МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО ЗАВДАННЯ

«Розрахунок механічної системи на вільні та вимушені крутильні коливання»
з дисципліни
«Прикладна теорія коливань»
для студентів спеціальності
133 «Галузеве машинобудування»
денної та заочної форм навчання

Харків 2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО ЗАВДАННЯ
«Розрахунок механічної системи на вільні та вимушені крутильні коливання»
з дисципліни
«Прикладна теорія коливань»
для студентів спеціальності
133 «Галузеве машинобудування»
денної та заочної форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 16.02.2023 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2023

Методичні вказівки до розрахунково-графічного завдання «Розрахунок механічної системи на вільні та вимушені крутильні коливання» з дисципліни «Прикладна теорія коливань» для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» денної та заочної форм навчання / уклад. О. Є. Істомін, Є. О. Веретенніков, В. О. Карпов. – Харків: НТУ «ХПІ», 2023. – 35 с.

Укладачі: О. Є. Істомін, Є. О. Веретенніков, В. О. Карпов

Рецензент В. В. Дущенко

Кафедра інформаційних технологій і систем колісних та гусеничних машин ім. О.О. Морозова

ВСТУП

Робота транспортних машин супроводжується різноманітними проявами коливальних процесів. Одним із джерел високочастотних вібрацій є моторно-трансмісійна система, головним чином двигун внутрішнього згоряння (ДВЗ).

Будучи машиною з періодичним робочим процесом, ДВЗ створює змінні кутові деформації колінчастого валу, які у вигляді крутильних коливань поширюються далі на трансмісію і ведучі колеса. Ці вібрації негативно впливають на нормальну роботу агрегатів і систем транспортного засобу. Тому заходи щодо їх усунення приймаються вже на стадії проектування машини за результатами попередніх розрахунків. Крім того, в конструкцію вводяться спеціальні пристрої (антивібратори, демпфери), які призначені для гасіння коливань трансмісії.

Завданням розрахунку системи, що розглядається, на крутильні коливання є визначення власних частот, обчислення резонансних амплітуд та максимальних динамічних напруг. Знання зазначених характеристик дозволяє визначити резонансні режими роботи машини, оцінити їх небезпеку і, в разі потреби, змінюючи конструктивні параметри, усунути ці режими з робочого діапазону. Крім того, розраховуючи систему на нерезонансні вимушені коливання, можна оцінити її вібраційну міцність за наявності тих чи інших періодичних зовнішніх впливів.

У методичних вказівках наведено методику розрахунку моторно-трансмісійних систем на вільні та вимушені крутильні коливання. Дано рекомендації щодо побудови спрощеної розрахункової схеми, викладено порядок виконання розрахунково-графічного завдання. У програмі наведено блок-схему комп'ютерної програми.

1 ПОБУДОВА РОЗРАХУНКОВОЇ МОДЕЛІ СИСТЕМИ "ДВИГУН - ТРАНСМІСІЯ"

Перед тим, як проводити розрахунок конкретної системи на крутильні коливання, її схематизують. Очевидно, система, що замінює, повинна бути еквівалентна дійсній в тому сенсі, що частоти і форми її крутильних коливань повинні бути близькі до частот і форм коливань дійсної системи.

Вузли та агрегати мобільних машин при дослідженні динаміки імітуються моделями із зосередженими параметрами. У цьому випадку еквівалентна система будь-якої установки складається з пружного безмасового валопроводу, на якому розташовуються зосереджені махові маси. Крутильні коливання такої системи визначаються значеннями моментів інерції мас відносно осей валу та жорсткостями на кручення ділянок валопроводу між ними.

При побудові еквівалентної системи діаметр еквівалентного валу приймають постійним, а маси окремих ділянок дійсної системи зосереджують у місцях концентрації мас (муфти, зубчасті колеса, шатуни з поршнями і т.ін.).

Критерієм еквівалентності при переході від вихідної системи до зведеної є рівність потенційних і кінетичних енергій, дисипативних функцій (функцій розсіювання енергії), а також робіт зовнішніх сил для обох систем відповідно. Інакше висловлюючись, вихідна і наведена системи повинні мати, зокрема, одні й ті самі значення кінетичної та потенційної енергій.

Для простих систем, у яких всі ділянки валопроводу обертаються з однаковою кутовою швидкістю, елементи розрахункової схеми визначаються безпосередньо за кресленнями дійсних елементів. Для систем із зубчастими та іншими передачами, передавальні числа яких відрізняються від одиниці, елементи неосновних частин системи приводяться до основної її частини. Як основна частина зазвичай приймають двигун, який є головним джерелом збудження коливань.

Аналіз отриманої розрахункової схеми дозволяє виявити можливості її спрощення в результаті об'єднання мас, розділених ділянками з дуже великими жорсткостями, і відкидання гілок з дуже малими масами. Крім

того, допускається виключення із системи гілок, приєднаних через ділянки з дуже малими жорсткостями.

Силова передача, що включає двигун ДВЗ з маховиком М, коробку зміни передач КПП, диференціал Д, колеса К може бути приведена до наступної розрахункової схеми (рис. 1.1).

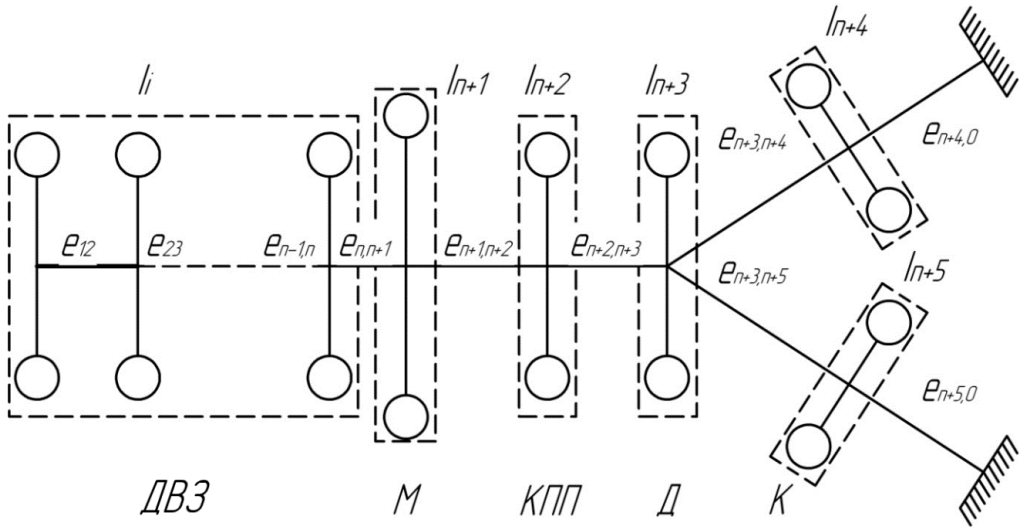

Рисунок 1.1 Схема моторно-трансмісійної системи

Колінчастий вал двигуна, що містить n шатунних шийок разом із деталями шатунно-поршневої групи, розбивається на n зосереджених мас. Момент інерції $I_j\left(\text{кг}\cdot\text{м}^2\right)$ кожної з цих мас визначається наступним чином:

$$I_j = I_{\text{КШ}} + I_{\text{ШШ}} + 2I_{\text{Щ}} + I_{\text{ШП}},\ \ j = 1,2,3,\ldots,n, \tag{1.1}$$

де $I_{\text{КШ}}, I_{\text{ШШ}}, I_{\text{Щ}}$ – моменти інерції відповідно корінної, шатунної шийок і щоки колінчастого валу; $I_{\text{ШП}}$ – момент інерції шатуна та поршня. Всі ці величини визначаються відносно осі колінчастого валу формулами:

$$I_{\text{КШ}} = \frac{\pi}{32}\rho l_1\left(d_2^4 - \delta_2^4\right); \tag{1.2}$$

$$I_{\text{ШШ}} = \frac{\pi}{4}\rho l_1\left(d_1{}^2 - \delta_1{}^2\right)\cdot\left(\frac{d_1{}^2 - \delta_1{}^2}{8} + R^2\right); \tag{1.3}$$

$$I_{Щ} = \rho\left(abh_1\left(\frac{a^2+b^2}{12}+\frac{R^2}{4}\right)-\frac{\pi}{4}h_1\left(\frac{\delta_1{}^2+\delta_2^4}{8}+R^2\delta_1{}^2\right)\right). \qquad (1.4)$$

Формула (1.4) справедлива, якщо щоку колінчастого валу розглядати як прямокутний паралелепіпед.

$$I_{ШШ} = R^2\left(0{,}75m_{Ш}+\frac{0{,}25(m+m_{П})}{2}\left(1+\frac{R^2}{4L^2}\right)\right). \qquad (1.5)$$

У формулах (1.2)...(1.5) ρ – щільність матеріалу колінвалу, кг/м^3;

d_1, δ_1 – відповідно зовнішній та внутрішній діаметри шатунної шийки;

l_1 – довжина корінної та шатунної шийок;

d_2, δ_2 – відповідно зовнішній та внутрішній діаметри корінної шийки;

a, b, h_1 – розміри прямокутного паралелепіпеда, у вигляді якого представляється щока колінвалу;

R – радіус кривошипу;

L – довжина шатуна;

$m, m_{П}$, – відповідно маса шатуна та поршня, кг (рис.1.2). Розмірність всіх лінійних величин – метр, м.

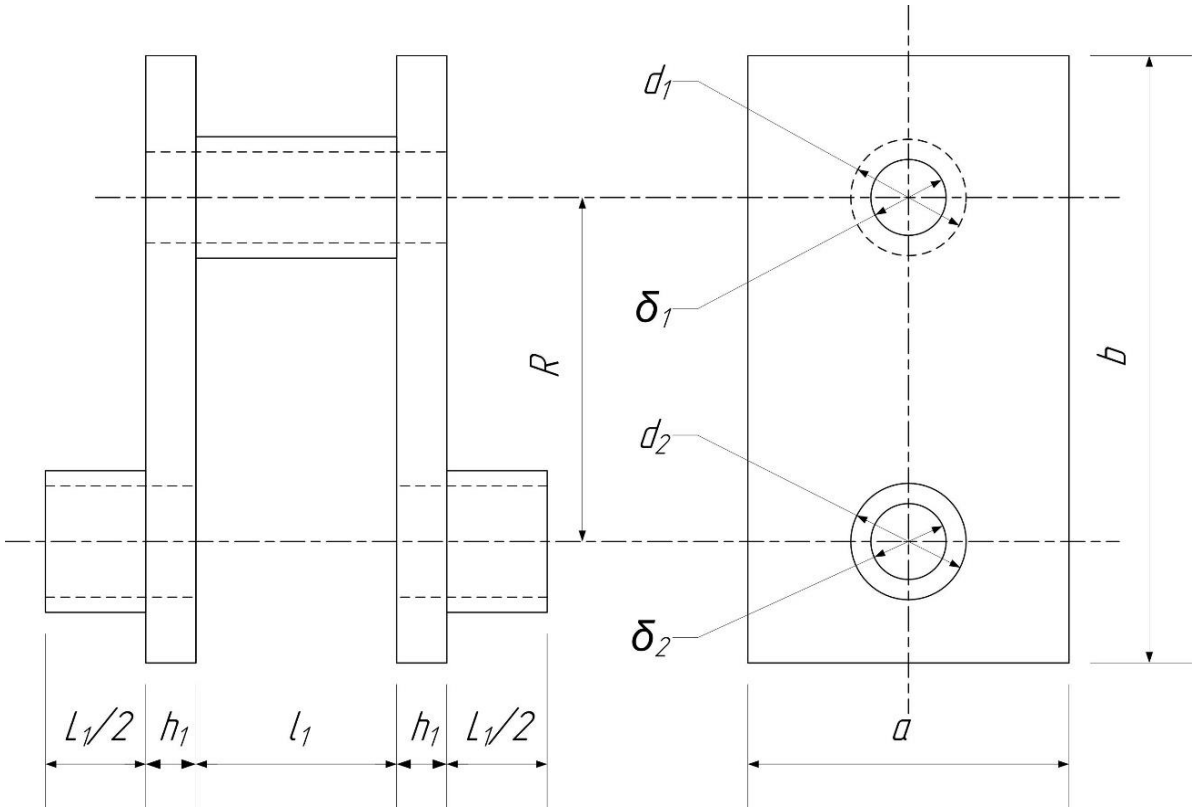

Рисунок 1.2 Схема ділянки колінчастого валу

Для *V*-подібних двигунів при обчислення значень необхідно додатково враховувати моменти інерції причіпного шатуна та його поршня. У першому наближенні можна скористатися формулою:

$$I_i = I_{\text{КШ}} + I_{\text{ШШ}} + 2I_{\text{Щ}} + 2I_{\text{ШП}}. \tag{1.6}$$

Момент інерції маховика визначається як момент інерції циліндра:

$$I_{\text{М}} = I_{n+1} = m_{\text{М}} \frac{d_3^2}{8}, \tag{1.7}$$

де $m_{\text{М}} = \rho\pi \frac{d_3^2}{4} l_2$ – маса маховика; d_3, l_2 – його діаметр і товщина відповідно.

Ця формула може бути використана для обчислення моментів інерції й інших циліндричних деталей трансмісії.

Якщо за маховиком встановлена механічна ступінчаста коробка передач (рис. 1.3), то момент інерції $I_{n+2} = I_{\text{КП}}$ буде визначатися як сума

моментів інерції шестерень ведучого, проміжного та веденого валів. У тих випадках, коли проміжний вал виконаний у вигляді блоку шестерень з великою крутильною жорсткістю, коробка передач приводиться до моменту інерції за формулою:

$$I_{n+2} = I_{\text{ВШ}} + i_1^2\left(I_{\text{Б}} + i_2^2 I_{\text{ВМ}}\right), \tag{1.8}$$

де $I_{\text{ВШ}}$ – момент інерції ведучих шестерень та валу; $I_{\text{Б}}$ – момент інерції блоку шестерень на проміжному валу; $I_{\text{ВМ}}$ – момент інерції ведених шестерень та валу; i_1, i_2 – передатні відношення зубчастих зачеплень, що визначаються як відношення частот обертання ведених та ведучих валів. Ці моменти інерції визначаються як моменти інерції циліндрів із зазначеними на рис. 1.3 розмірами.

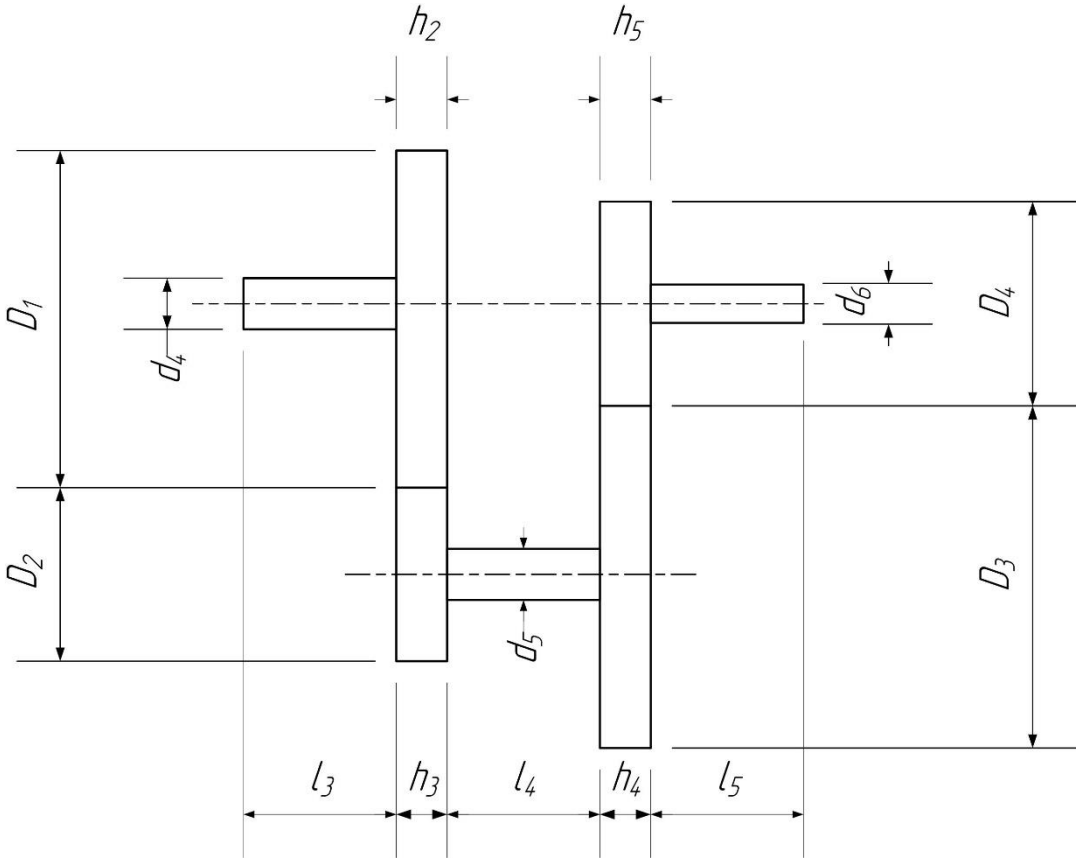

Рисунок 1.3 Схема коробки передач

Якщо податливість проміжного валу велика, то коробка передач приводиться до двох зосереджених махових мас, моменти інерції яких визначають з урахуванням передатних відношень.

У більшості автомобільних трансмісій за коробкою зміни передач встановлена головна передача та диференціал, який приводиться до зосередженого моменту інерції за допомогою співвідношення:

$$I_{n+3} = \left(I_{Д1} + i_3^2 I_{Д2}\right) \cdot i_1^2 i_2^2 , \qquad (1.9)$$

де $I_{Д1}$, $I_{Д2}$ – моменти інерції ведучих та ведених частин диференціалу з урахуванням приєднаних до них карданного валу та напіввісей; i_3 – передатне відношення головної передачі та диференціала.

Закінчується силова передача двома зосередженими моментами інерції, до яких приводяться ведучі колеса або гусеничний рушій:

$$I_{n+4} = I_{n+5} = I_K i_1^2 i_2^2 i_3^2 . \qquad (1.10)$$

За наявності додаткових агрегатів у силовій передачі транспортної установки (передній ведучій міст, роздавальна коробка, гітара, бортові передачі тощо) у зведеній схемі з'являються додаткові зосереджені маси. Збільшується кількість ступенів свободи. Проте алгоритм розрахунку не змінюється.

Для спрощення розрахунків можна перейти до нерозгалуженої еквівалентної системи, застосувавши редукцію відгалужень, яка буде описана нижче.

Другою частиною побудови розрахункової моделі є визначення податливості ділянок валопроводу.

Податливість $\left(Н^{-1}м^{-1}\right)$ ділянок колінчастого валу (див. рис. 1.2) визначають приблизно за напівемпіричними формулами. Для колінвалів дизельних та бензинових двигунів транспортних машин зазвичай застосовується формула С.С. Зіманенко:

$$e=\frac{32}{\pi G}\left(\frac{l_1+\frac{0{,}6h_1d_2}{l_1}}{d_2^4-\delta_2^4}+\frac{0{,}8l_1+\frac{0{,}2ad_2}{R}}{d_1{}^4-\delta_1{}^4}+\frac{R\sqrt{R}}{h_1a^3\sqrt{d_1}}\right), \qquad (1.11)$$

де G – модуль зсуву матеріалу вала, Н/м^2.

Податливість конічної ділянки довжиною l з діаметрами основ d_1 і d_2 визначається виразом:

$$e=\frac{32l}{3\pi G}\frac{d_1^2+d_1d_2+d_2^2}{d_1^3d_2^3}, \qquad (1.12)$$

яке при $d_1=d_2=d$ дозволяє обчислити податливість циліндричної ділянки:

$$e=\frac{32l}{\pi Gd^4}. \qquad (1.13)$$

Якщо циліндр має осьове свердління діаметром δ, його податливість:

$$e=\frac{32l}{\pi G\left(d^4-\delta^4\right)}. \qquad (1.14)$$

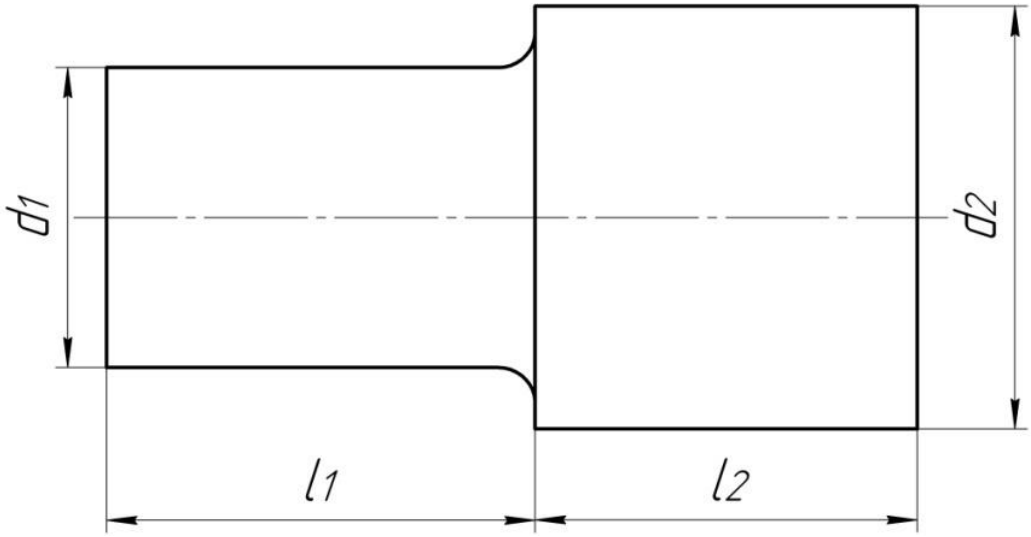

Рисунок 1.4 Схема ступінчастої ділянки валу

Податливість ступінчастої ділянки (рис.1.4) визначається залежністю:

$$e = \frac{32}{\pi G}\left(\frac{l_1 + \lambda}{d_1^4} + \frac{l_2 - \lambda}{d_2^4}\right), \qquad (1.15)$$

Де коефіцієнт λ залежить від співвідношення d_1 і d_2:

d_1/d_2	0,4	0,6	0,8	1,0
λ/d_1	0,11	0,09	0,06	0

Податливість ділянки з шліцевими або шпонковими канавками визначається як податливість циліндра, діаметр якого дорівнює діаметру кола, яке вписане в поперечний переріз ділянки з канавками.

Вирази для податливості різних конструктивних елементів валопроводів дано в роботах [1,2].

Для приведення системи до осі колінчастого валу податливості ділянок, розташованих за зубчастими передачами, потрібно ділити на квадрати відповідних передатних відношень. У системі, що роглядається, величина $e_{n+1,n+2}$ є податливістю первинного валу КПП. При великій жорсткості проміжного валу значення $e_{n+2,n+3}$ визначається сумою податливостей вторинного валу КПП і карданного валу, поділеною на квадрат передатного відношення відповідної передачі. Для визначення величини $e_{n+3,n+4} = e_{n+3,n+5} = e_n$ необхідно податливості напіввісей розділити на квадрати передатних відношень КПП та головної передачі. Таку ж операцію потрібно зробити з податливістю шин коліс або гусеничного рушія:

$$e_{n+4,0} = e_{n+5,0} = e_K .$$

2 ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ І ФОРМ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ КРУТИЛЬНОЇ СИСТЕМИ

Розрахунок власних частот і форм є першим етапом вирішення задачі про крутильні коливання моторно-трансмісійної системи. Для визначення власних частот і форм коливань можуть застосовуватися методи, що використовують послідовні підстановка пробних значень частот: метод

залишку (Толле), метод ланцюгових дробів (Терських). Універсальним є підхід, при якому задача, що розглядається, зводиться до проблеми власних значень і векторів матриці, складеної з коефіцієнтів системи основних рівнянь малих коливань.

2.1. Завдання про вільні крутильні коливання

Розгалужена система (див. рис. 1.1) може бути редукована в нерозгалужену систему (рис.2.1).

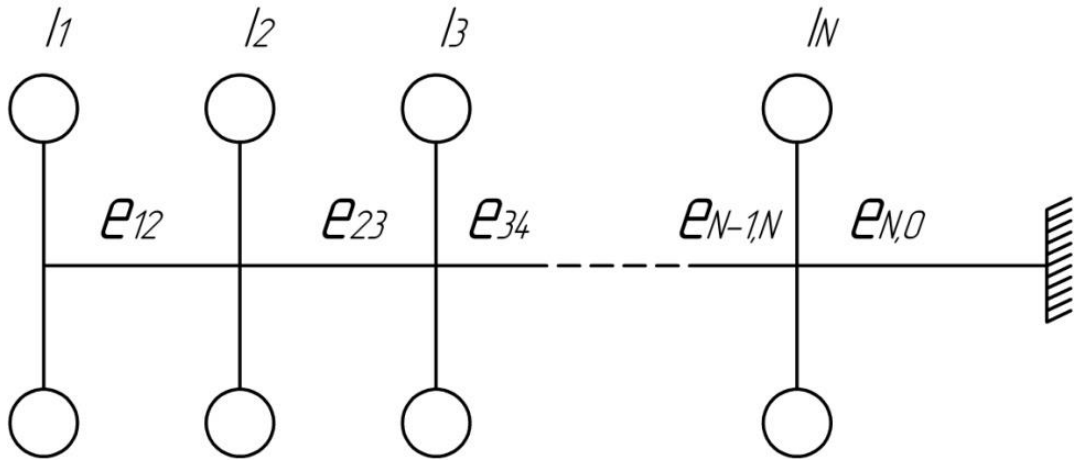

Рисунок 2.1 Нерозгалужена консольна система

Система диференціальних рівнянь, що описують вільні крутильні коливання N – масової консольної системи (рис.2.1), має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&I_1\ddot{\varphi}_1 - c_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0;\\
&I_2\ddot{\varphi}_2 - c_{23}(\varphi_3 - \varphi_2) + c_{23}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0;\\
&\dots\dots\dots

Власні коливання системи визначаються окремими рішеннями рівнянь (2.1) виду:

$$\varphi_j = A_j \sin(\omega t + \varepsilon), \tag{2.2}$$

де A_j – амплітуда коливань j-ї маси, рад; ω – власна частота, c^{-1}; ε – фазовий кут, рад.

Підстановка рішень (2.2) у систему (2.1) переводить останню у систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&(\omega_1^2 I_1 - c_{12})A_1 + c_{12}A_2 = 0;\\
&c_{12}A_1 + (\omega^2 I_2 - c_{12} - c_{23})A_2 + c_{23}A_3 = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&c_{N-2,N-1}A_{N-2} + (\omega^2 I_{N-1} - c_{N-2,N-1} - c_{N-1,N})A_{N-1} + c_{N-1,N}A_N = 0;\\
&c_{N-1,N}A_N + (\omega^2 I_N - c_{N-1,N} - c_{N,0}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Для обчислення власних частот необхідно прирівняти до нуля визначник системи (2.3):

$$\Delta(\omega) = 0\,. \tag{2.4}$$

Корні частотного рівняння (2.4) дають N значень квадратів власних частот $\omega_j^2 (j = 1,2,\dots,N)$.

Знаючи частоти ω_j, можна вирішити рівняння (2.3) щодо амплітуд A_j, тобто для кожної частоти визначити відповідну форму, яка обчислюється з точністю до довільного постійного множника. При цьому знаходяться не абсолютні, а відносні значення амплітуд:

$$a_1 = \frac{A_1}{A_1} = 1,\ a_2 = \frac{A_2}{A_1}, \dots,\ a_N = \frac{A_N}{A_1}\,, \tag{2.5}$$

де A_1 – довільна величина.

2.2 Визначення власних частот і форм методом залишку

Метод залишку дозволяє з достатнім ступенем точності визначити найнижчі власні частоти і форми. Для розрахунку за цим методом необхідно задати пробне значення власної частоти.

Як вихідне наближення використовують значення власної частоти спрощеної системи, що складається з малого числа (наприклад, трьох) зосереджених мас. Для спрощення вихідної системи (див. рис.1.1) її спочатку можна привести до нерозгалуженої системи (рис.2.2), у якій:

$$I_P = 2I_{n+4};\ e_{n+3,P} = \frac{e_{n+3,n+4}}{2};\ e_{P,0} = \frac{e_{n+4,0}}{2}.$$

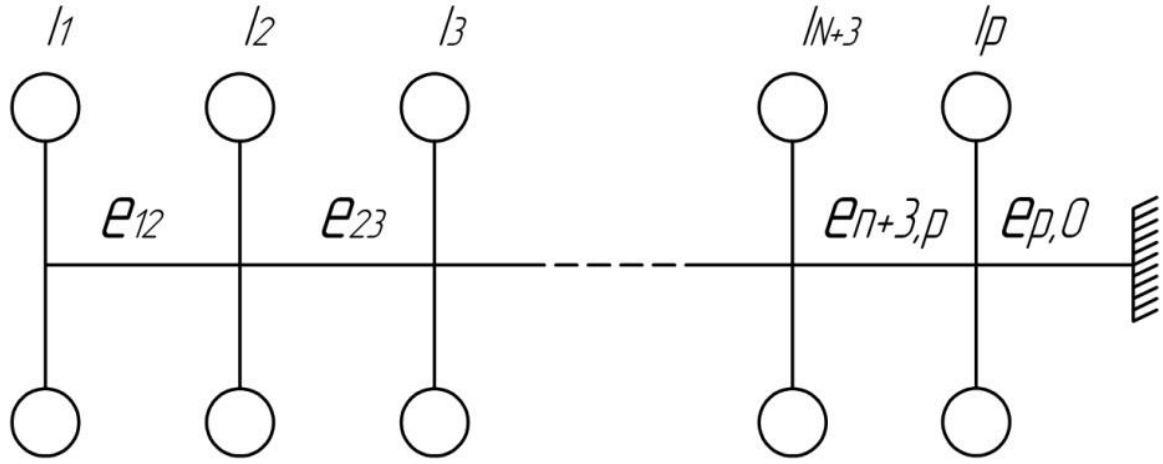

Рисунок 2.2 Нерозгалужена розрахункова схема

Така заміна вносить у рішення деяке свавілля, яке виправдане тим, що спочатку відшукують наближене вихідне значення власної частоти, яке уточнюють наступним розрахунком.

Далі система, представлена на рис. 2.2, зводиться до тримасової системи. Для цього кілька мас, з'єднаних порівняно жорсткими ділянками валопроводу, об'єднуються в одну масу, що знаходиться в центрі ваги цієї групи.

Наприклад, заміну п'ятимасової системи (рис.2.3, а) тримасовою (рис.2.3, б) здійснюють за такими формулами:

$$I_1' = I_1 + I_2;\ I_2' = I_3;\ I_3' = I_4 + I_5;$$

$$e_{12}' = \frac{1}{I_1'}\left[I_1(e_{12} + e_{23}) + I_2 e_{23}\right]; \qquad (2.6)$$

$$e'_{23} = \frac{1}{I'_3}\left[I_4 e_{34} + I_5\left(e_{34} + e_{45}\right)\right]; \quad e'_{30} = e_{50}.$$

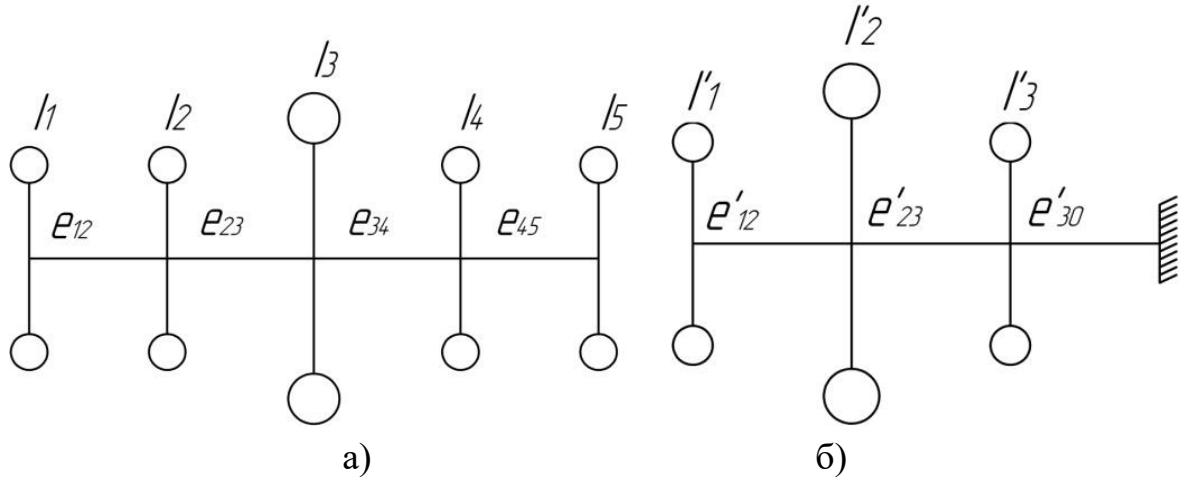

Рисунок 2.3 Спрощення розрахункової схеми визначення пробного значення власної частоти

Власні частоти $\tilde{\omega}$ тримасової системи визначають, вирішивши частотне рівняння виду (2.4), записане для випадку $N = 3$. Значення $\tilde{\omega}$ служить вихідним наближенням при обчисленні першої власної частоти ω_1 багатомасової системи.

Знаючи пробну величину частоти ω, можна здійснити більш точну, ніж до її визначення, редукцію розгалуженої системи (див. рис. 1.1), тобто привести її до схеми, зображеної на рис. 2.1. Для цього потрібно замінити момент інерції I_{n+3} величиною:

$$\bar{I}_{n+3} = I_{n+3} + I'_{n+4} + I'_{n+5}, \tag{2.7}$$

де $$I'_{n+4} = \frac{I_{n+4} c_{n+3,n+4}}{c_{n+3,n+4} + c_{n+4,0} - I_{n+4}\omega^2}, \quad I'_{n+5} = \frac{I_{n+5} c_{n+3,n+5}}{c_{n+3,n+5} + c_{n+5,0} - I_{n+4}\omega^2}.$$

Таким чином, в результаті редукції виходить нерозгалужена система, в якій:

$$I_N = \bar{I}_{n+3}, \quad e_{N,0} = \frac{e_{n+4,0} e_{n+5,0}}{e_{n+4,0} + e_{n+5,0}};$$

(якщо число циліндрів двигуна $n = 4$, то $N = 7$). Інші моменти інерції та податливості збігаються з відповідними величинами розгалуженої системи (див. рис. 2.1).

Після обчислення податливостей необхідно визначити приведені довжини пружних ділянок еквівалентної системи. При цьому виходять з того, що еквівалентний вал має по всій довжині умовний постійний діаметр d_0, в якості котрого можна використовувати діаметр корінної шийки колінчастого валу. Тоді відстані $l_{i,i+1}(i = 1,2,..., N-1)$ між масами приведеної системи повинні бути пропорційними податливості відповідних ділянок:

$$l_{i,i+1} = \frac{\pi G d_0^4}{32} e_{i,i+1}. \tag{2.8}$$

Метод залишку визначення найнижчих власних частот і форм ґрунтується на тому, що при головних коливаннях сума моментів сил інерції мас, що коливаються, пружної системи повинна дорівнювати нулю. Тому за значенням залишку від суми моментів, отриманого при довільному виборі частоти ω, можна судити про величину допущеної при цьому помилки.

Для системи, що розглядається, частотне рівняння (2.4) може бути представлене у вигляді:

$$\omega^2 (I_1 a_1 + I_2 a_2 + ... + I_N a_N) - c_{n,0} a_n = 0, \tag{2.9}$$

де відносні амплітуди $a_i(i = 1,2,..., N)$ пов'язані між собою рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{array}{ll}
a_2 = a_1 + M_{12} e_{12}; & M_{12} = -I_1 \omega^2 a_1; \\
a_3 = a_2 + M_{23} e_{23}; & M_{23} = M_{12} - I_2 \omega^2 a_2; \\
.... & .... \\
a_N = a_{N-1} + M_{N-1,N} e_{N-1,N}; & M_{N-1,N} = M_{N-2,N-1} - I_{N-1} \omega^2 a_{N-1}; \\
M_{N-1,N} + M_{N,0} - I_N \omega^2 a_n = 0; & M_{N,0} = c_{N,0} a_n.
\end{array} \tag{2.10}$$

Обчислюючи ліву частину $R(\omega)$ (залишковий момент) рівняння (2.9) при різних пробних значеннях частоти ω, знаходять величину $\omega_i(i = 1,2,...)$

для якої $R(\omega_i)=0$, тобто власну частоту. При цьому для нового пробного значення необхідно знову здійснювати редукцію системи відповідно до формули (2.7).

Визначення значень $R(\omega)$ зручно проводити, заповнюючи таблицю Толле, де одночасно отримують і форму коливань. У цій таблиці послідовність обчислень показана стрілками. Починають розрахунок з першої маси, відносна амплітуда a_1 якої приймається за одиницю. В результаті отримують значення відносних амплітуд всіх мас системи, що розраховується, і залишковий момент $R(\omega)$. Змінюючи пробні значення ω, будують криву $R=R(\omega)$ (див. рис. 2.3). Абсциси точок перетину кривої з віссю абсцис визначають власні частоти ω_i системи.

Для визначення напрямку зміни пробного значення при пошуку власних частот зручно нанести на графік умовні межі числа змін знаків у стовпці відносних амплітуд. Підрахувавши число змін знаків амплітуд, можна визначити місце пробного значення серед власних частот досліджуваної системи.

Обчислення щодо власної частоти слід вести, доки виконається співвідношення:

$$\frac{2\left|\omega_{s,j}-\omega_{s,j-1}\right|}{\omega_{s,j}+\omega_{s,j-1}}100\le\Delta, \qquad (2.11)$$

де $\omega_{s,j-1},\omega_{s,j}$ – відповідно $(j-1)$-е та j-е наближення s-ї власної частоти, такі, що:

$$R(\omega_{s,j})R(\omega_{s,j-1})<0;$$

Δ % – задана точність обчислень.

Слід мати на увазі, що крутість кривої залишкового моменту на вищих формах коливань зростає: величина $R(\omega)$ різко змінюється від великих за модулем негативних значень до великих позитивних при переході через власну частоту.

Власну форму коливань можна зобразити графічно. Відкладаючи по осі абсцис одну за одною приведені довжини всіх ділянок системи, в якості

ординат точок графіка використовують відповідні значення відносних амплітуд. Ламана лінія, що з'єднує отримані точки, зображує власну форму. При цьому тангенси кутів нахилу окремих ділянок графіка пропорційні внутрішнім крутним моментам. Таким чином, зображена в масштабі форма коливань дає наочне уявлення про порівняльну напруженість окремих ділянок системи. Найбільші напруги в еквівалентному валу виникають тих ділянках, де форми коливань найбільш круті. Однак у реальному валі напруги відрізняються від напруг еквівалентного валу в $(\frac{d_0}{d})^3$ разів. Тому найбільш напруженою може виявитися ділянка з менш крутою формою коливань [3].

2.3 Визначення власних частот і форм у вигляді власних значень та векторів матриці

Система рівнянь (2.1) може бути записана у матричному вигляді:

$$\mathbf{I}\ddot{\varphi} + \mathbf{C}\varphi = 0, \tag{2.12}$$

де φ – вектор кутів повороту мас;

$\mathbf{I}, \mathbf{C}$ – симетричні матриці коефіцієнтів I_i та C_{ij} відповідно. Вони називаються матрицями інерції та жорсткості. Для систем, що розглядаються, матриця $\mathbf{I}$ є діагональною.

Рівняння (2.12) можуть бути приведені до вигляду:

$$\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\mathbf{z} = 0, \tag{2.13}$$

де $\mathbf{B} = \mathbf{I}^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}\mathbf{I}^{\frac{1}{2}}$ – симетрична матриця, а $\mathbf{z}$ – вектор нових координат, що задовольняють лінійному перетворенню:

$$\varphi = \mathbf{I}^{\frac{1}{2}}\mathbf{z}. \tag{2.14}$$

Рішення рівняння (2.13) знаходиться у вигляді:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{2.15}$$

Після підставлення рішення в рівняння (2.13) приходимо до системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{h} = 0, \tag{2.16}$$

де $\lambda = \omega^2$ – власне значення матриці $\mathbf{B}$;

$\mathbf{h}$ – власний вектор матриці;

$\mathbf{E}$ – одинична матриця.

Власна частота ω_k пов'язана з відповідним власним значенням матриці $\mathbf{B}$ співвідношенням:

$$\omega_k = \sqrt{\lambda_k} \quad (k = \overline{1, N}). \tag{2.17}$$

З урахуванням співвідношення (2.14) k-а – власна форма визначається через відповідний власний вектор матриці $\mathbf{B}$ виразом:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{I}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}_k, \ (k = \overline{1, N}). \tag{2.18}$$

Зазвичай здійснюється нормування власних форм шляхом розділення елементів відповідного вектору на максимальний за модулем елемент цього вектору. Таким чином, компоненти власної форми (відносні амплітуди (2.5)) не перевищують одиницю:

$$a_{ks} \le 1, \ (k, s = \overline{1, N}). \tag{2.19}$$

3 РОЗРАХУНОК ВИМУШЕНИХ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ БАГАТОМАСОВОЇ СИСТЕМИ

До періодичних збуджувальних моментів, що діють на кривошипи колінчастого валу, відносяться моменти від сил тиску газів в циліндрах двигуна та інерційні моменти мас деталей шатунно-поршневої групи, що здійснюють зворотно-поступальний рух.

Крутний момент, що діє на кожен кривошип колінчастого валу, можна розкласти в тригонометричний ряд:

$$M_{\Gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \sin(k\Omega t + \gamma_k)\,, \qquad (3.1)$$

де M_k – амплітудне значення k-ї гармоніки; γ_k – фазовий кут, рад; Ω – кутова швидкість обертання валу, c^{-1} ; k – порядок гармоніки:

$$k = \begin{cases} 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ 2, \ldots & \text{– для 4-х тактного двигуна,} \\ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots & \text{– для 2-х тактного двигуна.} \end{cases}$$

Амплітуди гармонік можна визначити за формулою:

$$M_k = c_k F_{\text{п}} R\,, \qquad (3.2)$$

де c_k – гармонічний коефіцієнт, що залежить від виду двигуна, порядку гармоніки та параметрів робочого циклу двигуна, Нм; $F_{\text{п}}$ – площа поршня, м^2 ; R – радіус кривошипу колінчастого валу.

Гармонічні коефіцієнти c_k і кути фазових зміщень визначають за номограмами, зразки яких представлені на рис. П.1…П.4. Велика кількість номограм для різних двигунів наведена в роботі [1]. Для дизелів та бензинових двигунів з наддувом зазначені параметри знаходять залежно від середнього індикаторного тиску p_i та порядку гармоніки *k*. При цьому величина c_k зменшується зі зростанням *k*.

Для бензинових двигунів без наддува:

$$c_k = \sqrt{\tilde{A}_k^2 + \tilde{B}_k^2}\,; \gamma_k = arctg\,\frac{\tilde{A}_k}{\tilde{B}_k}\,, \qquad (3.3)$$

де величини $\tilde{A}_k$ та $\tilde{B}_k$ – визначають за номограмами. В якості вихідних даних для пошуку необхідно знати ступінь стиснення $\varepsilon_{\text{ст}}$, середній індикаторний тиск p_i, тиск в циліндрі в кінці такту стиснення p_{cm}. Ці величини дозволяють визначити максимальний тиск, що виникає в циліндрі при згорянні робочої суміші, в Нм$^{-2}$:

$$p_z = 0{,}9 p_{\text{ст}} + (1 + 0{,}43\varepsilon_{\text{ст}}) p_i . \qquad (3.4)$$

Нехай, наприклад, необхідно визначити коефіцієнти $\tilde{A}_2$ і $\tilde{B}_2$ ($k = 2$) для чотиритактного бензинового двигуна, що має такі дані: $p_{\text{сж}} = 10^6\,\text{Нм}^{-2}$, $p_z = 5{,}6 \cdot 10^6\,\text{Нм}^{-2}$, $\varepsilon = 6{,}7$. Скористаємося рис. П.3. Через обидві номограми, що належать до порядку гармоніки $k = 2$, проводяться вертикалі, що відповідають значенню $\varepsilon = 6{,}7$. Вертикалі продовжуються до перетину з променями, для яких тиски $p_{\text{ст}}$ та p_z мають зазначені значення. Якщо необхідні промені на номограмі відсутні, їх необхідно провести. Відрізок вертикалі, обмежений точками перетину її з променями, вимірюється в масштабі шкали, наведеної на малюнку. Його довжина визначає чисельне значення відповідного коефіцієнта ($\tilde{A}_2$ або $\tilde{B}_2$).

Величини коефіцієнтів c_k, а отже і амплітуди гармонік M_k швидко зменшуються зі збільшенням порядку k. Тому в розкладанні (3.1) зазвичай утримують 10-12 членів.

Для *V*-подібного двигуна амплітуду гармоніки *k*-го порядку можна визначити за формулою:

$$M_{kV} = M_k \sqrt{\sin^2 k\delta + (1 + \cos k\delta)^2} , \qquad (3.5)$$

де δ – кут повороту колінчастого валу за час між спалахами в однойменних циліндрах обох блоків. Якщо γ_p – кут розвалу блоків, то $\delta = 2\pi + \gamma_p$. Значення M_k визначаються за методикою, викладеною для рядних двигунів.

Інерційний момент $M_{\text{і}}$ (Нм) можна представити у вигляді розкладання в ряд за ступенями відношення $\nu = \dfrac{R}{L} < 1$. Якщо знехтувати членами, що містять $\nu^s (S > 2)$, то розрахункова формула набуває вигляду:

$$M_{\text{И}} = (0{,}25 m_{\text{Ш}} + m_{\text{П}}) R^2 \Omega^2 (0{,}25\nu \sin 2\Omega t - 0{,}5 \sin 2\Omega t - 0{,}75\nu \sin 3\Omega t - \\ - 0{,}25\nu^2 \sin 4\Omega t). \qquad (3.6)$$

Знак мінус, що стоїть перед гармонічними складовими 2, 3, 4-го порядків вказує на те, що їх початкові фази $\alpha = \pi$.

Сумарний збуджувальний момент, який діє на один кривошип, визначається величиною:

$$M = M_{\Gamma} + M_{И}. \tag{3.7}$$

Для обчислення моменту M відповідно до (3.7) необхідно скласти гармонічні складові однакових порядків, що входять вмоменти M_{Γ} і $M_{И}$ Наприклад, гармоніки 2-го порядку чотиритактного двигуна складається наступним чином:

$$\begin{aligned} & M_2 \sin(2\Omega t + \gamma_2) - 0{,}5(0{,}25 m_{Ш} + m_{П}) R^2 \Omega^2 \sin 2\Omega t = \\ & = \left[M_2 \cos\gamma_2 - 0{,}5(0{,}25 m_{Ш} + m_{П}) R^2 \Omega^2 \right] \sin 2\Omega t + \\ & + M_2 \sin\gamma_2 \cos 2\Omega t = M_2' \sin(2\Omega t + \gamma_2'), \end{aligned} ,$$

де

$$M_2' = \sqrt{\begin{aligned} & M_2^2 + 0{,}25(0{,}25 m_{Ш} + m_{П})^2 R^4 \Omega^4 - \\ & - M_2 (0{,}25 m_{Ш} + m_{П})^2 R^2 \Omega^2 \cos\gamma_2 \end{aligned}} ,$$

$$\gamma_2' = arctg \left\{ M_2 \sin\gamma_2 \left[M_2 \cos\gamma_2 - 0{,}5(0{,}25 m_{Ш} + m_{П}) \right]^{-1} \right\}.$$

Якщо розглядається V-подібний двигун, то інерційний момент $M_{iл}$ шатунно-поршневої групи лівого блоку зсунутий відносно моменту $M_{iп}$ правого блоку на кут розвалу γ_p. Тому сумарний збуджувальний момент

$$M = M_{\Gamma} + M_{iл} + M_{iп} \tag{3.8}$$

обчислюється з урахуванням зазначеного зсуву фаз аналогічно до виразу (3.7).

При розрахунку резонансних режимів вимушених коливань необхідно враховувати демпфуючі сили. У двигунах і трансмісіях колісних та гусеничних машин основні сили опору при коливаннях можна вважати пропорційними швидкості переміщення. В цьому випадку момент сил тертя, приведений до i-го кривошипу:

$$M_{ci} = \xi\, F_{\text{п}}\, R^2 \frac{d\varphi_i}{dt} = \xi\, F_{\text{п}}\, R^2 \dot{\varphi}_i\,, \tag{3.9}$$

де ξ – коефіцієнт демпфування, $\text{Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^{-3}$.

$$\begin{aligned}
&I_1\ddot{\varphi}_1 - c_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + \zeta F_{\Pi} r^2 \dot{\varphi}_1 = M_k \cos k(\Omega t)\,,\\
&I_2\ddot{\varphi}_2 + c_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) - c_{23}(\varphi_3 - \varphi_2) + \zeta F_{\Pi} r^2 \dot{\varphi}_2 =\\
&= M_k \cos k(\Omega t + \beta_2)\,,\\
&I_3\ddot{\varphi}_3 + c_{23}(\varphi_3 - \varphi_2) - c_{34}(\varphi_4 - \varphi_3) + \zeta F_{\Pi} r^2 \dot{\varphi}_3 =\\
&= M_k \cos k(\Omega t + \beta_3)\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&I_j\ddot{\varphi}_j + c_{j-1,j}(\varphi_j - \varphi_{j-1}) - c_{j,j+1}(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + \zeta F_{\Pi} r^2 \dot{\varphi}_j =\\
&= M_k \cos k(\Omega t + \beta_j)\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&I_N\ddot{\varphi}_N + c_{N,N-1}(\varphi_N - \varphi_{N-1}) + c_{N,0}\varphi_N = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Тут β_j – кути повороту колінвалу за час між однойменними тактами в 1-му та j-му циліндрах двигуна ($j = 1,2,...n_ц$, де $n_ц$ – кількість циліндрів двигуна). Таким чином праві частини, як і доданки, що враховують демпфування (які містять $\dot{\varphi}_j$) є лише в перших $n_ц$ рівняннях системи (3.10).

За одне повне коливання системи сили опору виконують роботу, яка може бути представлена таким виразом:

$$P_c = \pi\, \xi\, F_n\, R^2 \omega\, \Lambda_1^2 \sum_{i=1}^{n_ц} \lambda_i^2\,, \tag{3.11}$$

де $n_ц$ – кількість циліндрів двигуна; ω – власна частота, яка відповідає резонансному режиму, що розглядається; Λ_1 – амплітуда вимушених коливань 1-ї маси системи, рад; $\lambda_i = \dfrac{\Lambda_i}{\Lambda_1}$ – відносна амплітуда вимушених коливань i-ї маси $(i = 1,2,..., N)$.

Нижче наведено значення коефіцієнта ξ в залежності від типу двигуна.

Тип двигуна	$\xi \cdot 10^{-3}$
Автотракторні двигуни	39,2 … 68,6
Бензинові автомобільні двигуни	29,4 … 49,0
Тепловозні та судові двигуни	49,0 … 78,4

Більші з представлених значень відносяться до *V*-подібних і малорозмірних двигунів.

Під час розрахунку моторно-трансмісійних систем, які мають велику вагу, враховують явище пружного гістерезису, тобто розсіювання енергії у матеріалі елементів трансмісії. Робота сил гістерезиса за одне повне коливання системи може бути представлена виразом:

$$P_Г = 65{,}7 \cdot 10^{-10} d_0^{-5} \Lambda_1^2 \sqrt[3]{\Lambda_1} \sum_{i=1}^{N-1} \left(l\, M^2 \sqrt[3]{M} \right)_{i,i+1}, \qquad (3.12)$$

де $d_0, l_{i,i+1}$ – відповідно діаметр приведення та приведені довжини (2.8) ділянок системи. Відносні пружні моменти $M_{i,i+1}$ беруть із таблиці Толле.

В основі розрахунку резонансних вимушених коливань лежать такі припущення:

– у режимі коливань, що встановилися, робота збуджувальних моментів дорівнює роботі сил опору;

– при визначенні роботи збуджувальних моментів, що діють на всі кривошипи колінчастого валу в резонансному режимі, враховується робота тільки резонуючих гармонік, а роботою інших гармонік нехтуємо;

– форма вимушених коливань при резонансі практично збігається з відповідною власною формою.

Робота гармоніки *k*-го порядку може бути представлена наступною залежністю:

$$P_k = \pi\, M_k\, \Lambda_1 \left| \bar{\lambda} \right|, \qquad (3.12)$$

де $\left| \bar{\lambda} \right|$ – модуль геометричної суми векторів, які умовно представляють собою відносні амплітуди вимушених коливань.

Найбільш небезпечними, як правило, є резонансні крутильні коливання, які викликані головними гармоніками нижчих порядків. Внаслідок цього і на підставі третього з введених припущень формули (3.10), (3.11) і (3.12) можна переписати у вигляді $(\lambda_i = a_i)$:

$$P_C = \pi\, \xi\, F_n\, R^2 \omega\, \Lambda_1^2 \sum_{i=1}^{n_ц} a_i^2\,; \tag{3.13}$$

$$P_Г = 65{,}7 \cdot 10^{-10} d_0^{-5} \Lambda_1^2 \sqrt[3]{\Lambda_1} \sum_{i=1}^{N-1} \left(l\, M^2 \sqrt[3]{M} \right)_{i,i+1}\,; \tag{3.14}$$

$$P_k = \pi\, M_k\, \Lambda_1 \sum_{i=1}^{n_ц} a_i\,. \tag{3.15}$$

Порядки основних гармонік кратні числу однойменних тактів в циліндрах двигуна за один оборот колінчастого валу. Порядки головних гармонік *V*-подібного $2\,n_ц$-циліндрового двигуна визначають як для рядного $n_ц$-циліндрового двигуна [4, 5].

Для визначення порядків гармонік, які можуть потрапити в резонанс з власними частотами системи в робочому діапазоні частот обертання, використовується умова резонансу:

$$k\Omega = \omega \quad \text{або} \quad \frac{k\,\pi\, n_д}{30} = \omega\,,$$

де $n_д$ – частота обертання валу двигуна, об/хв. Якщо відомі найменше $n_{д\min}$ та найбільше $n_{д\max}$ значення частоти обертання, то можна визначити діапазон порядків резонуючих гармонік:

$$k_{\min} = \frac{30\,\omega}{\pi\, n_{д\max}}; \qquad k_{\max} = \frac{30\,\omega}{\pi\, n_{д\min}}. \tag{3.16}$$

У інтервалі $k_{\min} ... k_{\max}$ вибирається найменше значення з порядків головних гармонік, які потрапили у цей інтервал. В якості величини ω може бути прийнята будь-яка з власних частот, визначених в результаті розрахунку системи на вільні коливання.

Знаючи порядок головної гармоніки, що потрапляє у резонанс, можна за формулою (3.2) визначити амплітудне значення M_k. З рівності робіт P_c (3.13) і $P_Г$ (3,15) випливає, що амплітуда вимушених коливань першої маси системи, рад:

$$\Lambda_1 = \frac{M_k \sum_{i=1}^{n_ц} a_i}{\xi F_п R^2 \omega \sum_{i}^{n_ц} a_i^2}. \qquad (3.17)$$

Величини відносних амплітуд a_i визначені розрахунком на вільні коливання і є у таблиці Толле.

Якщо в розрахунку необхідно врахувати опір пружного гістерезису, то, прирівнюючи роботу P_k збуджувальних моментів (3.15) до роботи сил опору $P_{оп}$ (3.13) та (3.14), можна прийти до нелінійного рівняння щодо амплітуди:

$$S_1 \Lambda_1^{4/3} + S_2 \Lambda_1 - S_3 = 0, \qquad (3.18)$$

де

$$S_1 = 65{,}7 \cdot 10^{-10} d_0^{-5} \sum_{i=1}^{N-1} l_{i,i+1} M_{i,i+1}^{2\frac{1}{3}};$$

$$S_2 = \pi \xi F_n R^2 \omega \sum_{i=1}^{n} a_i^2;$$

$$S_3 = \pi M_k \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Визначивши величину Λ_1, можна знайти дійсні значення $M^*_{i,i+1}$ пружних моментів на всіх ділянках системи, Нм:

$$M^*_{i,i+1} = M_{i,i+1} \Lambda_1 \qquad (3.19)$$

та дійсні значення амплітуд всіх мас $\Lambda_i = a_i \Lambda_1$ рад. Значення відносних моментів $M_{i,i+1}$ та відносних амплітуд a_i беруться з таблиці Толле.

Форми коливань приведеної системи слід зобразити графічно. Далі визначають дотичні напруги:

$$\tau_{i,i+1} = \frac{M^*_{i,i+1}}{W_{pi,i+1}}, \qquad (3.20)$$

де $W_{pi,i+1}$ – момент опору відповідної ділянки вихідної системи, м^3.

$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ – для суцільної циліндричної ділянки;

$W_p = \frac{\pi\left(d^4 - \delta^4\right)}{16d}$ – для ділянки з осьовим свердлінням.

Отримані напруги порівнюються з допустимими значеннями $[\tau] = 49{,}0 \cdot 10^4$ Н/м^2 для сталі або $[\tau] = 29{,}4 \cdot 10^4$ Н/м^2 для чавуну.

4 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКУ СИСТЕМИ НА ВІЛЬНІ І ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

Вихідні дані до розрахунку:

а) інформація про двигун (тип, кількість циліндрів, робочий діапазон обертів, ступінь стиснення, середній індикаторний тиск, тиск у циліндрі в кінці такту стиснення);
б) геометричні розміри елементів валопроводу;
в) механічні властивості матеріалів.

Розрахунок виконується в наступній послідовності, згідно з наведеною вище методикою:

1) визначення приведених моментів інерції махових мас системи;
2) визначення приведених податливостей та довжин пружних ділянок системи;
3) приведення N-масової системи до 3-х масової системи;
4) визначення першої власної частоти 3-х масової системи. П. 3 і 4 виконуються для попереднього вибору вихідного наближення найнижчої власної частоти, відносно близького до її дійсного значення;
5) визначення заданого числа власних частот і відповідних форм коливань багатомасової системи методом залишку. При кожній зміні

пробного значення частоти необхідно наново здійснювати редукцію розгалуженої системи;

6) визначення порядків резонуючих головних гармонік та обчислення амплітуд (побудова форм) вимушених коливань;
7) визначення максимальних дотичних напруг в елементах системи та порівняння їх з допустимими величинами.

Розрахунково-графічне завдання має бути оформлене у відповідності зі стандартами НТУ «ХПІ» у вигляді пояснювальної записки, що містить вихідні дані до розрахунку, необхідні малюнки, схеми та розрахункові формули з підставленими чисельними значеннями величин, які до них входять, а також стислі пояснення до розрахунків.

Необхідно також представити дві перші власні форми коливань системи.

Розмірності всіх величин, що використовуються у розрахунках, слід задавати в системі одиниць СІ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Терских В.П. Крутильные колебания валопровода силовых установок. Исследования и методы расчета / В.П. Терских. – Л.:Судостроение, 1969. – Т. I. – 206 с.

2. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов. Справ. пособ. / Г.С. Маслов.– М.: Машиностроение, 1968. – 271 с.

3. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах / под ред. Ф.М. Диментберг, К.С. Колесников.– М.: Машиностроение, 1980.– Т. 3. – 544 с.

4.Методичні вказівки до курсової роботи "Расчет механической системы на свободные и вынужденные колебания" по курсу "Прикладная теория колебаний" для студентов специальности 0534 "Колесные и гусеничные машины" / В.П. Аврамов, Н.Г. Медведев. – Харьков: ХПИ, 1982. – 36 с.

5. Дж. Х. Уилкинсон Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Х. Уилкинсон. – М.: Наука, 1970. – 564 с.

ДОДАТОК

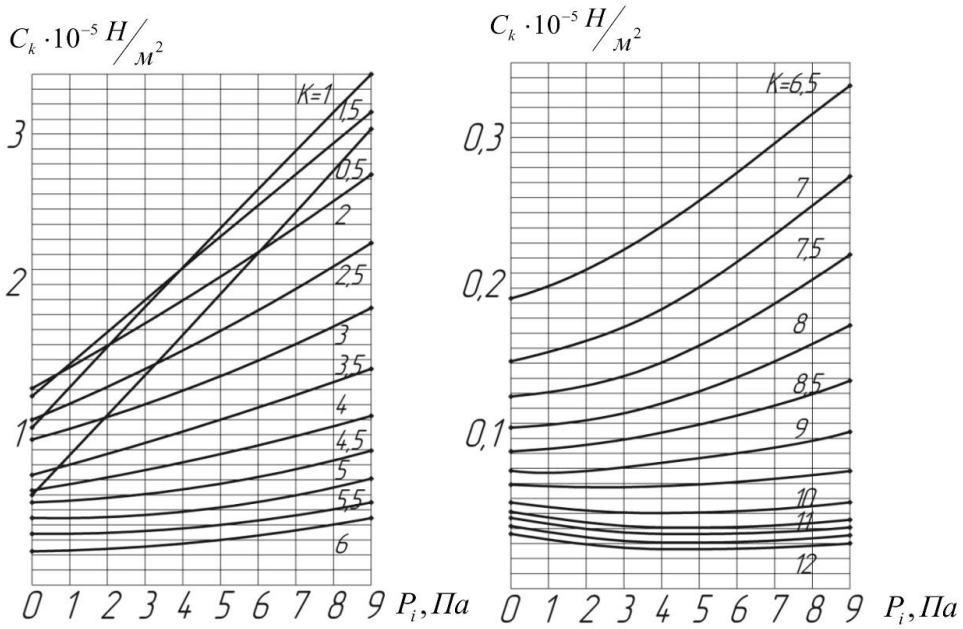

Рисунок П.1 Гармонічні коефіцієнти чотиритактного безкомпресорного дизеля

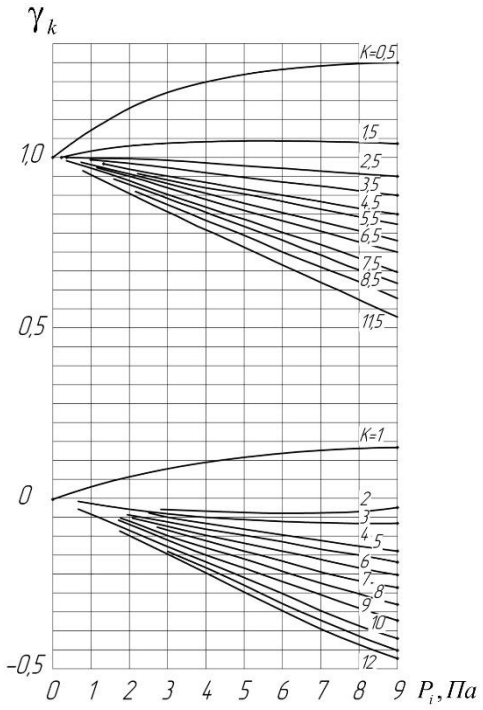

Рисунок П.2 Початкові фази гармонік чотиритактного безкомпресорного дизеля

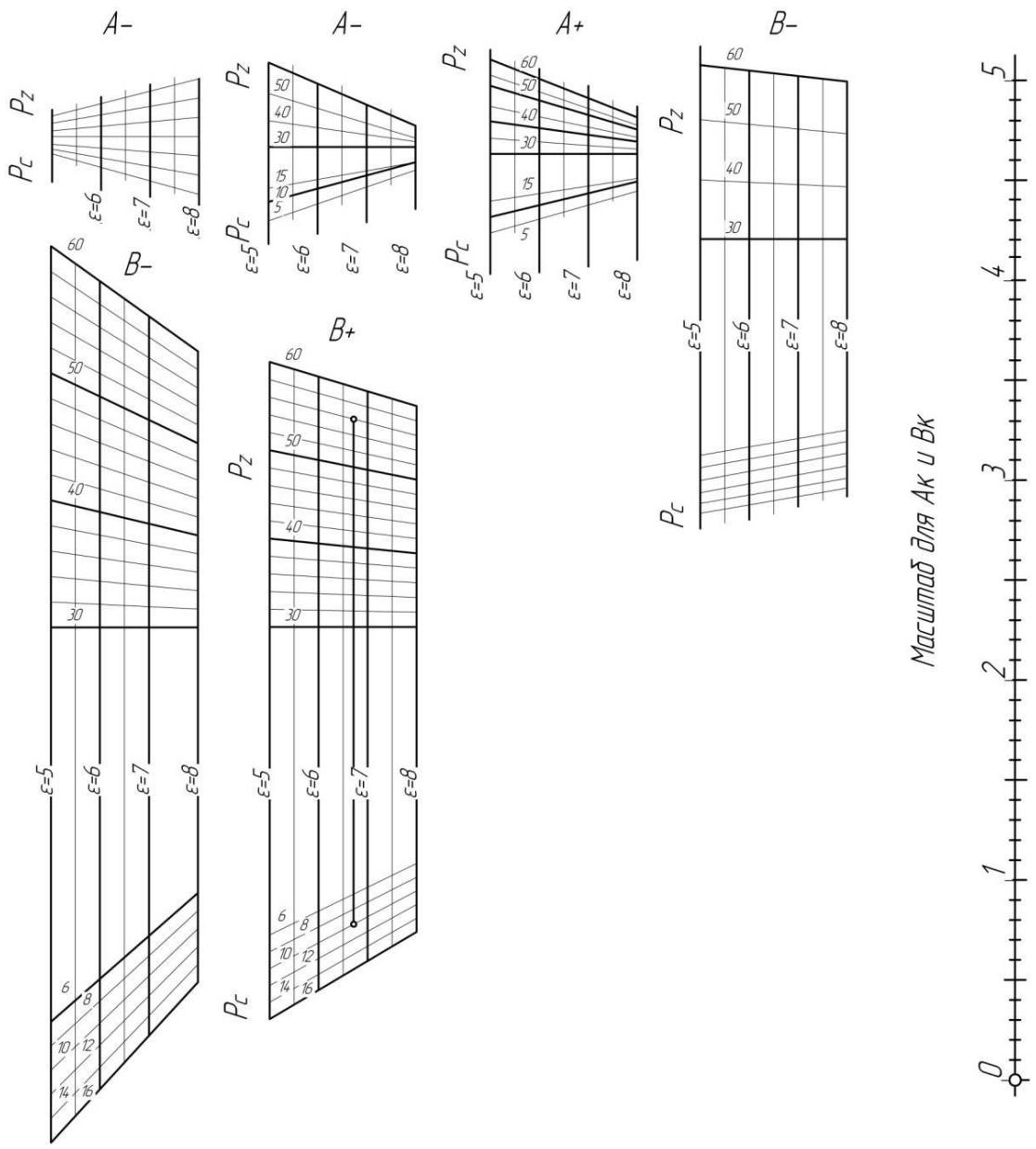

Рисунок П.3. Гармонічні коефіцієнти чотиритактного бензинового двигуна

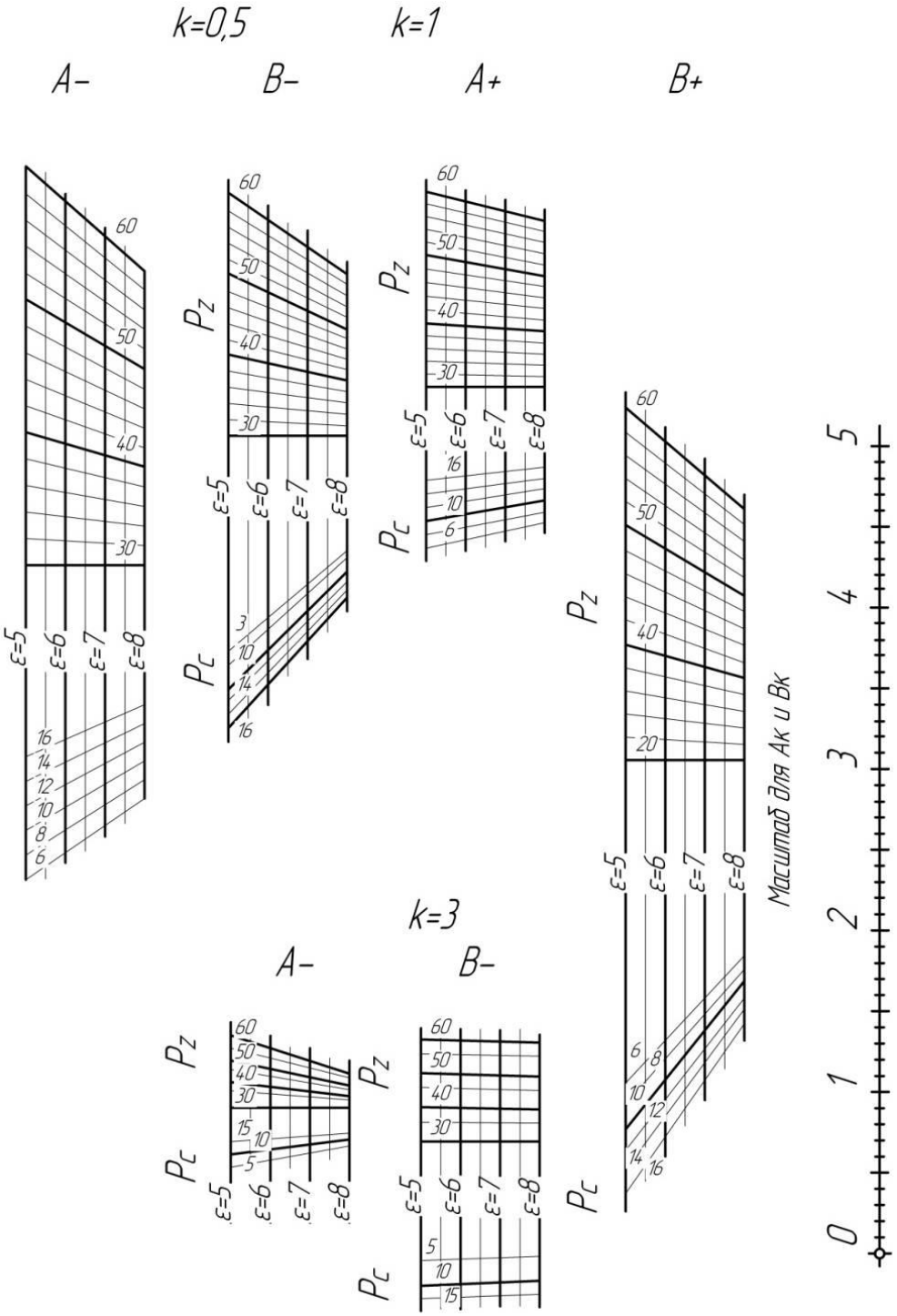

Рисунок П.4 Гармонічні коефіцієнти чотиритактного бензинового двигуна

Навчальне видання

Методичні вказівки
до розрахунково-графічного завдання
«Розрахунок механічної системи на вільні та вимушені
крутильні коливання»
з дисципліни
«Прикладна теорія коливань»

для студентів
спеціальності 133 «Галузеве машинобудування»
денної та заочної форм навчання

Укладачі:
ІСТОМІН Олександр Євгенійович
ВЕРЕТЕННІКОВ Євгеній Олександрович
КАРПОВ Вадим Олегович

Відповідальний за випуск доц. Д.Г. Сівих
Роботу рекомендував до друку проф. Д. О. Волонцевич
Комп'ютерна верстка О.Є. Істомін

В авторській редакції

План 2023 р., поз. 35

Гарнітура Times New Roman.

Видавничий центр НТУ "ХПІ".
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

Самостійне електронне видання