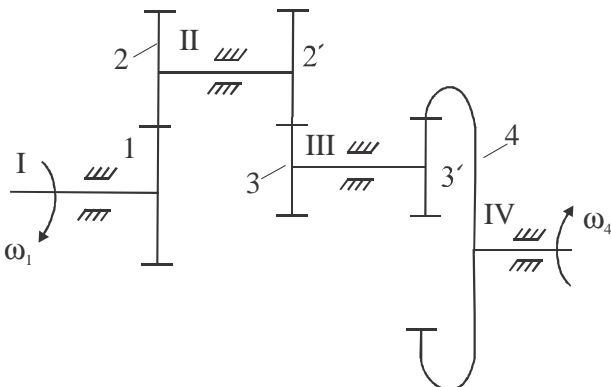


Рис. 9.41. Ступенчатая передача

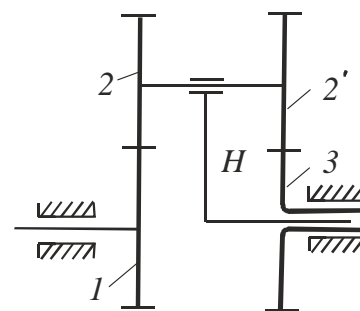


Рис. 9.42. Дифференциальный механизм

9.16.3. Планетарные и дифференциальные зубчатые механизмы

Зубчато-рычажный механизм, у которого ось вращения хотя бы одного из колес подвижна в системе стойки, называется планетарным (рис. 9.43) или дифференциальным (рис. 9.42).

Подсчитаем степень подвижности механизма на рис. 9.42 по формуле Чебышева.

$$W = 3n - 2p_5 - p_4;$$

$$n = 4 (1, 2 - 2', 3, H);$$

$$p_5 = 4(1 - 0; 2 - 2' - H; 3 - 0; H - 0);$$

$$p_4 = 2(z_1 - z_2; z_2' - z_3);$$

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2.$$

Зубчатые механизмы с подвижными осями колес, у которых $W \geq 2$, называются дифференциальными механизмами. Если $W = 2$, значит, механизм имеет два начальных (входных) звена. Рассмотрим варианты.

	Начальные (вход)	Ведомое (выход)
1)	1 и 3	H
2)	1 и H	3
3)	3 и H	1

Такой механизм, используется, например, в автомобилях, позволяя колесам при повороте вращаться с разными скоростями.

Остановим в этом механизме звено 3. Тогда

$$n = 3 (1, 2 - 2', H); p_5 = 3(0 - 1; 2 - 2' - H; H - 0); p_4 = 2(z_1 - z_2; z_2' - z_3)$$

$$\text{Степень подвижности: } W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Если $W = 1$ – это простой планетарный механизм.

Колеса с движущимися геометрическими осями называются сателлитами (2 и 2'). Подвижное звено, в котором помещены оси сателлитов, называется водилом (H). Вращающееся вокруг неподвижной оси колесо, по которому обкатываются сателлиты, называется центральным (z_1), неподвижное центральное колесо называется опорным (z_3).

Механизм состоит из: 2 – 2' – блок шестерен (блок сателлитов), который совершает вращательное движение вокруг своей оси и вокруг оси колес 1 и 3

(центральные колеса); H – водило. Оси колес 1 и 3 совпадают. Это соосность.

Зубчатые механизмы бывают:

- редукторы ($|i| > 1$) – понижают обороты ведомого звена;
- мультипликаторы ($|i| < 1$) – повышают обороты ведомого звена.

На рис. 9.43 (при 1 – вход, H – выход) представлен двухступенчатый редуктор.

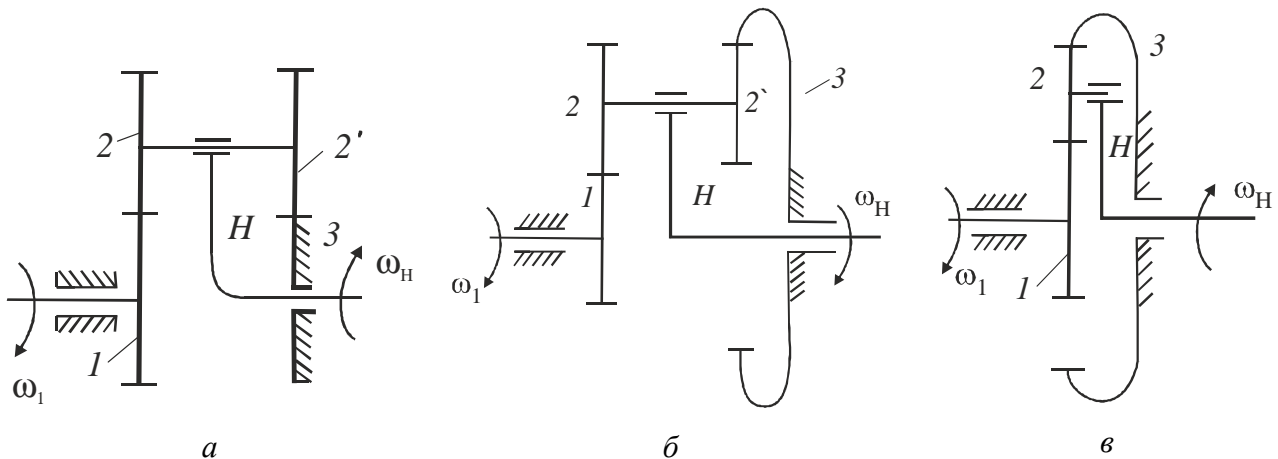


Рис. 9.43. Двухступенчатый планетарный редуктор: a – типа $A-A$; b – типа $A-J$; v – типа $A-J$

9.16.4. Определение передаточного отношения планетарного механизма

методом Виллиса

Рассмотрим этот метод на примере механизма, представленного на рис. 9.43, a . Применим метод инверсии или обращения движения (применил Виллис).

Итак, надо определить $i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H}$.

Остановим мысленно водило, сообщив всей системе скорость $-\omega_H$.

Угловые скорости звеньев до остановки водила и после представим в табл. 9.4.

Таблица 9.4. Угловые скорости звеньев

Звено	Угловая скорость	
	до остановки водила	после остановки водила
1	ω_1	$\omega_1 - \omega_H$
2– 2'	ω_2	$\omega_2 - \omega_H$
3	0	$-\omega_H$
H	ω_H	0

После остановки водила получаем механизм, называемый обращенным (рис. 9.44).

Это ступенчатый механизм, для которого, как было выведено раньше, передаточное отношение определяется по формуле:

$$i_{13}^H = (-1)^p \frac{\prod z_{\text{ВМ}}}{\prod z_{\text{ВЩ}}}$$

Итак, имеем:

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = (-1)^p \frac{\prod z_{\text{ВМ}}}{\prod z_{\text{ВЩ}}},$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_H} = i_{1H}$$

и тогда

$$i_{1H} = 1 - (-1)^p \frac{\prod z_{\text{ВМ}}}{\prod z_{\text{ВЩ}}},$$

где $i_{1H} = 1 - i_{13}^H$ – передаточное отношение планетарного механизма.

Рассмотрим пример – редуктор типа А–А (рис. 9.43, а).

$$z_1 = 100; z_2 = 99; z_{2'} = 100; z_3 = 101.$$

$$i_{1H} = 1 - i_{13}^H = 1 - (-1)^p \frac{\prod z_{\text{ВМ}}}{\prod z_{\text{ВЩ}}} = 1 - (-1)^2 \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_{2'}} =$$

$$1 - \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100} = \frac{10000 - 9999}{10000} = \frac{1}{10000}.$$

Вывод: малые (или большие – в обратном направлении, т.е. i_{H1}) передаточные отношения, достигаемые планетарными механизмами при малом числе зубчатых колес, являются их основным достоинством. Пара зубчатых колес позволяет обеспечить $i_{12} \approx 5 \div 7$.

Рассмотрим одноступенчатый редуктор типа $\overline{A-J}$ (рис. 9.43, в):

$$i_{1H} = 1 - (-1)^p \frac{\prod z_{\text{ВМ}}}{\prod z_{\text{ВЩ}}} = 1 - (-1)^1 \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2} = 1 + \frac{z_3}{z_1};$$

$p = 1(1 - 2)$ – число пар внешнего зацепления; пара 2 – 3 – внутреннего зацепления.

9.16.5. Задача синтеза планетарных механизмов

Эта задача состоит в следующем: по выбранной схеме планетарного механизма подобрать числа зубьев так, чтобы удовлетворить определенным условиям. Рассмотрим такие четыре условия:

- 1) обеспечить заданное передаточное отношение;
- 2) выполнить условие соосности (если выбрана схема соосного планетарного механизма);

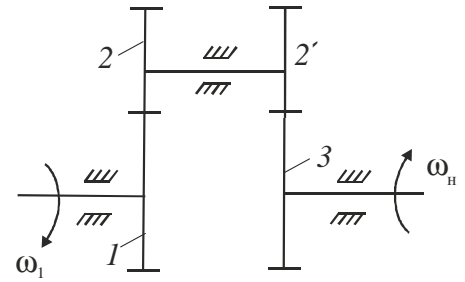


Рис. 9.44. Обращенный механизм

- 3) выполнить условие соседства блоков сателлитов (их число k);
- 4) выполнить условие сборки.

Рассмотрим на примере механизма, показанного на рис. 9.43, б. Для упрощения условимся, что зубчатые колеса планетарного механизма нарезаются стандартной инструментальной рейкой и без смещения. Тогда $z_i \geq z_{\min}$ ($z_{\min} = 17$). Надо определить z_1, z_2, z_2', z_3 .

1) Передаточное отношение:

$$i_{1H} = 1 - (-1)^p \frac{\prod z_{\text{ВМ}}}{\prod z_{\text{ВЩ}}} = 1 - (-1)^1 \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'} = 1 + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}. \quad (9.8)$$

2) Условие соосности:

межосевые расстояния между колесами 1-2 и 2'-3 должны быть равными: $a_{w_{1-2}} = a_{w_{2'-3}}$.

Т.к. колеса нулевые (без смещения), то $a_{w_{1-2}} = r_1 + r_2$; $a_{w_{2'-3}} = r_3 - r_2'$ (внутреннее зацепление).

r_i – радиусы делительных окружностей:

$$r_i = \frac{m_i z_i}{2}, \quad m_i - \text{модуль зубчатого колеса.}$$

$$\frac{m_{1,2}(z_1 + z_2)}{2} = \frac{m_{2',3}(z_3 - z_2')}{2}.$$

Если $m_{1,2} = m_{2',3}$, то условие примет вид:

$$z_1 + z_2 = z_3 - z_2'. \quad (9.9)$$

3) Условие соседства (рис. 9.45).

Состоит в том, что окружности вершин зубьев двух соседних сателлитов не должны соприкасаться. Пусть $k = 3$.

$$O_2 O_2' > 2r_{a_2} - \text{условие соседства.} \quad (9.10)$$

$$\angle O_2 O_1 O_2' = \frac{2\pi}{k}. \text{ Тогда } \alpha = \frac{2\pi}{k \cdot 2} = \frac{\pi}{k}.$$

$$r_{a_2} = r_2 + m \cdot h_a^* \text{ (нулевые колеса),}$$

$$r_{a_2} = m \left(\frac{z_2}{2} + h_a^* \right).$$

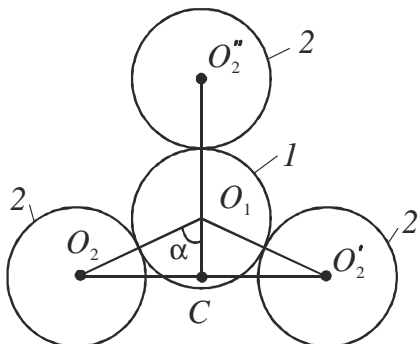


Рис. 9.45. Соседство сателлитов

$$r_2 = \frac{m z_2}{2},$$

$$\Delta O_1 O_2 C : O_1 O_2 = a_{w_{1-2}} = \frac{m}{2}(z_1 + z_2); O_2 C = O_1 O_2 \sin \alpha;$$

$$O_2 C = \frac{m}{2}(z_1 + z_2) \cdot \sin \frac{\pi}{k}; O_2 O_2' = 2 O_2 C = m(z_1 + z_2) \cdot \sin \frac{\pi}{k}.$$

Подставим в (9.10):

$$m(z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{k} > 2m \left(\frac{z_2}{2} + h_a^* \right).$$

После преобразований получаем:

$$(z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{k} > z_2 + 2h_a^*. \quad (9.11)$$

Это не уравнение, а только проверочное условие.

4) Условие сборки.

Оно состоит в том, чтобы при сборке механизма зубья всех сателлитов ($z_2 - k$ штук и $z_2' - k$ штук) попали во впадины своих центральных колес (z_1 и z_3).

Первый блок сателлитов ставим без проблем. Чтобы во втором блоке зуб попал во впадину, необходимо, чтобы при повороте водила на угол $\frac{2\pi}{k}$ колесо z_1 повернулось на целое число шагов (водило и z_1 связаны передаточным отношением i_{1H}).

Водило повернется на угол $\theta_H = \frac{2\pi}{k}$, а колесо z_1 повернется на целое число шагов $\theta_1 = p \left(\frac{2\pi}{z_1} \right)$, где p – целое число, $\frac{2\pi}{z_1} = \tau_1$ – угловой шаг колеса 1.

Углы поворота θ_1 и θ_H связаны передаточным отношением:

$$i_{1H} = \frac{\theta_1}{\theta_H}; i_{1H} = \frac{p \cdot 2\pi \cdot k}{z_1 \cdot 2\pi};$$

$$p = \frac{i_{1H} \cdot z_1}{k} - \text{целое.} \quad (9.12)$$

(9.12) – условие сборки.

Если учесть, что $i_{1H} = 1 + \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'} = \frac{z_1 \cdot z_2' + z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$, подставить его в (9.12),

то окончательно условие сборки может быть представлено в виде:

$$\frac{z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2'}{kL} = p.$$

где p – целое; L – наибольший общий делитель чисел z_2 и z_2' .

Итак, для подбора чисел зубьев (z_1, z_2, z_2', z_3) имеем три уравнения (9.8), (9.9), (9.12) и проверку (9.11). Поэтому одним числом зубьев задаются из условия, что $z \geq z_{\min}$ (17).

Эти условия можно записать для различных планетарных механизмов:

- для редуктора типа $A-A$ (рис.9.45, *a*):

$$1) i_{1H} = 1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}, \quad 2) z_1 + z_2 = z_3 + z_2',$$

$$3) (z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{k} > z_2' + 2h_a^*, \quad 4) \frac{z_1 \cdot z_2' - z_2 \cdot z_3}{kL} = p.$$

- для редуктора типа $\overline{A-J}$ (рис. 9.45, *б*):

$$1) i_{1H} = 1 + \frac{z_3}{z_1}, \quad 2) z_1 + z_2 = z_3 - z_2',$$

$$3) (z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{k} > z_2 + 2h_a^*, \quad 4) \frac{z_3 + z_1}{k} = p.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
2. Теория механизмов и машин : учеб. для втузов / К. В. Фролов, С. А. Попов и др. : под ред. К. В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987. – 496 с.
3. Кореняко А. С. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / А. С. Кореняко, Л. И. Кременштейн, С. Д. Петровский и др. – К.: Вища шк., 1970. – 332 с.
4. Методические указания к самостоятельной работе по проектированию и исследованию шарнирно-рычажных механизмов по дисциплине "Теория механизмов и машин" для студентов машиностроительных специальностей дневного и вечернего обучения / А. А. Грунауэр, И. Д. Долгих – Харьков: ХПИ, 1992. – 145 с.
5. Теория механизмов и машин. Системный подход : учеб. пособ. / А. А. Грунауэр, И. Д. Долгих. – К.: УМК ВО, 1992. – 384 с.

Навчальне видання

ТКАЧУК Микола Анатолійович
ЗАРУБІНА Алла Олександрівна
ЗІНЧЕНКО Олена Іванівна
КРОТЕНКО Галина Анатоліївна
САФОНОВА Зінаїда Семенівна

Методи аналізу і синтезу механізмів
Текст лекцій по дисципліні «Теорія механізмів і машин»
для студентів машинобудівних спеціальностей

Російською мовою

Роботу до видання рекомендував проф. Дяченко В. Г.

В авторській редакції

План 2012 р., п. 17

Підп. до друку	р. Формат 60x84 1/16.	Папір друк. №2.
Друк – ризографія.	Гарнітура Times.	Ум. друк. арк. ____
Наклад 100 прим.	Зам. №	Ціна договірна

Видавничий центр НТУ „ХПІ”.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №3657 від 24.12.2009 р.
61002 Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ „ХПІ”. 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21