

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять

за темою «**Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії**»

з дисципліни «Вища математика»

для студентів технічних спеціальностей

усіх форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 19 лютого 2026 р.

Харків
НТУ «ХПІ»

2026

Методичні вказівки до практичних занять за темою «Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії» з дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання / уклад.: Т. В. Шматко, Т. А. Немченко. – Харків : НТУ «ХПІ», 2026. – 54 с.

Укладачі: Т. В. Шматко
Т. А. Немченко

Рецензент: Г. Б. Лінник

Кафедра вищої математики

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки складено для проведення практичних занять з теми «Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії» навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів НТУ «ХПІ» технічних спеціальностей усіх форм навчання.

Навчальне видання спрямоване на забезпечення належного рівня засвоєння студентами основних понять, визначень, теорем і методів лінійної алгебри та аналітичної геометрії, які є необхідною складовою математичної підготовки майбутніх фахівців технічного профілю. Матеріал посібника зорієнтовано на формування практичних навичок застосування математичного апарату для розв'язування типових задач, що виникають у процесі навчання та подальшої професійної діяльності.

Видання охоплює необхідний перелік теоретичних питань за кожною темою практичного заняття. Теоретичні положення подано у стислому та систематизованому вигляді, що забезпечує можливість їх оперативного повторення та використання під час виконання практичних завдань. Значну увагу приділено прикладам розв'язування задач, які сприяють кращому розумінню навчального матеріалу та формуванню алгоритмічного підходу до розв'язання задач відповідного рівня складності.

Для закріплення отриманих знань та розвитку навичок самостійної роботи в методичних вказівках наведено приклади домашніх завдань, виконання яких забезпечує поглиблення практичної підготовки студентів і сприяє підвищенню рівня їхньої навчальної успішності.

Методичні вказівки можуть бути використані під час аудиторних практичних занять, а також для самостійної підготовки студентів до виконання домашніх завдань, модульного контролю та підсумкового оцінювання з дисципліни.

Заняття № 1. Дії над матрицями. Обчислення визначників 2-го та 3-го порядків

Матрицею розміру $m \times n$ називається таблиця чисел, яка містить m рядків і n стовпців. Позначаються матриці великими літерами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

або коротко $A = (a_{ij})_{m,n}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Перший індекс елементу a_{ij} показує номер рядку, а другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться цей елемент.

Розглянемо *лінійні операції* над матрицями.

Алгебраїчною сумою матриць A і B однакових розмірів називається матриця $C = A \pm B$ такого ж розміру, елементи якої визначаються як

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

Добутком матриці A на число α називається матриця, елементи якої отримано множенням відповідних елементів матриці A на число α :

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

Приклад 1. Обчислити матрицю $C = 3A - 2B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 \\ 21 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 2 \\ -6 & 6 & 14 \end{pmatrix}, \quad C = 3A - 2B = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -14 \\ 27 & 3 & -14 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -14 \\ 27 & 3 & -14 \end{pmatrix}.$

Операція *множення матриці на матрицю* виконується за наступним правилом «рядок на стовпець»: щоб отримати елемент, який стоїть в i -му рядку і j -му стовпці матриці C , що дорівнює добутку матриць A на B , потрібно елементи i -го рядка першої матриці помножити на відповідні елементи j -го стовпця другої матриці та отримані добутки скласти.

У загальному вигляді це правило формулюється наступним чином.

Нехай надано дві матриці $A = (a_{ij})_{m,p}$ та $B = (b_{ij})_{p,n}$ (важлива умова, що число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці, саме тоді

може бути виконана дія множення матриць). Добутком матриці A на матрицю B називається матриця $C=AB$ розміру $m \times n$, елементи якої визначаються за наступним правилом:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

У загальному випадку множення матриць властивість перестановки множників не виконується, тобто

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Приклад 2. Перемножити надані матриці:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{2;3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3;2}.$$

Розв'язок:

$$\begin{aligned} C = A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{2;3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3;2} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix}_{2;2} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}_{2;2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}_{2;2}.$

Приклад 3. Обчислити матрицю $C=2(B-A)A$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 5 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} B - A &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -4 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B - A)A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -4 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 5 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 & (-1) \cdot (-5) + 3 \cdot (-8) + (-3) \cdot 1 & (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 \\ (-4) \cdot 2 + 6 \cdot 5 + (-4) \cdot 0 & (-4) \cdot (-5) + 6 \cdot (-8) + (-4) \cdot 1 & (-4) \cdot 3 + 6 \cdot 5 + (-4) \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-5) + (-1) \cdot (-8) + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 + 15 + 0 & 5 - 24 - 3 & -3 + 15 + 0 \\ -8 + 30 + 0 & 20 - 48 - 4 & -12 + 30 + 0 \\ 0 - 5 + 0 & 0 + 8 + 1 & 0 - 5 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -22 & 12 \\ 22 & -32 & 18 \\ -5 & 9 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$C=2(B-A)A=\begin{pmatrix} 26 & -44 & 24 \\ 44 & -64 & 36 \\ -10 & 18 & -10 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 26 & -44 & 24 \\ 44 & -64 & 36 \\ -10 & 18 & -10 \end{pmatrix}.$

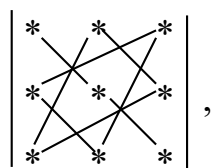
Будь-якій квадратній матриці A можна поставити у відповідність деяке число, яке називається її *визначником* і позначається як $\det A$ або $|A|$. Наприклад, визначник матриці 2-го порядку обчислюється за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Визначник третього порядку дорівнює

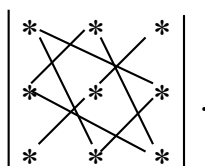
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Часто для запам'ятовування останньої формули використовують *правило трикутника*. Воно полягає в наступному: зі знаком плюс береться добуток



елементів, що належать головній діагоналі, і два добутки елементів, що утворюють у матриці рівнобедрені трикутники з основами, які паралельні головній діагоналі:

знак мінус має добуток елементів, що належать побічній діагоналі, і два добутки елементів, що утворюють трикутники з основами, які паралельні до побічної діагоналі:



Приклад 4. Обчислити визначник: $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}.$

Розв'язок: $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 5(-3) - (-1)2 = -15 + 2 = -13.$

Відповідь: $\det A = -13$.

Приклад 5. Обчислити визначник: $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -8 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язок:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -8 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 0 \cdot 2 + (-8) \cdot 1 \cdot 5 - \\ -2 \cdot (-1) \cdot 5 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot (-8) \cdot 3 = -9 + 0 - 40 + 10 - 0 + 96 = 57.$$

Відповідь: $\det A = 57$.

Домашнє завдання № 1 «Дії над матрицями. Обчислення визначників 2-го та 3-го порядків»

1. Обчислити матрицю: $C = (3A - 2B)B$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 44 & -31 & 7 \\ 12 & 31 & -42 \\ 34 & -16 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити визначник: $\det A = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$.

Відповідь: $\det A = 5$.

3. Обчислити визначник: $\det A = \begin{vmatrix} -7 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & 6 & 6 \end{vmatrix}$.

Відповідь: $\det A = 100$.

$$AX=B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{це матриця, яка складена з коефіцієнтів при}$$

$$\text{невідомих; } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{це матриця невідомих; } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{це матриця-стовпець}$$

вільних членів.

$$\text{Розв'язком системи називається така сукупність } n \text{ чисел } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \text{ яка при}$$

підстановці в систему рівнянь замість невідомого вектора X звертає всі рівняння цієї системи в тотожності.

У випадку коли система рівнянь складається з n лінійних рівнянь і n невідомих та визначник матриці $A \det A \neq 0$, невідомі системи можна знайти за *правилом (формулами) Крамера*:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = \overline{1, n}),$$

де Δ_j – визначник, який виходить із визначника системи $\Delta = \det A$ заміною j -го стовпця стовпцем вільних членів B .

Приклад 2. Розв'язати систему, використовуючи правило Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

$$\text{Розв'язок: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$AX=B.$$

$$\text{Визначник системи } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 35 - 8 + 30 + 14 - 2 = 2;$$

$\Delta \neq 0$, можна використувувати правило Крамера.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & 3 & -7 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{(розкладемо} \\ \text{на множники} \\ \text{за другим стовпчиком)} \end{array} \right] = \\ &= 2 \left(1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} \right) = \\ &= 2(-64 + 3 \cdot 19 - 2 \cdot (-5)) = 6. \end{aligned}$$

Інші визначники знайдемо за правилом трикутника.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -7 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2(8 - 105 - 32 + 80 + 56 - 6) = 2 \cdot 1 =$$

2.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2(24 + 40 + 12 - 45 - 16 - 16) = 2 \cdot$$

$(-1) = -2$.

Використовуючи формули Крамера, маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1.$$

$$\text{Відповідь: } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Перевірка: } \begin{cases} 3 + 1 + 1 \equiv 6 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 7 \cdot (-1) \equiv 16, \text{ вірно.} \\ 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-1) \equiv 16 \end{cases}$$

Домашнє завдання N 2 «Визначники 3-го порядку. Правило Крамера»

1. Обчисліть визначник, використовуючи теорему про розкладання визначника за рядком або стовпчиком.

$$\det A = \begin{vmatrix} -7 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & 6 & 6 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: $\det A = 100$.

2. Розв'язати систему, використовуючи правило Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1. \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заняття № 3. Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A , якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E - одинична матриця.

Квадратна матриця може мати зворотну матрицю, якщо її визначник не дорівнює нулю $\det A \neq 0$, тобто, матриця A – *невироджена*.

Обернена матриця знаходиться за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A .

Приклад 1. Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. Обчислимо визначник матриці: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33$.

$\det A = 33 \neq 0$, обернена матриця існує.

Алгебраїчні доповнення елементів матриці A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -16; A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9; A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 9; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 11; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -11.$$

$$\text{Отримаємо: } A^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/33 & 3/11 & 1/3 \\ 3/11 & -1/11 & 0 \\ 31/33 & -1/11 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

За означенням, якщо виконується умова $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, то обернену матрицю знайдено вірно.

$$\text{Перевірка: } AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16/33 & 3/11 & 1/3 \\ 3/11 & -1/11 & 0 \\ 31/33 & -1/11 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$\text{Відповідь: } A^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}.$$

Для розв'язку системи, яка складається з n лінійних рівнянь і n невідомих та визначник матриці A $\det A \neq 0$ можна також використовувати обернену матрицю.

Нехай матриця A є квадратна матриця і $\det A \neq 0$. Помножимо зліва обидві частини матричного рівняння $AX=B$ на обернену матрицю A^{-1} .

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

оскільки $A^{-1} \cdot A = E$ і $E \cdot X = X$. Тоді отримаємо

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \text{ або } X = A^{-1}B.$$

Звідси розв'язок системи визначається за формулою:

$$X = A^{-1}B.$$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь за допомогою оберненої матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1. \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

$$\text{Розв'язок. Запишемо } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи $X = A^{-1}B$, тому обчислимо обернену матрицю A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 \cdot 4 + 9 \cdot 1 + 11 \cdot 8 \\ 9 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 8 \\ 31 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 + (-11) \cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 33 \\ 33 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Перевірка: $\begin{cases} 1 + 2 + 1 \equiv 4 \\ 3 - 5 + 3 \equiv 1, \text{ вірно.} \\ 2 + 7 - 1 \equiv 8 \end{cases}$

Домашнє завдання № 3 «Обернена матриця»

1. Розв'язати систему рівнянь за допомогою оберненої матриці і потім перевірити за допомогою формул Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

2. Розв'язати систему рівнянь за допомогою оберненої матриці і потім перевірити за допомогою формул Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$

Заняття № 4. Метод Гаусса

Мінором k -го порядку матриці $A = (a_{ij})_{m;n}$ називається визначник, елементи якого стоять на перетині k рядків і k стовпців матриці.

Рангом (r або *rang*) матриці A називають найвищий порядок її мінору, відмінного від нуля. Для ненульової матриці $1 \leq r \leq \min(m; n)$, якщо $\text{rang} = r$, то будь-який мінор r -го порядку, відмінний від нуля, називається *базисним*.

Елементарні перетворення матриць:

- перестановка місцями рядків (стовпців) матриці,
- множення всіх елементів рядка (стовпця) на число відмінне від нуля;
- додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число.

Матриці, отримані одна з одною при елементарних перетвореннях, називаються *еквівалентними*. Еквівалентність матриць позначається символом " \sim ".

Можна показати, що *елементарні перетворення не змінюють ранг матриці*. Для знаходження рангу матриці можна за допомогою елементарних перетворень привести цю матрицю до трикутної або трапецеїдальної (усіченої трикутної) форми, тоді число ненульових рядків перетвореної матриці буде визначати ранг вихідної матриці.

Приклад 1. Знайти ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -4 & 8 & 6 \\ 6 & -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Зробимо елементарні перетворення:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -4 & 8 & 6 \\ 6 & -12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{matrix} l_2: 2 \\ l_3: 3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} l_2 \text{ та } l_3 \text{ однакові;} \\ l_1 + l_2 \rightarrow l_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow |обираємо мінор, якій не дорівнює 0|

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -24 \neq 0, \text{ порядок мінора } 2, \text{ маємо } r(A)=2.$$

Відповідь: $r(A)=2$.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б одне рішення, інакше вона називається *несумісною*.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо має один розв'язок. *Сумісна система* називається *невизначеною*, якщо у неї існує принаймні два різних розв'язка.

При розв'язанні систем m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими розглядатимемо матрицю, отриману з наданої матриці A додаванням стовпця вільних членів. Така матриця називається *розширеною* матрицею системи та позначається як

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $\text{rang}(\tilde{A})$ або дорівнює $\text{rang}(A)$, або на одиницю більше. Дослідження сумісності СЛАР m рівнянь із n невідомими проводиться за допомогою теореми *Кронекера-Капеллі*.

Теорема. Для того щоб СЛАР m рівнянь з n невідомими була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг розширеної матриці системи дорівнював рангу її основної матриці, тобто $\text{rang}(\tilde{A}) = \text{rang}(A) = r$.

Можна показати, що $r=n$, то система має єдиний розв'язок (вона *визначена*), і якщо $r < n$, то система має безліч рішень, тобто є *невизначеною*.

На практиці для розв'язку СЛАР найчастіше застосовується метод Гаусса, який полягає у послідовному виключенні невідомих за наступною схемою.

1. Випишують розширену матрицю системи

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

На перше місце ставиться провідне рівняння і провідна невідома виключається з інших рівнянь за допомогою елементарних перетворень. З допомогою таких перетворень виходить розширена матриця, *рівносильна* вихідної (тобто має такі самі рішення).

2. На другому кроці вибирається нова провідна невідома та відповідне їй провідне рівняння, проводиться процес її виключення зі всіх інших рівнянь.

При цьому рядок в матриці, отриманий в результаті першого кроку, залишається без змін. У результаті подібних дій вихідна матриця буде приведена до трикутного або трапецеїдального вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{kk} & \cdots & a_{kn} & b_k \end{array} \right).$$

Визначаються ранги основної $\text{rang}(A)$ та розширеної $\text{rang}(\tilde{A})$ матриць. Це *прямий хід методу Гаусса*.

3. Якщо $\text{rang}(\tilde{A}) = \text{rang}(A) = r$, то система має r лінійно незалежних рівнянь. Коефіцієнти цих рівнянь збігаються з рядками перетвореної матриці. Записується система рівнянь, яка є відповідною до перетвореної матриці. Процес розв'язання цієї системи називається *зворотним ходом методу Гаусса*.

4. Якщо $r = n$, то виконуючи зворотний хід, отримаємо відповідні значення невідомих. Якщо $r < n$, необхідно вибрати базисний мінор і цим зафіксувати *базисні невідомі*, тобто ті коефіцієнти, при яких складають базисний мінор. Базисні невідомі залишають ліворуч, інші $n - r$ невідомих переносять у праві частини рівнянь, їх називають *вільними змінними*. Базисні невідомі записують через вільні за допомогою зворотного ходу. Отримані рівності є *загальним розв'язком* системи.

5. Надаючи вільним невідомим будь-які числові значення, знаходять відповідні значення базисних невідомих. Тим самим знаходять *частинні розв'язки* вихідної системи рівнянь.

Приклад 2. Розв'язати систему за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}.$$

Розв'язок: Прямий хід методу Гаусса:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} l_2 + l_1(-2) \rightarrow l_2 \\ l_3 + l_1(-1) \rightarrow l_3 \\ l_4 + l_1(-2) \rightarrow l_4 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \end{array} \right) = \\ &= \left[\begin{array}{l} l_3 + l_2(-2) \rightarrow l_3 \\ l_4 + l_2(-3) \rightarrow l_4 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$\text{rang}A = \text{rang} \tilde{A} = 3$, $r = n$, таким чином, за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і вона визначена (має один розв'язок).

Відновимо систему зі змінними:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \end{cases}.$$

Зворотній хід методу Гаусса: $x_3 = 4$, $x_2 = 1$,

$$x_1 = 2 + x_2 - x_3 = 2 + 1 - 4; \quad x_1 = -1.$$

Розв'язок: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Перевіримо правильність розв'язку:

$$\begin{cases} -1 - 1 + 4 \equiv 2 \\ 2(-1) - 1 + 8 \equiv 5 \\ -1 + 1 = 0 \\ 4(-1) + 1 + 8 = 5 \end{cases}, \text{ вірно.}$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Приклад 3. Розв'язати систему за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

Розв'язок: Прямий хід методу Гаусса:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} l_2 + l_1(-3) \rightarrow l_2 \\ l_3 + l_1(2) \rightarrow l_3 \\ l_4 + l_2(-1) \rightarrow l_4 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 11 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$\text{rang}A = 3$; $\text{rang} \tilde{A} = 4$, $\text{rang}A \neq \text{rang} \tilde{A}$, таким чином, за теоремою Кронекера-Капеллі система не сумісна.

Відповідь: немає розв'язків.

Приклад 4. Розв'язати систему за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases}$$

Розв'язок: Прямий хід методу Гаусса:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 7 & 5 \end{array} \right) \sim |l_2 + l_1(-1)| \rightarrow l_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \end{array} \right) \sim \\ &\sim |l_2/4| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$\text{rang} A = \text{rang} \tilde{A} = 2$, $r < n$, таким чином, за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і вона невизначена (має багато розв'язків).

Оберемо базисний мінор: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, тоді

x_1, x_2 – базисні змінні,

x_3 – вільна змінна.

Відновимо систему зі змінними:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Зворотній хід методу Гаусса: $-x_2 = 1 - 2x_3$, $x_2 = 2x_3 - 1$,

$$x_1 = -3x_2 + x_3 + 1 = -3(2x_3 - 1) + x_3 + 1; \quad x_1 = -5x_3 + 4.$$

Виражаємо базисні змінні через вільні і komponуємо загальний розв'язок:

$$\text{Загальний розв'язок: } X_{\text{ЗР}} = \begin{pmatrix} -5x_3 + 4 \\ 2x_3 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки x_3 є вільною змінною, ми можемо надавати їй будь-яких значень і отримати частинні розв'язки. Нехай $x_3 = 1$, тоді $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Один із багатьох частинних розв'язків:

$$X_{\text{ЧР}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність розв'язку:

$$\begin{cases} -1 + 3 - 1 \equiv 1 \\ -1 - 1 + 7 \equiv 5 \end{cases}, \text{ вірно.}$$

Відповідь: $X_{ЗР} = \begin{pmatrix} -5x_3 + 4 \\ 2x_3 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in R.$

Приклад 5. Розв'язати систему за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 3 \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Розв'язок: Прямий хід методу Гаусса:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & -3 & 3 \\ 4 & -1 & 8 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} l_2 + l_1(-3) \rightarrow l_2 \\ l_3 + l_1(-4) \rightarrow l_3 \\ l_4 + l_1(-2) \rightarrow l_4 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Маємо три однакових рядка. Залишаємо один, що не повторюється.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

$\text{rang} A = \text{rang} \tilde{A} = 2$, $r < n$, таким чином, за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і вона невизначена (має багато розв'язків).

Оберемо базисний мінор: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, тоді

x_1, x_2 – базисні змінні,

x_3, x_4 – вільні змінні.

Відновимо систему зі змінними:

$$x_1 + 2x_3 - x_4 = 0;$$

$$x_2 = 3.$$

Зворотній хід методу Гаусса: виражаємо базисні змінні через вільні і komponуємо загальний розв'язок:

$$x_2 = 3.$$

$$x_1 = -2x_3 + x_4.$$

$$X_{ЗР} = \begin{pmatrix} -2x_3 + x_4 \\ 3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_3, x_4 \in R.$$

Нехай $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, тоді $X_{\text{ЧР}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Перевірка:

$$\begin{cases} -2 + 2 - 0 \equiv 0 \\ 3(-2) + 3 + 6 + 0 \equiv 3 \\ 4(-2) - 3 + 8 - 0 \equiv -3, \text{ вірно.} \\ 2(-2) + 3 + 4 - 0 \equiv 3 \end{cases}$$

Відповідь: $X_{\text{ЗР}} = \begin{pmatrix} -2x_3 + x_4 \\ 3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $x_3, x_4 \in R$.

Заняття № 5. Метод Гаусса (частина 2)

Приклад 1. Розв'язати систему за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Розв'язок: Прямий хід методу Гаусса:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left| \begin{array}{l} l_2 + l_1(-3) \rightarrow l_2 \\ l_3 + l_1(-2) \rightarrow l_3 \\ l_4 + l_1(-4) \rightarrow l_4 \end{array} \right| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & -3 & -3 \end{array} \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} l_2 \leftrightarrow l_3 \\ l_4 : 3 \end{array} \right| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) = \left| \begin{array}{l} l_3 + l_2(-5) \rightarrow l_3 \\ l_4 + l_2(-2) \rightarrow l_4 \end{array} \right| \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

$\text{rang} A = \text{rang} \tilde{A} = 3$, $r < n$, таким чином, за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і вона невизначена (має багато розв'язків).

Оберемо базисний мінор: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, тоді

x_1, x_2, x_4 – базисні змінні,

x_3 – вільна змінна.

Відновимо систему зі змінними:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ -x_4 = 1 \end{cases} .$$

Зворотній хід методу Гаусса: $x_4 = -1$,

$$x_2 = x_3 + x_4 + 2 = x_3 - 1 + 2 = x_3 + 1$$

$$x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 - 2(x_3 + 1) + x_3 + 1 = -x_3$$

Маємо $X_{ЗР} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 + 1 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_4 \in R$.

Нехай $x_3 = 1$, тоді $x_1 = -1, x_2 = 2, x_4 = -1$.

Один із багатьох частинних розв'язків:

$$X_{ЧР} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність розв'язку:

$$\begin{cases} -1 + 4 - 1 - 1 \equiv 1 \\ 3(-1) + 2 + 2 + 1 \equiv 2 \\ 2(-1) + 6 - 1 + 3(-1) \equiv 0, \text{ вірно.} \\ 4(-1) + 4 + 2 - 1 \equiv 1 \end{cases}$$

Відповідь: $X_{ЗР} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 + 1 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_3 \in R$.

Приклад 2: Розв'язати систему за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 0 \\ 5x_1 + 18x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок: Прямий хід методу Гаусса:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 8 & 0 \\ 5 & 18 & -4 & 5 & 0 \end{array} \right) = \left| \begin{array}{l} l_2 + l_1(-2) \rightarrow l_2 \\ l_3 + l_1(-1) \rightarrow l_3 \\ l_4 + l_1(-5) \rightarrow l_4 \end{array} \right| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & -29 & 15 & 0 \end{array} \right) = \\ & \left| \begin{array}{l} l_3 + l_2(-2) \rightarrow l_3 \\ l_4 + l_2(-3) \rightarrow l_4 \end{array} \right| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left| \begin{array}{l} l_3: 18 \\ l_4: (-8) \end{array} \right| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$\text{rang}A=3$; $r < n$, таким чином, за теоремою Кронекера-Капеллі система має багато розв'язків (невизначена).

Оберемо базисний мінор: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, тоді

x_1, x_2, x_3 – базисні змінні,

x_4 – вільна змінна.

Відновимо систему зі змінними:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_2 - 7x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Зворотній хід методу Гаусса: $x_3 = 0$;

$$x_2 = 7x_3 - 5x_4 = -5x_4;$$

$$x_1 = -3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -3(-5x_4) + 2x_4 = 17x_4.$$

Розв'язок: $X_{\text{ЗР}} = \begin{pmatrix} 17x_4 \\ -5x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_4 \in R$.

Нехай $x_4 = 1$, тоді $x_1 = 17, x_2 = -5, x_3 = 0$.

Один із багатьох частинних розв'язків:

$$X_{\text{ЧР}} = \begin{pmatrix} 17 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність розв'язку:

$$\begin{cases} 17 - 15 + 0 - 2 \equiv 0 \\ 34 - 35 + 0 + 1 \equiv 0 \\ 17 - 25 + 0 + 8 \equiv 0 \\ 85 - 90 + 0 + 5 \equiv 0 \end{cases}, \text{ вірно.}$$

Відповідь: $X_{\text{ЗР}} = \begin{pmatrix} 17x_4 \\ -5x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_4 \in R.$

Домашнє завдання № 5 «Метод Гаусса»

1. Розв'язати систему за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Відповідь: $X_{\text{ЗР}} = \begin{pmatrix} -2x_4 \\ x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_4 \in R.$

2. Розв'язати систему за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Відповідь: система не сумісна, вона не має розв'язків.

3. Розв'язати систему за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

Відповідь: $X_{\text{ЗР}} = \begin{pmatrix} x_{4-1} \\ x_4 \\ 2 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_4 \in R.$

Заняття № 6. Вектори

Спрямований відрізок (або впорядкована пара точок) називається *вектором* (геометричним). До векторів відносимо також *нульовий* вектор, у якого початок і кінець збігаються. Відстань між початком і кінцем вектора називається його довжиною або *модулем* і позначається $|\vec{a}|$. Модуль нульового вектора дорівнює нулю.

Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони розташовані на одній прямій або паралельних прямих.

Вектори називаються *компланарними*, якщо існує площина, до якої вони є паралельними. Два вектори вважатимемо *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані і мають рівні довжини. *Проекція вектора на вісь L* визначається як $\text{Pr}_L \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$, де φ – це кут між вектором і віссю L .

Нехай у просторі задана прямокутна декартова система координат, тоді положення точки у просторі визначається завданням координат x, y, z . Позначимо одиничні вектори (орти), напрямки яких збігаються з напрямком осей координат через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Кожен із векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ є перпендикулярним (ортогональним) двом іншим. Ці вектори утворюють так званий ортонормований базис.

Як відомо, будь-який вектор у просторі може бути представлений у вигляді

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \text{ або}$$

$$\vec{a} = (x, y, z),$$

де x, y, z – це проекції вектора на осі Ox, Oy, Oz відповідно. Проекції x, y, z називають координатами вектора \vec{a} в ортонормованому базисі. Очевидно, що вектор буде визначено, якщо задано його модуль та напрямок або якщо задано його координати x, y, z .

Нехай точка $A(x_1; y_1; z_1)$ – це початок вектора, а $B(x_2; y_2; z_2)$ його кінець. Координати вектора \overrightarrow{AB} визначаються як:

$$\overrightarrow{AB} = (x; y; z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Модуль вектора, який задано своїми координатами (x, y, z) , обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Напрямні косинуси (тобто косинуси кутів, які вектор становить з позитивними напрямками відповідних осей координат):

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}, \text{ причому}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Орт вектору визначається як $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Очевидно, що напрямні косинуси вектору \vec{a} є координатами орта \vec{a}^0 .

З визначення колінеарних векторів випливає, що два вектори колінеарні в тому й лише тому випадку, якщо один з них може бути отриманий множенням іншого на деяке число λ , тобто

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}.$$

Нехай вектори \vec{a} та \vec{b} задані своїми координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тоді векторна рівність $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ еквівалентна трьом числовим:

$$x_1 = \lambda x_2, \quad y_1 = \lambda y_2, \quad z_1 = \lambda z_2,$$

звідки випливає

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2},$$

що є умовою колінеарності двох векторів.

Таким чином, вектори *колінеарні*, якщо їх координати *пропорційні*.

Приклад 1. Обчислити координати вектору \overrightarrow{AB} , його довжину та напрямні косинуси, якщо надані координати точок $A(1;2;0)$ і $B(3;1;-2)$.

Розв'язок: Координати вектору \overrightarrow{AB} обчислюються як:

$$x = 3 - 1 = 2; y = 1 - 2 = -1; z = -2 - 0 = -2,$$

тобто вектор $\overrightarrow{AB} = (2; -1; -2)$.

Довжину вектору знаходимо за формулою:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3.$$

Напрямні косинуси обчислюються за формулою:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{-1}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{-2}{3}.$$

Відповідь: $\vec{AB} = (2; -1; -2); |\vec{AB}| = 3; \cos \alpha = \frac{2}{3}, \cos \beta = \frac{-1}{3}, \cos \gamma = \frac{-2}{3}.$

Приклад 2. Чи може вектор складати з координатними осями наступні кути: $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 120^\circ$?

Розв'язок: Використаємо формулу для напрямних косинусів:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

$$\cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \beta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\cos \gamma = \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Перевіримо надану умову:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1, \text{ вірно.}$$

Таким чином, наданий вектор може утворювати такі кути.

Відповідь: Так, вектор може складати такі кути.

Приклад 3. Вектор \vec{a} складає з координатними осями OX, OZ кути $\alpha = 120^\circ, \gamma = 45^\circ$. Знайти координати цього вектору, якщо його модуль $|\vec{a}| = 2$.

Розв'язок: Використаємо формулу для обчислення координат вектору:

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad z = |\vec{a}| \cos \gamma.$$

Знайдемо координати x та y :

$$x = 2 \cos 120^\circ = 2 \left(-\frac{1}{2}\right) = -1; \quad y = 2 \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Використовуємо формулу для знаходження модуля вектору:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$2 = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2 + z^2}$$

та знайдемо з отриманого рівняння невідому координату z :

$$2^2 = 1 + 2 + z^2;$$

$$z^2 = 1; z = \pm 1.$$

Відповідь: $\bar{a} = (-1; \sqrt{2}; 1)$ або $\bar{a} = (-1; \sqrt{2}; -1)$.

Приклад 4. Визначити, за яких значень α, β вектори $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ і $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ колінеарні?

Розв'язок: Очевидно, що надані вектори мають наступні координати:

$$\bar{a} = (-2; 3; \beta) \text{ і } \bar{b} = (\alpha; 6; 2).$$

З умови колінеарності векторів

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

отримаємо

$$\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2}.$$

Звідки $\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6}$, маємо $\alpha = 4$; $\frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2}$, маємо $\beta = -1$.

Відповідь: $\alpha = 4, \beta = -1$.

Домашнє завдання № 6 «Вектори»

1. Обчислити модуль вектора $\bar{a} = (6; 3; -2)$.

Відповідь: $|\bar{a}| = 7$.

2. Надано точки А (4;-5;2), В (1;-3;-2). Знайти вектори $\overline{AB}, \overline{BA}$.

Відповідь: $\overline{AB} = (-3; 2; -4), \overline{BA} = (3; -2; 4)$.

3. Чи може вектор складати з координатними осями наступні кути: $\alpha = 45^\circ, \beta = 135^\circ, \gamma = 60^\circ$.

Відповідь: не може (не виконується умова $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$).

4. Надано точки А (-1;5;-10), В (5;-7;8), С (2;2;-7), D (5;-4;2). Перевірити, що вектори \overline{AB} і \overline{CD} колінеарні; виявити, який довше і у скільки разів, як вони спрямовані – в одну чи протилежні сторони?

Відповідь: вектори \overline{AB} і \overline{CD} колінеарні; вони спрямовані в одну сторону; вектор \overline{AB} довше вектора \overline{CD} у 2 рази.

5. Знайти орт вектора $\bar{a} = (3; 4; -12)$.

Відповідь: $\cos \alpha = \frac{3}{13}, \cos \beta = \frac{4}{13}, \cos \gamma = \frac{-12}{13}$.

Заняття № 7. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів \vec{a} і \vec{b} називається число, що визначається як:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Якщо вектори \vec{a} і \vec{b} задані своїми координатами в ортонормованому базисі, їх скалярний добуток визначається за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Очевидно, якщо вектори *перпендикулярні*, то їхній скалярний добуток дорівнює нулю, і навпаки, *необхідною та достатньою умовою перпендикулярності* (ортогональності) векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ або } x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

За допомогою скалярного добутку *косинус кута між векторами* \vec{a} і \vec{b} обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

З визначення скалярного добутку випливає

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b},$$

тоді *проекція вектора* \vec{b} на вісь, що визначається вектором \vec{a} , дорівнює

$$\text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

Приклад 1. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\vec{a} = (2; 1; -3)$ і $\vec{b} = (-1; 2; 4)$.

Розв'язок: Використаємо формулу

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 = -12.$$

Відповідь: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$.

Приклад 2. Перевірити, чи перпендикулярні два вектори: $\vec{a} = (1; -3; 4)$ і $\vec{b} = (-5; 1; 7)$?

Розв'язок: Нагадаємо, що якщо вектори перпендикулярні, то їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-5) + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 7 = 20 \neq 0.$$

Таким чином, умова не виконується, надані вектори не є перпендикулярними.

Відповідь: вектори \vec{a} і \vec{b} не перпендикулярні.

Приклад 3. Знайти таке значення λ , при якому вектори $\vec{a} = (2\lambda; -3; 1)$ і $\vec{b} = (1; \lambda; 1)$ будуть перпендикулярні.

Розв'язок: Умовою перпендикулярності векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\lambda \cdot 1 + (-3) \cdot \lambda + 1 \cdot 1 = 0.$$

З отриманого рівняння знайдемо значення λ :

$$-\lambda + 1 = 0, \quad \lambda = -1.$$

Відповідь: $\lambda = -1$.

Приклад 4. Знайти кут між двома векторами $\vec{a} = (2; -1; -2)$ і $\vec{b} = (0; 3; 4)$.

Розв'язок: Використаємо формулу

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}} = -\frac{11}{3 \cdot 5} = -\frac{11}{15};$$

$$\text{Звідки } \varphi = \pi - \arccos \frac{11}{15}.$$

$$\text{Відповідь: } \varphi = \pi - \arccos \frac{11}{15}.$$

Приклад 5. Надано точки А (-2;3;-4), В (3;2;5), С (1;-1;2) і D (3;2;-4). Обчислити $Pr_{\overline{CD}} \overline{AB}$.

Розв'язок: Використаємо формулу

$$\text{Pr}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \text{Pr}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}.$$

Знайдемо координати векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CD} :

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-2); 2 - 3; 5 - (-4)) = (5; -1; 9),$$

$$\overrightarrow{CD} = (3 - 1; 2 - (-1); -4 - 2) = (2; 3; -6).$$

$$\text{Pr}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \frac{5 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 9 \cdot (-6)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{-47}{\sqrt{49}} = -\frac{47}{7}.$$

Відповідь: $\text{Pr}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB} = -\frac{47}{7}$.

Домашнє завдання № 7 «Скалярний добуток»

1. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\vec{a} = (3; -1; 2)$ і $\vec{b} = (5; -2; -3)$.

Відповідь: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 11$.

2. Перевірити, чи перпендикулярні два вектори: $\vec{a} = (1; 2; -3)$ і $\vec{b} = (0; 3; 2)$?

Відповідь: вектори перпендикулярні.

3. Знайти кут між двома векторами: $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

Відповідь: $\varphi = 45^\circ$.

4. Обчислити $\text{Pr}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$, якщо $\vec{a} = (1; -3; 4)$, $\vec{b} = (3; -4; 2)$ і $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

Відповідь: $\text{Pr}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a} = 5$.

Заняття № 8. Векторний та мішаний добуток

Векторним добутком векторів \vec{a} і \vec{b} називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який

- 1) є перпендикулярним до обох векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- 2) спрямований таким чином, що якщо дивитися з його кінця, то найкоротший поворот на кут φ від \vec{a} до \vec{b} відбувається проти годинникової стрілки, тобто, трійка векторів \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} є правою.
- 3) має довжину $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$.

Геометричний зміст векторного добутку полягає в тому, що модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудовано на векторах \vec{a} і \vec{b} :

$$S = |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Якщо вектори \vec{a} і \vec{b} задані своїми координатами в ортонормованому базисі, їх векторний добуток визначається за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Визначник обчислюється за елементами першої строки $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Координати векторного добутку записуються в ортонормованому базисі.

Якщо два вектори колінеарні, їх векторний добуток дорівнює нулю і навпаки, необхідною та достатньою умовою колінеарності векторів є рівність нулю їхнього векторного добутку.

Приклад 1. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо відомо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$.

Розв'язок: Запишемо формулу модуля векторного добутку:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi,$$

Використуємо дані: $72 = 3 \cdot 26 \cdot \sin \varphi$, звідки $\sin \varphi = \frac{72}{3 \cdot 26} = \frac{12}{13}$.

Знайдемо $\cos \varphi$ за формулою:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1, \quad \cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi,$$

$$\cos^2 \varphi = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{169-144}{169} = \frac{25}{169}, \quad \cos \varphi = \frac{5}{13}.$$

Скалярний добуток знайдемо за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 26 \cdot \frac{5}{13} = 30.$$

Відповідь: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$.

Приклад 2. Надано точки з координатами A(2;-1;2), B(1;2;-1), C(3;2;1). Обчислити $\overline{AB} \times \overline{BC}$.

Розв'язок: Знайдемо координати векторів \overline{AB} і \overline{BC} .

$$\overline{AB} = (1 - 2; 2 - (-1); -1 - 2) = (-1; 3; -3),$$

$$\overline{BC} = (3 - 1; 2 - 2; 1 - (-1)) = (2; 0; 2).$$

Векторний добуток визначається за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(6 - 0) - \vec{j}(-2 - (-6)) + \vec{k}(0 - 6).$$

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Відповідь: $\overline{AB} \times \overline{BC} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$.

Приклад 3. Надано вершини трикутника: A (1;-1;2), B (5;-6;2), C (1;3;-1). Знайти площу трикутника ABC.

Розв'язок: Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

Знайдемо координати векторів \overline{AB} і \overline{AC} :

$$\overline{AB} = (5 - 1; -6 - (-1); 2 - 2) = (4; -5; 0),$$

$$\overline{AC} = (1 - 1; 3 - (-1); -1 - 2) = (0; 4; -3).$$

Обчислимо векторний добуток:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 12\vec{j} - 16\vec{k}.$$

Знайдемо модуль векторного добутку:

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{15^2 + 12^2 + (-16)^2} = \sqrt{625} = 25.$$

Площа трикутника ABC виходить рівною

$$S = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{25}{2} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $S = \frac{25}{2}$ (кв. од.).

Мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює числу, отриманому в результаті скалярного множення одного з даних векторів на векторний добуток двох інших:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Можна показати, що

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}).$$

Геометричний зміст мішаного добутку полягає в тому, що модуль змішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, який побудовано на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Об'єм тетраедра дорівнює

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задані своїми координатами в ортонормованому базисі $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$; $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то мішаний добуток можна знайти за формулою:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

З визначення мішаного добутку випливає, що необхідною та достатньою умовою компланарності векторів є рівність нулю їх мішаного добутку:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 4. Надано вершини піраміди $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;2)$. Обчислити об'єм піраміди та довжину її висоти, яка проведена з вершини D.

Розв'язок: Об'єм піраміди дорівнює

$$V = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| \quad \text{або} \quad V = \frac{1}{3} S \cdot H \Rightarrow H = \frac{3V}{S}; \quad S = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

Знайдемо координати векторів \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} :

$$\overline{AB} = (2; -2; -3), \quad \overline{AC} = (4; 0; 6), \quad \overline{AD} = (-7; -7; 1).$$

Обчислимо їх мішаний добуток:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -14 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 260.$$

Тоді $V = \frac{1}{6} 260$ (куб. од).

Знайдемо векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} :

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Площа паралелограму дорівнює:

$$S = 2\sqrt{9 + 36 + 4} = 2 \cdot 7 = 14 \text{ (кв. од)}.$$

Довжину висоти знайдемо за отриманою формулою:

$$H = \frac{3 \cdot 260}{6 \cdot 14} = \frac{65}{7} \text{ (од. дов)}.$$

Відповідь: $V = \frac{130}{3}$ (куб. од); $H = \frac{65}{7}$ (од. дов).

Приклад 5. Довести, що чотири точки $A(2;1;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$ і $D(0;0;-11)$ розташовані в одній площині.

Розв'язок: Точки будуть лежати в одній площині, якщо вектори \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} будуть компланарними.

Знайдемо координати векторів \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} :

$$\overline{AB} = (2; -2; -3), \quad \overline{AC} = (4; 0; 6), \quad \overline{AD} = (-2; -3; -12).$$

Обчислимо їх мішаний добуток:

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -2 & -3 & -12 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки мішаний добуток дорівнює нулю, вектори $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ компланарні. Отже, всі чотири точки розташовані в одній площині.

Відповідь: так, всі чотири точки A, B, C, D розташовані в одній площині.

Домашнє завдання № 8 «Векторний та мішаний добуток»

1. Надано $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, кут між векторами \vec{a} і \vec{b} 90° . Обчислити:

а) $|\vec{a} \times \vec{b}|$; б) $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$.

Відповідь: а) $|\vec{a} \times \vec{b}| = 12$; б) $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = 24$.

2. Надано точки з координатами $A(3;4;-2)$, $B(-1;5;3)$, $C(-1;3;-4)$. Обчислити $\vec{AB} \times \vec{AC}$.

Відповідь: $\vec{AB} \times \vec{AC} = 7\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k}$.

3. Перевірити, чи вектори є компланарними $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -1; 3)$, $\vec{c} = (1; 9; -11)$?

Відповідь: так, вектори компланарні (виконується умова $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$).

4. Надано вершини піраміди ABCD: $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ і $D(4;1;3)$. Знайти об'єм піраміди ABCD.

Відповідь: $V = 3$ (куб. од).

Заняття № 9. Аналітична геометрія. Пряма на площині

Лінією першого порядку на площині називається множина точок, координати яких у деякій декартовій системі координат задовольняють рівнянню

$$Ax + By + C = 0, \text{ де } A^2 + B^2 \neq 0.$$

Теорема. Будь-яка лінія першого порядку на площині є прямою і навпаки.

Загальне рівняння прямої на площині має вигляд:

$$Ax + By + C = 0.$$

Рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

відповідає прямій, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ із заданим нормальним (перпендикулярним) вектором $\vec{n} = (A, B)$ до цієї прямої.

Пряма лінія на площині визначається точкою $M_0(x_0, y_0)$ і вектором $\vec{s} = (m, n)$, який є колінеарним до цієї прямої і називається напрямним вектором.

Нехай відома будь-яка точка $M_0(x_0, y_0)$, що належить даній прямій. Напрямний вектор $\vec{s} = (m, n)$ прямої і вектор $\overrightarrow{M_0M}$ є колінеарними, тобто, для них виконуються співвідношення:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

які називаються канонічними рівняннями прямої на площині.

Якщо покласти $\frac{x - x_0}{m} = t, \frac{y - y_0}{n} = t$, то отримаємо параметричні рівняння прямої на площині

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}.$$

Виключаючи параметр t з першого рівняння системи і підставляючи друге рівняння, отримаємо

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \quad (m \neq 0) \qquad y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0),$$

або

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

де $k = \frac{n}{m}$.

Отримане рівняння називається *рівнянням прямої, яка проходить через точку M_0 з кутовим коефіцієнтом k* . Кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg} \alpha$, де α - кут нахилу даної прямої до осі OX .

Якщо пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то за її напрямний вектор можна взяти вектор $\overline{M_1M_2}$, тоді отримаємо рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

яке є *рівнянням прямої, що проходить через 2 точки на площині*.

Умова паралельності прямих на площині:

$$k_2 = k_1.$$

Якщо прямі мають загальні рівняння

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0;$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

тоді умовою паралельності прямих є колінеарність їхніх нормальних векторів $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ або

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Якщо прямі записані у вигляді канонічних рівнянь

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1},$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2},$$

тоді умовою паралельності прямих є колінеарність їхніх напрямних векторів $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$ або

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Умова перпендикулярності прямих на площині:

$$1 + k_2k_1 = 0 \Rightarrow$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Якщо прямі мають загальні рівняння

$$\begin{aligned}A_1x + B_1y + C_1 &= 0; \\A_2x + B_2y + C_2 &= 0,\end{aligned}$$

тоді умовою перпендикулярності є перпендикулярність їхніх нормальних векторів $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, тобто $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ або

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Якщо прямі записані у вигляді канонічних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{x-x_1}{m_1} &= \frac{y-y_1}{n_1}, \\ \frac{x-x_2}{m_2} &= \frac{y-y_2}{n_2},\end{aligned}$$

тоді умовою перпендикулярності є перпендикулярність їхніх напрямних векторів $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$, тобто $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$ або

$$m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

Кут φ між прямими на площині знаходиться за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}.$$

Приклад 1. Записати рівняння прямої лінії l , якщо надано її напрямний вектор $\vec{s} = (-1, 2)$ і точка, яка належить прямій $M_0(3, -4) \in l$.

Розв'язок: Канонічне рівняння прямої лінії на площині:

$$\begin{aligned}\frac{x-x_0}{m} &= \frac{y-y_0}{n}, \\ \frac{x-3}{-1} &= \frac{y+4}{2}.\end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+4}{2}$.

Приклад 2. Записати рівняння прямої лінії l , якщо надано її нормальний вектор $\vec{n} = (3, -2)$ і точка, яка належить прямій $M_0(-1, 3) \in l$.

Розв'язок. Загальне рівняння прямої лінії на площині:

$$\begin{aligned}A(x - x_0) + B(y - y_0) &= 0, \\ 3(x + 1) - 2(y - 3) &= 0, \\ 3x - 2y + 9 &= 0.\end{aligned}$$

Відповідь: $3x - 2y + 9 = 0$.

Приклад 3. Записати рівняння прямої лінії, яка проходить через дві точки $M_1(3, -2)$ і $M_2(-3, 5)$.

Розв'язок. Рівняння прямої лінії на площині, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

$$\frac{x - 3}{-3 - 3} = \frac{y + 2}{5 + 2},$$

$$\frac{x - 3}{-6} = \frac{y + 2}{7}.$$

Відповідь: $\frac{x-3}{-6} = \frac{y+2}{7}$.

Приклад 4. Записати рівняння прямої лінії, якщо надано її кутовий коефіцієнт $k = -3$ і точка, яка належить прямій $M_0(-2, 5) \in l$.

Розв'язок. Рівняння прямої лінії на площині, яка проходить через точку M_0 і має кутовий коефіцієнт k .

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

$$y - 5 = -3(x + 2),$$

$$y - 5 = -3x - 6,$$

$$3x + y + 1 = 0.$$

Відповідь: $3x + y + 1 = 0$.

Приклад 5. Перевірити, чи перпендикулярні надані прямі:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1},$$

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{-3}.$$

Розв'язок. За умовою: $\vec{s}_1 = (2, -1)$; $\vec{s}_2 = (-1, -3)$.

Прямі перпендикулярні, якщо $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$, тоді $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$.

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = -2 + 3 \neq 0.$$

Відповідь: прямі лінії не перпендикулярні.

Приклад 6. Перевірити, чи паралельні надані прямі:

$$3x - 2y + 5 = 0;$$

$$x + 3y - 4 = 0.$$

Розв'язок. За умовою: $\vec{n}_1 = (3, -2)$; $\vec{n}_2 = (1, 3)$.

Прямі паралельні, якщо $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$, тоді $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

$$\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{3}.$$

Відповідь: прямі лінії не паралельні.

Приклад 7. Обчислити кут φ між двома прямими:

$$3x - y + 5 = 0;$$

$$2x + y - 7 = 0.$$

Розв'язок. За умовою: $k_1 = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{3}{-1} = 3$;

$$k_2 = -\frac{A_2}{B_2} = -\frac{2}{1} = -2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2 - 3}{1 - 6} = 1,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ.$$

Другий спосіб: $\vec{n}_1 = (3, -1)$; $\vec{n}_2 = (2, 1)$.

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{6 - 1}{\sqrt{9 + 1} \sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \operatorname{arccos} \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ.$$

Відповідь: $\varphi = 45^\circ$.

Домашнє завдання «Пряма на площині»

1. Записати рівняння прямої лінії l , якщо надано її напрямний вектор $\vec{s} = (3, -4)$ і точка, яка належить прямій $M_0(5, 6) \in l$.

Відповідь: $\frac{x-5}{3} = \frac{y-6}{-4}$.

2. Записати рівняння прямої лінії l , якщо надано її нормальний вектор $\vec{n} = (1, -3)$ і точка, яка належить прямій $M_0(4, -5) \in l$.

Відповідь: $x - 3y - 19 = 0$.

3. Записати рівняння прямої лінії, якщо надано її кутовий коефіцієнт $k = 2$ і точка, яка належить прямій $M_0(1, -3) \in l$.

Відповідь: $2x - y - 5 = 0$.

Заняття № 10. Площина у просторі

Поверхнею першого порядку називається множина точок, координати яких у деякій декартовій системі координат задовольняють рівнянню

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ де } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Записане рівняння називається *загальним рівнянням площини*.

Теорема. Будь-яка поверхня першого порядку є площиною і навпаки.

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$, який є перпендикулярним до площини, називається *нормаллю* цієї площини.

Якщо надано вектор нормалі $\vec{n} = (A, B, C)$ і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить площині, то рівняння цієї площини має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Це рівняння показує перпендикулярність векторів $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ і $\vec{n}(A, B, C)$, де $M(x, y, z)$ – це довільна точка на площині. Надане рівняння може бути легко зведено до загального рівняння площини.

Умови *паралельності* та *перпендикулярності* площин визначаються умовами колінеарності та перпендикулярності їхніх нормальних векторів.

Дві площини

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

є *паралельними*, якщо наступна умова виконується:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Дві площини є *перпендикулярними*, якщо наступна умова виконується:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Кут між двома площинами обчислюється як кут між їхніми нормальними векторами:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Загальне рівняння площини у разі $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ може бути записано як

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

де $a = -\frac{A}{D}, b = -\frac{B}{D}, c = -\frac{C}{D}$ є відрізки, які площина відсікає по координатних осях. Це рівняння називається *рівнянням площини «у відрізках»*.

Приклад 1. Записати рівняння площини α , якщо надано її нормальний вектор $\vec{n} = (3, 2, -1)$ і точка, яка належить площині $M_0(1, 3, -4) \in \alpha$.

Розв'язок. Загальне рівняння площини:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

$$3(x - 1) + 2(y - 3) - 1(z + 4) = 0,$$

$$3x + 2y - z - 3 - 6 - 4 = 0,$$

$$3x + 2y - z - 13 = 0.$$

Відповідь: $3x + 2y - z - 13 = 0$.

Приклад 2. Записати рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1, 2, 3), M_2(3, -4, 5), M_3(0, 2, -6)$.

Розв'язок. Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$, яка також належить цієї площині. Рівняння площини, яка проходить через три точки, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Це очевидно з того факту, що вектори $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$, координати яких записано у наданому визначнику, є компланарними, оскільки вони розташовані на одній площині. Тому потрібно розкласти цей визначник за елементами першого рядку, щоб отримати загальне рівняння площини.

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 3 - 1 & -4 - 2 & 5 - 3 \\ 0 - 1 & 2 - 2 & -6 - 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 2 & -6 & 2 \\ -1 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо визначник за першим рядком:

$$54(x - 1) - (-16)(y - 2) - 6(z - 3) = 0,$$

$$54x + 16y - 6z - 54 - 32 + 18 = 0,$$

$$54x + 16y - 6z - 68 = 0,$$

$$27x + 8y - 3z - 34 = 0.$$

Відповідь: $27x + 8y - 3z - 34 = 0$.

Приклад 3. Надано, що дві площини паралельні $\alpha \parallel \beta$, рівняння площини β : $3x - 2y + z + 5 = 0$ і $M_1(1, -4, 3) \in \alpha$. Записати рівняння площини α .

Розв'язок. Якщо дві площини паралельні, тоді $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$. За умовою маємо $\vec{n}_2 = (3, -2, 1)$ і можемо для першого нормального вектору взяти такі самі координати $\vec{n}_1 = (3, -2, 1)$.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

$$3(x - 1) - 2(y + 4) + (z - 3) = 0,$$

$$3x - 2y + z - 14 = 0.$$

Відповідь: $3x - 2y + z - 14 = 0$.

Приклад 4. Перевірити, чи паралельні надані площини:

$$3x - 6y + 12z - 1 = 0;$$

$$x - 2y + 4z + 7 = 0.$$

Розв'язок. Дві площини паралельні, якщо виконується умова:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Маємо координати нормальних векторів: $\vec{n}_1 = (3, -6, 12)$, $\vec{n}_2 = (1, -2, 4)$.

$$\frac{3}{1} = \frac{-6}{-2} = \frac{12}{4} = 3.$$

Відповідь: так, площини паралельні.

Приклад 5. Перевірити, чи перпендикулярні надані площини:

$$3x - y - 2z - 5 = 0;$$

$$x + 9y - 3z + 2 = 0.$$

Розв'язок. Дві площини перпендикулярні, якщо виконується умова:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Маємо координати нормальних векторів: $\vec{n}_1 = (3, -1, -2)$, $\vec{n}_2 = (1, 9, -3)$.

$$3 - 9 + 6 = 0$$

Відповідь: так, площини перпендикулярні.

Приклад 6. Обчислити кут φ між площинами:

$$6x + 3y - 2z = 0;$$

$$x + 2y + 6z - 12 = 0.$$

Розв'язок. Кут між площинами обчислюється як кут між їхніми нормальними векторами:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Маємо координати нормальних векторів: $\vec{n}_1 = (6, 3, -2)$, $\vec{n}_2 = (1, 2, 6)$.

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{6 + 6 - 12}{\sqrt{36 + 9 + 4} \sqrt{1 + 4 + 36}} = 0,$$

$$\varphi = \arccos 0 = 90^\circ \text{ or } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\varphi = 90^\circ$.

Домашнє завдання № 10 «Площина у просторі»

1. Записати рівняння площини α , якщо надано її нормальний вектор $\vec{n} = (-2, 1, 3)$ і точка, яка належить площині $M_0(-2, 4, 3) \in \alpha$.

Відповідь: $2x - y - 3z + 17 = 0$.

2. Записати рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -1, -1)$, $M_3(2, 0, 2)$.

Відповідь: $3x + 3y + z - 8 = 0$.

3. Перевірити, чи паралельні надані площини:

$$x + 2y + 3z - 7 = 0;$$

$$2x - 4y + 6z + 1 = 0.$$

Відповідь: надані площини не паралельні.

4. Перевірити, чи перпендикулярні надані площини:

$$2x + y + z - 3 = 0;$$

$$x - y - z + 1 = 0.$$

Відповідь: надані площини перпендикулярні.

Заняття № 11. Пряма у просторі

Пряма лінія у просторі визначається точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через яку вона проходить, і напрямним вектором $\vec{s} = (m, n, p)$, який колінеарний до цієї прямої.

Нехай $M(x, y, z)$ є довільною точкою, яка належить прямій. Тоді її напрямний вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ і вектор $\overline{M_0M}$ є колінеарними, тобто виконується умова:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Ці рівняння називаються *канонічними* рівняннями прямої у просторі.

Запишемо пропорцію $\frac{x - x_0}{m} = t, \frac{y - y_0}{n} = t, \frac{z - z_0}{p} = t$. Тоді отримаємо *параметричні* рівняння прямої у просторі

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}.$$

Якщо пряма у просторі проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тоді за напрямний вектор може бути прийнято вектор $\overline{M_1M_2}$.

Таким чином, ми отримуємо *рівняння прямої у просторі, яка проходить через дві точки*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Умова *паралельності* прямих у просторі виконується, коли $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Умова *перпендикулярності* прямих у просторі виконується, коли $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$, тобто $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$ або

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Кут φ між двома прямими у просторі, які перетинаються, обчислюється як *кут між їхніми напрямними векторами*:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Приклад 1. Записати канонічні і параметричні рівняння прямої, якщо надано її напрямний вектор $\vec{s} = (3, -1, 2)$ і точка, яка належить прямій $M_0(-2, 3, -4) \in l$.

Розв'язок: Канонічні рівняння прямої у просторі мають вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 4}{2}.$$

Відповідь: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{2}$.

Приклад 2. Записати параметричні рівняння прямої лінії, яка паралельна іншій прямій $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+6}{4}$ і проходить через точку $M_0(5, -1, 3)$.

Розв'язок: Якщо дві прямі паралельні, тоді $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$. За умовою маємо $\vec{s}_2 = (3, -2, 4)$ і можемо для першого напрямного вектору взяти такі самі координати $\vec{s}_1 = (3, -2, 4)$.

Параметричні рівняння прямої у просторі мають вигляд:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = -2t - 1 \\ z = 4t + 3 \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = -2t - 1 \\ z = 4t + 3 \end{cases}$.

Приклад 3. Записати рівняння прямої лінії, яка проходить через дві точки $M_1(-1, 2, -3)$ і $M_2(2, -3, 5)$.

Розв'язок: Рівняння прямої у просторі, яка проходить через дві точки, має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

$$\frac{x + 1}{2 + 1} = \frac{y - 2}{-3 - 2} = \frac{z + 3}{5 + 3},$$

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{-5} = \frac{z + 3}{8}.$$

Відповідь: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+3}{8}$.

Приклад 4. Перевірити, чи перпендикулярні надані прямі:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3},$$
$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-4}{1}.$$

Розв'язок: Умова перпендикулярності прямих у просторі виконується, коли $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$, тобто $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$ або

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

За умовою маємо координати напрямних векторів $\vec{s}_1 = (2, -1, 3)$, $\vec{s}_2 = (-3, -3, 1)$.

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 2(-3) + (-1)(-3) + 3 \cdot 1 = -6 + 6 = 0.$$

Відповідь: так, надані прямі перпендикулярні.

Приклад 5. Перевірити, чи паралельні надані прямі:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3},$$
$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-4}{6}.$$

Розв'язок: Умова паралельності прямих у просторі виконується, коли $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

За умовою маємо координати напрямних векторів $\vec{s}_1 = (2, -1, 3)$, $\vec{s}_2 = (-4, -2, 6)$.

$$\frac{2}{-4} \neq \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6}.$$

Бачимо, що умова не виконується. Прямі не паралельні.

Відповідь: надані прямі не паралельні.

Домашнє завдання № 11 «Пряма у просторі»

1. Записати рівняння прямої лінії, яка проходить через дві точки $M_1(2, -1, 4)$ і $M_2(1, 3, -2)$.

Відповідь: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{-6}$.

2. Перевірити, чи паралельні надані прямі:

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4},$$
$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-4}{8}.$$

Відповідь: надані прямі паралельні.

3. Перевірити, чи перпендикулярні надані прямі

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{5},$$
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{1}.$$

Відповідь: надані прямі перпендикулярні.

Заняття № 12. Криві другого порядку

Лінією (кривою) другого порядку на площині називається множина точок, координати яких у деякій системі декартових координат задовольняють рівнянню

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \text{ де } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Розглянемо найпростіші (канонічні) рівняння ліній другого порядку.

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох даних точок, які називаються фокусами, є постійною величиною (зазвичай вважається $2a$).

Введемо декартову систему координат так, щоб ось Ox проходила через фокуси F_1, F_2 , а вісь Oy ділила відрізок F_1F_2 навпіл (Рис.1), тоді рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

називається *канонічним рівнянням еліпсу*. Числа a і b є величиною більшої і меншої півосей еліпсу. Вони пов'язані між собою рівністю $c^2 = a^2 - b^2$.

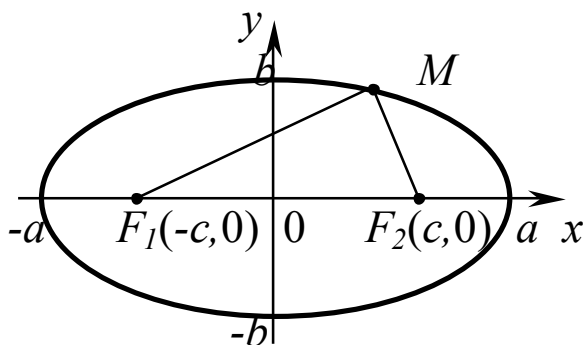


Рис. 1

Гіперболою називається геометричне місце точок, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, які називаються фокусами, є постійна величина (зазвичай вважається $2a$).

Якщо декартову систему координат розташувати так само, як у випадку еліпса (Рис. 2), то наступне рівняння є *канонічним рівнянням гіперболи*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Числа a і b є величиною дійсної і уявної півосей гіперболи. Вони пов'язані між собою рівністю $c^2 = a^2 + b^2$.

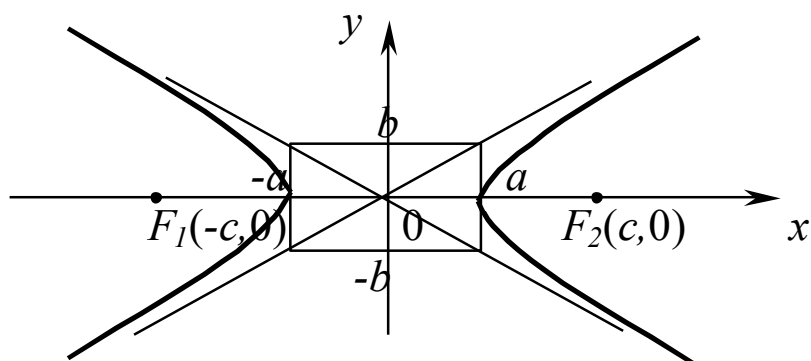


Рис. 2

Параболою називається геометричне місце точок, які рівновіддалені від даної точки, що називається фокусом, і даної прямої, що називається директрисою. Виберемо систему координат так, як зображено на Рис. 3.

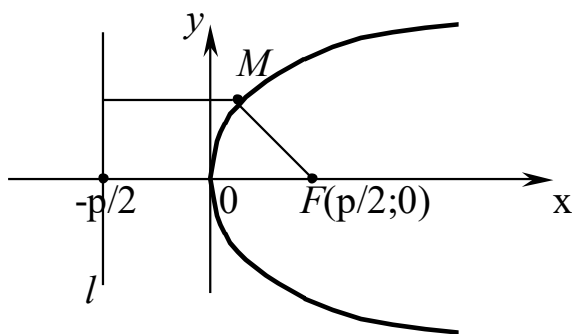


Рис. 3

Тоді канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$y^2 = 2px.$$

Приклад 1. Привести рівняння до канонічного вигляду і побудувати графік отриманої кривої:

$$16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0.$$

Розв'язок: Спочатку перегрупуємо доданки зі змінними x і y та виділимо їхні повні квадрати:

$$16(x^2 + 2x) + 25(y^2 - 4y) - 284 = 0.$$

У дужках додамо числа, які потрібні для того, щоб одержати повні квадрати, тобто для отримання виразу вигляду $(x - x_0)^2$ та $(y - y_0)^2$:

$$16(x^2 + 2x + 1 - 1) + 25(y^2 - 4y + 4 - 4) - 284 = 0,$$

$$16(x + 1)^2 - 16 + 25(y - 2)^2 - 100 - 284 = 0,$$

$$16(x + 1)^2 + 25(y - 2)^2 = 400 \quad |:400$$

$$\frac{(x + 1)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1.$$

Отримане рівняння є канонічним рівнянням еліпсу з центром у точці $O(-1;2)$ і півосями $a=5$, $b=4$. Графік схематично показано на Рис. 4.

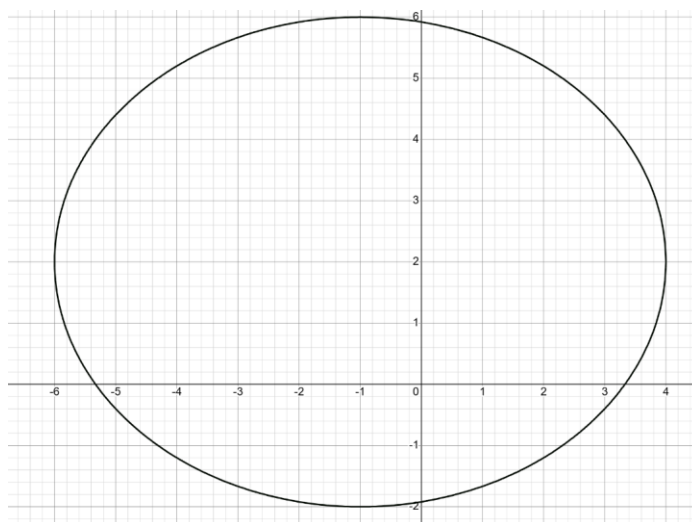


Рис. 4

Приклад 2. Привести рівняння до канонічного вигляду і побудувати графік отриманої кривої:

$$9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0.$$

Розв'язок: Перегрупуємо доданки зі змінними x і y та виділимо їхні повні квадрати:

$$9(x^2 + 10x) - 16(y^2 - 2y) - 367 = 0,$$

$$9(x^2 + 10x + 25 - 25) - 16(y^2 - 2y + 1 - 1) - 367 = 0,$$

$$9(x + 5)^2 - 225 - 16(y - 1)^2 + 16 - 367 = 0,$$

$$9(x + 5)^2 - 16(y - 1)^2 = 576 \quad |:576,$$

$$\frac{(x + 5)^2}{64} - \frac{(y - 1)^2}{36} = 1.$$

Отримане рівняння є канонічним рівнянням гіперболи з центром у точці $O(-5;1)$ і півосями $a=8$, $b=6$. Графік схематично показано на Рис. 5.

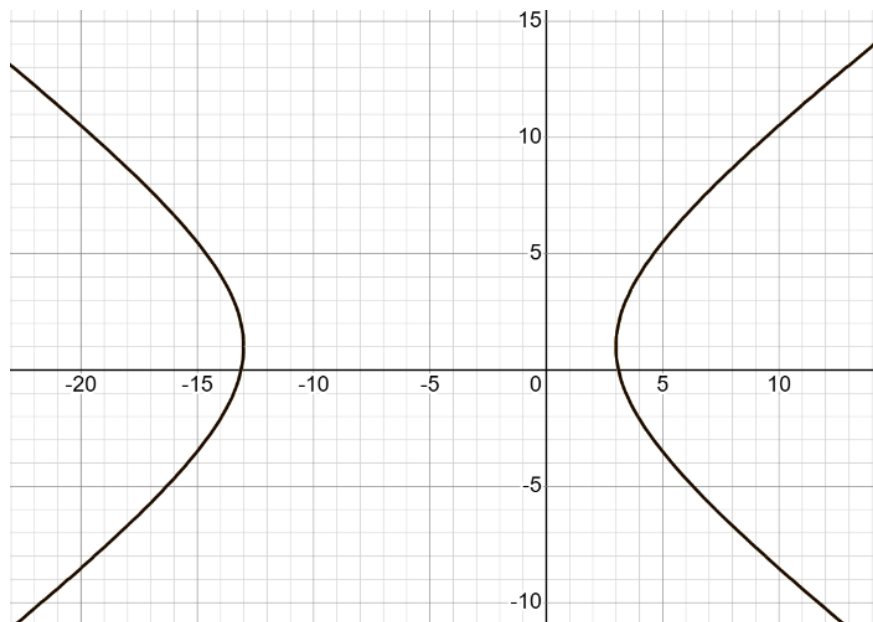


Рис. 5

Приклад 3. Привести рівняння до канонічного вигляду і побудувати графік отриманої кривої:

$$y^2 - 2x - 2y - 3 = 0.$$

Розв'язок: Оскільки квадрат має лише одна змінна, саме для неї будемо виділяти повний квадрат:

$$(y^2 - 2y) - 2x - 3 = 0,$$

$$(y^2 - 2y + 1 - 1) - 2x - 3 = 0,$$

$$(y - 1)^2 - 1 - 2x - 3 = 0,$$

$$(y - 1)^2 = 2x + 4,$$

$$(y - 1)^2 = 2(x + 2).$$

Отримане рівняння є канонічним рівнянням параболи з вершиною в точці $O(-2;1)$ і гілками, що направлені праворуч. Графік схематично показано на Рис. 6.

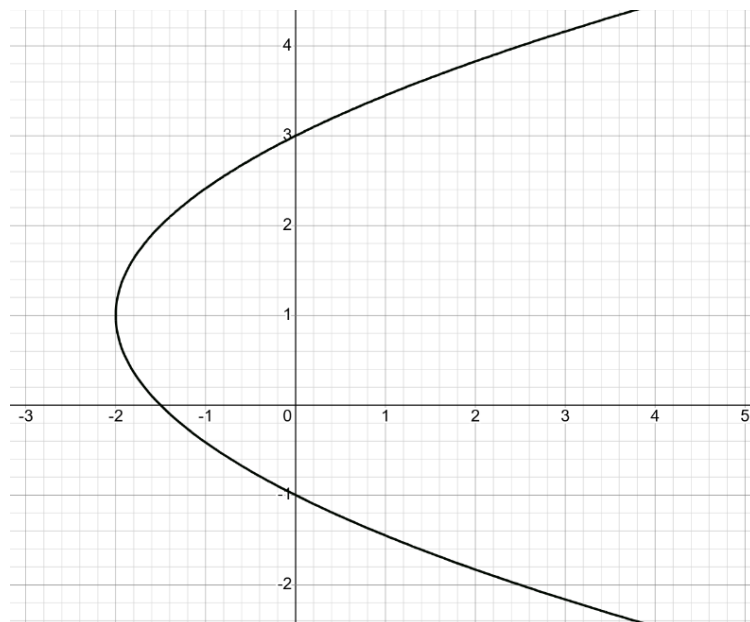


Рис.6

Домашнє заняття № 12 «Криві другого порядку»

1. Привести рівняння до канонічного вигляду і побудувати графік отриманої кривої:

$$4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0.$$

Відповідь: надано рівняння еліпсу з центром у точці (5;-2) і півосями $a=3$, $b=2$.

2. Привести рівняння до канонічного вигляду і побудувати графік отриманої кривої:

$$4x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4 = 0.$$

Відповідь: надано рівняння гіперболи з центром у точці (-1;-2) і півосями $a=1$, $b=2$.

3. Привести рівняння до канонічного вигляду і побудувати графік отриманої кривої:

$$2y^2 - x - 12y + 14 = 0.$$

Відповідь: надано рівняння параболи з вершиною в точці (-4;3) і гілками, що направлені праворуч

Список рекомендованої літератури

1. Вища математика в прикладах і задачах / Під ред. Л.В. Курпи. – Харків: НТУ «ХПІ», 2009. – Т. 1. – 532 с.

Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/4617/1/Курпа_Vyshcha_matem_T.1_Gl.1-4_2009.pdf.

2. Збірник задач з аналітичної геометрії та векторної алгебри: навч. посіб. / В. В. Булдігін, В. А. Жук, С. О. Руцицька, В. В. Ясінський. — К.: Вища шк., 1999. — 192 с. — ISBN: 5-11-004614-X.

3. Герасимчук В. С. Курс класичної математики в прикладах і задачах: навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. — У 3 ч. Ч. 1. — Донецьк, ДонНТУ, 2005. — 584 с. — ISBN 966-7559-98-X (Ч. 1).

4. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посібн. / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Луник, Д. В. Уханська, ДУ «Львівська політехніка», 1999. — 262 с.

Режим доступу: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/Rudavskiy_2002_260.pdf.

ЗМІСТ

Передмова	3
Заняття № 1. Дії над матрицями. Обчислення визначників 2-го та 3-го порядків .4	
Заняття № 2. Визначники 3-го порядку. Правило Крамера	8
Заняття № 3. Обернена матриця	11
Заняття № 4. Метод Гаусса	14
Заняття № 5. Метод Гаусса (частина 2)	20
Заняття № 6. Вектори	24
Заняття № 7. Скалярний добуток векторів	28
Заняття 8. Векторний та мішаний добуток	31
Заняття № 9. Аналітична геометрія. Пряма на площині	36
Заняття № 10. Площина у просторі	41
Заняття № 11. Пряма у просторі	45
Заняття № 12. Криві другого порядку	48
Список рекомендованої літератури	53

Навчальне видання

Методичні вказівки
до практичних занять
за темою «Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії»
з дисципліни «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання

Укладачі:

ШМАТКО Тетяна Валентинівна

НЕМЧЕНКО Тетяна Адальбертівна

Відповідальний за випуск проф. Першина Ю.І.

Роботу до видання рекомендувала проф. Чікіна Н.О.

В авторській редакції

План 2026 р., поз. 217

Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 2

Видавничий центр НТУ «ХП».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

Електронне видання