

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
COMPUTER SIMULATION HISTORY**

УДК 681.5

DOI:10.18413/2518-1092-2016-1-4-4-15

Дмитриенко В.Д.  
Заковоротный А.Ю.**ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ  
ОПТИМИЗАЦИИ ЭНЕРГОЗАТРАТ ТЯГОВОГО ПОДВИЖНОГО СОСТАВА**Национальный технический университет  
«Харьковский Политехнический институт», ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002, Украина  
*e-mail: valdmitrienko@gmail.com, arcade@i.ua***Аннотация**

В работе средствами инволютивных распределений геометрической теории управления получена работоспособная линейная математическая модель движения дизель-поезда с двумя эквивалентными тяговыми электроприводами, которая эквивалентна нелинейной математической модели, описываемой системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 24-го порядка с четырьмя управлениями. С помощью принципа максимума решены две задачи оптимального управления тяговым приводом: максимального быстродействия и минимизации взвешенной линейной комбинации времени и расходы квадрата управления. Это позволило, с одной стороны, получить для каждого участка железнодорожного пути законы управления, которые определяют минимально необходимое время для преодоления перегона, а с другой стороны, получать законы управления, обеспечивающие график движения и минимизацию расхода топливно-энергетических ресурсов.

**Ключевые слова:** геометрическая теория управления; линейная математическая модель; движение дизель-поезда; принцип максимума; оптимальное управление.

UDC 681.5

Dmitrienko V.D.  
Zakovorotniy A.Yu.**GEOMETRIC CONTROL THEORY IN THE PROBLEM OF OPTIMIZATION  
OF ENERGY CONSUMPTION OF TRACTION ROLLING STOCK**National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute»  
21 Frunze St., Kharkov, 308015, Ukraine.**Abstract**

In the course of the study, by means of involutive distributions of geometric control theory, the authors produced a workable linear mathematical model of the motion of a diesel train with two equivalent electric traction drives, which is equivalent to a non-linear mathematical model, described by a system of nonlinear ordinary differential equations of the 24-th order with four controls. With the help of the maximum principle there were resolved two tasks of optimal control of the traction drive: maximum performance and minimization of the weighted linear combination of time and cost control of a square. This allowed, on the one hand, to receive control laws for each section of railway track, that specify the minimum time necessary to overcome the haul, on the other hand, to receive the control laws ensuring the timetable and minimizing the consumption of fuel and energy resources.

**Keywords:** geometric control theory; linear mathematical model; diesel train movement; maximum principle; optimal control.

**Постановка проблемы и анализ литературы**

Одним из основных стратегических направлений государственной политики Украины

в области развития современных видов железнодорожного транспорта является привлечение к их производству отечественных

производителей, что обеспечит уменьшения импортной зависимости Украинских железных дорог от зарубежных поставок подвижного состава [1, 2]. При этом особое внимание уделено, с одной стороны, внедрению современных энергосберегающих технологий, а с другой стороны, рациональному использованию имеющихся энергоресурсов [3]. Последнее решается путем совершенствования уже существующих систем автоматического управления подвижным составом с целью минимизации затрат энергоресурсов при соблюдении графиков движения. Для Украины этот вопрос является актуальным, поскольку расход энергоресурсов на перевозку грузов и пассажиров в нашей стране выше, чем в большинстве развитых стран мира.

Сегодня вопросами создания и совершенствования систем оптимального управления тяговым электроприводом подвижного состава занимается множество специалистов как в Украине, так и в странах ближнего и дальнего зарубежья. При этом работы этих ученых основываются на теории управления и теории оптимальных систем управления, а также методов динамического программирования, классического вариационного исчисления, принципа максимума Понтрягина, функций Ляпунова, аналитического конструирования Красовского и Летова-Калмана, терминального управления, синтеза робастных систем управления и т.д. [4 – 10]. Но, несмотря на это, в полном объеме проблема оптимального управления тяговым электроприводом подвижного состава не решена и по сей день, поскольку не решена проблема синтеза оптимальных систем управления для объектов с несколькими управлениями, которые описываются нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Это, в свою очередь, привело к разработке методов линеаризации исходных нелинейных систем и последующему применению хорошо разработанной теории линейных систем управления [11]. Однако наиболее часто применяемая линеаризация по Тейлору, позволяющая линеаризовать систему в достаточно малой окрестности выбранной рабочей точки, практически неприменима для сложных объектов, описываемых нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Но научная привлекательность теории управления линейными системами, которая позволяет

синтезировать оптимальные системы управления для линейных объектов любого порядка, привела к разработке нового метода – геометрической линеаризации, основанного на геометрическом подходе к теории управления, теории групп, дифференциальной геометрии, алгебры Ли и т.д. Успехи этого метода линеаризации легли в основу создания нового научного течения – единой геометрической теории управления [12-14], которая с помощью обратной связи в пространстве «вход-выход» или «вход-состояние» позволяет преобразовывать нелинейные системы высокого порядка с несколькими управлениями в эквивалентные линейные системы. Это становится возможным благодаря декомпозиции исходной нелинейной модели объекта, представленной в некотором пространстве состояний, на ряд независимых линейных подсистем меньшей размерности в канонической форме Бруновского, которые принадлежат соответствующим подпространствам исходного пространства состояний. При этом каждая линейная подсистема уравнений содержит только одно управление [12].

Процесс получения линейного эквивалента для исходной нелинейной системы вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m u_k \mathbf{G}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M \subset R^n, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  – вектор фазовых координат нелинейной системы управления на гладком многообразии  $M$  размерности  $n$ ;  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{G}_k(\mathbf{x})$  – гладкие векторные поля на многообразии  $M$ , которые в локальных системах координат имеют вид  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}$  и  $\mathbf{G}_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \psi_{kj}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}$ ;  $\varphi_j(\mathbf{x})$ ,  $\psi_{kj}(\mathbf{x})$ ,  $j = \overline{1, n}$  – гладкие функции векторного аргумента  $\mathbf{x}$ , определенные в локальных системах координат на многообразии  $M$ ;  $u_k$ ,  $k = \overline{1, m}$  – управления, может быть сформулирован следующим образом: необходимо найти такую гладкую замену координат  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{z} \in R^n$  и управлений  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ ,  $(\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m))$ , что система уравнений (1) приводится в новой системе координат к некоторой ей эквивалентной управляемой линейной системе

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad \mathbf{z} \in R^n, \quad \mathbf{v} \in R^m, \quad m < n. \quad (2)$$

Здесь матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  имеют соответственно размеры  $n \times n$  и  $n \times m$  и являются блочно-

диагональными матрицами  
 $\mathbf{A} = \text{blockdiag}[\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p, \dots, \mathbf{A}_m]$ ,

$\mathbf{B} = \text{blockdiag}[\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p, \dots, \mathbf{B}_m]$ , где

$$\mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{q_p \times q_p}; \quad \mathbf{B}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{q_p \times 1}, \quad p = \overline{1, m},$$

где  $q_p$ ,  $p = \overline{1, m}$  – индексы управляемости линейной системы управления (2),  $\sum_{p=1}^m q_p = n$ . При

$m=1$ , т.е. при скалярном управлении, система уравнений (2) сводится к канонической форме:

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2; \quad \frac{dz_2}{dt} = z_3; \quad \dots \quad \frac{dz_{n-1}}{dt} = z_n; \quad \frac{dz_n}{dt} = v, \quad (3)$$

получившей название формы Бруновского. В случае векторного управления пространство  $R^n$  представляется в виде прямой суммы подпространств меньшей размерности:  $R^n = \bigoplus_{p=1}^m R^p$ .

При этом, каждое из подпространств  $R^p$  является подпространством состояний для  $p$ -й подсистемы декомпозированной исходной системы в пространстве  $R^n$ . Размерности подпространств, а следовательно, и размерности линейных подсистем в системе управления (2) однозначно определяются индексами управляемости  $q_p$ ,  $p = \overline{1, m}$  линейной системы (2). Каждая линейная подсистема уравнений имеет одно управление и структуру системы уравнений вида (3), где число дифференциальных уравнений равно индексу управляемости. При этом решение, полученное при совместном интегрировании  $m$  независимых линейных подсистем уравнений, являющихся результатом декомпозиции исходной нелинейной системы уравнений в некоторой области  $V_{R^n}$  пространства  $R^n$ , не может в самом общем случае совпадать с решением нелинейной системы (1) в этой же области  $V_{R^n}$ . Для перехода от нелинейной системы уравнений (1) к канонической форме Бруновского необходимо, с одной стороны, определить индексы управляемости  $q_p$  ( $p = \overline{1, m}$ ), а с другой стороны, выполнения дополнительных условия – условия инволютивности распределений  $M^j$  ( $j = \overline{0, n-m}$ ) [12], которые связаны с совместным

интегрированием векторных полей на многообразии  $M$ .

В нашем случае с исходной нелинейной системой (1) связаны распределение  $\Delta_0$  векторных полей  $\mathbf{G}_1(\mathbf{x}), \mathbf{G}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{G}_m(\mathbf{x})$   $\Delta_0 = \text{span} \{ \mathbf{G}_1(\mathbf{x}), \mathbf{G}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{G}_m(\mathbf{x}) \} = \text{span} \{ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \}$ , где  $\text{span}$  – линейная оболочка  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_m$  векторов в точке  $\mathbf{x}$  (минимальное пространство, порожденное этим набором векторов) и распределение  $\Delta_F = \Delta_0 + F = \text{span} \{ \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \}$ , где  $\Delta_F$  – распределение, смещенное на поле  $F$  относительно распределения  $\Delta_0$ . С помощью указанных распределений  $\Delta_0$  и  $\Delta_F$  определяется следующие два семейства распределений:

$$\begin{aligned} \Delta^0 &= \Delta_0; & M^0 &= \Delta_0; \\ \Delta^j &= \text{span} \{ \Delta^{j-1}, [\Delta_F, \Delta^{j-1}] \}; & M^j &= \text{span} \{ M^{j-1}, [F, M^{j-1}] \}; \\ \Delta^\infty &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \Delta^j; & M^\infty &= \bigcup_{j=0}^{\infty} M^j, \end{aligned}$$

где  $[F, G]$  – скобки Ли двух векторных полей  $F, G$ , это векторное поле, характеризующее степень "связанности" на многообразии  $M$  полей  $F$  и  $G$ . В рассматриваемом случае они характеризуют возможность или ее отсутствие для совместного интегрирования задаваемых векторными полями  $F$  и  $G$  на гладком многообразии  $M$  уравнений в частных производных. Скобки Ли для векторных полей  $F, G$  в матричной форме, определяются следующим образом:

$$[F, G](\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}),$$

$$\text{где } \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_n(\mathbf{x}))^T;$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}))^T.$$

В случае неинволютивности распределений  $M^j$  ( $j = \overline{0, n-m}$ ) точная линеаризация возможна за счет увеличения размерности пространства и получения инволютивных распределений уже на расширенном пространстве [12].

Теоретически такой подход позволяет преобразовать к линейному виду широкий класс нелинейных систем управления, причем независимо от их размерности, однако его практическое применение, является чрезвычайно сложным и трудоемким, так как требует выполнения большого количества аналитических преобразований: вычисление производных и скобок Ли, а также дифференцирования функций вдоль соответствующих векторных полей на некотором многообразии и т.д., которые не автоматизированы ни в одном из известных пакетов моделирования. В связи с этим, в работах [15–17] были разработаны соответствующие функции для универсального пакета моделирования Matlab, позволяющие автоматизировать сложные аналитические преобразования геометрической линеаризации нелинейных математических моделей объектов, что, в свою очередь, устранило разрыв между теоретическими результатами геометрической теории управления и решением практических задач. Как следствие этого, появилась возможность применения геометрической теории управления для синтеза систем управления

нелинейными объектами высокого порядка с несколькими управлениями. Однако определение оптимальных законов управления в каждой из подсистем не гарантирует оптимальность управления объектом в целом, поэтому необходим анализ полученных результатов оптимизации и, при необходимости, корректировка полученных результатов.

**Цель работы.** Оптимизация законов управления движением дизель-поезда с тяговым электроприводом на основе динамической линеаризации математической модели объекта управления средствами инволютивных распределений геометрической теории управления.

Математическая модель движения дизель-поезда состоящего из трех вагонов [15], учитывающая, с одной стороны, основные виды колебаний вагонов подвижного состава и распределение сил взаимодействия между ними, а с другой стороны, параллельную работу эквивалентных тяговых асинхронных двигателей двух обмоточных вагонов, может быть представлена следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений с четырьмя управлениями:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_2; \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_4y_{11} + a_{22}y_5y_{10} + a_{23}y_3 + a_{24}; \\ \frac{dy_3}{dt} &= a_{31}y_2 + a_{32}y_{13}; \\ \frac{dy_4}{dt} &= a_{41}y_4 + a_{42}y_5 - y_9y_{10}; \\ \frac{dy_5}{dt} &= a_{51}y_5 + a_{52}y_4 + y_6; \frac{dy_6}{dt} = U_1^* \\ \frac{dy_7}{dt} &= y_8; \\ \frac{dy_8}{dt} &= a_{71} \frac{y_8}{y_{13}} + a_{72}y_{19} + a_{73}y_7; \\ \frac{dy_9}{dt} &= a_{81}y_4y_{11} + a_{82}y_5y_{10} + a_{83}y_9 + a_{84}y_9^2 + a_{85}; \\ \frac{dy_{10}}{dt} &= a_{91}y_{10} + a_{92}y_{11} - y_9y_4; \\ \frac{dy_{11}}{dt} &= a_{101}y_{11} + a_{102}y_{10} + y_{12}; \frac{dy_{12}}{dt} = U_2^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_{13}}{dt} &= a_{111}y_3 + a_{112}y_{14} + a_{113}; \\ \frac{dy_{14}}{dt} &= a_{121}y_{13} + a_{122}y_{15}; \\ \frac{dy_{15}}{dt} &= a_{131}y_{16}y_{23} + a_{132}y_{17}y_{22} + a_{133}y_{14} + a_{134}; \\ \frac{dy_{16}}{dt} &= a_{141}y_{16} + a_{142}y_{17} - y_{21}y_{22}; \\ \frac{dy_{17}}{dt} &= a_{151}y_{17} + a_{152}y_{16} + y_{18}; \frac{dy_{18}}{dt} = U_3^*; \\ \frac{dy_{19}}{dt} &= y_{20}; \\ \frac{dy_{20}}{dt} &= a_{171} \frac{y_{20}}{y_{13}} + a_{172}y_7 + a_{173}y_{19}; \\ \frac{dy_{21}}{dt} &= a_{181}y_{16}y_{23} + a_{182}y_{17}y_{22} + a_{183}y_{21} + a_{184}y_{21}^2 + a_{185}; \\ \frac{dy_{22}}{dt} &= a_{191}y_{22} + a_{192}y_{23} - y_{21}y_{16}; \\ \frac{dy_{23}}{dt} &= a_{201}y_{23} + a_{202}y_{22} + y_{24}; \frac{dy_{24}}{dt} = U_4^* \end{aligned}$$

где  $y_1$  – расстояние, проходимое дизель-поездом и отсчитываемое от начала перегона;  $t$  – время;  $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{192}, a_{201}, a_{202}$  – постоянные коэффициенты, которые учитывают параметры двух эквивалентных приводов обмоточных

вагонов и подвижного состава;  $y_2, y_{13}, y_{15}$  – скорости движения, соответственно первого, второго и третьего вагонов дизель-поезда;  $y_3, y_{14}$  – силы, действующие между соответственно первым и вторым, и вторым и

третьим вагонами поезда;  $y_5, y_{17}$  и  $y_{11}, y_{23}$  – проекции на оси  $\alpha$  и  $\beta$  потокосцеплений статоров эквивалентных двигателей соответственно первого и второго обмоточных вагонов;  $y_6, y_{18}$  и  $y_{12}, y_{24}$  – проекции на оси  $\alpha$  и  $\beta$  напряжений обмоток статоров эквивалентных двигателей соответственно первого и второго обмоточных вагонов;  $y_4, y_{16}$  и  $y_{10}, y_{22}$  – проекции на оси  $\alpha$  и  $\beta$  потокосцеплений роторов эквивалентных двигателей соответственно первого и второго обмоточных вагонов;  $y_9$  и  $y_{21}$  – угловые

скорости вращения роторов двигателей соответственно первого и второго обмоточных вагонов;  $y_7$  – величина бокового отклонения второго вагона;  $y_8, y_{20}$  – промежуточные переменные;  $y_{19}$  – угол виляния второго вагона.

С помощью инволютивных распределений геометрической теории управления в пространстве «вход – состояние» исходная нелинейная математическая модель движения дизель-поезда может быть преобразована к следующей линейной системе в канонической форме Бруновского:

$$\frac{dz_i}{dt} = z_{i+1}, \quad i = \overline{1, 23}, \quad i \neq 6, 12, 18; \quad \frac{dz_6}{dt} = v_1; \quad \frac{dz_{12}}{dt} = v_2; \quad \frac{dz_{18}}{dt} = v_3; \quad \frac{dz_{24}}{dt} = v_4, \quad (4)$$

где  $v_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) – управления.

Для данной математической модели определяются функции  $T_j(\mathbf{y}) = T_j(y_1, y_2, \dots, y_{24})$  ( $j = \overline{1, 4}$ ), преобразующие переменные исходной нелинейной модели объекта управления в переменные линейной модели в форме Бруновского:  $z_1 = T_1(\mathbf{y})$ ;  $z_7 = T_2(\mathbf{y})$ ;  $z_{13} = T_3(\mathbf{y})$ ;  $z_{19} = T_4(\mathbf{y})$ . Методика определения этих функций описана в работах [12, 15 – 17]. Из этих функций путем последовательного дифференцирования

можно получить выражения для определения переменных:  $z_2, z_3, z_4, z_5$  из функции  $T_1(\mathbf{y})$ ;  $z_8, z_9, z_{10}, z_{11}$  из функции  $T_2(\mathbf{y})$ ;  $z_{14}, z_{15}, z_{16}, z_{17}$  из функции  $T_3(\mathbf{y})$ ;  $z_{20}, z_{21}, z_{22}, z_{23}$  из функции  $T_4(\mathbf{y})$ . Благодаря этому были получены функции, связывающие переменные в линейной и нелинейной моделях.

Для первой подсистемы уравнений в форме Бруновского получено

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1; \quad z_2 = \frac{dz_1}{dt} = a_{11}y_2; \quad z_3 = \frac{dz_2}{dt} = a_{11}(a_{24} + a_{23}y_3 + a_{21}y_{11}y_4 + a_{22}y_{10}y_5); \\ z_4 &= \frac{dz_3}{dt} = a_{11}a_{23}(a_{32}y_{13} + a_{31}y_2) + a_{11}a_{21}y_{11}(a_{41}y_4 + a_{42}y_5 - y_{10}y_9) + a_{11}a_{22}y_5(a_{91}y_{10} + a_{92}y_{11} - y_4y_9) + \\ &\quad + a_{11}a_{21}y_4(y_{12} + a_{102}y_{10} + a_{101}y_{11}) + a_{11}a_{22}y_{10}(y_6 + a_{52}y_4 + a_{51}y_5); \\ z_5 &= \frac{dz_4}{dt} = a_{11}(y_{12} + a_{102}y_{10} + a_{101}y_{11})(a_{101}a_{21}y_4 + a_{21}a_{41}y_4 + a_{21}a_{42}y_5 + a_{22}a_{92}y_5 - a_{21}y_{10}y_9) - a_{11}(a_{21}y_{10}y_{11} + a_{22}y_4y_5) \cdot \\ &\quad \cdot (a_{84}y_9^2 + a_{83}y_9 + a_{85} + a_{81}y_{11}y_4 + a_{82}y_{10}y_5) + a_{11}(y_6 + a_{52}y_4 + a_{51}y_5)(a_{21}a_{42}y_{11} + a_{22}a_{51}y_{10} + a_{22}a_{91}y_{10} + a_{22}a_{92}y_{11} - \\ &\quad - a_{22}y_4y_9) + a_{11}(a_{41}y_4 + a_{42}y_5 - y_{10}y_9)(a_{21}y_{12} + a_{102}a_{21}y_{10} + a_{101}a_{21}y_{11} + a_{21}a_{41}y_{11} + a_{22}a_{52}y_{10} - a_{22}y_5y_9) + a_{11}(a_{91}y_{10} + \\ &\quad + a_{92}y_{11} - y_4y_9)(a_{22}y_6 + a_{102}a_{21}y_4 + a_{22}a_{52}y_4 + a_{22}a_{51}y_5 + a_{22}a_{91}y_5 - a_{21}y_{11}y_9) + a_{11}a_{23}a_{32}(a_{113} + a_{112}y_{14} + a_{111}y_3) + \\ &\quad + a_{11}a_{23}a_{31}(a_{24} + a_{23}y_3 + a_{21}y_{11}y_4 + a_{22}y_{10}y_5). \end{aligned}$$

Для второй подсистемы уравнений в форме Бруновского получено

$$\begin{aligned} z_7 &= y_7; \quad z_8 = \frac{dz_7}{dt} = y_8; \quad z_9 = \frac{dz_8}{dt} = (a_{71}y_8 + a_{72}y_{13}y_{19} + a_{73}y_{13}y_7) / y_{13}; \\ z_{10} &= \frac{dz_9}{dt} = (a_{71}^2y_8 + a_{72}y_{13}^2y_{20} + a_{73}y_{13}^2y_8 - a_{113}a_{71}y_8 + a_{71}a_{72}y_{13}y_{19} - a_{112}a_{71}y_{14}y_8 - a_{111}a_{71}y_3y_8 + a_{71}a_{73}y_{13}y_7) / y_{13}^2; \end{aligned}$$

$$z_{11} = \frac{dz_{10}}{dt} = a_{72}(a_{171}y_{20} + a_{173}y_{13}y_{19} + a_{172}y_{13}y_7)/y_{13} - ((a_{71}y_8 + a_{72}y_{13}y_{19} + a_{73}y_{13}y_7)(a_{113}a_{71} - a_{73}y_{13}^2 - a_{71}^2 + a_{112}a_{71}y_{14} + a_{111}a_{71}y_3))/y_{13}^3 + (a_{71}(a_{113} + a_{112}y_{14} + a_{111}y_3)(2a_{113}y_8 - 2a_{71}y_8 - a_{72}y_{13}y_{19} + 2a_{112}y_{14}y_8 + 2a_{111}y_3y_8 - a_{73}y_{13}y_7))/y_{13}^3 + (a_{71}a_{72}y_{20})/y_{13} + (a_{71}a_{73}y_8)/y_{13} - (a_{112}a_{71}y_8(a_{121}y_{13} + a_{122}y_{15}))/y_{13}^2 - (a_{111}a_{71}y_8(a_{32}y_{13} + a_{31}y_2))/y_{13}^2.$$

Аналогично получены функции, подсистемы уравнений в канонической форме связывающие переменные в линейной и Бруновского получено: нелинейной моделях для третьей и четвертой

$$z_{13} = y_{13}; \quad z_{14} = \frac{dz_{13}}{dt} = a_{113} + a_{112}y_{14} + a_{111}y_3; \quad z_{15} = \frac{dz_{14}}{dt} = a_{112}a_{121}y_{13} + a_{112}a_{122}y_{15} + a_{111}a_{32}y_{13} + a_{111}a_{31}y_2;$$

$$z_{16} = \frac{dz_{15}}{dt} = (a_{112}a_{121} + a_{111}a_{32})(a_{113} + a_{112}y_{14} + a_{111}y_3) + a_{112}a_{122}(a_{134} + a_{133}y_{14} + a_{131}y_{16}y_{23} + a_{132}y_{17}y_{22}) + a_{111}a_{31}(a_{24} + a_{23}y_3 + a_{21}y_{11}y_4 + a_{22}y_{10}y_5);$$

$$z_{19} = y_{19}; \quad z_{20} = \frac{dz_{19}}{dt} = y_{20}; \quad z_{21} = \frac{dz_{20}}{dt} = (a_{171}y_{20} + a_{173}y_{13}y_{19} + a_{172}y_{13}y_7)/y_{13};$$

$$z_{22} = \frac{dz_{21}}{dt} = (a_{171}^2y_{20} + a_{173}y_{13}^2y_{20} + a_{172}y_{13}^2y_8 - a_{113}a_{171}y_{20} + a_{171}a_{173}y_{13}y_{19} - a_{112}a_{171}y_{14}y_{20} - a_{111}a_{171}y_{20}y_3 + a_{171}a_{172}y_{13}y_7)/y_{13}^2;$$

Таким образом, исходная нелинейная математическая модель движения дизель-поезда 24-го порядка была разбита на четыре независимых линейных подсистем шестого порядка в канонической форме Бруновского, каждая из которых содержит только одно управление.

Линейная математическая модель объекта управления в форме Бруновского состоит из четырех одинаковых по внешнему виду подсистем дифференциальных уравнений, которые описывают эквивалентные асинхронные электроприводы двух обмоточных вагонов дизель-поезда. Поскольку электроприводы в обмоточных вагонах в первом приближении можно рассматривать как одинаковые, то будем определять оптимальные управления только для одного эквивалентного асинхронного привода, управление которым осуществляется путем изменения амплитуды и частоты питающего напряжения. Так как при управлении тяговым приводом часто выдерживают определенные соотношения между амплитудой и частотой питающего напряжения (например, отношение амплитуды к частоте равно константе), то можно осуществлять поиск только одного из управлений, например, амплитуды питающего напряжения.

В зависимости от требований, предъявляемых к движению состава, можно

сформулировать две основных задачи оптимального управления тяговым приводом: максимального быстродействия и минимизации взвешенной линейной комбинации времени и расхода квадрата управления.

Решим вначале с помощью принципа максимума Понтрягина задачу максимального быстродействия. Поскольку линейная модель объекта управления в форме Бруновского (4) состоит из четырех одинаковых по внешнему виду подсистем дифференциальных уравнений, то можно рассматривать определение управления  $v_1$ , минимизирующего функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt, \quad (5)$$

где  $t_0$  и  $t_1$  – начало и конец интервала управления, только для одной из подсистем – первой:

$$\frac{dz_k}{dt} = z_{k+1}, \quad k = \overline{1, 5}; \quad \frac{dz_6}{dt} = v_1. \quad (6)$$

Необходимо найти управление  $v_1$ , минимизирующее функционал (5) при переводе объекта (6) из начального состояния  $z_i(t_0) = 0, i = \overline{1, 6}$  в конечное состояние  $z_1(t_1) = L, z_j(t_1) = 0, j = \overline{2, 5}$ . При этом на управление  $v_1$  наложены ограничения:

$$v_{1\min} \leq v_1 \leq v_{1\max}; v_{1\min} \leq 0, v_{1\max} > 0. \quad (7)$$

$$H(z_i(t), \psi_i(t), v_1) = \psi_1 z_2 + \psi_2 z_3 + \psi_3 z_4 + \psi_4 z_5 + \psi_5 z_6 + \psi_6 v_1 + \psi_0 z_0, \quad i = \overline{0, 6}; \quad (8)$$

$$H(z_i(t), \psi_i(t), v_1) = \max_{v_1 \in G} H(z_i(t), \psi_i(t), v_1),$$

где  $z_0 \equiv 1$  – дополнительная фазовая переменная, учитывающая наличие функционала (5);  $\psi_i (i = \overline{0, 6})$  – сопряженные переменные;  $G$  – область допустимых управлений, задаваемая неравенствами (7).

В силу линейности гамильтониана (8) по отношению к управлению  $v_1$  получаем, что он достигает своего максимального значения при условии, что управление  $v_1$  по своему знаку противоположно сопряженной переменной  $\psi_6$ :

$$v_1 = \begin{cases} v_{1\max} \psi_6, & \text{при } \psi_6 > 0, \\ v_{1\min} \psi_6, & \text{при } \psi_6 < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Сопряженные переменные  $\psi_i (i = \overline{0, 6})$  определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \quad \psi_i(t_1) = \psi_{i1}, \quad i = \overline{0, 6}, \quad (10)$$

где  $\psi_i(t_1) (i = \overline{0, 6})$  – значения сопряженных переменных в конечный момент интервала управления.

Выполняя дифференцирование правых частей уравнений (10), с учетом выражения (8), получим:

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0; \quad \frac{d\psi_1}{dt} = 0; \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1; \quad \frac{d\psi_3}{dt} = -\psi_2; \quad \frac{d\psi_4}{dt} = -\psi_3; \quad \frac{d\psi_5}{dt} = -\psi_4; \quad \frac{d\psi_6}{dt} = -\psi_5. \quad (11)$$

Интегрируя дифференциальные уравнения (11), найдем сопряженные переменные:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= c_0; \quad \psi_1 = c_1; \quad \psi_2 = -c_1 t + c_2; \quad \psi_3 = \frac{c_1}{2} t^2 - c_2 t + c_3; \quad \psi_4 = -\frac{c_1}{6} t^3 + \frac{c_2}{2} t^2 - c_3 t + c_4; \\ \psi_5 &= \frac{c_1}{24} t^4 - \frac{c_2}{6} t^3 + \frac{c_3}{2} t^2 - c_4 t + c_5; \quad \psi_6 = -\frac{c_1}{120} t^5 + \frac{c_2}{24} t^4 - \frac{c_3}{6} t^3 + \frac{c_4}{2} t^2 - c_5 t + c_6, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $c_k (k = \overline{0, 6})$  – константы.

Так как константы  $c_i (i = \overline{0, 6})$  неизвестны, то применение принципа максимума Понтрягина приводит на этом этапе к качественному описанию изменения управления. Поскольку функция  $\psi_6(t)$  может менять знак не более пяти раз, то и управление  $v_1$  может иметь не более пяти изменений знака управления, т.е. не более шести интервалов постоянства управления. Однако в рассматриваемом случае решение существенно упрощается, поскольку при ровном участке железнодорожного пути перевозка пассажиров дизель-поездом начинается с разгона, достижения максимальной скорости, движения с этой скоростью, а затем – торможение и остановка, то есть наблюдается только два интервала постоянства управления. Время переключения с одного постоянного управления на другое может быть определено с помощью

$$H(z_i(t), \psi_i(t), v_1) = \psi_1 z_2 + \psi_2 z_3 + \psi_3 z_4 + \psi_4 z_5 + \psi_5 z_6 + \psi_6 v_1 + (1 + k_v v_1^2) \psi_0, \quad i = \overline{0, 6};$$

итерационной процедуры. Переменный профиль пути на равнинной местности не вносит существенных изменений в закон управления, однако время переключения с одного управления на другое может изменяться и может не быть интервала времени с постоянной скоростью движения.

При решении задачи минимизации взвешенной линейной комбинации времени движения и расхода квадрата управления, объект управления описывается системой уравнений (6), а управление определяется из условия минимума функционала:

$$J = \int_0^{t_1} (1 + k_v v_1^2) dt, \quad (13)$$

где  $k_v$  – постоянный коэффициент.

Основные соотношения принципа максимума Понтрягина имеют вид:

$$H(z_i(t), \psi_i(t), v_1) = \max_{v_1 \in G} (H(z_i(t), \psi_i(t), v_1)), \quad i = \overline{0, 6};$$

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad z_i(t_0) = 0, \quad i = \overline{1, 6}; \quad z_1(t_1) = L; \quad z_i(t_1) = z_{i1}, \quad i = \overline{2, 6};$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \quad \psi_i(t_1) = \psi_{i1}, \quad i = \overline{0, 6}, \quad (14)$$

где  $G$  – область допустимых управлений, задаваемая неравенствами (7);  $z_i(t_0)$ ,  $z_i(t_1)$  – значения фазовых переменных соответственно в начальный и конечный момент времени  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $i = \overline{1, 6}$ ;  $\psi_i(t_1)$  – значения сопряженных переменных в конечный момент времени  $t_1$ ,  $i = \overline{0, 6}$ .

Сопряженные переменные  $\psi_i(t)$ ,  $i = \overline{0, 6}$ , как и в задаче максимального быстродействия, определяются соотношениями (11).

Если управление  $v_1$  в режиме тяги находится внутри допустимой области управлений  $G$ , тогда справедливо соотношение

$$\Phi = \frac{\partial H}{\partial v_1} = \psi_6 + 2k_v v_1 \psi_0 = 0, \quad v_1 = -\frac{\psi_6}{2k_v \psi_0} < v_{1\max}.$$

По основной теореме принципа максимума [18] вектор сопряженных переменных  $\vec{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_4)$  определен с точностью до произвольного постоянного положительного множителя и  $\psi_0(t) = \text{const} < 0$  (ситуация аномальных вариационных задач, когда  $\psi_0(t) = 0$ , не рассматривается, поскольку решаемая задача к этому классу не относится), поэтому можно принять:  $\psi_0 \equiv -1$ .

В рассматриваемой задаче в интервале времени управления режимом тяги выполняется равенство

$$H = \max_{u \in G} H(z_i(t), \psi_i(t), v_1) = \text{const} = 0. \quad (15)$$

Имея два интеграла  $H$  и  $\Phi$  уравнений движения, можно с помощью скобок Пуассона получить третий интеграл движения [19]:

$$[H\Phi]_{\Pi} = \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial H}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} - \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \right) = 0 \quad (16)$$

или

$$[H\Phi]_{\Pi} = \psi_5 = 0, \quad (17)$$

где  $[H\Phi]_{\Pi}$  – скобки Пуассона интегралов  $H$  и  $\Phi$  уравнений движения.

Из выражений (12) и (17) следует, что  $\psi_5 = \frac{c_1}{24} t^4 - \frac{c_2}{6} t^3 + \frac{c_3}{2} t^2 - c_4 t + c_5 = 0$ , поэтому  $c_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 5}$  и  $\psi_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 5}$ .

Таким образом, при  $\psi_0 = -1$ ,  $\psi_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 5}$  имеем:

$$H = \psi_6 v_1 - (1 + k_v v_1^2) = 0 \quad \text{и} \quad \psi_6 - 2k_v v_1 = 0. \quad (18)$$

Исключая  $\psi_6$  из выражений (18), получим  $v_1 = \sqrt{1/k_v}$ .

При малых значениях  $k_v$  управление  $v_1$  в режиме тяги может превосходить  $v_{1\max}$ , т.е. выходить за пределы допустимой области управлений, поэтому оно должно определяться соотношением:

$$v_1 = \begin{cases} \sqrt{1/k_v}, & \text{если } \sqrt{1/k_v} \leq v_{1\max}, \\ v_{1\max}, & \text{если } \sqrt{1/k_v} > v_{1\max}. \end{cases}$$

Определим минимально допустимое значение коэффициента  $k_{v\min}$ , которое имеет смысл использовать в функционале (13):

$$k_{v\min} \geq \frac{1}{v_{1\max}^2}.$$

Следовательно, только при  $k_v > k_{v\min}$  решение рассматриваемой задачи будет отличаться от решения задачи максимального быстродействия.

Исходя из изложенного можно сделать вывод о том, что для уменьшения расхода энергии или топлива, необходимого на перемещение состава с различной загрузкой из начального в конечный пункт назначения за определенное время, машинисту необходимо вести дизель-поезд с минимально возможной скоростью, при которой обеспечивается заданный расписанием график движения по перегону.

Однако знание оптимальных управлений для каждой головки дизель-поезда не гарантирует оптимального управления всем составом, что подтверждается и практикой эксплуатации. Как показывает практика движения дизель-поездов ДЭЛ-02 на маршрутах пригородного сообщения Одесской железной дороги при перевозке

пассажиrow на равнинной местности (когда переменный профиль пути не вносит существенных изменений в закон управления), расход энергоресурсов при ведении подвижного состава с помощью двух головок дизель-поезда, работающих синхронно на одинаковых позициях контроллера машиниста, выше, чем при ведении состава на одной головке поезда с полностью выключенной второй головкой (в летний период года), или с частично включенной второй головкой (в зимний период), когда необходима выработка энергии для внутренних нужд поезда и обогрева вагонов. При этом меньший расход энергоресурсов наблюдается даже несмотря на то, что машинисту приходится осуществлять более интенсивный разгон состава на одной головке с помощью более высоких тяговых позиций контроллера машиниста до большей скорости движения, а также осуществлять интенсивное торможение для выдерживания времени, связанного с расписанием движения поезда по данному маршруту.

Рассмотрим примеры движения дизель-поезда между двумя станциями маршрута на равном участке железнодорожного пути длиной  $L = 3$  км за время  $t = 5$  мин с учетом действующих ограничений на скорость ( $V \leq 50$  км/ч) и максимальное значение ускорения  $a$  при ведении подвижного состава связанных с комфортом поездки пассажиров в режимах разгона и торможения ( $-1 \div -0.7 \text{ м/с}^2 \leq a \leq 0.7 \div 1 \text{ м/с}^2$ ). На рис. 1 представлены графики изменения во времени позиций тягового ( $N_{\text{КМ}}$ ) и тормозного ( $N_{\text{ТКМ}}$ ) контроллеров машиниста, скорости движения первого, второго и третьего вагонов дизель-поезда ( $V_1 \equiv y_2, V_2 \equiv y_{13}, V_3 \equiv y_{15}$ ), ускорения первого вагона поезда ( $a$ ), пройденного пути ( $S \equiv y_1$ ), силы, действующие между первым и вторым ( $F_{12} \equiv y_3$ ), и вторым и третьим вагонами поезда ( $F_{23} \equiv y_{14}$ ), а также расходов энергии ( $E$ ) потребленной дизель-поездом при движении

между двумя станциями. При этом на рис. 1, а, в представлены графики процессов при одновременном использовании в процессе движения двух моторных вагонов дизель-поезда, работающих синхронно на 1-3 позициях тягового контроллера машиниста в режиме разгона поезда (с 0 по 80 сек) и на 2 позиции в режиме поддержания заданной максимальной скорости ( $V = 50$  км/ч) движения (с 81 по 245 сек), а на рис. 1, б, г – при использовании одного моторного вагона дизель-поезда работающей на 1-6 позициях тягового контроллера машиниста в режиме разгона поезда (с 0 по 145 сек) и на 4 позиции в режиме поддержания заданной максимальной скорости ( $V = 50$  км/ч) движения (с 146 по 245 сек).

Как видно из графиков на рис. 1 расход энергии  $E$  при ведении подвижного состава с помощью двух обмоторенных вагонов дизель-поезда, работающих синхронно на одинаковых позициях контроллера машиниста выше, чем при ведении состава с помощью одного обмоторенного вагона поезда с полностью выключенным вторым обмоторенным вагоном. Это связано с тем, что на нижних позициях контроллера машиниста к.п.д. использования топлива для реализации управления меньше чем на высших позициях контроллера машиниста. Так, например, суммарная мощность, которая вырабатывается двумя тяговыми генераторами дизель-поезда ДЭЛ-02 для реализации второй позиции контроллера машиниста при поддержании скорости движения поезда  $V_1 = 50$  км/ч (рис. 1, а, с 81 по 245 сек), при условии синхронного использования двух обмоторенных вагонов, выше, чем мощность, которую вырабатывает тяговый генератор первого обмоторенного вагона дизель-поезда для реализации четвертой позиции контроллера машиниста (рис. 1, б, с 146 по 245 сек) при поддержании той же скорости движения подвижного состава (табл. 1).

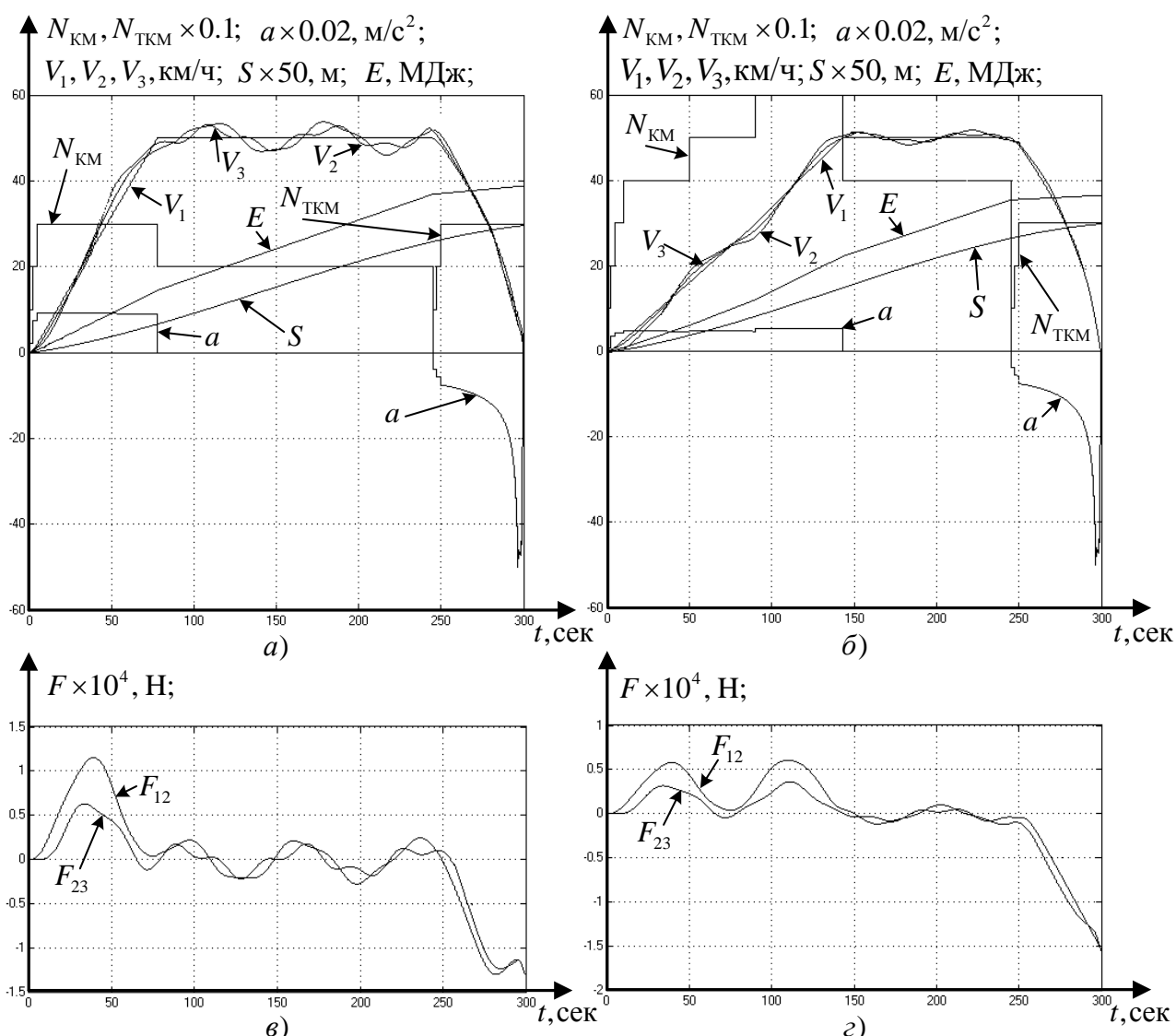


Рис. 1. Графики полученные при движении дизель-поезда на равном участке пути с использованием: а, в – двух тяговых головок (синхронно); б, г – одной тяговой головки

Fig. 1. Graphs of a diesel train moving on the level track with the use of: а, в – 2 traction drives (in synchronism); б, г – one traction drive

Таблица 1

Частота вращения ( $n_d$ ) и тягового генератора ( $P_r$ ) по позициям контроллера машиниста (КМ)

Table 1

Rotation rate ( $n_d$ ) and traction generator ( $P_r$ ) by reference to the main controller (KM)

Позиция КМ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n_d, \text{мин}^{-1}$	800	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2100
$P_r, \text{кВт}$	83	83	128	190	246	333	386	432	472

Следовательно, необходима модификация метода оптимизации энергозатрат тягового подвижного состава, связанная с введением дополнительного этапа поиска оптимальных управлений, т.е. оптимизацию необходимо проводить в несколько этапов, один из которых предполагает поиск оптимальных управлений на уровне тяговых электроприводов обмоточных

вагонов дизель-поезда, а другой, оптимизацию на уровне движения всего состава по железнодорожным перегонам.

### Заключение

Средствами инволютивных распределений геометрической теории управления получена работоспособная линейная математическая

модель движения дизель-поезда с двумя эквивалентными тяговыми электроприводами, которая эквивалентна нелинейной математической модели, описываемой системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 24-го порядка с четырьмя управлениями. Число уравнений в этой модели, по меньшей мере, в пять раз больше, чем в известных примерах, где применяется геометрическая теория управления. С помощью полученной модели и принципа максимума Понтрягина решены две задачи оптимального управления дизель-поездом.

### Список литературы

1. Комплексна програма оновлення залізничного рухомого складу України на 2008–2020 роки / Міністерство транспорту та зв'язку України, Державна Адміністрація залізничного транспорту України. Київ, 2009. 299 с.

2. Розпорядження «Транспортна стратегія України на період до 2020 р.», схвалена постановою Кабінету Міністрів України від 20 жовтня 2010 р. № 2174. URL: <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/2174-2010-p> (дата обращения: 18.03.2016).

3. Проект «Стратегічний план розвитку залізничного транспорту на період до 2020 р.» URL: <http://mtu.gov.ua/projects/view.php?P=23> (дата обращения: 13.10.2016).

4. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и томах. Т. 5: Методы современной теории управления / [под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова]. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 784 с.

5. Скалозуб В.В. Оптимизация режимов ведения поездов на основе непрерывного динамического программирования / В.В. Скалозуб, К.И. Железнов // Математичне моделювання. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2002. № 2. С. 32-36.

6. Aseev S.M. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons / S.M. Aseev, A.V. Kryazhinskii. SIAM. Control Optim. 2004. P. 1094-1119.

7. Пропой А.И. О построении функций Ляпунова / А.И. Пропой // Автоматика и телемеханика. М.: Наука. 2000. № 6. С. 61-69.

8. Мезенцев Н.В. Новые модификации метода АКОР для случая нелинейного вхождения управлений / Н.В. Мезенцев // Вісник НТУ «ХПІ». Харків: НТУ «ХПІ». 2007. № 39. С. 119-124.

9. Поляк Б.Ф. Робастная устойчивость и управление / Б.Ф. Поляк, П.С. Щербаков. М.: Наука. 2002. 303 с.

10. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. Изд. 2. / Д.П. Ким. М.: Физматлит, 2007. 312 с.

11. Краснощёченко В.И. Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / В.И. Краснощёченко, А.П. Грищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2005. 520 с.

12. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. Изд. 2. / Д.П. Ким. М.: Физматлит, 2007. 440 с.

13. Kim D.P. Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System / D.P. Kim. Seoul: Harnol, 2000. 558 p.

14. Дмитриенко В.Д. Моделирование и оптимизация процессов управления движением дизель-поездов / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный. Х.: Изд. центр «НТМТ», 2013. 248 с.

15. Дмитриенко В.Д. Разработка программных средств для автоматизации преобразований нелинейных систем к эквивалентным линейным в форме Бруновского / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный, А.О. Нестеренко // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ «ХПІ». 2014. № 35 (1078). С. 59-72.

16. Дмитриенко В.Д. Автоматизация символьных вычислений в процессе преобразования нелинейных моделей объектов к эквивалентным линейным / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный // Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems. Baku, 2014. Vol. XXXIV. № 6. С. 130-139.

17. Дмитриенко В.Д. Синтез оптимальных законов управления движением дизель-поезда с помощью математической модели в форме Бруновского / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный, Н.В. Мезенцев // Науково-технічний журнал «Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті». Харків, 2010. № 5-6 (84-85). С. 7-13.

18. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и томах. Т.4: Теория оптимальных систем автоматического управления / [под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова]. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 744 с.

19. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. В 10 томах / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц // Т.1. Механика. М.: Наука, 1988. 215 с.

### References

1. Comprehensive Program of Updating of the Rolling Stock in Ukraine in 2008-2020 years / The Ministry of Transport and Communications of Ukraine, The State Administration of Railway Transport of Ukraine. Kyiv, 2009. 299 p.

2. The Order «Transport Strategy of Ukraine till 2020», approved by the Cabinet of Ministers of Ukraine on October 20, 2010 p. № 2174. URL: <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/2174-2010-p> (date of access: March 18, 2016).

3. The «Strategic Plan for the Development of Railway transport till 2020» URL: <http://mtu.gov.ua/projects/view.php?P=23> (date of access: October 13, 2016).

4. Methods of the Classical and Modern Control Theory: Textbook in 5 volumes. Vol. 5: Methods of modern control theory / [ed. K.A. Pupkov, N.D. Egupov]. M.: MG TU im. Baumana, 2004. 784 p.

5. Skalozub V.V. Optimization of Reference Trains Regimes on the Basis of Continuous Dynamic Programming / V.V. Skalozub, K.I. Zhelezov // Mathematical modeling. Dnipropetrovsk: DDTU, 2002. № 2. Pp. 32-36.

6. Aseev S.M. The Pontryagin Maximum Principle and Transversality Conditions for a Class of Optimal Control Problems with Infinite Time Horizons / S.M. Aseev, A.V. Kryazhimskii. SIAM. Control Optim. 2004. Pp. 1094-1119.

7. Propoy A.I. On the Construction of Lyapunov Functions / A.I. Propoy // Automation and Remote Control. M.: Nauka. 2000. № 6. Pp. 61-69.

8. Mezentsev N.V. New Modifications of ACOR Method for the Case of Occurrence of Nonlinear Controls / N.V. Mezentsev // News of NTU «KhPI». Kharkiv: NTU «KhPI». 2007. № 39. Pp. 119-124.

9. Polyak B.F. Robust Stability and Control / B.F. Polyak, P.S. Shcherbakov. M.: Nauka. 2002. 303 p.

10. Kim D.P. The Theory of Automatic Control. Vol.1. Linear Systems. Ed. 2 / D.P. Kim. M.: FIZMATLIT, 2007. 312 p.

11. Krasnoschechenko V.I. Nonlinear Systems: The Geometric Method of Analysis and Synthesis / V.I. Krasnoschëchenko, A.P. Grishchenko. M.: MG TU im Baumana. 2005. 520 p.

12. Kim D.P. The Theory of Automatic Control. Vol.2. Multi-dimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems. Ed. 2 / D.P. Kim. M.: FIZMATLIT, 2007. 440 p.

13. Kim D.P. Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System / D.P. Kim. Seoul: Harnol, 2000. 558 p.

14. Dmitrienko V.D. Modelling and Optimization of Management Processes of Diesel-trains / V.D. Dmitrienko, A.Y. Zakovorotniy. Kharkov: HTMT, 2013. 248 p.

15. Dmitrienko V.D. Development of Software for Automating Transformations of Nonlinear Systems Equivalent to the Linear Form of Brunovsky / V.D. Dmitrienko, A.Y. Zakovorotniy, S.A. Nesterenko // Vestnik NTU «KhPI». Series: Information and Simulation. Kharkov: NTU «KhPI». 2014. № 35 (1078). Pp. 59-72.

16. Dmitrienko V.D. Automation of Symbolic Computation in the Process of Conversion of Non-linear Models of Objects to the Equivalent Linear / V.D. Dmitrienko, A.Y. Zakovorotniy // Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems. Baku, 2014. Vol. XXXIV. № 6. Pp. 130-139.

17. Dmitrienko V.D. Synthesis of Optimal Control Laws in Diesel Train Movement by Means of a Mathematical Model in the Form of Brunovsky / V.D. Dmitrienko, A.Y. Zakovorotniy, N.V. Mezentsev // Scientific and technical journal «Information management systems for rail transport». Kharkov, 2010. № 5-6 (84-85). Pp. 7-13.

18. Methods of Classical and Modern Control Theory: Textbook in 5 volumes. Vol. 4: The theory of optimal systems of automatic control / [ed. K.A. Pupkov, N.D. Egupov]. M.: MG TU im Bauman, 2004. 744 p.

19. Landau L.D. Theoretical Physics. The 10 volumes / L.D. Landau, E.M. Livshits // Vol.1. Mechanics. M.: Nauka, 1988. 215 p.

**Дмитриенко Валерий Дмитриевич**, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры «Вычислительная техника и программирование»

**Заковоротный Александр Юрьевич**, докторант, кандидат технических наук, доцент кафедры «Вычислительная техника и программирование»

**Dmitrienko Valery**, Professor, Doctor of Technical Sciences, Department of Computer Engineering and Programming

**Zakovorotniy Alexander**, PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Computer Engineering and Programming