

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
“Харківський політехнічний інститут”

ВЕРЕТЕЛЬНИК В. В. , ТИМЧЕНКО Г. М.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для самостійної роботи за темою

ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей ВІТВ

Харків
НТУ "ХПІ"
2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
“Харківський політехнічний інститут”

ВЕРЕТЕЛЬНИК В. В. , ТИМЧЕНКО Г. М.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для самостійної роботи за темою

ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей ВІТВ

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ “ХПІ”,
протокол №3 від 30.10.20

Харків
НТУ "ХПІ"
2022

Методичні вказівки для самостійної роботи за темою інтегрування функції однієї змінної з курсу «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей ВІТВ.

В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко. — Харків: НТУ «ХПІ», 2022. — 62 с.

Укладачі: В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко.

Рецензент доц.

Кафедра прикладної математики

Вступ

Методичні вказівки відповідають навчальним (робочим) програмам з дисципліни «Вища математика». Головна мета — надати студентам певний мінімум теоретичного матеріалу, а також практичних навиків з основних питань для розв’язання задач за темою «Інтегрування функції однієї змінної», допомогти студентам в їх самостійній роботі.

У кожному розділі наведено достатня кількість розв’язаних задач та прикладів, пояснюючих та закріплюючих теоретичний матеріал. Серед розв’язаних задач чимало таких, які можна назвати типовими; в будь-якому випадку ознайомлення з ними дозволяє студенту при мінімальній допомозі з боку викладача оволодіти основними методами розв’язання задач даного розділу. Наприкінці наведено добірку індивідуальних завдань. Також розібрані зразки виконання індивідуальних завдань.

1. Невизначений інтеграл

1.1. Первісна функція

Означення 1.1. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку виконується умова

$$F'(x) = f(x). \quad (1.1)$$

Зауважимо, що функція може мати нескінчену кількість первісних, які відрізняються на сталу величину.

Означення 1.2. Множина усіх первісних функцій для функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і позначається символом:

$$\int f(x) dx.$$

Тут $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ називається *підінтегральним виразом*, x — *змінна інтегрування*, dx — *диференціал змінної інтегрування*, $\int$ — символ інтегралу.

Таким чином, якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, тоді

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1.2)$$

Тут C — довільна стала, яка називається *сталюю інтегрування*.

Зауваження 1.1. Змінною інтегрування може бути будь-яка диференційовна функція!

1.2. Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C.$
2. $\int 1 \cdot dx = x + C.$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1).$
7. $\int e^x dx = e^x + C.$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
10. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$
11. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C.$
13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C.$
14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C.$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) + C.$

1.3. Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x),$
2. $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x)dx,$
3. $\int F'(x) dx = F(x) + C,$
4. $\int dF(x) = F(x) + C,$
5. $\int A \cdot f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx, \quad A = const,$
6. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

Зауваження 1.2. Властивості 5 і 6 виконуються умовно, тобто ліва і права частини цих рівностей можуть відрізнятися на сталу величину. Справа в тому, що в обох частинах цих рівностей є невизначені інтеграли і кожен з них містить довільну сталу.

Зауваження 1.3. Властивістю 1 можна користуватися для перевірки обчислення невизначеного інтеграла.

2. Основні методи інтегрування

2.1. Метод розкладання

Знаходження інтеграла називається *інтегруванням*.

Найважливіші методи інтегрування: *метод розкладання*, *метод підстановки* та *метод інтегрування частинами*.

Усі методи інтегрування дозволяють звести невизначений інтеграл до табличного. Щоб отримати табличний інтеграл, як правило, підінтегральну функцію доводиться перетворювати.

Найпростіший метод інтегрування — це *метод розкладання*, він базується на властивостях 5 і 6 невизначеного інтеграла:

$$\begin{aligned}\int A \cdot f(x) dx &= A \cdot \int f(x) dx, \quad A = \text{const}, \\ \int (f(x) \pm g(x)) dx &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.\end{aligned}$$

Тобто, якщо підінтегральна функція є сумою двох (або більше) функцій, тоді одержимо два (або більше) інтегралів. Також потрібно виносити стали множники за знак інтеграла.

Приклад 2.1.

$$\begin{aligned}\int \left(5x^2 - 3x + \frac{2}{x} \right) dx &= \int 5x^2 dx - \int 3x dx + \int \frac{2}{x} dx = \\ &= 5 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 2 \int \frac{1}{x} dx = 5 \frac{x^{2+1}}{2+1} - 3 \frac{x^{1+1}}{1+1} + 2 \ln |x| + C = \\ &= 5 \frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x| + C.\end{aligned}$$

Підінтегральна функція містить суму трьох доданків (функцій). Тому вихідний інтеграл було розкладено на три інтеграла, потім винесли стали множники за знак інтегралів. Одержані інтеграли є табличними (вони містять степеневу функцію).

Звернемо увагу на те, що інтегрування степеневих функцій виконується за різними формулами: перші два інтеграли — за формулою 3 таблиці, останній інтеграл — за формулою 5.

Приклад 2.2.

$$\begin{aligned}\int (1 - \sqrt{x})^2 dx &= \int (1 - 2\sqrt{x} + x) dx = \int dx - 2 \int \sqrt{x} dx + \int x dx = \\ &= x - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{x^{1+1}}{1+1} = x - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{2}x^2 + C = x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 + C.\end{aligned}$$

Спочатку підінтегральну функцію було розкладено за формулою квадрата різниці:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

і враховано, що $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$. Крім того, як і при диференціюванні функцій, радикал було уявлено у вигляді степеневих функцій

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[k]{x^n} = x^{\frac{n}{k}}.$$

Зауваження 2.1. Тому що сума сталих є також стала, то не треба при інтегруванні після кожного доданка ставити сталу інтегрування. Сталу інтегрування слід ставити, коли виконується останнє інтегрування.

Приклад 2.3.

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^3 - 5}{x^2} dx &= \int \frac{6x^3}{x^2} dx - \int \frac{5}{x^2} dx = 6 \int x dx - 5 \int x^{-2} dx = \\ &= 6 \frac{x^{1+1}}{1+1} - 5 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = 3x^2 + 5x^{-1} + C = 3x^2 + \frac{5}{x} + C.\end{aligned}$$

Виконуючи почленне ділення, одержали два доданки (два інтеграли). Тут було враховано, що степеневі функції мають таку властивість:

$$\frac{x^n}{x^k} = x^{n-k}, \quad \frac{1}{x^k} = x^{-k}, \quad \text{тоді} \quad \frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

Приклад 2.4. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} dx$.

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 + 1 + 2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{3}{x^2 - 1}.$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} dx &= \int \left(1 + \frac{3}{x^2 - 1} \right) dx = \\ &= \int 1 \cdot dx + 3 \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = x + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

□

Завдання для самостійної роботи

Знайти невизначені інтеграли, використовуючи таблицю інтегралів та їх властивості.

1. $\int \left(5x^2 - 4x + 3 - \frac{2}{x} \right) dx.$

4. $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx.$

2. $\int \left(\frac{2}{1 + x^2} - \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx.$

5. $\int \frac{3x^3 - \sqrt{x} + 5x}{x} dx.$

3. $\int \frac{2x + 3}{x^3} dx.$

6. $\int \left(\frac{1 - x}{x} \right)^2 dx.$

2.2. Метод підстановки

2.2.1. Змінна інтегрування

Нагадаємо, що змінною інтегрування може бути функція. Більш того, можна довести, що формули інтегрування залишаються незмінними, якщо незалежну змінну x замінити на будь-яку диференційовну функцію $u(x)$. Тобто, якщо

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C,$$

або

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

Ця властивість дозволяє одержати таблицю інтегралів в наступному вигляді:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C, \dots,$$

де u — будь-яка диференційовна функція

Наприклад, розглянемо табличний інтеграл

$$\int u du = \frac{u^{1+1}}{1+1} + C = \frac{u^2}{2} + C.$$

Тоді, за цією властивістю, маємо

$$\int \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C,$$

або

$$\int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Таким чином, у першому випадку змінною інтегрування є функція $u = \sin x$, у другому — функція $u = \ln x$. Справді, підставимо в перший інтеграл символ u замість $\sin x$. Тоді маємо табличний інтеграл

$$\int \sin x d(\sin x) = \|u = \sin x\| = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

2.2.2. Підведення сталих під знак диференціала

Нагадаємо формулу диференціала

$$df(x) = f'(x)dx,$$

і наведемо деякі перетворення диференціала. Нехай $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, тоді

$$\begin{aligned} d(x + b) &= (x + b)'dx = (x' + b')dx = (1 + 0)dx = dx, & \Rightarrow dx &= d(x + b), \\ d(ax) &= (ax)'dx = a(x)'dx = a dx, & \Rightarrow dx &= \frac{1}{a} d(ax), \\ d(ax + b) &= (ax + b)'dx = a dx & \Rightarrow dx &= \frac{1}{a} d(ax + b). \end{aligned}$$

Таким чином, до виразу, що міститься під знаком диференціала, можна завжди додати сталу b , тобто

$$\int f(x) dx = \int f(x) d(x + b),$$

також, якщо вираз, що міститься під знаком диференціала, помножити на сталу (число) a , то інтеграл потрібно поділити на цю сталу a :

$$\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int f(x) d(ax).$$

Отже, маємо таке правило підведення сталих під знак диференціала:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int f(x) d(ax + b).$$

Приклад 2.5. Знайти інтеграл $\int \cos(7x - 5) dx$.

Розв'язання. Звернемо увагу, що в таблиці інтегралів аргумент підінтегральної функції і змінна інтегрування це одна і та ж сама величина, а в цьому прикладі — різні величини: аргумент функції дорівнює $(7x - 5)$, а змінна інтегрування — це x . Тому зробимо перетворення диференціала: спочатку занесемо під знак диференціала множник 7; далі додамо сталу -5 .

Після перетворення змінна інтегрування також дорівнює $(7x - 5)$ і маємо табличний інтеграл.

$$\begin{aligned} \int \cos(7x - 5) dx &= \frac{1}{7} \int \cos(7x - 5) d(7x) = \\ &= \frac{1}{7} \int \cos(7x - 5) d(7x - 5) = \frac{1}{7} \sin(7x - 5) + C. \end{aligned}$$

Цей інтеграл можна знайти інакше. Зробимо заміну змінної інтегрування: аргумент підінтегральної функції не дорівнює змінної інтегрування, тому аргумент підінтегральної функції позначимо як допоміжну функцію u :

$$u = 7x - 5.$$

Обчислимо диференціал цієї функції

$$du = u' dx, \quad \Rightarrow \quad du = (7x - 5)' dx = 7 dx.$$

Звідси одержимо диференціал вихідної змінної інтегрування dx :

$$dx = \frac{1}{7} du$$

і підставимо його в вихідний інтеграл. Одержимо табличний інтеграл. Останній крок: після знаходження інтеграла ми повинні повернутися до початкової змінної x .

$$\begin{aligned} \int \cos(7x - 5) dx &= \left\| \begin{array}{l} u = 7x - 5, \\ du = (7x - 5)' dx = 7 dx, \\ dx = \frac{1}{7} du \end{array} \right\| = \frac{1}{7} \int \cos u du = \\ &= \frac{1}{7} \sin u + C = \frac{1}{7} \sin(7x - 5) + C. \end{aligned}$$

□

Приклад 2.6.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x - 3} dx &= \frac{1}{2} \int (2x - 3)^{\frac{1}{2}} d(2x - 3) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2x - 3)^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{1}{3} (2x - 3)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x - 3} dx &= \left\| \begin{array}{l} u = 2x - 3, \\ du = (2x - 3)' dx = 2 dx, \\ dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int (u)^{\frac{1}{2}} du = \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{1}{3} (2x - 3)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти невизначені інтеграли, користуючись диференціалами:

$$dx = d(x + b), \quad dx = \frac{1}{a} d(ax), \quad dx = \frac{1}{a} d(ax + b).$$

1. $\int \cos x \, dx.$

6. $\int \cos(1 - 2x) \, dx$

2. $\int \cos(2x) \, d(2x)$

7. $\int \sin x \, dx$

3. $\int \cos(2x) \, dx$

8. $\int \sin(3 + x) \, d(3 + x)$

4. $\cos(2x - 1) \, d(2x - 1)$

9. $\int \sin(3 - 4x) \, d$

5. $\int \cos(2x - 1) \, dx$

10. $\int (2 + x)^7 \, d(2 + x).$

15. $\int \sqrt{(2 - 3x)^3} \, dx.$

11. $\int (2 + x)^7 \, dx.$

16. $\int \frac{d(x + 3)}{(x + 3)^2}.$

12. $\int (2 + 3x)^7 \, dx.$

17. $\int \frac{dx}{(x + 3)^2}.$

13. $\int (2 - 3x)^{11} \, dx.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5 - 7x)^2}}.$

14. $\int \sqrt{2 - 3x} \, dx.$

$$19. \int e^{2x} d(2x).$$

$$22. \int e^{3x-2} dx.$$

$$20. \int e^{2x} dx.$$

$$23. \int e^{3-2x} dx.$$

$$21. \int e^{-x} dx.$$

$$24. \int 2^{8-5x} dx.$$

$$25. \int \frac{dx}{x}.$$

$$28. \int \frac{dx}{2x-1}.$$

$$26. \int \frac{d(x-1)}{x-1}.$$

$$29. \int \frac{dx}{2-3x}.$$

$$27. \int \frac{dx}{x-1}.$$

$$30. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$32. \int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

$$33. \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$31. \int \frac{d(3x)}{\sqrt{1-(3x)^2}}.$$

$$34. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

$$35. \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$37. \int \frac{dx}{1+25x^2}.$$

$$36. \int \frac{d(5x)}{1+(5x)^2}.$$

$$38. \int \frac{dx}{4+x^2}.$$

$$39. \int \frac{dx}{4 + 9x^2}.$$

$$40. \int \frac{dx}{2 + 3x^2}.$$

$$41. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}.$$

$$45. \int \frac{dx}{4 - x^2}.$$

$$42. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 5}}.$$

$$46. \int \frac{dx}{4 - x^2}.$$

$$43. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

$$47. \int \frac{dx}{4 - 25x^2}.$$

$$44. \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 2}}.$$

$$48. \int \frac{dx}{2 - 5x^2}.$$

2.2.3. Підведення функції під знак диференціала

Підвести під знак диференціала можна не тільки сталі, а й функції. Розглянемо інтеграл

$$\int f(x) dx.$$

Нехай підінтегральну функцію $f(x)$ можна уявити як добуток двох функцій, одна з яких є похідна певної функції $u(x)$:

$$f(x) = g(x)u'(x).$$

Тому що, за ознакою, диференціал функції $u(x)$ дорівнює

$$du = u'(x)dx,$$

маємо

$$\int f(x) dx = \int g(u(x))u'(x) dx = \int g(u) du.$$

Таким чином, якщо підінтегральну функцію можна розкласти на два множники, один з яких є похідна певної функції $u(x)$, то цю функцію можна

підвести під знак диференціала в надії, що одержаний інтеграл буде простіше.

Приклад 2.7. Знайти інтеграл $\int x e^{x^2} dx$.

Розв'язання. В цьому прикладі підінтегральна функція — добуток функції x на функцію e^{x^2} . Функція $2x$ це похідна функції x^2 , тому функцію x можна підвести під знак диференціала.

$$\int x e^{x^2} dx = \left\| \begin{array}{l} d(x^2) = (x^2)' dx = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} d(x^2) \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Звернемо увагу на те, що можна зробити заміну змінної інтегрування, тобто позначити функцію x^2 (аргумент експоненти) як допоміжну змінну інтегрування $u = x^2$:

$$\begin{aligned} \int x e^{x^2} dx &= \left\| \begin{array}{l} u = x^2, \\ du = u' dx = (x^2)' dx = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C. \end{aligned}$$

□

Щоразу розглядаючи підінтегральну функцію, ми шукаємо складну функцію та її аргумент. Також з'ясовуємо чи є похідна цього аргументу, чи ні. Якщо підінтегральна функція має похідну аргумента складної функції, то цей аргумент можна взяти як допоміжну функцію, тобто занести цю функцію під знак диференціалу. Корисною при цьому може бути таблиця дифе-

ренціалів:

- | | |
|---|---|
| 1. $d(x^n) = nx^{n-1} dx.$ | 2. $d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$ |
| 3. $d(a^x) = a^x \ln a dx.$ | 4. $d(e^x) = e^x dx.$ |
| 5. $d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx.$ | 6. $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx.$ |
| 7. $d(\sin x) = \cos x dx.$ | 8. $d(\cos x) = -\sin x dx.$ |
| 9. $d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx.$ | 10. $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx.$ |
| 11. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ | 12. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ |
| 13. $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} dx.$ | 14. $d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx.$ |

Наведемо такі приклади:

$$\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left\| \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x} \right\| = 2 \int e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Аргументом експоненти є $\sqrt{x}$ і підінтегральна функція містить похідну цієї функції $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, тому її можна занести під знак диференціала.

$$\int e^{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left\| \frac{dx}{\cos^2 x} = d \operatorname{tg} x \right\| = \int e^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) = e^{\operatorname{tg} x} + C.$$

$$\begin{aligned} \int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1+x^2} &= \left\| \frac{dx}{1+x^2} = d \operatorname{arctg} x \right\| = \\ &= \int e^{\operatorname{arctg} x} d(\operatorname{arctg} x) = e^{\operatorname{arctg} x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^{\arcsin x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \left\| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d \arcsin x \right\| = \\ &= \int e^{\arcsin x} d(\arcsin x) = e^{\arcsin x} + C. \end{aligned}$$

Розглянемо ще декілька прикладів.

Приклад 2.8.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos x \, dx &= \|d(\sin x) = \cos x \, dx\| = \\ &= \int \sin^3 x \, d(\sin x) = \frac{\sin^{3+1} x}{3+1} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C;\end{aligned}$$

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \left\| \begin{array}{l} u = \sin x, \\ du = (\sin x)' \, dx \end{array} \right\| = \int u^3 \, du = \frac{u^{3+1}}{3+1} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Приклад 2.9.

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx = \left\| \frac{dx}{x} = d \ln x \right\| = \int \sin(\ln x) \, d(\ln x) = -\cos(\ln x) + C.$$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln x, \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right\| = \int \sin u \, du = -\cos u + C = -\cos(\ln x) + C.$$

Приклад 2.10.

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - 3}} = \left\| x \, dx = \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} d(x^2 - 3) \right\| = \int \frac{d(x^2 - 3)}{2\sqrt{x^2 - 3}} = \sqrt{x^2 - 3} + C.$$

Або

$$\begin{aligned}\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - 3}} &= \left\| \begin{array}{l} u = x^2 - 3, \\ du = u' \, dx = (x^2 - 3)' \, dx = 2x \, dx \\ x \, dx = \frac{1}{2} \, du \end{array} \right\| = \\ &= \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 - 3} + C.\end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти невизначені інтеграли, користуючись диференціалами:

$$x \, dx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad x^2 \, dx = \frac{1}{3} d(x^3).$$

$$1. \int x dx.$$

$$6. \int x^2 \sin (2x^3 - 3) \, d.$$

$$2. \int d(x^2).$$

$$7. \int x \sin (4 - 3x^2) \, d.$$

$$3. \int \sin (x^2) \, d (x^2) .$$

$$8. \int \cos (x^2) \, d (x^2)$$

$$4. \int x \sin x^2 dx.$$

$$9. \int x \cos (x^2) \, dx.$$

$$5. \int x \sin (2x^2 - 3) \, dx.$$

$$10. \int x \cos (3x^2 - 1) \, dx.$$

$$11. \int e^{x^2} \, d (x^2) .$$

$$14. \int x e^{x^2+3} \, dx.$$

$$12. \int x e^{x^2} \, dx.$$

$$15. \int x e^{1-2x^2} \, dx.$$

$$13. \int e^{x^2+3} \, d (x^2 + 3) .$$

$$16. \int \sqrt{1-x} dx.$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}.$$

$$17. \int \sqrt{1-x^2} d (x^2) .$$

$$22. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$18. \int 2x \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$23. \int \frac{x dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

$$19. \int x \sqrt{3+x^2} dx.$$

$$24. \int \frac{x dx}{\sqrt{5x^2-2}}.$$

$$20. \int x \sqrt{4-9x^2} dx.$$

$$25. \int \frac{x dx}{1+x^2}.$$

$$26. \int \frac{x dx}{1+x^4}.$$

$$29. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}.$$

$$27. \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx.$$

$$30. \int \frac{x+1}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

$$28. \int x^2 \sqrt[6]{1-7x^3} dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли, користуючись диференціалами:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x}),$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x),$$

$$\cos x dx = d(\sin x),$$

$$\sin x dx = -d(\cos x).$$

$$31. \int d(\sqrt{x}).$$

$$39. \int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}.$$

$$32. \int \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$40. \int \sqrt{\ln x} \frac{dx}{x}.$$

$$33. \int \cos(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}).$$

$$41. \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$34. \int \cos(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$42. \int \sin^3(\ln x) \frac{dx}{x}.$$

$$35. \int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$43. \int \cos x dx.$$

$$36. \int \frac{dx}{x}.$$

$$44. \int d(\sin x).$$

$$37. \int d(\ln x).$$

$$45. \int \sin^2 x d(\sin x).$$

$$38. \int \cos(\ln x) d(\ln x).$$

$$46. \int \sin^2 x \cos x dx.$$

$$47. \int e^{\sin x} \cos x \, dx.$$

$$50. \int \cos^3 x \, d(\cos x)$$

$$48. \int \sin x \, dx.$$

$$51. \int \cos^3 x \sin x \, dx.$$

$$49. \int d(\cos x).$$

$$52. \int \sqrt[3]{1 + 4 \cos x} \sin x \, dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли, користуючись диференціалами:

$$e^x dx = d(e^x),$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x).$$

$$53. \int e^x \, dx.$$

$$61. \int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$54. \int \frac{e^x dx}{e^x - 1}.$$

$$62. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$55. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

$$63. \int d(\arcsin x).$$

$$56. \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}.$$

$$64. \int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}.$$

$$57. \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$65. \int e^{\arcsin x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$58. \int d(\operatorname{arctg} x)$$

$$66. \int \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$59. \int (\operatorname{arctg} x)^2 d(\operatorname{arctg} x).$$

$$67. \int d(\operatorname{tg} x).$$

$$60. \int (\operatorname{arctg} x)^2 \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$68. \int \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

2.2.4. Заміна змінної інтегрування

Нагадаємо, що змінна інтегрування може бути функція. Тому можна зробити заміну змінної інтегрування. Нехай x є певна дифереційовна монотонна функція $x = u(t)$ змінної t . Тому що

$$dx = u'(t) dt,$$

маємо *формулу заміни змінної інтегрування*:

$$\int f(x) dx = \int f(u(t))u'(t) dt = \int g(t) dt, \quad (2.1)$$

і можливо, що одержаний інтеграл буде простіше.

Приклад 2.11. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

Розв'язання. Цей інтеграл не є табличним, він містить радикал. Позначимо цей радикал як нову допоміжну функцію:

$$t = \sqrt{x-1}.$$

Звідси знайдемо вихідну змінну інтегрування x та її диференціал:

$$\begin{aligned} t^2 &= x - 1, \\ x &= t^2 + 1, \\ dx &= (t^2 + 1)' dt = 2t dt. \end{aligned}$$

Підставляючи замість змінної x та її диференціала одержані вирази, отримаємо табличний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} &= \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{x-1}, \\ t^2 = x - 1, \\ x = t^2 + 1, \\ dx = (t^2 + 1)' dt = 2t dt \end{array} \right\| = \int \frac{2t dt}{(t^2 + 1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + C. \end{aligned}$$

□

Зауваження 2.2. Після знаходження інтеграла ми повинні повернутися до вихідної змінної x , тому що невизначений інтеграл це функція.

Нехай підінтегральна функція містить радикал вигляду

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Позбавиться радикалу можна за допомогою тригонометричних підстановок:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2}, & \Rightarrow x = a \sin t, & \Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t; \\ \sqrt{a^2 + x^2}, & \Rightarrow x = a \operatorname{tg} t, & \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t} = \frac{a}{\cos t}; \\ \sqrt{x^2 - a^2}, & \Rightarrow x = \frac{a}{\cos t}, & \Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a \operatorname{tg} t. \end{aligned}$$

Приклад 2.12. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Розв'язання. Це табличний інтеграл, але знайдемо його за допомогою вказаної підстановки:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \left\| \begin{array}{l} x = a \sin t, \\ dx = a \cos t \, dt, \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{array} \right\| = \int \frac{a \cos t \, dt}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} = \\ &= \int \frac{a \cos t}{a \cos t} \, dt = \int dt = t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

□

Приклад 2.13. Знайти інтеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left\| \begin{array}{l} x = a \sin t, \\ dx = a \cos t dt, \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{array} \right\| = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = \\
 &= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \\
 &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{2 \sin t \cos t}{2} \right) + C = \\
 &= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \sin \arcsin \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\sin \arcsin \frac{x}{a} \right)^2} \right) + C = \\
 &= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C.
 \end{aligned}$$

Тут була використана формула зниження степеня:

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}.$$

□

Приклад 2.14. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}} &= \left\| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t, \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t}, \\ t = \operatorname{arctg} x \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\cos^2 t (\operatorname{tg}^2 t + 1)^{3/2}} = \\
 &= \int \frac{dt}{\cos^2 t \frac{1}{\cos^3 t}} = \int \cos t dt = \sin t + C = \\
 &= \left\| \begin{array}{l} 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}, \\ \sin t = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 t}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}} \end{array} \right\| = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C.
 \end{aligned}$$

□

Приклад 2.15. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= \left\| \begin{array}{l} x = \frac{1}{\cos t}, \\ dx = -\frac{\sin t}{\cos^2 t} dt, \\ t = \arccos \frac{1}{x} \end{array} \right\| = - \int \frac{\sin t dt}{\frac{1}{\cos t} \cos^2 t \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} = \\ &= - \int dt = -t + C = -\arccos \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

□

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти невизначені інтеграли, користуючись вказаними підстановками.

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad (t = \sqrt{x}).$

4. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx \quad (t = \sqrt{x+1}).$

2. $\int x\sqrt{x-5} dx \quad (t = \sqrt{x-5}).$

5. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad (t = e^x).$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} \quad (t = \sqrt[6]{x}).$

6. $\int \frac{dx}{1+2e^x} \quad (t = e^{-x}).$

2. Знайти невизначені інтеграли.

7. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$

8. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} dx.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}.$

9. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4} dx.$

12. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx.$

2.3. Інтегрування частинами

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ є неперервно диференційовні, тоді справедлива формула інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Таким чином, якщо треба знайти певний інтеграл

$$\int f(x) dx,$$

то за формулою інтегрування частинами, підінтегральний вираз $f(x) dx$ розкладається на два множники u і dv :

$$f(x) dx = u dv.$$

Далі, обчислюючи диференціал $du = u' dx$ і інтеграл $v = \int dv$, одержимо інший інтеграл

$$\int v du,$$

який може бути більш простим.

Зауваження 2.3. Формулу інтегрування частинами можна застосовувати декілька разів.

Загальних правил вибору функцій u і v немає, однак умовно можна виділити три різні групи інтегралів.

1 група. Під інтегралом міститься трансцендентна функція, похідна якої є функція раціональна. Це такі функції:

$$\ln x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg} x, \quad \text{та інші.}$$

Нагадаємо похідні цих функцій

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{та інші.}$$

Позначимо цю функцію за u , решту підінтегрального виразу приймають за dv . Тоді, після застосування формули інтегрування частинами (диференціювання функції u) позбавимось трансцендентної функції.

Приклад 2.16. Знайти інтеграл $\int x \ln x \, dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \left\| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x} \\ dv = x \, dx, \quad v = \int dv = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C. \end{aligned}$$

□

Зауваження 2.4. Сталої інтегрування при знаходженні функції v не пишемо, її запишемо при знаходженні останнього інтеграла $\int v \, du$.

Приклад 2.17. Знайти інтеграл $\int \arcsin x \, dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, dx &= \left\| \begin{array}{l} u = \arcsin x, \quad du = (\arcsin x)' dx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, \quad v = \int dv = \int dx = x \end{array} \right\| = \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x - \int \frac{d(x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \arcsin x + \int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

□

2 група. Під інтегралом міститься добуток многочлена на синус, косинус або експоненту:

$$P_n(x) \sin ax, \quad P_n(x) \cos ax, \quad P_n(x) e^{ax}.$$

Інтеграли цієї групи знаходяться шляхом застосування формули інтегрування частинами n -разів, причому за функцію u приймають многочлен.

Приклад 2.18. Знайти інтеграл $\int (3x - 5) \sin x \, dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int (3x - 5) \sin x \, dx &= \left\| \begin{array}{l} u = 3x - 5, \quad du = (3x - 5)' dx = 3 \, dx \\ dv = \sin x \, dx, \quad v = \int dv = \int \sin x \, dx = -\cos x \end{array} \right\| = \\ &= -(3x - 5) \cos x + 3 \int \cos x \, dx = -(3x - 5) \cos x + 3 \sin x + C. \end{aligned}$$

□

3 група. Під інтегралом міститься добуток експоненти на синус або косинус:

$$e^{ax} \sin bx, \quad e^{ax} \cos bx.$$

Тут потрібно двічі скористатися формулою інтегрування частинами, причому немає значення яку функцію позначити як u . В результаті одержимо алгебраїчне рівняння відносно шуканого інтегралу.

Приклад 2.19. Знайти інтеграл $\int e^{-3x} \sin 2x \, dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int e^{-3x} \sin 2x \, dx &= \left\| \begin{array}{l} u = e^{-3x}, \quad du = (e^{-3x})' dx = -3e^{-3x} \, dx \\ dv = \sin 2x \, dx, \quad v = \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right\| = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-3x} \cos 2x - \frac{3}{2} \int e^{-3x} \cos 2x \, dx = \\ &= \left\| \begin{array}{l} u = e^{-3x}, \quad du = (e^{-3x})' dx = -3e^{-3x} \, dx \\ dv = \cos 2x \, dx, \quad v = \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right\| = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-3x} \cos 2x - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e^{-3x} \sin 2x + \frac{3}{2} \int e^{-3x} \sin 2x \, dx \right). \end{aligned}$$

Позначимо шуканий інтеграл:

$$J = \int e^{-3x} \sin 2x \, dx,$$

тоді маємо рівняння відносно цього інтегралу:

$$J = -\frac{1}{2} e^{-3x} \cos 2x - \frac{3}{4} e^{-3x} \sin 2x - \frac{9}{4} J$$

або

$$\frac{13}{4} J = -\frac{1}{2} e^{-3x} \left(\cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x \right).$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо інтеграл:

$$J = \int e^{-3x} \sin 2x \, dx = -\frac{2}{13} e^{-3x} \left(\cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x \right) + C.$$

□

Завдання для самостійної роботи

Знайти невизначені інтеграли, користуючись методом інтегрування частинами.

1. $\int \operatorname{arctg} x \, dx.$

7. $\int x \sin(2x) \, dx.$

2. $\int (x^2 - x + 1) \ln x \, dx.$

8. $\int x^2 e^x \, dx.$

3. $\int \ln(x^2 + 1) \, dx.$

9. $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx.$

4. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$

10. $\int (\ln x)^2 \, dx.$

5. $\int x e^x \, dx.$

11. $\int e^{-2x} \cos 3x \, dx.$

6. $\int (2x - 1) \cos x \, dx.$

3. Інтегрування алгебраїчних функцій

3.1. Інтегрування простих раціональних функцій

Означення 3.1. Функція виду

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ — дійсні числа, називається *цілою раціональною функцією* або *многочленом*, а числа $a_0, a_1, \dots, a_n$ — *коефіцієнтами* многочлена.

Інтеграл від многочлена зводиться до інтегралів від степеневої функції:

$$\begin{aligned} \int P_n(x) dx &= \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) dx = \\ &= a_n \int x^n dx + a_{n-1} \int x^{n-1} dx + \dots + a_1 \int x dx + a_0 \int dx = \\ &= a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C. \end{aligned}$$

3.2. Інтегрування дробово–раціональних функцій

3.2.1. Дробово–раціональна функція

Означення 3.2. Частка двох многочленів

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

називається *дробово–раціональною функцією*.

Означення 3.3. Алгебраїчний дріб називається *правильним*, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника ($n < m$).

В іншому випадку ($n \geq m$) алгебраїчний дріб називається *неправильним*.

При інтегруванні дробово-раціональної функції, якщо дріб неправильний, потрібно виділити цілу частину.

Приклад 3.1. Обчислити інтеграл $\int \frac{x}{x+1} dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x+1} dx &= \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

Тут степінь чисельника дорівнює степені знаменника, тому дріб неправильний і було виділено цілу частину. $\square$

Виділити цілу частину можна також шляхом *ділення* чисельника на знаменник дробу.

Приклад 3.2. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2 + 2x - 12}{x - 3} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція — неправильний дріб. Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x - 12 & x - 3 \\ x^2 - 3x & x + 5 \\ \hline 5x - 12 & \\ 5x - 15 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Таким чином, підінтегральну функцію можна уявити як:

$$\frac{x^2 + 2x - 12}{x - 3} = x + 5 + \frac{3}{x - 3}.$$

Враховуючи цей вираз, одержимо

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 2x - 12}{x - 3} dx &= \int \left(x + 5 + \frac{3}{x - 3} \right) dx = \\ &= \int x dx + 5 \int dx + 3 \int \frac{dx}{x - 3} = \frac{x^2}{2} + 5x + \ln |x - 3| + C.\end{aligned}$$

□

Завдання для самостійної роботи

Знайти невизначені інтеграли від алгебраїчних дробів, виділивши цілу частину.

1. $\int \frac{x^2}{1 - x} dx.$

4. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4} dx.$

2. $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx.$

5. $\int \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1} dx.$

3. $\int \frac{x^2}{3 + x^2} dx.$

3.2.2. Розкладання дробово–раціональної функції на прості дроби

Означення 3.4. Дроби вигляду

$$\frac{A}{x - a}, \quad \frac{A}{(x - a)^k}, \quad \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}, \quad \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$$

називаються *простими дробами*.

При інтегруванні дробово-раціональної функції корисно розкласти правильний дріб на сумму простих дробів.

Розглянемо деякі випадки.

1. Корені знаменника — прості дійсні числа $x_1, x_2, \dots, x_n$.

В цьому випадку знаменник вихідного дробу можна уявити таким чином

$$Q_m(x) = b_m (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (3.1)$$

і розкладання алгебраїчного дробу має такий вигляд:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}. \quad (3.2)$$

Тут $A_1, A_2, \dots, A_n$ — невизначені коефіцієнти.

Приклад 3.3. Розкласти на прості дроби

$$\frac{P_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{x + 2}{x^2 + 2x - 8}. \quad (3.3)$$

Розв'язання. Тому що степінь чисельника ($n = 1$) менший за степінь знаменника ($m = 2$), то дріб (3.3) правильний.

Корені знаменника дробу прості дійсні числа:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 2.$$

За формулою (3.1) розкладемо знаменник дробу на прості множники:

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2). \quad (3.4)$$

Уявимо вихідний дріб (3.3) у вигляді розкладання на прості дроби (див. (3.2)):

$$\frac{x + 2}{x^2 + 2x - 8} = \frac{x + 2}{(x + 4)(x - 2)} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 2}. \quad (3.5)$$

Приведемо дроби правої частини до спільного знаменника

$$\frac{x + 2}{(x + 4)(x - 2)} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x + 4)}{(x + 4)(x - 2)}$$

та порівняємо чисельники дробів обох частин:

$$x + 2 = A(x - 2) + B(x + 4). \quad (3.6)$$

Розкриємо дужки та запишемо многочлен у правій частині за спадаючими степенями x :

$$x + 2 = (A + B)x - 2A + 4B.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій і лівій частинах, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів A , B :

$$\left. \begin{array}{l} x \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} A + B = 1, \\ -2A + 4B = 2, \end{array}$$

розв'язавши яку, знайдемо ці коефіцієнти:

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}. \quad (3.7)$$

Тоді вихідну функцію (3.3) можна записати через прості дроби так:

$$\frac{x + 2}{x^2 + 2x - 8} = \frac{\frac{1}{3}}{x + 4} + \frac{\frac{2}{3}}{x - 2}. \quad (3.8)$$

□

Зауваження 3.1. Інтеграл від функція (3.8) є сума двох табличних інтегралів.

Розглянутий приклад має небагато обчислювань, тому що було тільки два невизначених коефіцієнти. Але для обчислювання невизначених коефіцієнтів потрібно було прості дроби зводити до спільного знаменника, будувати систему лінійних рівнянь і розв'язувати її. Коли невизначених коефіцієнтів більше, ніж два, то і роботи значно більше. Звернемо увагу на те, що можна обчислити коефіцієнти простіше.

Рівність (3.6) можна розглядати як тотожність, тобто як рівність, що виконується при будь-якому довільному x . Якщо надати x певні значення (стільки, скільки невизначених коефіцієнтів), то можна одержати лінійну систему для знаходження цих коефіцієнтів. Зручно надавати x значення, які є коренями знаменника вихідного дробу. Наприклад, нехай

$$x = x_1 = -4.$$

Підставимо це значення в (3.6). Тоді маємо:

$$\begin{aligned}(x+2)|_{x=-4} &= (A(x-2) + B(x+4))|_{x=-4}, \\ -4+2 &= A(-4-2), \\ -2 &= -6A, \\ A &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Аналогічно, підставляючи замість x значення $x_2 = 2$ в (3.6), одержимо:

$$\begin{aligned}(x+2)|_{x=2} &= (A(x-2) + B(x+4))|_{x=2}, \\ 2+2 &= B(2+4), \\ 4 &= 6B, \\ B &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Знайдені тут коефіцієнти A і B збігаються з (3.7).

Є і інший метод знаходження невизначених коефіцієнтів. Можна розглядати як тотожність рівність (3.5):

$$\frac{x+2}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2}. \quad (3.9)$$

Якщо помножити (3.9) на $(x+4)$ і підставити замість x значення $x_1 = -4$, то одержимо

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x-2}\bigg|_{x=-4} &= \left(A + \frac{B(x+4)}{x-2}\right)\bigg|_{x=-4}, \\ \frac{-4+2}{-4-2} &= A, \\ \frac{-2}{-6} &= A, \\ A &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Аналогічно, помножимо (3.9) на $(x-2)$ і підставимо замість x значення

$x_2 = 2$, тоді знайдемо

$$\begin{aligned}\left. \frac{x+2}{(x+4)} \right|_{x=2} &= \left(\frac{A(x-2)}{x+4} + B \right) \Big|_{x=2}, \\ \frac{2+2}{2+4} &= B, \\ \frac{4}{6} &= B, \\ B &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Маємо тіж самі результати, але обчислювання тут простіше.

Приклад 3.4. Розкласти на прості дроби

$$\frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{x^2 + x - 3}{(x-1)(x+3)(x-5)}. \quad (3.10)$$

Розв'язання. Цей дріб є правильний. Знаменник вже розкладено на прості множники:

$$(x-1)(x+3)(x-5).$$

Тому заданий дріб набирає вигляду:

$$\frac{x^2 + x - 3}{(x-1)(x+3)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-5}. \quad (3.11)$$

Далі, послідовно помножуючи рівність (3.11) на множники $(x-1)$, $(x+3)$ і $(x-5)$ та підставляючи замість x відповідні значення $x=1$, $x=-3$ і $x=5$, одержимо:

$$\begin{aligned}A &= \left. \frac{x^2 + x - 3}{(x+3)(x-5)} \right|_{x=1} = \frac{1+1-3}{(1+3)(1-5)} = \frac{-1}{4(-4)} = \frac{1}{16}, \\ B &= \left. \frac{x^2 + x - 3}{(x-1)(x-5)} \right|_{x=-3} = \frac{9-3-3}{(-3-1)(-3-5)} = \frac{3}{(-4)(-8)} = \frac{3}{32}, \\ C &= \left. \frac{x^2 + x - 3}{(x-1)(x+3)} \right|_{x=5} = \frac{25+5-3}{(5-1)(5+3)} = \frac{27}{4 \cdot 8} = \frac{27}{32}.\end{aligned}$$

Таким чином, маємо

$$\frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{x^2 + x - 3}{(x-1)(x+3)(x-5)} = \frac{\frac{1}{16}}{x-1} + \frac{\frac{3}{32}}{x+3} + \frac{\frac{27}{32}}{x-5}.$$

□

2. Корені знаменника — дійсні числа, але деякі корені кратні.

Нехай число z — корінь знаменника $Q_m(x)$ кратності k . В цьому випадку знаменник містить множник $(x - z)^k$. В курсі алгебри доведено, що в розкладанні алгебраїчного дробу $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ цьому множнику відповідає така сума з k простих дробів:

$$\frac{A_1}{x - z} + \frac{A_2}{(x - z)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - z)^k}. \quad (3.12)$$

Приклад 3.5. Розкласти на прості дроби:

$$\frac{P_1(x)}{Q_3(x)} = \frac{2x - 3}{(x - 1)(x - 2)^2}. \quad (3.13)$$

Розв'язання. Цей дріб є правильним. Знаменник вже розкладено на прості множники. Звернемо увагу на те, що корінь знаменника $x = 1$ простий, а корінь $x = 2$ — двократний. Тому дріб (3.13) через прості дроби можна записати так:

$$\frac{2x - 3}{(x - 1)(x - 2)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2}. \quad (3.14)$$

Таким чином, в розкладанні (3.14) множнику знаменника $(x - 2)^2$ відповідають два дроба

$$\frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2}.$$

Можна, як і в попередніх прикладах, для визначення коефіцієнтів привести праву частину (3.14) до спільного знаменника, прирівняти коефіцієнти чисельників при однакових степенях x і розв'язати відповідну лінійну систему. Зробимо інакше. Послідовно помножимо (3.14) на множники $(x - 1)$, $(x - 2)^2$ і підставимо замість x відповідні значення $x = 1$, $x = 2$, тоді одержимо:

$$A = \left. \frac{2x - 3}{(x - 2)^2} \right|_{x=1} = \frac{2 - 3}{(1 - 2)^2} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$C = \left. \frac{2x - 3}{x - 1} \right|_{x=2} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Останній коефіцієнт B знайдемо таким чином. Підставимо в (3.14) знайдені коефіцієнти $A = -1$ і $C = 1$:

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}. \quad (3.15)$$

Помножимо цю рівність на $(x-2)$ і надамо x значення $x = 2$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} + \frac{x-2}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right) \Big|_{x=2} = \\ &= \frac{2x-3+(x-2)^2-x+1}{(x-1)(x-2)} \Big|_{x=2} = \frac{x-2+(x-2)^2}{(x-1)(x-2)} \Big|_{x=2} = \\ &= \frac{x-1}{x-1} \Big|_{x=2} = 1. \end{aligned}$$

Таким чином, шукане розкладання приймає вигляд:

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}. \quad (3.16)$$

□

3. Корені знаменника — комплексні числа.

Нехай комплексне число ζ є коренем знаменника $Q_m(x)$ алгебраїчного дробу $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ кратності $\varkappa$. Тому що коефіцієнти цього дробу дійсні числа, то знаменник також має комплексно-спряжений корінь $\bar{\zeta}$. Тоді знаменник містить множник

$$(x^2 + px + q)^\varkappa$$

з дійсними коефіцієнтами p і q . Цьому множнику в розкладанні дробу $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ відповідає така сума $\varkappa$ простих дробів:

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_\varkappa x + N_\varkappa}{(x^2 + px + q)^\varkappa}.$$

Приклад 3.6. Розглянемо дріб: $\frac{P_0(x)}{Q_3(x)} = \frac{1}{x^3 - 1}$.

За формулою різниці кубів маємо:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Зауваження 3.2. Дискримінант квадратного тричлена $x^2 + x + 1$ — від’ємний. Вихідний дріб уявимо у вигляді:

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1}.$$

Зводимо праву частину до спільного знаменника та прирівнюємо чисельники дробів. Тоді маємо тотожність:

$$1 = A(x^2 + x + 1) + (Mx + N)(x - 1). \quad (3.17)$$

В (3.17) надамо x значення $x = 1$. Тоді одержимо

$$1 = A(1 + 1 + 1), \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3}.$$

Підставимо в (3.17) знайдене значення $A = \frac{1}{3}$ та наведемо подібні доданки

$$-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = Mx^2 + (-M + N)x - N.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях s , одержимо систему лінійних рівнянь:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} M \\ -M + N \\ -N \end{array} = \begin{array}{l} -1/3, \\ -1/3, \\ 2/3. \end{array}$$

Розв’язавши цю систему, знайдемо коефіцієнти M і N :

$$M = -\frac{1}{3}, \quad N = -\frac{2}{3}. \quad (3.18)$$

Таким чином, маємо:

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \frac{x - 2}{x^2 + x + 1}.$$

3.2.3. Інтегрування дробово-раціональних функцій

1. При інтегруванні дробово-раціональної функції, якщо дріб неправильний, потрібно вилучити цілу частину.
2. При інтегруванні дробово-раціональної функції треба розкласти правильний дріб на сумму простих дробів.

Приклад 3.7. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x+2}{x^2+2x-8} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція цього інтеграла є правильний дріб. Розкладання цього дробу на прості дробі вже знайдено в *прикладі 3.3* (див. (3.8)):

$$\frac{x+2}{x^2+2x-8} = \frac{\frac{1}{3}}{x+4} + \frac{\frac{2}{3}}{x-2}.$$

Враховуючи це розкладання, одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2+2x-8} dx &= \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x+4} + \frac{\frac{2}{3}}{x-2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+4} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-2} = \ln|x+4| + \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

□

Приклад 3.8. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)^2} dx$.

Розв'язання. Під інтегралом міститься правильний дріб, причому знаменник цього дробу має кратні корені. Розкладання цього дробу на прості дробі наведено в *прикладі 3.5*:

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Тому маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)^2} dx &= \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} \right) dx = \\ &= - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{(x-2)^2} = \\ &= -\ln|x-1| + \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C = \\ &= \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| - \frac{1}{x-2} + C. \end{aligned}$$

□

Завдання для самостійної роботи

Знайти невизначені інтеграли від алгебраїчних дробів.

1. $\int \frac{2x^4 + 8x^3 - 45x^2 - 61}{(x-1)(x^2 + 5x + 6)} dx.$

5. $\int \frac{36}{(x+2)(x^2 - 2x + 10)} dx.$

2. $\int \frac{8x}{(x^2 + 6x + 5)(x+3)} dx.$

6. $\int \frac{9x - 9}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx.$

3. $\int \frac{4x^2}{x^2 - 2x + 1} dx.$

7. $\int \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x^4 - x^2} dx.$

4. $\int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 - x^3} dx.$

8. $\int \frac{x^3 - x - 5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx.$

3.2.4. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен

1. При інтегруванні інтегралів вигляду

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

треба виділити повний квадрат. Якщо скористатися формулою

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

то одержимо

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{2a} + c. \end{aligned}$$

Позначимо

$$u = x + \frac{b}{2a}, \quad \pm q^2 = -\frac{b^2}{2a} + c.$$

Тоді вихідні інтеграли зводяться до табличних

$$\int \frac{du}{u^2 \pm q^2}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm q^2}}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{q^2 \pm u^2}}.$$

Приклад 3.9. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5}$.

Розв'язання. Виділимо в квадратному тричлені повний квадрат

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x + 5 &= 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + 5 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + 5 = \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 5 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5} &= \int \frac{dx}{3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}} = \left\| \begin{array}{l} u = x - \frac{1}{3} \\ du = dx \end{array} \right\| = \\ &= \int \frac{du}{3u^2 + \frac{14}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2 + \frac{14}{3^2}} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{3}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{3u}{\sqrt{14}} + C = \frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{3x - 1}{\sqrt{14}} + C. \end{aligned}$$

□

Приклад 3.10. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$.

Розв'язання. Виділимо в квадратному тричлені повний квадрат

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 8 = (x + 2)^2 + 4$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^2 + 4}} = \left\| \begin{array}{l} u = x + 2 \\ du = dx \end{array} \right\| = \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 2^2} \right| + C = \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 8} \right| + C. \end{aligned}$$

□

2. При інтегруванні інтегралів вигляду

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx, \quad \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

спочатку потрібно виділити в чисельнику похідну квадратного тричлена. Тоді одержимо два інтеграли: один буде логарифм (або квадратний корінь), інший інтеграл було розглянуто у попередньому пункті.

Приклад 3.11. Знайти інтеграл $\int \frac{7x + 3}{2x^2 + 4x + 9} dx$.

Розв'язання. Обчислимо похідну квадратного тричлена:

$$(2x^2 + 4x + 9)' = 4x + 4 = 4(x + 1).$$

Виділимо в чисельнику підінтегральної функції цю похідну:

$$\begin{aligned} \int \frac{7x + 3}{2x^2 + 4x + 9} dx &= 7 \int \frac{x + \frac{3}{7}}{2x^2 + 4x + 9} dx = \\ &= 7 \int \frac{x + 1 - 1 + \frac{3}{7}}{2x^2 + 4x + 9} dx = 7 \int \frac{x + 1 - \frac{4}{7}}{2x^2 + 4x + 9} dx = \\ &= 7 \int \frac{x + 1}{2x^2 + 4x + 9} dx - 4 \int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 9}. \end{aligned}$$

Знайдемо ці інтеграли.

$$7 \int \frac{x + 1}{2x^2 + 4x + 9} dx = \frac{7}{4} \int \frac{d(2x^2 + 4x + 9)}{2x^2 + 4x + 9} = \frac{7}{4} \ln |2x^2 + 4x + 9| + C.$$

Виділимо в квадратному тричлені другого інтеграла повний квадрат

$$2x^2 + 4x + 9 = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 9 = 2(x + 1)^2 - 2 + 9 = 2(x + 1)^2 + 7.$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} 4 \int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 9} &= 4 \int \frac{dx}{2(x + 1)^2 + 7} = \left\| \begin{array}{l} u = x + 1 \\ du = dx \end{array} \right\| = 2 \int \frac{du}{u^2 + \frac{7}{2}} = \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{7}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{7}} u + C = 2\sqrt{\frac{2}{7}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{7}} (x + 1) + C. \end{aligned}$$

Враховуючи одержані інтеграли, маємо

$$\int \frac{7x+3}{2x^2+4x+9} dx = \frac{7}{4} \ln |2x^2+4x+9| + 2\sqrt{\frac{2}{7}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{7}}(x+1) + C.$$

□

Приклад 3.12. Знайти інтеграл $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+6x+1}} dx$.

Розв'язання. Обчислимо похідну квадратного тричлена:

$$(x^2+6x+1)' = 2x+6 = 2(x+3).$$

Виділимо в чисельнику підінтегральної функції цю похідну:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+6x+1}} dx &= \int \frac{2x+6-6-3}{\sqrt{x^2+6x+1}} dx = \\ &= \int \frac{2x+6-9}{\sqrt{x^2+6x+1}} dx = \int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+1}} dx - \int \frac{9}{\sqrt{x^2+6x+1}} dx. \end{aligned}$$

Знайдемо ці інтеграли.

$$\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+1}} dx = \int \frac{d(x^2+6x+1)}{\sqrt{x^2+6x+1}} = 2\sqrt{x^2+6x+1} + C.$$

Виділимо в квадратному тричлені другого інтеграла повний квадрат

$$x^2+6x+1 = (x^2+2 \cdot 3 \cdot x+9-9+1) + 9 = (x+3)^2 - 8.$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{9}{\sqrt{x^2+6x+1}} dx &= 9 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-8}} = \left\| \begin{array}{l} u = x+3 \\ du = dx \end{array} \right\| = 9 \int \frac{du}{\sqrt{u^2-8}} = \\ &= 9 \ln |u + \sqrt{u^2-8}| + C = 9 \ln |x+3 + \sqrt{x^2+6x+1}| + C. \end{aligned}$$

Враховуючи одержані інтеграли, отримаємо

$$\int \frac{7x+3}{2x^2+4x+9} dx = 2\sqrt{x^2+6x+1} - 9 \ln |x+3 + \sqrt{x^2+6x+1}| + C.$$

□

Завдання для самостійної роботи

Знайти невизначені інтеграли.

1. $\int \frac{dx}{1+x+x^2}.$

5. $\int \frac{dx}{x^2+8x+15}.$

2. $\int \frac{dx}{x^2-10x+16}.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}.$

3. $\int \frac{dx}{x^2+8x-9}.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$

4. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$

4. Інтегрування тригонометричних функцій

1. Маємо табличні інтеграли:

$$\begin{aligned}\int \cos x \, dx &= \sin x + C, & \int \sin x \, dx &= -\cos x + C, \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + C, & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{ctg} x + C.\end{aligned}$$

Решта інтегралів зводяться до табличних шляхом тотожних перетворень, причому користуються такими формулами:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Приклад 4.1.

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$$

Приклад 4.2.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} \, dx = - \int \frac{d \cos x}{1 - \cos^2 x} = \|u = \cos x\| = \\ &= - \int \frac{du}{1 - u^2} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| + C = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \right| + C.\end{aligned}$$

Звернемо увагу, що іноді зручно перейти до половинного аргументу.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \, dx = \\ &= \int \frac{d \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \int \frac{d \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.\end{aligned}$$

2. При інтегруванні квадратів та інших парних степенів від синусів та косинусів обчислюються за допомогою формул зниження степеня:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Приклад 4.3.

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

3. При інтегруванні синусів та косинусів непарного степеня зручно відокремити множник у першому степені та занести його під знак диференціала, а решту замінити, скориставшись формулою

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Приклад 4.4.

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \left\| \begin{array}{l} d \cos x = -\sin x \, dx \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{array} \right\| = \\ &= - \int (1 - \cos^2 x) \, d \cos x = - \int d \cos x + \int \cos^2 x \, d \cos = - \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C. \end{aligned}$$

4. При інтегруванні $\operatorname{tg}^2 x$ та $\operatorname{ctg}^2 x$ звичайно користуються формулами:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Приклад 4.5.

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Приклад 4.6.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x \, dx &= \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x \, dx = \int \operatorname{tg} x \, d \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

5. Інтеграли вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

де $R(u, v)$ — раціональна функція двох змінних, універсальною тригонометричною підстановкою

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

зводяться до інтегралів від раціонального аргументу змінної t . Тут допомагають формули

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Приклад 4.7. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x + 5}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x + 5} &= \left\| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \end{array} \right\| = \\ &= 2 \int \frac{dt}{\left(4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 5 \right) (1+t^2)} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2 \int \frac{dt}{(t+3)^2} = 2 \int \frac{d(t+3)}{(t+3)^2} = \\ &= -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} + C. \end{aligned}$$

□

Завдання для самостійної роботи

Знайти невизначені інтеграли.

1. $\int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}.$

5. $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \cos^2 x}.$

2. $\int \frac{6 \sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx.$

6. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} dx.$

3. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx.$

7. $\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx.$

4. $\int \frac{dx}{2 - 3 \cos x + \sin x}.$

8. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx.$

5. Індивідуальні завдання

1. Знайти невизначені інтеграли.

$$1.1. \int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1.11. \int \frac{\sqrt[6]{x^5} - 5x^2 + 3}{x} dx.$$

$$1.2. \int \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x} dx.$$

$$1.12. \int \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx.$$

$$1.3. \int \frac{3\sqrt{x} + 4x^2 - 5}{2x^2} dx.$$

$$1.14. \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5 + 3}{x} dx.$$

$$1.4. \int \frac{2\sqrt{x} - x^2 + 3}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$1.13. \int \left(x^2 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x} - 3 \right) dx.$$

$$1.5. \int \frac{\sqrt[4]{x} - 2x + 5}{x^2} dx.$$

$$1.15. \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} + 2x^3 - 4 \right) dx.$$

$$1.6. \int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1.16. \int \frac{\sqrt[3]{x} - 3x^4 + 2}{x} dx.$$

$$1.7. \int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{2\sqrt[4]{x}}{x} + x \right) dx.$$

$$1.17. \int \left(2x^3 - 3\sqrt{x^5} + \frac{4}{x} \right) dx.$$

$$1.8. \int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1.18. \int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 5}{x^2} dx.$$

$$1.9. \int \frac{3x^2 - \sqrt[5]{x} + 2}{x^2} dx.$$

$$1.19. \int \frac{3x^2 - \sqrt{x^3} + 7}{x^3} dx.$$

$$1.10. \int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{x^2} dx.$$

$$1.20. \int \frac{3x^4 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2} dx.$$

$$1.21. \int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{x^3} + 4 \right) dx.$$

$$1.26. \int \frac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{x} dx.$$

$$1.22. \int \frac{\sqrt{x} - 2x^3 + 6}{x} dx.$$

$$1.27. \int \frac{x^2 - \sqrt[3]{x} + 5}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$1.23. \int \frac{\sqrt[5]{x} - 2x^3 + 4}{x^2} dx.$$

$$1.28. \int \frac{\sqrt[7]{x^2} - 3x^2 + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$1.24. \int \left(\sqrt{x} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^3}} + 2 \right) dx.$$

$$1.29. \int \frac{\sqrt[3]{x^5} - 7x + 3}{x^2} dx.$$

$$1.25. \int \frac{7\sqrt{x} - 3x^2 + x}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$1.30. \int \frac{x^2 - \sqrt[3]{x} + 5}{x\sqrt[3]{x}} dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли.

$$2.1. \int \sqrt{3+x} dx.$$

$$2.8. \int (1+4x)^5 dx.$$

$$2.15. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}.$$

$$2.2. \int \sqrt[3]{1+x} dx.$$

$$2.9. \int (1-3x)^3 dx.$$

$$2.16. \int \sqrt[5]{3-2x} dx.$$

$$2.3. \int \sqrt[3]{(1+x)^2} dx.$$

$$2.10. \int \sqrt{1+3x} dx.$$

$$2.17. \int \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}.$$

$$2.4. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$2.11. \int \sqrt{5-4x} dx.$$

$$2.18. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3+x}}.$$

$$2.5. \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}.$$

$$2.12. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}.$$

$$2.19. \int \sqrt[4]{1+3x} dx.$$

$$2.6. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}.$$

$$2.13. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}.$$

$$2.20. \int \sqrt[3]{3+2x} dx.$$

$$2.7. \int (1-4x)^7 dx.$$

$$2.14. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}.$$

$$2.21. \int \frac{dx}{(2+x)^3}.$$

$$\begin{array}{lll}
2.22. \int \sqrt[5]{(6-5x)^2} dx. & 2.25. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(7-5x)^2}}. & 2.28. \int \sqrt[3]{3-x} dx. \\
2.23. \int \sqrt{5-4x} dx. & 2.26. \int \frac{dx}{\sqrt{2+5x}}. & 2.29. \int \frac{dx}{\sqrt{(3+7x)^3}}. \\
2.24. \int \sqrt[3]{5-2x} dx. & 2.27. \int \sqrt[3]{(4+x)^2} dx. & 2.30. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(9-7x)^5}}.
\end{array}$$

3. Знайти невизначені інтеграли.

$$\begin{array}{lll}
3.1. \int \frac{dx}{3-x}. & 3.11. \int \frac{dx}{3x+4}. & 3.21. \int \frac{dx}{6+5x}. \\
3.2. \int \frac{dx}{3x+9}. & 3.12. \int \frac{dx}{4x-2}. & 3.22. \int \frac{dx}{1-7x}. \\
3.3. \int \frac{dx}{2-3x}. & 3.13. \int \frac{dx}{5-3x}. & 3.23. \int \frac{dx}{1+6x}. \\
3.4. \int \frac{dx}{1-4x}. & 3.14. \int \frac{dx}{4-7x}. & 3.24. \int \frac{dx}{2+7x}. \\
3.5. \int \frac{dx}{2+3x}. & 3.15. \int \frac{dx}{5x-3}. & 3.25. \int \frac{dx}{7-2x}. \\
3.6. \int \frac{dx}{2-5x}. & 3.16. \int \frac{dx}{3-2x}. & 3.26. \int \frac{dx}{7-2x}. \\
3.7. \int \frac{dx}{3x-2}. & 3.17. \int \frac{dx}{5+3x}. & 3.27. \int \frac{dx}{2+7x}. \\
3.8. \int \frac{dx}{2x+3}. & 3.18. \int \frac{dx}{3-5x}. & 3.28. \int \frac{dx}{1-5x}. \\
3.9. \int \frac{dx}{3x-4}. & 3.19. \int \frac{dx}{5+4x}. & 3.29. \int \frac{dx}{7+5x}. \\
3.10. \int \frac{dx}{4-3x}. & 3.20. \int \frac{dx}{6-3x}. & 3.30. \int \frac{dx}{4-3x}.
\end{array}$$

4. Знайти невизначені інтеграли.

$$4.1. \int \sin(2 - 3x) dx. \quad 4.11. \int \sin(3 - 4x) dx. \quad 4.21. \int \cos(5x - 6) dx.$$

$$4.2. \int \sin(3 - 2x) dx. \quad 4.12. \int \cos(3 + 4x) dx. \quad 4.22. \int \sin(7x + 1) dx.$$

$$4.3. \int \sin(5 - 3x) dx. \quad 4.13. \int \cos(3 - 4x) dx. \quad 4.23. \int \cos(5x - 6) dx.$$

$$4.4. \int \cos(2 + 3x) dx. \quad 4.14. \int \cos(2 + 5x) dx. \quad 4.24. \int \sin(7 - 4x) dx.$$

$$4.5. \int \cos(3 + 2x) dx. \quad 4.15. \int \cos(3x + 5) dx. \quad 4.25. \int \sin(3 - x) dx.$$

$$4.6. \int \sin(4 - 2x) dx. \quad 4.16. \int \sin(5x - 3) dx. \quad 4.26. \int \cos(5 + 3x) dx.$$

$$4.7. \int \cos(5 - 2x) dx. \quad 4.17. \int \sin(5 - 3x) dx. \quad 4.27. \int \cos(2x - 1) dx.$$

$$4.8. \int \cos(7x + 3) dx. \quad 4.18. \int \sin(3x + 6) dx. \quad 4.28. \int \sin(5x - 7) dx.$$

$$4.9. \int \sin(8x - 3) dx. \quad 4.19. \int \cos(5x - 8) dx. \quad 4.29. \int \sin(4 - 9x) dx.$$

$$4.10. \int \sin(3 + 4x) dx. \quad 4.20. \int \cos(3x - 7) dx. \quad 4.30. \int \cos(5 + 7x) dx.$$

5. Знайти невизначені інтеграли.

$$5.1. \int \frac{\sqrt{3} dx}{9x^2 - 3}. \quad 5.3. \int \frac{dx}{9x^2 + 3}. \quad 5.5. \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 9x^2}}.$$

$$5.2. \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 3}}. \quad 5.4. \int \frac{9 dx}{\sqrt{9x^2 - 3}}. \quad 5.6. \int \frac{dx}{7x^2 - 4}.$$

$$5.7. \int \frac{3 dx}{\sqrt{7x^2 - 4}}.$$

$$5.15. \int \frac{dx}{2x^2 + 7}.$$

$$5.23. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}.$$

$$5.8. \int \frac{dx}{5x^2 + 3}.$$

$$5.16. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}.$$

$$5.24. \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}.$$

$$5.9. \int \frac{dx}{5x^2 - 3}.$$

$$5.17. \int \frac{dx}{3x^2 + 1}.$$

$$5.25. \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}.$$

$$5.10. \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}.$$

$$5.18. \int \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{7 - 2x^2}}.$$

$$5.26. \int \frac{dx}{4x^2 - 9}.$$

$$5.11. \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 3}}.$$

$$5.19. \int \frac{\sqrt{14} dx}{2x^2 - 7}.$$

$$5.27. \int \frac{\sqrt{3} dx}{\sqrt{3x^2 - 25}}.$$

$$5.12. \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 7x^2}}.$$

$$5.20. \int \frac{dx}{8x^2 + 9}.$$

$$5.28. \int \frac{dx}{7x^2 + 3}.$$

$$5.13. \int \frac{\sqrt{5} dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}.$$

$$5.21. \int \frac{dx}{3x^2 - 2}.$$

$$5.29. \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}.$$

$$5.14. \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 9}}.$$

$$5.22. \int \frac{dx}{4x^2 + 9}.$$

$$5.30. \int \frac{dx}{9x^2 - 5}.$$

6. Знайти невизначені інтеграли.

$$6.1. \int e^{2x-7} dx.$$

$$6.6. \int e^{5x-7} dx.$$

$$6.11. \int e^{2x-10} dx.$$

$$6.2. \int e^{3+5x} dx.$$

$$6.7. \int e^{5x+7} dx.$$

$$6.12. \int e^{4x+3} dx.$$

$$6.3. \int e^{2-3x} dx.$$

$$6.8. \int e^{7-2x} dx.$$

$$6.13. \int e^{4x+5} dx.$$

$$6.4. \int e^{2x+1} dx.$$

$$6.9. \int e^{3-4x} dx.$$

$$6.14. \int e^{6x-1} dx.$$

$$6.5. \int e^{7x-2} dx.$$

$$6.10. \int e^{10x+2} dx.$$

$$6.15. \int e^{5-2x} dx.$$

6.16. $\int e^{4-3x} dx.$

6.21. $\int e^{8x+1} dx.$

6.26. $\int e^{2x+5} dx.$

6.17. $\int e^{3-5x} dx.$

6.22. $\int e^{2-6x} dx.$

6.27. $\int e^{5x-7} dx.$

6.18. $\int e^{1-4x} dx.$

6.23. $\int e^{2-4x} dx.$

6.28. $\int e^{3x+11} dx.$

6.19. $\int e^{2-5x} dx.$

6.24. $\int e^{3-6x} dx.$

6.29. $\int e^{11x-3} dx.$

6.20. $\int e^{6x-4} dx.$

6.25. $\int e^{4-3x} dx.$

6.30. $\int e^{11-9x} dx.$

7. Знайти невизначені інтеграли.

7.1. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{5-4x^2}}.$

7.9. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$

7.17. $\int \frac{5x dx}{\sqrt{3-5x^2}}.$

7.2. $\int \frac{x dx}{\sqrt{5-3x^2}}.$

7.10. $\int \frac{2x dx}{7-2x^2}.$

7.18. $\int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2+8}}.$

7.3. $\int \frac{3x dx}{4x^2+1}.$

7.11. $\int \frac{x dx}{2x^2-7}.$

7.19. $\int \frac{5x dx}{\sqrt{5x^2+3}}.$

7.4. $\int \frac{4x dx}{\sqrt{3-4x^2}}.$

7.12. $\int \frac{x dx}{3x^2+8}.$

7.20. $\int \frac{x dx}{3x^2-6}.$

7.5. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{8x^2-9}}.$

7.13. $\int \frac{2x dx}{3x^2-7}.$

7.21. $\int \frac{x dx}{5x^2+1}.$

7.6. $\int \frac{4x dx}{\sqrt{4x^2+3}}.$

7.14. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{2x^2+5}}.$

7.22. $\int \frac{5x dx}{5x^2-3}.$

7.7. $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-8x^2}}.$

7.15. $\int \frac{x dx}{\sqrt{7-3x^2}}.$

7.23. $\int \frac{x dx}{2x^2-7}.$

7.8. $\int \frac{\sqrt{3}x dx}{3x^2-2}.$

7.16. $\int \frac{x dx}{2x^2+9}.$

7.24. $\int \frac{9x dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$

$$7.25. \int \frac{\sqrt{3}x dx}{3x^2 - 2}.$$

$$7.27. \int \frac{2x dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}.$$

$$7.29. \int \frac{x dx}{25 - 9x^2}.$$

$$7.26. \int \frac{x dx}{4x^2 + 9}.$$

$$7.28. \int \frac{x dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}.$$

$$7.30. \int \frac{\sqrt{2}x dx}{2x^2 - 11}.$$

8. Знайти невизначені інтеграли.

$$8.1. \int \frac{7 - x^2}{1 - x} dx.$$

$$8.11. \int \frac{x^3 - 1}{x + 3} dx.$$

$$8.21. \int \frac{2x^3 + 3}{x - 1} dx.$$

$$8.2. \int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} dx.$$

$$8.12. \int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx.$$

$$8.22. \int \frac{1 - x^4}{x^2 + 4} dx.$$

$$8.3. \int \frac{8x^3 - 1}{2x + 1} dx.$$

$$8.13. \int \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} dx.$$

$$8.23. \int \frac{x^2 + 4}{x - 3} dx.$$

$$8.4. \int \frac{x^5 - 2}{x^2 - 4} dx.$$

$$8.14. \int \frac{x^3 - 3}{x + 5} dx.$$

$$8.24. \int \frac{2x^2 + 3}{2x^2 - 1} dx.$$

$$8.5. \int \frac{2x^4 - 3}{x^2 + 1} dx.$$

$$8.15. \int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} dx.$$

$$8.25. \int \frac{x^3 + x - 1}{x^2 + 1} dx.$$

$$8.6. \int \frac{x^3 - 1}{2x + 1} dx.$$

$$8.16. \int \frac{1 - 2x^4}{x^2 + 1} dx.$$

$$8.26. \int \frac{x^2 - 5}{x^2 + 3} dx.$$

$$8.7. \int \frac{x^5}{1 - x^3} dx.$$

$$8.17. \int \frac{2x^3 - 3}{x - 2} dx.$$

$$8.27. \int \frac{3x^2 - 1}{x + 7} dx.$$

$$8.8. \int \frac{x^2}{x^2 + 3} dx.$$

$$8.18. \int \frac{2x^2 + 5}{x + 1} dx.$$

$$8.28. \int \frac{x^3 - x + 3}{x^2 - 1} dx.$$

$$8.9. \int \frac{x^4}{x^2 - 3} dx.$$

$$8.19. \int \frac{x^2 + x}{2 - x} dx.$$

$$8.29. \int \frac{x^3 + x - 1}{x + 1} dx.$$

$$8.10. \int \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 1} dx.$$

$$8.20. \int \frac{2x^2 + 5}{x - 7} dx.$$

$$8.30. \int \frac{5 - x^2}{x^2 + 7} dx.$$

9. Знайти невизначені інтеграли.

$$9.1. \int x \cos 5x \, dx. \quad 9.11. \int \ln(x^2 + 4) \, dx. \quad 9.21. \int (x^2 + 4x) \cos x \, dx.$$

$$9.2. \int x e^{3x-5} \, dx. \quad 9.12. \int (x + 5) \sin 3x \, dx. \quad 9.22. \int (3x + 5) \sin x \, dx.$$

$$9.3. \int (x^3 + 1) \ln x \, dx. \quad 9.13. \int (2 - 9x) e^{-3x} \, dx. \quad 9.23. \int (x + 5) \operatorname{arctg} x \, dx.$$

$$9.4. \int (x + 1) \cos 2x \, dx. \quad 9.14. \int (3x - 2) \cos 5x \, dx. \quad 9.24. \int \arccos 2x \, dx.$$

$$9.5. \int (2 - x) \cos 3x \, dx. \quad 9.15. \int (2 - 3x) \sin 2x \, dx. \quad 9.25. \int (4x - 1) \ln x \, dx.$$

$$9.6. \int \ln(x - 1) \, dx. \quad 9.16. \int (4x - 2) e^{-2x} \, dx. \quad 9.26. \int (7x - 2) e^{-x} \, dx.$$

$$9.7. \int (2x + 1) \operatorname{arctg} x \, dx. \quad 9.17. \int x^3 \ln x \, dx. \quad 9.27. \int (x^2 + 4x) \ln x \, dx.$$

$$9.8. \int \operatorname{arctg} \sqrt{2x - 1} \, dx. \quad 9.18. \int x e^{-3x} \, dx. \quad 9.28. \int (1 - 3x) \cos 7x \, dx.$$

$$9.9. \int \arcsin x \, dx. \quad 9.19. \int (4x - 1) \cos 2x \, dx. \quad 9.29. \int (9x - 1) e^{7x} \, dx.$$

$$9.10. \int \operatorname{arctg} \sqrt{4x - 1} \, dx. \quad 9.20. \int (5x - 2) e^{3x} \, dx. \quad 9.30. \int (1 - x^2) \ln 2x \, dx.$$

Приклад виконання індивідуального завдання

$$\begin{aligned}
 1. \int \frac{3x^2 - 2\sqrt{x} + 5\sqrt[5]{x^3}}{x\sqrt{x}} dx &= 3 \int \frac{x^2}{x^{3/2}} dx - 2 \int \frac{x^{1/2}}{x^{3/2}} dx + 5 \int \frac{x^{3/5}}{x^{3/2}} dx = \\
 &= 3 \int x^{2-\frac{3}{2}} dx - 2 \int x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} dx + 5 \int x^{\frac{3}{5}-\frac{3}{2}} dx = \\
 &= 3 \int x^{1/2} dx - 2 \int \frac{dx}{x} + 5 \int x^{-9/10} dx = \\
 &= 3 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2 \ln|x| + 5 \frac{x^{-\frac{9}{10}+1}}{-\frac{9}{10}+1} + C = \\
 &= 3 \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 2 \ln|x| + 5 \frac{x^{1/10}}{\frac{1}{10}} + C = 2x^{3/2} - 2 \ln|x| + 50x^{1/10} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \int \sqrt[3]{5-2x} dx &= \int (5-2x)^{\frac{1}{3}} dx = \left\| \begin{array}{l} u = 5-2x, \\ du = (5-2x)' dx = -2dx \\ dx = -\frac{1}{2} du \end{array} \right\| = \\
 &= -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{3}} du = -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = -\frac{1}{2} \frac{(5-2x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = -\frac{3}{8} (5-2x)^{\frac{4}{3}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \int \frac{dx}{2+7x} &= \left\| \begin{array}{l} u = 2+7x, \\ du = (2+7x)' dx = 7dx \\ dx = \frac{1}{7} du \end{array} \right\| = \\
 &= \frac{1}{7} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{7} \ln|u| + C = \frac{1}{7} \ln|2+7x| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \int \sin(3x+1) dx &= \left\| \begin{array}{l} u = 3x+1, \\ du = (3x+1)' dx = 3dx \\ dx = \frac{1}{3} du \end{array} \right\| = \\
 &= \frac{1}{3} \int \sin u du = -\cos u + C = -\frac{1}{3} \cos(3x+1) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \int \frac{dx}{7x^2 + 3} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{7}x)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{d(\sqrt{7}x)}{(\sqrt{7}x)^2 + (\sqrt{3})^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{7}\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{21}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{7}{3}}x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \int e^{(11-3x)} dx &= \left\| \begin{array}{l} u = 11 - 3x, \\ du = (11 - 3x)' dx = -3dx \\ dx = -\frac{1}{3} du \end{array} \right\| = \\
&= -\frac{1}{3} \int e^u du = -\frac{1}{3} e^u + C = -\frac{1}{3} e^{11-3x} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \int \frac{2x dx}{\sqrt{4x^2 + 3}} &= \left\| \begin{array}{l} x dx = \frac{1}{2} dx^2 \\ u = 4x^2 + 3, \\ du = (4x^2 + 3)' dx = 8x dx \\ x dx = \frac{1}{8} du \end{array} \right\| = \\
&= \frac{2}{8} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \sqrt{u} + C = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + 3} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \int \frac{x^2 - 5}{x^2 + 3} dx &= \int \left(1 - \frac{8}{x^2 + 3} \right) dx = \\
&= \int dx - 8 \int \frac{dx}{x^2 + 3} = x - \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \int (7x - 2)e^{-x} dx &= \left\| \begin{array}{ll} u = 7x - 2 & dv = e^{-x} dx \\ du = (7x - 2)' dx = 7dx & v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\| = \\
&= -(7x - 2)e^{-x} + \int e^{-x} dx = -(7x - 2)e^{-x} - e^{-x} + C.
\end{aligned}$$

Список літератури

- [1] Шкіль М. І. Математичний аналіз: У 2 ч. Ч. 1/ М. І. Шкіль. — К.: Вища шк., 2005. — 447 с.
- [2] Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа/ Г. Н. Берман. — М.: Наука, 1967. — 444 с.
- [3] Тимченко Г. М. Стислий курс вищої математики, частина 1: навч. посіб./ Г. М. Тимченко, О. В. Одинцова, Н. О. Кириллова, О. С. Мазур. — Київ: «Кондор», 2022. — 188 с.

Зміст

Вступ	4
1 Невизначений інтеграл	5
1.1. Первісна функція	5
1.2. Таблиця основних інтегралів	6
1.3. Властивості невизначеного інтеграла	7
2 Основні методи інтегрування	8
2.1. Метод розкладання	8
2.2. Метод підстановки	10
2.3. Інтегрування частинами	27
3 Інтегрування алгебраїчних функцій	31
3.1. Інтегрування простих раціональних функцій	31
3.2. Інтегрування дробово–раціональних функцій	31
4 Інтегрування тригонометричних функцій	47
5 Індивідуальні завдання	51
Список літератури	61

Навчальне видання

Методичні вказівки
для самостійної роботи за темою
інтегрування функції однієї змінної
з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей ВІТВ

Укладачі: ВЕРЕТЕЛЬНИК Віктор Володимирович
ТИМЧЕНКО Галина Миколаївна

Відповідальний за випуск проф. В. Н. Бурлаєнко
Роботу до видання рекомендовав Г. В. Руднєва
В авторській редакції

План 2020 р., поз. 92

Підп. до друку 19.03.2021. Формат 60 x 84 1/16. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman Ум. друк. арк. 4.
Наклад 10 прим. Зам № 2115240. . Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 21.
