

**В.А. ВАНИН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**А.А. ГРИГОРЬЕВ**, аспирант, НТУ «ХПИ»

## **РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВИНТОВЫХ ВОЛН ТРАНСЛЯЦИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ КОНТИНУУМАХ, ВИБРИРУЮЩИХ СИНФАЗНО**

Запропоновані фізична концепція і математична модель активного механічного середовища, здатного передавати хвилі трансляції з квантованою амплітудою коливань і створювати фундаментальні силові поля, подібні до електромагнітного та гравітаційного поля. Розкрито взаємозв'язок між однорідним полем коливань тиску і хвильовим синфазним полем поперечних коливань, досліджений механізм передачі енергії в хвильовому полі. Для низькочастотних коливань пружини виявлено довгі хвилі трансляції, що мають форму солітонів. Отримано рівняння хвильового поля для середньочастотних синфазних коливань пружини, запропоновано використати гвинтовий стрижень як хвилевід або сонотрод ультразвукової резонансної техніки.

Предложены физическая концепция и математическая модель активной механической среды, способной передавать волны трансляции с квантованной амплитудой колебаний и создавать фундаментальные силовые поля, подобные электромагнитному или гравитационному полю. Раскрыта взаимосвязь однородного поля колебаний давления и волнового синфазного поля поперечных колебаний, исследован механизм передачи энергии в волновом поле. Для низкочастотных колебаний пружины обнаружены длинные волны трансляции, имеющие форму солитонов. Получены уравнения волнового поля высокочастотных синфазных колебаний пружины и предложено использовать винтовой стержень как волновод или сонотрод для ультразвуковой техники.

Is describing a physical concept and mathematical of an active mechanical medium, which is able to transmit translation waves with quantized amplitude of oscillation and create fundamental force fields, similar to electromagnetic or gravity fields. The interrelationship between uniform field of pressure variations and in-phase wave field of lateral oscillations of a medium, as well as way of transmitting energy in the wave field, are discovered. Long waves of translation, which have a form of soliton wave, are discovered in a low-frequency oscillation of a spring. Equations of wave field of high-frequency in-phase oscillations of the spring are developed. Spiral core is suggested for using as duct or sonotrode for ultrasound devices.

**Введение и постановка задачи.** Дальнейшее развитие математического моделирования в направлении углубления и уточнения анализа быстропротекающих процессов, с привлечение новых идей и технических решений, является предпосылкой для внедрения многих современных технологий. Работа посвящена освоению новых способов передачи энергии механических колебаний в устройствах для ультразвуковой обработки материалов. Известные недостатки имеющихся способов (быстрое угасание колебаний, высокую жёсткость передающих звеньев, неоднородность амплитуды) можно преодолеть, если перенять опыт природы и перейти с коротких волн на длинные. Для совершения перехода волновод обязан иметь соответствующую кривизну границы (или так называемую внутреннюю кривизну, которую образуют мелкие дефекты упругости в материале).

Для изучения этого опыта во многих областях современной науки активно исследуется особая форма автоколебаний, представленная длинными

уединёнными волнами трансляции – солитонами. Такие волны (фононы) были обнаружены и при решении уравнений механики нелинейного упругого континуума. Фонон является квантовым объектом, имеющим классическое описание. Считается, что изучение фононов, движущихся по активной механической среде (напр., по пористому упругому телу, вибрирующему синфазно), позволит объединить классическую и квантовую механику и подобрать ключи к решению универсальных проблем физики и техники. Но начинать изучение этих волн следует на одномерных задачах, примером которых является моделирование волновых полей тонкого винтового стержня. Фононы и волновые поля в винтовых стержнях ранее не изучались, но именно они могут привести к более эффективному способу передачи энергии ультразвуковыми колебаниями в различных технических устройствах.

Отметим, что полученные в работе результаты моделирования волновых полей в винтовых стержнях являются следствием анализа трёхмерных моделей нелинейных колебаний упругой среды. Задача этой части исследования состояла в изучении основных принципов устойчивого движения винтовой волны трансляции по активной механической среде, вибрирующей синфазно и обладающей свойствами физического пространства. Предполагается, что эти принципы найдут практическое применение на субатомном уровне (в нанотехнологиях), а разработанные методы электромеханической аналогии – при анализе колебаний в упругих элементах машин.

**Состояние научной проблемы.** В [1,2] выполнен обзор известных математических моделей сплошной упругой среды и винтовых цилиндрических стержней, а также методов расчёта их волн трансляции. Основной акцент сделан на соответствии модели свойствам физического пространства, а также практической направленности методов и их актуальности в условиях перемен, которые происходят в машиностроении и других областях техники с внедрением высоких (в частности, ультразвуковых) технологий.

Проанализированы теории физического пространства, основанные на концепции пассивной механической среды: теория увлечения эфира, теория вытеснения пространства, теория газо-подобного эфира, моментная теория упругости, и некоторые другие. Для первых двух теорий описаны простейшие математические модели. Отмечена особая роль уравнений Максвелла, которыми в современной физике описывают электромагнитное и гравитационное поле; соответствующая лоренц – инвариантная теория гравитации разработана *О. Хэвисайдом* [3] и является линейной аппроксимацией общей теории относительности для слабых полей.

В [4] представлена модель активной механической среды, основанная на гистерезисных свойствах упругопластической деформации материала, обладающего неоднородными механическими свойствами, и на взаимодействии однородного поля колебаний давления и синфазного поля поперечных колебаний (в литературе её называют *активной средой Максвелла*). Материал

среды медленно расширяется, и его состоянию в данный момент времени соответствует точка  $M_0$  на рис.1 (где  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность). Давлению  $p_0$  отвечает также точка  $M_1$  с меньшей плотностью. В распространяющейся волне трансляции происходит переход материала по пути  $M_0 M_\infty M_1$ , и его потенциальная энергия сжатия преобразуется в кинетическую форму.

В [2] проанализированы модели, описывающие нелинейные связанные колебания модели винтового цилиндрического стержня: *В. А. Светлицкого* и *С. В. Нарайкина* [5], *А. Г. Асланяна*, *А. В. Гулина* и *С. В. Картышова* [6], *А. И. Деряченко* [7], а также ряд более ранних линейных моделей *М.В. Хвингии*, *Л.В. Корчелного*, *Д.Ф. Полищука*, *П.Е. Товстика*, *А.А. Грунауэра* и др. авторов. Намечены пути для их совершенствования в соответствие с задачами работы.

Чтобы упростить и систематизировать анализ, все известные модели были записаны в единой матричной форме, а их параметры приведены к безразмерному виду:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B + \Omega x & \Omega yx \\ \Omega yx & -B^T - \Omega x^T \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T + \Omega x^T & \Omega yx^T \\ \Omega yx^T & -B - \Omega x \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

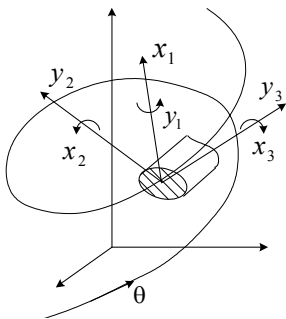


Рисунок 2 – Координаты сечения.

где  $\tau, \theta$  – время и натуральный параметр винтовой оси; векторы  $Vx, Vy$  составлены из линейных и угловых скоростей продольного  $x_{1,2,3}$  и поперечного  $y_{1,2,3}$  смещения сечения (рис.2);  $Qx, Qy$  – отвечающие им силы и моменты силы;  $Mx, My, Cx, Cy$  – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения;  $I, \Theta$  – единичная и нулевая матрицы;  $B, \Omega x, \Omega y, \Omega yx, \Omega yx$  – недиагональные матрицы линейной и нелинейной связи координат.

В работе [7] был выполнен частотный анализ уравнений линеаризованной модели вида (1) и построены дисперсионные диаграммы, пример которой приведен на рис. 3. Указывалось на наличие частот синфазных однородных колебаний пружины, а также на схожесть систем

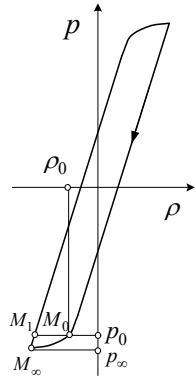


Рисунок 1 – Петля статического упругого гистерезиса.

уравнений для продольных и поперечных колебаний, но практической пользы из этих наблюдений извлечено не было. Отмечалось, что учёт сдвиговых и продольных деформаций оси (чего нет в моделях других авторов) не только уточняет получаемые результаты, но для высокочастотных колебаний изменяет их качественно. Однако эти факторы учитывались частично, для линейных колебаний малой амплитуды: в матрицы связи координат они не входили, и к образованию волнового поля синфазных колебаний не приводили.

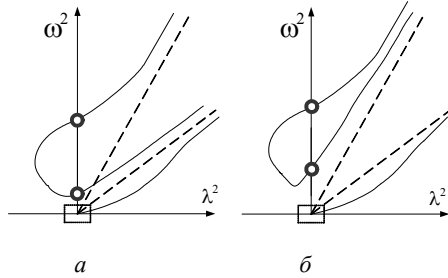


Рисунок 3 – Зависимости волнового числа  $\lambda$  от частоты  $\omega$  для продольных (а) и поперечных (б) колебаний стержня.

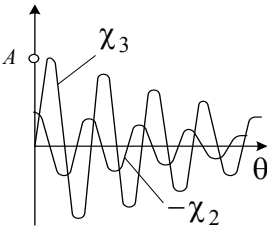


Рисунок 4 – Изменения кривизны  $\chi_2$  и кручения  $\chi_3$ .

В [8-10] рассматривалась модель короткой винтовой волны трансляции для связанных колебаний пружины. Волне отвечали точки средней ветви рис.3 а, имеющей прямолинейное протекание; форма колебаний на начальном участке волны показана на рис.4. Энергия волны оказалась пропорциональна частоте; в формулу для коэффициента пропорциональности (аналога постоянной Планка  $\hbar$ ) кроме геометрических параметров вошёл декремент затухания колебаний. В этой модели высокочастотные продольные колебания получали энергию от низкочастотных поперечных колебаний (конкретно – от равномерного расширения пружины, что отвечает известным представлениям об источнике энергии для физического пространства). Показано, что для поддержания постоянной амплитуды  $A$  волны трансляции интенсивность этого расширения должна быть чрезмерно велика: скорость витка будет близка к скорости звука в материале пружины. Следовательно, запасённая энергия должна быть потенциальной, и может переходить в кинетическую форму только в том месте, где находится волна. Такими свойствами обладают активные среды.

Активная механическая среда Максвелла, использующая энергию гистерезисного перехода, пока изучается на математических моделях. Но открытые на этой основе механизмы образования волнового синфазного поля можно использовать и в пассивных средах, в том числе в волноводе и в излучателе колебаний, применяемых при ультразвуковой обработке материалов: сварке, резке, финишной доводке поверхностей, и т.д. Так, при ультразвуковой сварке пластмасс [11] используются длинные пластинчатые волноводы (сонотроды), которые благодаря специально разработанной форме имеют в уз-

ком диапазоне частот выровненную амплитуду колебаний; такими же свойствами обладают волновые поля цилиндрической пружины.

**Модели для анализа винтовых волн переноса деформации в сплошной среде.** В [4] выявлена формальная аналогия между уравнениями линейной теории упругости и уравнениями Максвелла для электромагнитного поля. Уравнение для поперечных смещений  $\vec{u}$  сплошной среды

$$\rho \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = -G \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \rho \vec{f},$$

где  $t$  – время;  $\rho$  – плотность;  $G$  – модуль сдвига;  $\rho \vec{f}$  – плотность массовых сил, получило факторизации (3) и (4) в форме соотношений Максвелла (2)

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -c^{-1} \partial \vec{H} / \partial t, & \operatorname{div} \vec{E} = q, & \operatorname{div} \vec{J} + \partial q / \partial t = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = c^{-1} \partial \vec{E} / \partial t + c^{-1} \vec{J}, & \operatorname{div} \vec{H} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\vec{E} = G \operatorname{rot} \vec{u} - \rho \vec{L}$ ,  $\vec{H} = (G/c) \partial \vec{u} / \partial t$ ,  $q = -\rho \operatorname{div} \vec{L}$ ,  $\vec{J} = \rho \partial \vec{L} / \partial t$ , (3)

или  $\vec{E} = G \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} - \rho \vec{f}$ ,  $\vec{H} = (G/c) \partial \operatorname{rot} \vec{u} / \partial t$ ,  $q = -\rho \operatorname{div} \vec{f}$ ,  $\vec{J} = \rho \partial \vec{f} / \partial t$ ; (4)

$c = \sqrt{G/\rho}$  – скорость распространения волн поперечных смещений;  $\vec{f} = \operatorname{rot} \vec{L}$ .

Величины  $q, \vec{J}$  в системе (2) играют роль плотностей зарядов и токов.

Для системы (2) в [4] получено обобщение *теоремы Умова – Пойтинга*.

Пусть величина  $w(t) = \iiint_{P \in T} (k/2) (\vec{E}^2(P,t) + \vec{H}^2(P,t)) dV$ , где  $k > 0$  (5)

определяет энергию колебаний среды в области  $T$ , где  $q(P,t) = 0, \vec{J}(P,t) = 0$ .

Тогда

$$\partial w(t) / \partial t = \Pi_{\partial T}(\vec{S}) = \oiint_{\partial T} (\vec{S}, \vec{n}) d\sigma, \text{ где } \vec{S} = k \cdot c \left[ \vec{E}, \vec{H} \right].$$

Для факторизации (3) константа  $k = G^{-1}$ , вектор Пойтинга  $\vec{S} = [\vec{\tau}, \vec{v}]$ , а кинетическая и потенциальная энергии колебаний определяются скоростями

$\vec{v} = \partial \vec{u} / \partial t$  и напряжениями кручения

$\vec{\tau} = G \operatorname{rot} \vec{u}$ . Поле возникает при переме-

щении или вращении источников.

Можно принять, что  $\vec{L} = \operatorname{rot} \vec{h}$  и  $q \equiv 0$ ,

но если силовое поле  $\rho \vec{f}$  локальное и разрывное, то векторные линии его потен-

циала  $\vec{L}$  и токи  $\vec{J}$ , полученные известными методами, оказываются неза-

мкнутыми. В таких задачах выполнить условие  $q \equiv 0$  сложно, а для дальнего

поля элемент пульсирующего тока удобно заменять в расчёте элементар-

ным дипольным излучателем [12].

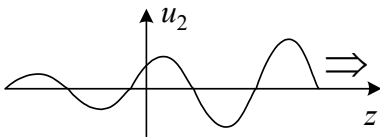


Рисунок 5 – Амплитудная функция волны.

ном элементарным дипольным излучателем [12].

В [4] приводится пример использования этой теоремы для анализа энергетического обмена в волне трансляции, образованной плоской волной крутильной деформации среды (рис.5)

$$\vec{u} = \Delta u \cdot \{0; r; 0\} \cdot e^{-f(\omega t - \lambda z)} \cdot \sin(\omega t - \lambda z), \quad \omega t - \lambda z \geq 0$$

и связанными колебаниями упругой оболочки (рис.6).

Для факторизации (4) кинетическая и потенциальная формы функционала (5) образуются угловыми скоростями  $\vec{\omega} = \partial \vec{\psi} / \partial t$  и плотностями упругой силы  $\vec{\sigma} = G \text{rot} \vec{\psi}$ , где  $\vec{\psi} = \text{rot} \vec{u}$ . Она позволяет моделировать движение источников поля. Пусть такой источник занимает малый объём  $\Delta V_1$  и перемещается по среде с относительной скоростью  $\vec{v}_1$ . Тогда в системе координат, движущейся и вращающейся вместе со средой, на него будет действовать сила

$$\vec{F} = \Delta V_1 \cdot \vec{E} + \Delta V_1 \cdot c^{-1} \left[ \vec{v}_1, \vec{H} \right],$$

где первое слагаемое пропорционально переносному, а второе – кориолисовому ускорению. Для поля поперечных смещений  $q \equiv 0$ , но в среде Максвелла возникают заряды, индуцирующие на своей границе центральное распределение напряжений и ускорений.

Среду Максвелла описывает уравнение нелинейной теории упругости

$$\partial(\rho \partial \vec{u} / \partial t) / \partial t = \text{grad}(K \text{div} \vec{u}) - \text{rot}(G \text{rot} \vec{u}) + \rho \vec{f}, \quad (6)$$

где  $K$  – модуль сжатия. Среда имеет мелкие дефекты сжимаемости (например, поры) и её низкочастотные колебания давления  $p$  описываются волновым уравнением, а высокочастотные – уравнением Клейна – Гордона:

$$a^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p; \quad a^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p - (\omega_* / a)^2 (p - p_0), \quad (7)$$

где  $a = \sqrt{K / \rho}$ ,  $\omega_* = \sqrt{3\varepsilon a / R_d}$ ,  $R_d$ ,  $\varepsilon$  – средний радиус и объёмная доля дефектов.

Уравнения (7) имеют решение  $p = p_o \psi(\omega_o t) + p_* \sin \omega_* t$ , где первое слагаемое описывает медленное изменение давления вдоль гистерезисной кривой (рис.1), вблизи точки  $M_0$ :  $\psi(\omega_o t) = 1 - \omega_o t \approx 1$ ,  $p_o \approx p_0$ . Заметим, что однородные колебания давления происходят из-за изменения объёма пор, то есть для упругой среды они внутренние.

В среде возникают однородные поля колебаний плотности и модуля:

$$\rho = \rho_o \psi(\omega_o t) + \rho_* \sin \omega_* t, \quad G = G_o \psi(\omega_o t) + G_* \sin \omega_* t.$$

Этому отвечает синфазные волновые поля смещений и ускорений

$$\vec{u} = \vec{u}_o \psi(\omega_o t) + \vec{u}_* \sin \omega_* t, \quad \vec{f} = \vec{f}_o \psi(\omega_o t) + \vec{f}_* \sin \omega_* t;$$

частоты  $\omega$  изменения амплитуд  $\vec{u}_o$ ,  $\vec{u}_*$ ,  $\vec{f}_o$ ,  $\vec{f}_*$  отвечают условию  $\omega_o \ll \omega \ll \omega_*$ .

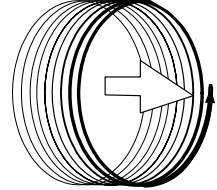


Рисунок 6 – Форма оболочки.

Подстановка в (6) и усреднение приводит к уравнениям двух *синфазных полей* – *расширяющегося и пульсирующего*:

$$\rho_o \partial^2 \bar{u}_o / \partial t^2 = -G_o \text{rot rot } \bar{u}_o + \rho_o \bar{f}_o, \quad \rho_* \partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2 = -G_* \text{rot rot } \bar{u}_* + \rho_* \bar{f}_*$$

чему отвечают уравнения Максвелла вида (1) и факторизации вида (4):

$$\bar{E}_o = G_o \text{rot rot } \bar{u}_o - \bar{f}_o, \quad \bar{H}_o = (G_o / c_o) \partial \text{rot } \bar{u}_o / \partial t, \quad q_o = -\rho_o \text{div } \bar{f}_o, \quad \bar{J}_o = \rho_o \partial \bar{f}_o / \partial t,$$

$$\bar{E}_* = G_* \text{rot rot } \bar{u}_* - \bar{f}_*, \quad \bar{H}_* = (G_* / c_*) \partial \text{rot } \bar{u}_* / \partial t, \quad q_* = -\rho_* \text{div } \bar{f}_*, \quad \bar{J}_* = \rho_* \partial \bar{f}_* / \partial t,$$

где  $c_o = \sqrt{G_o / \rho_o}$ ,  $c_* = \sqrt{G_* / \rho_*}$ , причём здесь  $q_o \neq 0$ ,  $q_* \neq 0$  и  $c_o = c_* = a$ .

В тех областях среды, где  $q_* \neq 0$ , уравнение (7) принимает вид (см. [13])

$$a^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p - [(\omega_* - \omega)^2 / a^2](p - p_o), \quad (8)$$

и реализуются его решения, отвечающие заряженным и незаряженным частицам. Учитываемое в (8) изменение синфазной частоты  $\omega_*$  происходит под действием двух факторов: она возрастает при увеличении температуры среды и уменьшается при гистерезисном переходе материала.

У зарядов изменение амплитуды  $p_*$  квантовано, имеет сферическую симметрию и при малых значениях  $r$  (рис.7) описывается формулой:

$$p_*(r) = \pm(p_o - p_\infty) \cdot \sin(\lambda_* r) / (\lambda_* r),$$

где  $\lambda_* = \sqrt{2\omega_*\omega_3 - \omega_3^2} / a$  – радиальное волновое число, частота  $\omega_3$  отвечает центру заряда. Минимальный размер заряда соответствует условию  $\omega_3 = \omega_*$ , что необходимо для его устойчивости. Как следствие, все пульсирующие устойчивые заряды имеют одинаковую производительность, образуют диполи и взаимодействуют с силой (см. [14]), аналогичной силе Лоренца из электродинамики. Одноименные заряды отталкиваются, сонаправленные токи притягиваются. В результате пульсирующее синфазное поле среды Максвелла оказывается изоморфным электромагнитному полю.

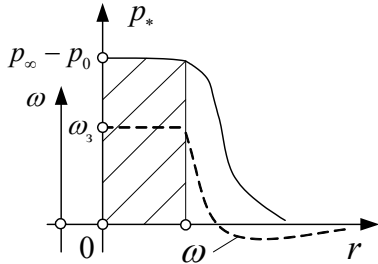


Рисунок 7 – Радиальные формы для заряда.

Для плотного грунта при параметрах пористости  $R_d = 1 \text{ мкм}$ ,  $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-16}$  получаем  $\omega_* \approx 50 \text{ с}^{-1}$ , что отвечает частоте колебаний 8 Гц, известной как альфа – ритм; радиус заряда оценивается величиной 90 м, в его объём попадают  $4 \cdot 10^8$  дефектов. Если для эфира принять  $\varepsilon = 10^{-13}$  (что соответствует отношению объёмов ядра и атома), то классическому радиусу заряда  $2.8 \cdot 10^{-15} \text{ м}$  будут отвечать значения радиуса дефекта  $R_d = 5 \cdot 10^{-22} \text{ м}$  и частоты  $10^{23} \text{ Гц}$ ; в объём заряда попадут  $2 \cdot 10^6$  дефектов.

Незаряженным частицам пульсирующего поля отвечают винтовые волны давления (спиноры)

$$p = p_0 - (p_0 - p_\infty) \Psi_n(r) \sin(\omega_* t - \lambda z - n\varphi) \eta(z - at),$$

где  $r, z, \varphi$  – цилиндрические координаты;  $\eta(x)$  – функция Хэвисайда;  $n = 1, 2$ ;  $\lambda, \lambda_*$  – волновые числа (осевое и радиальное),  $\lambda_* = \sqrt{2(\omega_* - \omega_3)\omega_3} / a$ ; зависимость  $\Psi_n(r)$  описывается функциями Бесселя, Неймана и Ханкеля  $n$ -го порядка (рис.8);

$$\tilde{J}_n(x) = J_n(x) / J_n'(n) - N_n(x) / N_n'(n),$$

что отвечает условиям

$$\tilde{J}_n'(n) = \tilde{J}_n''(n) = 0. \quad (9)$$

Такие частицы имеют момент количества движения (спин) и ядро, в котором выполняется условие гистерезисного перехода  $p = p_\infty$ ; непрерывное выполнение этого условия необходимо для устойчивости волны. Форма ядра винтового фонона для  $n=1$  показана на рис.9. Ядро вращается с угловой скоростью  $(\omega_* - \omega_3) / n$  и движется поступательно со скоростью  $a$ .

Диссипативные факторы компенсируются выделением кинетической энергии в ядре, что увеличивает давление за прямоугольным фронтом волны (его формируют условия (9)) и как бы «подталкивает» её.

Непрерывный гистерезисный переход материала приводит к условию  $q_0 \neq 0$ , что создаёт заряд  $m$  поля расширения, причём все заряды этого поля имеют один знак, но разную величину. Для винтового фонона, показанного на рис.9, весь этот заряд располагается на расстоянии  $R$  от оси вращения, и выполняются условия:

$$m R^2 (\omega_* - \omega_3) = \hbar \cdot n / 2, \quad m = \hbar \omega_3 / a^2,$$

то есть спин не зависит от длины волны. Константа  $\hbar$  определяется свойствами пористой среды и может быть получена экспериментально.

Суммарный заряд  $m_\Sigma = \sum m_j$  расширяющегося поля определяется скоростью расширения  $\omega_0$  и является константой (аналог законов сохранения массы и энергии).

В работе [16] показано, что неподвижные заряды этого поля притягиваются с силой, изменяющейся по закону обратных квадратов, а движущиеся заряды взаимодействуют с силой, анало-

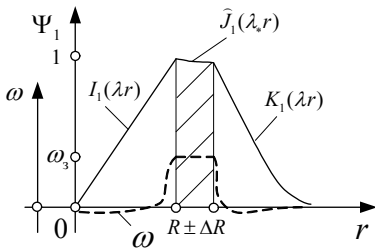


Рисунок 8 – Радиальные формы для спинора.

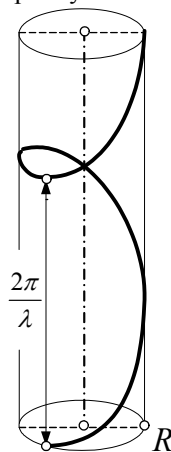


Рисунок 9 – Ядро спинора.

гичной силе Лоренца; при этом сонаправленные токи отталкиваются. В результате расширяющееся синфазное поле среды Максвелла оказывается изоморфным лоренц - инвариантному гравитационному полю.

Расширяющееся поле обладает индукцией, но все заряды имеют один знак, и поэтому её влияние невелико. В [14] *доказана следующая теорема.* Пусть заряды области  $T_1$  создают стационарное синфазное расширяющееся поле, и внутри области  $T_2$  поле гравитационной силы является однородным. Тогда отношение суммарных сил индукции  $F_\chi$  и гравитации  $F_\gamma$ , действующих на заряды из области  $T_2$ , удовлетворяет неравенству

$$F_\chi / F_\gamma \leq v_1 \cdot v_2 / c^2, \quad (7)$$

где  $v_1, v_2$  – максимальные скорости движения зарядов в областях.

Аналогичная теорема справедлива для пульсирующего синфазного поля, но при условии, что в областях  $T_{1,2}$  все его заряды имеют один знак. В прикладных задачах электродинамики такое условие выполняется редко.

**Нелинейные модели для анализа волн трансляции в винтовом стержне.** На основе анализа и синтеза известных математических моделей в [2] разработана новая динамическая модель винтового стержня, предназначенная для исследования нелинейных колебаний и автоколебаний в широком диапазоне частот и длин волн. К отличительным особенностям модели относятся следующие её качества: рассматриваются связанные колебания групп продольных и поперечных деформаций; уравнения имеют симметричную матричную форму (1); число коэффициентов взаимного влияния групп увеличено до 6-ти, а с учётом конвективных членов – до 12-ти.

Матрицы нелинейной связи координат имеют в модели следующую форму:

$$\Omega x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\chi_1 \\ -\varepsilon_2 & \chi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega y x = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\chi_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega x y = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & 0 \\ -\chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\chi_{1,2,3}$  – кривизны и кручение;  $\varepsilon_{1,2,3}$  – деформации сдвига и сжатия стержня.

Проанализированы решения дисперсионного уравнения модели и показано, что они слабо зависят от коэффициентов влияния, выявлена и обоснована прямолинейность протекания средних ветвей для решений этого уравнения (рис.3), получены формулы для частот синфазных колебаний (на рис.3 им отвечают точки на оси  $\omega^2$ ). В основу модели положена гипотеза С.П. Тимошенко о равномерной форме деформации тонких стержней, и было необходимо проверить её правомочность в области высокочастотных и коротковолновых колебаний. В ходе проверки, при использовании трёхмерной

модели линейной теории упругости в [15] решена задача о распространении экспоненциальных волн переноса по цилиндрическому стержню. Решения используют бегущие скалярные и векторные потенциалы:

$$\vec{u} = \vec{\Psi}(r, \varphi) \cdot \exp(\omega t - \lambda z) \cdot \eta(\omega t - \lambda z) = C_1 \vec{u}_1 + C_2 \vec{u}_2 + C_3 \vec{u}_3,$$

$$\vec{u}_1 = \text{rot}(\Phi_1(r, \varphi) \cdot e^{\omega t - \lambda z} \vec{k}); \vec{u}_2 = \text{rot rot}(\Phi_2(r, \varphi) \cdot e^{\omega t - \lambda z} \vec{k}); \vec{u}_3 = \text{grad}(\Phi_3(r, \varphi) \cdot e^{\omega t - \lambda z})$$

связанные граничными условиями на боковой поверхности (при  $r = R$ ):

$$\text{def } \vec{u}_{r,r} + [\mu / (1 - 2\mu)] \text{div } \vec{u} = 0; \text{def } \vec{u}_{r,z} = 0; \text{def } \vec{u}_{r,\varphi} = 0.$$

Потенциалы  $\Phi_{1,2,3}(r, \varphi)$  выражены через функции Бесселя  $n$ -го порядка, а трансцендентные дисперсионные уравнения после локализации корней решались методом дихотомии. Были исследованы осесимметричные ( $n=0,1,2, \dots$ , кручение и  $n=0,1$ , продольная деформация), а также сектораль-

ные волны переноса ( $n=1$ ). Полученные решения для области волновых чисел  $\lambda \cdot R < 1$  (отрезок  $1'$ , рис.10, а) подтвердили, а в случае более коротких волн – уточнили результаты применения классической теории тонких стержней.

Кроме известных решений получены короткие волны переноса импульса (неравномерного сдвига сечения, рис.11), не описываемые классической теорией. Оказалось, что если граничное сечение стержня закреплено только лишь в концах диаметра, то центральная и периферийная (при углах  $|\varphi| > 30^\circ$ ) зоны сечения получают возможность смещаться при аperiодических поперечных колебаниях в противоположные стороны. Что приведёт к значительному увеличению напряжений, и это нужно учитывать при

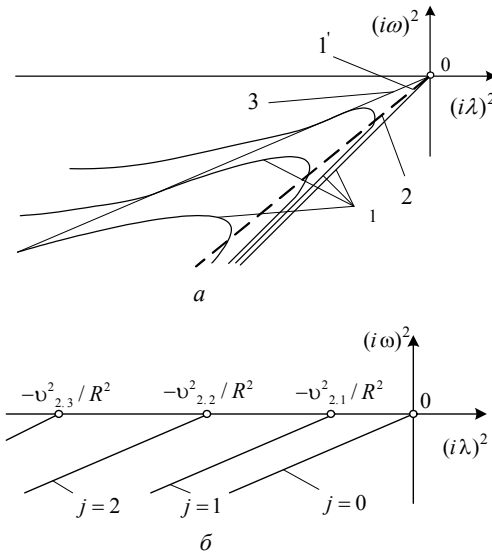


Рисунок 10 – Дисперсионные диаграммы для продольного сжатия (а, 2 – классическое решение) и вращения стержня (б, классическое –  $j=0$ , зональное –  $j > 0$ ).

Прямая 3 соединяет точки перегиба и удовлетворяет уравнению  $\omega^2 = (G/\rho)\lambda^2$ .

проектировании и прочностном расчёте.

Попутно в [16] получены формулы для расчёта кинетической энергии, которую переносят экспоненциальные волны деформации кручения стержня, имеющие постоянную (квантованную) амплитуду и определённую форму

деформации сечения. Показано, что при равномерных деформациях сечения энергия волны пропорциональна «частоте»  $\omega$ , причём значению постоянной Планка отвечает стержень, радиус которого близок к радиусу ядра атома.

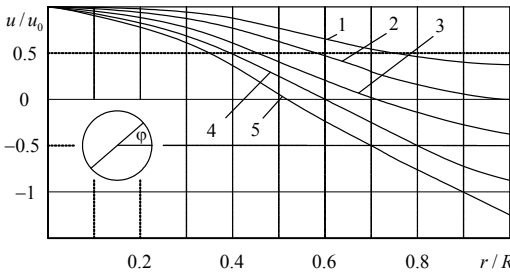


Рисунок 11 – Поперечный сдвиг для точек сечения (1 –  $\varphi = 0^0$ , 2 –  $\varphi = \pm 30^0$ , 3 –  $\varphi = \pm 45^0$ , 4 –  $\varphi = \pm 60^0$ , 5 –  $\varphi = \pm 90^0$ ).

нии формы деформации энергия изменяется дискретно в соответствии с квантовым постулатом Нильса Бора. Эти результаты указывают на существование более тесной связи между классическими и новыми разделами механики, чем считалось ранее.

В [17] выполнена нелинейная аппроксимация низкочастотных связанных нелинейных колебаний пружины по её дисперсионному уравнению (рис.12).

Колебания описываются системой вида (1)

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Omega \\ \Omega & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} -B^T & \Omega \\ \Omega & B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

где  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \chi_3 & 0 \\ -\chi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\chi_3 = Cx_3 Qx_3 - \chi_3^0$ .

Показано, что эти колебания описываются одномерными уравнениями Кортевега – де Фриза: (классическим, в случае значительной начальной деформации кручения  $\chi_3^0$ , или модифицированным, если этой деформацией

Для неравномерных деформаций сечения частота, волновое число и энергия волны при изменении скорости переноса подчиняются *релятивистскому преобразованию Лоренца*, а её реальная длина укорачивается в соответствии с *гипотезой Фитцджеральда*. При измене-

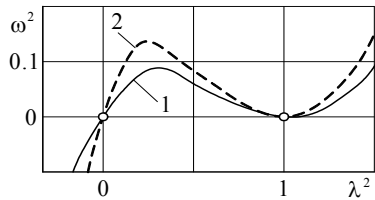


Рисунок 12 – Нижние ветви дисперсионной диаграммы (1 – продольные, 2 – поперечные колебания; на рис. 3 участок обозначен прямоугольником).

можно пренебречь):

$$u'_t + (u + u^2 + u''_{xx})'_x = 0, \quad u'_t + (u + u^3 + u''_{xx})'_x = 0. \quad (11)$$

Получены формулы, связывающие скорость  $v$ , энергию  $E_c$ , импульс  $P_c$  и другие характеристики уединённой нелинейной волны переноса (классического или модифицированного солитона Рассела) с амплитудой  $A_c$  кручения проволоки. Для модифицированного солитона (рис.13) они имеют вид:

$$v_c = v_0(1 + A_c^2/2), E_c = [\pi/(4(1 + \mu)z_{\text{п}})]Gd^3 A_c, P_c = (\pi^2/4)d^3 \sqrt{\rho G},$$

где  $d, z_{\text{п}}$  – диаметр проволоки и индекс навивки;  $\rho, G$  – её плотность и модуль сдвига;  $v_0$  – скорость линейной волны при продольной деформации пружины;  $\mu$  – коэффициент Пуассона. По условиям прочности стержня

$$A_c < \Delta\tau \cdot z_{\text{п}},$$

где  $\Delta\tau = \tau_k / E = 0.005...0.01$ ,  $\tau_k$  – предельно допустимое касательное напряжение;  $E$  – модуль Юнга. Как следствие характерной особенностью изучаемых солитонов является узкий диапазон их скоростей, которые отличаются от скорости  $v_0$  на доли процента.

Благодаря этому свойству, а также пропорциональности энергии и амплитуды и независимости момента количества движения от амплитуды, солитон оказывается подобным фотону.

Обнаруженные солитоны имеют эффективную длину 10...20 витков, то есть относятся к диапазону длинных волн и, если их не генерируют специально, могут наблюдаться только в длинных пружинах (например, в длинных пружинах растяжения, где легко обеспечить устойчивость, или в винтовой обмотке струны). Они способны аккумулировать и переносить значительную энергию, что открывает перспективу использования этих волн в виброударных установках различного назначения. Предельное значение энергии солитона в стальной пружине определяется формулой  $E_M = 5 \cdot 10^9 d^3$ ; так, для пружины с диаметром проволоки  $d = 20$  мм эта величина составляет 4 кДж.

В [20] изучен механизм образования в тонком винтовом стержне волнового синфазного поля, который отличается от описанного выше тем, что синфазная частота  $\omega_*$  однородных колебаний плотности определяется не радиусом кривизны внутренних дефектов, а кривизной стержня. На нижней синфазной частоте поперечных колебаний  $\omega_*$  (рис.3 б, нижняя точка пересечения графика с осью  $\omega^2$ ) их форма имеет вид:

$$(Vy, Qy) = A_* \cdot ((0 \quad -0.5/z_{\text{п}} \quad 0)^T \cos(\omega_* t); (0 \quad 0 \quad 1)^T \sin(\omega_* t)),$$

то есть в колебаниях участвуют радиальная скорость и напряжение сжатия

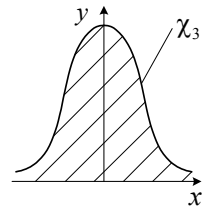


Рисунок 13 –  
Изменение  
кручения стержня  
внутри солитона.

винтовой оси. Кроме того эти напряжения могут медленно изменяться (напр., уменьшаться) по линейному закону  $\psi(\omega_0 t) = 1 - \omega_0 t \approx 1$ . В результате происходит изменение и пульсация значений погонной плотности и зависящих от неё матриц  $M = M_x, M_y$  и  $C = C_x, C_y$ :

$$\rho = \rho_0 \psi(\omega_0 t) + \rho_* \sin \omega_* t, \quad M = M_o \psi(\omega_0 t) + M_* \sin \omega_* t, \\ C^{-1} = C_o^{-1} \psi(\omega_0 t) + C_*^{-1} \sin \omega_* t,$$

а также матрицы связи  $\Omega$ . Систему (9) приводим к форме операторного уравнения

$$\begin{bmatrix} M_x & \Theta \\ \Theta & M_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}'' = \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Omega \\ \Omega & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} C_x^{-1} & \Theta \\ \Theta & C_y^{-1} \end{bmatrix} \times \\ \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & \Omega^T \\ \Omega^T & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

и ищем решение в виде:  $\bar{x} = \bar{x}_o \psi(\omega_0 t) + \bar{x}_* \sin \omega_* t$ ,  $\bar{y} = \bar{y}_o \psi(\omega_0 t) + \bar{y}_* \sin \omega_* t$ , где частоты  $\omega$  изменения амплитуд  $\bar{x}_*$ ,  $\bar{y}_*$ ,  $\bar{x}_o$ ,  $\bar{y}_o$  отвечают условию  $\omega_o \ll \omega \ll \omega_*$  (эти условия выполняются для ветвей, показанных на рис.12).

Усреднение и факторизация операторного уравнения приводит к двум *синфазным полям – расширяющемуся и пульсирующему*, причём оба поля описываются системой (10), но с матрицами связи  $\Omega = \Omega_o$  и  $\Omega = \Omega_*$ , где

$$\Omega_o = \begin{pmatrix} 0 & \chi_{3,o} & 0 \\ -\chi_{3,o} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_* = \begin{pmatrix} 0 & \chi_{3,*} & 0 \\ -\chi_{3,*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{3,0} = Cx_3 Qx_{3,o} - \chi_3^0, \\ \chi_{3,*} = \sqrt{\chi_{3,0}^2 + (3/4)(Cx_3 Qx_{3,*})^2}.$$

Как и для среды Максвелла, волновое расширяющееся поле пружины оказывается слабым и технических приложений не имеет. В пульсирующем поле амплитудные функции  $Vx_*$ ,  $Vy_*$ ,  $Qx_*$ ,  $Qy_*$  имеют большую длину волны и слабое затухание, что открывает широкие перспективы для приложений.

Изучена возможность образования солитона волнового пульсирующего поля пружины. Форма матрицы влияния  $\Omega_*$  показывает, что в этом поле, не зависимо от величины  $\chi_3^0$ , получим модифицированное уравнение (11). У соответствующего солитона максимальная амплитуда продольных колебаний равняется  $\Delta h = (\sqrt{2}/4)\pi z_{\text{п}} d$ , что на 2...3 порядка превышает её уровень для ультразвуковой техники, а максимальная линейная скорость перемещения близка к скорости звука в материале. Характерно, что относительные скорости деформации в волновом солитоне невелики, и пружина выдержит такие интенсивные колебания, но возбудить их известными методами сложно.

**Приложения синфазных колебаний для ультразвуковой обработки материалов.** В соответствующих устройствах для передачи упругой энергии

используют стержни и др. элементы, длина которых кратна длине полуволны возбуждаемых колебаний. При резонансной частоте 22 кГц, на которой работают многие устройства, длина полуволны для прямых стальных стержней составляет 112 мм, титановых – в 1.2 раза больше. Для винтового стержня, колеблющегося с синфазной частотой, этого ограничения нет.

Разработан порядок возбуждения такого поля и изучены факторы, определяющие синфазную частоту  $\nu_* = \omega_*/(2\pi)$  и влияющие на её изменения при работе стержня. Оказалось, что она определяется формулой

$$\nu_* = \sqrt{E/\rho} \sqrt{1 + 0.5\chi_3^2(1 + 0.5/(1 + \mu))} / (2\pi R_{кр} [1 + 1/(4z_{п}^2)]),$$

где  $R_{кр}$  – радиус кривизны стержня,  $R_{кр} = R_{в} / \cos^2 \delta$ ;  $R_{в}, \delta$  – радиус навивки и угол подъёма спирали;  $\chi_3 = tg\delta_0$  – изменение кручения при начальном сжатии. Фактически, эта частота определяется скоростью распространения волны продольной деформации по витку пружины, не зависит от формы сечения и является стабильной величиной. Для тонкого стального стержня при индексе  $z_{п} > 5$  и температуре  $t_{п} < 120$  С имеем простую зависимость

$$R_{кр} = 0.77 / (\nu_* / 10^3).$$

Для частоты 22 кГц получаем радиус кривизны 36 мм, а диаметр стержня  $d=8...10$  мм. Пружина из такой проволоки выдерживает сжимающую и сдвигающую нагрузку  $F_{д}=6...10$  кН. Если частота увеличена до 130 кГц, то  $R_{кр} \approx 10$  мм,  $d=2...3$  мм, а сила  $F_{д}=200...300$  Н.

Чтобы возбудить волновое поле нужно обеспечить поперечное колебание опоры в точке закрепления пружины. Показано, что если относительное отклонение частоты  $\nu_*$  не превосходит величины  $\Delta \nu_* = 0.2/i_{в}$ , где  $i_{в}$  – число витков пружины, то искажениями в работе волнового синфазного поля можно пренебречь. В частности, амплитуда указанного колебания будет образовывать однородное поле, а соответствующую жёсткость при расчёте устройства допустимо считать бесконечной. В тоже время коэффициенты жёсткости пружины при продольном сжатии и сдвиге, а также аналогичные коэффициенты для волнового поля синфазных колебаний, будут на один – два порядка ниже, чем у других элементов волноводной системы.

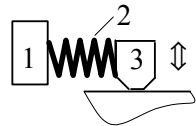


Рисунок 14 –  
Схема  
устройства.

Изучены факторы, влияющие на прочность стержня при его колебаниях на режимах волнового поля. Оказалось, что они аналогичны требованиям, которые предъявляют к интенсивности динамической деформации стержня на низких частотах, но вместо скорости смещения опоры здесь ограничивается скорость изменения амплитуды её колебаний. В частности, для обеспечения усталостной прочности материала необходимо и достаточно, чтобы максимальная скорость изменения амплитуды не превосходила величины

$\Delta\nu = 5 \text{ мкм/мкс}$  ; для устройств резонансной техники это условие выполняется с запасом.

В современной технологии безабразивной ультразвуковой финишной обработки поверхности металла пружину предлагается использовать как элемент волноводной системы (рис.14). Пружина 2 устанавливается между магнитострикционным элементом 1, генерирующим поперечные колебания с частотой 22 кГц (или 50 кГц , 80 кГц) и амплитудой 5...25 мкм , и индентором 3, что существенно повышает функциональные качества системы. Жёсткость пружины достаточна, чтобы обеспечить необходимое усилие прижатия  $F_T = 100...300 \text{ Н}$  . Аналогичную схему можно применять и при ультразвуковой сварке металлов.

Ультразвуковая сварка или резка мягких пластмасс осуществляется на резонансной частоте 18...50 кГц при амплитуде продольных деформаций 30...70 мкм и усилении прижатия  $F_T = 50...150 \text{ Н}$  ; для этих условий рекомендуется использовать схему рис.14. При сварке жёстких пластмасс необходимо обеспечить поперечные колебания излучателя тепловой энергии – сонотрода, работающего с амплитудой 40 мкм и частотой 22 кГц , причём амплитуда должна быть выровненной на участке, длина которого превышает длину возбуждающей волны на порядок. Известное решение использует пластину специальной формы, к которой подключают 5 генераторов колебаний. Более эффективное решение даёт пружина, в которой возбуждаются синфазные поперечные колебания. Тогда можно использовать один генератор, а частоту колебаний повысить до уровня 130...150 кГц .

В волноводных системах резонансной ультразвуковой техники для увеличения амплитуды колебаний используют трансформаторы упругих колебаний; их часто изготавливают в виде прямого стержня переменного сечения, площадь которого изменяют по ступенчатому или непрерывному закону. Такое же усиление для амплитуды продольных колебаний обеспечит винтовой стержень переменного сечения, если при его навивке обеспечить постоянный радиус кривизны нейтрального волокна (как в конструкции штопора), или плавно изменять угол  $\delta$  подъёма спирали.

Винтовой титановый стержень (рис.15), навитый с углом подъёма  $\delta \approx 75...80^\circ$  , рекомендуется использовать как сонотрод для ультразвуковых гомогенизаторов. Это обеспечит поперечный размер, как у его аналогов, но продольный размер можно увеличить на порядок (он ограничен только величиной отклонения частоты  $\Delta\nu_*$  ), что позволит применять гомогенизатор в узких длинных каналах. Поперечные однородные колебания сонотрода можно совместить с его продольными синфазными колебаниями, что улучшит кавитацию.

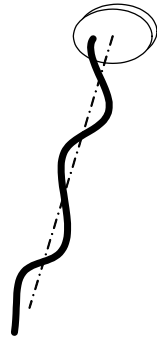


Рисунок 15 –  
Винтовой  
сонотрод.

**Выводы.** На основе гистерезисных свойств деформации материала разработана оригинальная физическая концепция и новая математическая модель для активной механической среды, способной передавать волны трансляции с квантованной амплитудой колебаний и создавать фундаментальные силовые поля, подобные электромагнитному полю и лоренц - инвариантному гравитационному полю, обладающему индукцией. Получена эффективная оценка для индукции поля. Раскрыта взаимосвязь между однородным полем колебаний давления и волновым синфазным полем поперечных колебаний среды, а также исследован механизм передачи энергии в волновом поле.

Внесены необходимые уточнения в матричную и векторную модели связанных нелинейных колебаний тонкого цилиндрического стержня и получены уравнения волнового поля среднечастотных синфазных колебаний пружины.

Выполнена нелинейная аппроксимация уравнений низкочастотных связанных колебаний тонкого винтового стержня и для продольных деформаций пружины получены длинные волны трансляции, имеющие форму солитонов.

Составлена трёхмерная математическая модель для исследования волн переноса деформации по цилиндрическому стержню и разработан аналитический метод решения её уравнений, использующий бегущие потенциалы Герца.

Показано, что задачи динамического деформирования упругого тела с внутренними (в т.ч. пульсирующими) источниками напряжения могут решаться при использовании уравнений Максвелла и методов расчёта электромагнитного поля.

Выявлено, что при интенсивном деформировании в пружине возникают нелинейные бегущие волны – винтовые солитоны. Они концентрируют напряжения и их нужно учитывать при прочностных расчётах. Они переносят значительную энергию и импульс, и их можно использовать в виброударных системах.

Выяснено, что при соответствующих граничных условиях в стержнях и валах возникают внутренние колебания, отличающиеся неравномерной деформацией поперечного сечения. Такие колебания не описываются классической теорией тонких стержней, но их нужно учитывать при прочностном расчёте.

Показано, что использование винтового стержня в качестве волновода для ультразвуковой резонансной техники позволит передавать энергию колебаний посредством длинных волн синфазного волнового поля; такое решение минимизирует потери и улучшает функциональные свойства передачи. При сварке, резке и финишной обработке материалов повышается предельная частота колебаний, сокращаются габариты установки и длительность технологической операции. Значительно возрастает предельная длина сонотрода, работающего от одного генератора колебаний.

**Список литературы:** 1. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Критический анализ некоторых современных моделей физического пространства // Вестник НТУ «ХПИ». –2012.– № 2.– С.31-53. 2. *Лавинский В.И., Григорьев А.А.* Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». –2008.– № 47. – С.92-104. 3. *Heaviside O.* A gravitational and electromagnetic analogy. – Part I.–The Electrician, 31.–1893.–P.281-282. 4. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». –2010. –№ 37. –С.59-68. 5. *Светлицкий В.А., Нарайкин О.С.* Упругие элементы машин. –М.: Машиностроение, 1989.–264 с. 6.

Асланян А.Г., Гулин А.В., Картышов С.В. Расчет собственных частот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование – Т.2.–1990.–№ 8.– С.21-30. 7. Григорьев А.Л., Деряченко А.И. Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Висока технології в машинобудуванні. – Харків, 2004. – Вип. 2 (9). – С.257-264. 8. Ванін В.А., Григорьев А.А. Изоморфизм групп продольных и поперечных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 68. – С.23-37. 9. Григорьев А.А., Деряченко А.И. Моделирование гармонического волны переноса для связанных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13.–С.39-54. 10. Ванін В.А., Григорьев А.А. Моделирование характеристик устойчивой волны переноса упругопластической деформации в винтовом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 42. – С.22-36. 11. Сенченков И.К. Модальная классификация и проектирование сонотродов для ультразвуковой сварки пластмасс // Акустичний вісник. –1998.– 1, №4.–С.55-64. 12. Никольский В.В. Теория электромагнитного поля.– М.: Высшая школа, 1964. 13. Ванін В.А., Григорьев А.А. Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». –2010. – № 69. – С.35-45. 14. Ванін В.А., Григорьев А.А. Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.14-32. 15. Ванін В.А., Григорьев А.А., Деряченко А.И. Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 16. Ванін В.А., Григорьев А.А. Квантовая релятивистская механика уединённых экспоненциальных волн переноса деформации кручения по цилиндрическому стержню // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011.– № 42. – С.14-32. 17. Ванін В.А., Григорьев А.А. Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». –2009. – № 30.–С.20-30.

Поступила в редколлегию 03.05.2012

УДК 17.27

**Р.В. ДАЛЛАКЯН**, канд. физ.-мат. наук, ГИУА, Ереван

## **О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ $U_\alpha$**

Доведено теорему, що оцінює ступінь зростання для деяких класів гармонійних функцій, та проаналізовано її наслідки.

Доказана теорема, оцінювальна ступень росту для некоторых классов гармонических функций, и проанализированы её следствия.

Teorema proved that evaluates the degree of growth for some classes of harmonic functions, and analyzed its implications.

**Введение.** В этой работе доказана одна теорема о росте гармонических функций класса  $U_\alpha$ , введенных М. М. Джрбабяном (смотри [1], [2]). В частном случае  $\alpha = 0$  эта теорема доказана А. Г. Нафтаевичем. Далее приводятся некоторые следствия этой теоремы.

**Ключевые слова:** оператор интегро-дифференцирования произвольного порядка в смысле Римана-Лиувилля, ядра типа Коши, Шварца и Пуассона,