

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Харківський політехнічний інститут»

Г. І. Львов

АНАЛІЗ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТЕНЗОРА ДРУГОГО РАНГУ

Методичні вказівки до індивідуальних домашніх завдань
з курсу «Модулювання фізичних процесів»
для студентів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» та 113 «Прикладна
математика»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 16.02.2023 р.

Харків
2023

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Один з важливіших прикладів застосування тензорів другого рангу є характеристика напруженого стану. Аналіз напруженого стану в точці навантаженого тіла є один з фундаментальних аспектів не тільки теорії пружності, але і в цілому механіки твердого тіла, що деформується, і є необхідним етапом будь-яких міцносних розрахунків.

Індивідуальні домашні завдання по даній темі виконуються з метою закріплення теоретичних відомостей і придбання практичних навиків роботи з характеристиками напруженого стану.

Перед виконанням роботи слід ретельно вивчити відповідні розділи теорії [1-3]. Робота виконується в окремому зошиті протягом двох тижнів з моменту отримання завдання і здається на перевірку викладачу. Оцінка здійснюється по наступних основних параметрах:

- повнота і правильність виконання завдання;
- акуратність оформлення;
- своєчасність здачі.

2. ЗМІСТ ЗАВДАННЯ

Напружений стан в точці навантаженого тіла описується тензором

напружень \hat{T}_σ із заданими компонентами $\hat{T}_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}$ в декартовій

прямокутній системі координат $Oxyz$. Через дану точку проходить нахилена площадка, нормаль до якої складає кути φ_1 і φ_2 відповідно з осями Ox і Oy . Крім цього задана суміжна декартова прямокутна система $Ox'yz'$ повернена відносно початкової навколо однієї з осей на заданий кут.

Необхідно виконати наступні дії

1. Записати тензор напружень в матричній формі. Зобразити компоненти напруженого стану у вигляді стрілок відповідного напрямку на видимих гранях елементарного паралелепіпеда з вказівкою числових значень в МПа.
2. Знайти проєкції вектора одиничної нормалі $n\{l, m, n\}$ на координатні осі початкової системи.
3. Знайти проєкції вектора повного напруження на нахилений площадці на осі початкової системи координат.
4. Розкласти заданий тензор напружень на кульову і девіаторну складові.
5. Підрахувати 1-й, 2-й і 3-й інваріанти напруженого стану.
6. Визначити головні напруження. Для контролю правильності обчислень знайти значення інваріантів по головним напруженням і порівняти з результатами п.7.
7. Визначити орієнтацію головних площадок відносно осей початкової системи координат. Перевірити виконання умови

ортогональності головних напрямів.

8. Знайти повне, нормальне і дотичне напруження на октаедричній площадці.
9. Побудувати кругову діаграму Мора для напружень. Показати на діаграмі максимальне дотичне напруження і нормальне напруження на відповідній площадці. Підрахувати значення цих напружень.

3. ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ








При оформленні роботи слід вказати номер варіанту завдання і відтворити всі початкові дані, а потім виконати пп.1-12 розд. 2. Номер варіанту призначає викладач. Початкові дані до роботи приведені в розд. 4 і включають значення компонент в початковій системі координат, кути, що задають орієнтацію нахиленої площадки, а так само положення суміжної системи координат відносно початкової. Наприклад, поєднання позначень $\overset{x_1}{\curvearrowright} 45^\circ$ указує, що суміжна система утворена шляхом повороту початкової навколо осі Ox за годинниковою стрілкою на кут 45° . Визначення кожної з передбачених завданням величин включає запис відповідної формули, її перетворення (при необхідності) і числовий результат з вказівкою розмірності, як показано в прикладі розд.5.

При виконанні графічної частини завдання слід використовувати креслярське приладдя або програмні засоби.

4. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Таблиця 1. Початкові дані

№	Компоненти напруженого стану, МПа						Орієнтація наклонної площадки		Орієнтація суміжної системи координат	
	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}	σ_y	τ_{yz}	σ_z	$\varphi_1, ^\circ$	$\varphi_2, ^\circ$		
01	25.3	-2.7	4.9	19.2	3.8	33.0	80	130	$\overset{x_1}{\curvearrowright}$	180°
02	15.1	5.7	3.1	-17.6	-7.5	26.3	65	50	$\overset{x_2}{\curvearrowright}$	45°
03	32.5	-4.6	8.3	11.4	5.2	-22.9	70	110	$\overset{x_3}{\curvearrowright}$	135°
04	19.8	6.7	-2.9	-15.5	5.8	-30.1	105	60	$\overset{x_1}{\curvearrowright}$	90°
05	-17.2	8.4	3.1	29.4	-5.5	10.9	85	100	$\overset{x_2}{\curvearrowright}$	270°
06	20.9	-4.4	9.2	17.3	7.7	-12.6	120	45	$\overset{x_3}{\curvearrowright}$	135°
07	14.0	7.1	-5.2	34.4	6.8	26.2	75	80	$\overset{x_1}{\curvearrowright}$	45°
08	-23.4	3.7	-9.1	13.7	-7.2	35.3	55	135	$\overset{x_2}{\curvearrowright}$	180°
09	18.7	-6.4	5.9	-24.1	3.7	31.8	100	65	$\overset{x_3}{\curvearrowright}$	90°
10	27.3	5.8	-3.3	21.8	7.4	-14.2	85	60	$\overset{x_1}{\curvearrowright}$	45°
11	-12.7	-4.9	8.1	16.5	-2.5	32.4	65	100	$\overset{x_2}{\curvearrowright}$	135°
12	34.4	5.8	-6.7	19.3	8.4	-22.0	125	50	$\overset{x_3}{\curvearrowright}$	180°
13	19.1	-3.9	7.8	28.7	5.4	-17.7	95	60	$\overset{x_1}{\curvearrowright}$	90°

14	30.7	6.3	-8.1	-21.3	5.8	11.9	70	85		45°
15	11.6	-4.4	-3.8	35.2	6.9	-23.6	45	120		270°
16	-22.2	9.1	7.3	-16.9	-4.6	31.8	80	115		180°
17	17.1	-7.4	5.7	-19.4	-9.1	34.3	55	65		45°
18	35.0	6.2	-9.7	25.1	7.9	-10.8	115	50		90°
19	12.4	8.1	-3.2	31.7	6.9	-29.3	85	110		270°
20	16.9	-9.3	4.1	-18.4	-2.9	28.8	50	95		135°


Таблиця 2. Початкові дані

№	Компоненти напруженого стану, МПа						Орієнтація наклонної площадки		Орієнтація суміжної системи координат	
	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}	σ_y	τ_{yz}	σ_z	$\varphi_1, ^\circ$	$\varphi_2, ^\circ$		
21	35.3	-4.7	6.9	29.2	7.8	23.0	60	140		180°
22	25.1	3.7	7.1	-16.7	-4.5	36.3	100	75		45°
23	12.5	-8.6	4.3	21.4	7.2	-32.9	95	55		135°
24	39.8	2.7	-6.9	-25.5	3.8	-10.1	120	65		90°
25	-27.2	9.4	5.1	19.4	-3.5	30.9	55	130		270°
26	30.9	-7.4	5.2	13.7	9.7	-22.6	50	125		135°
27	24.0	4.1	-6.2	34.4	2.8	16.2	45	110		45°
28	-33.4	8.7	-4.1	23.7	-3.2	15.3	115	70		180°
29	28.7	-8.4	9.9	-34.1	6.7	11.8	130	65		90°
30	17.3	9.8	-4.3	28.1	2.4	-34.2	75	80		45°
31	-22.7	-5.9	4.1	36.5	-7.5	12.4	125	60		135°
32	24.4	8.8	-5.7	13.9	2.4	-32.0	75	120		180°
33	11.9	-6.9	4.8	18.7	9.4	-37.7	95	70		90°
34	20.7	3.3	-7.1	-31.3	4.8	19.1	140	45		45°
35	31.6	-7.4	-5.8	15.2	7.9	-13.6	65	100		270°
36	-12.2	6.1	4.3	-26.9	-8.6	38.1	80	135		180°
37	27.1	-9.4	5.7	-29.4	-4.1	33.4	45	115		45°
38	15.0	8.2	-4.7	35.1	2.9	-20.8	130	80		90°
39	32.4	4.1	-8.2	11.7	3.9	-19.3	75	95		270°
40	26.9	-3.3	6.1	-38.4	-7.4	18.8	60	105		135°

5. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ
Варіант 35

Таблиця 3. Початкові дані

Компоненти напруженого стану, МПа	Орієнтація	Орієнтація
-----------------------------------	------------	------------

						наклонної площинки		суміжної системи координат	
σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}	σ_y	τ_{yz}	σ_z	$\varphi_1, ^\circ$	$\varphi_2, ^\circ$		
20.5	2.3	4.1	31.0	-5.2	14.4	65	120		90°

1. Тензор напружень в матричній формі і його наочне уявлення:

$$\hat{T}_\sigma = \begin{Bmatrix} 20.5 & 2.3 & 4.1 \\ 2.3 & 31.0 & -5.2 \\ 4.1 & -5.2 & 14.4 \end{Bmatrix}, \text{ МПа}$$

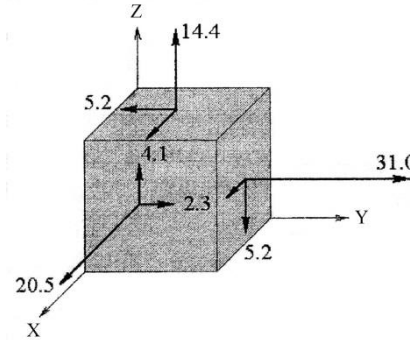


Рис. 5.1 Компоненти напруженого стану

2. Проекції вектора одиничної нормалі $n\{l, m, n\}^T$ на координатні осі початкової системи:

$$l = \cos \varphi_1 = 0.423; m = \cos \varphi_2 = -0.5; n = \sqrt{1 - l^2 - m^2} = 0.756$$

3. Проекції вектора повного напруження на нахилений площинці на осі початкової системи координат. Вектор повного напруження на нахилений площинці можна представити розкладанням по ортам початкової системи координат

$$\sigma_n = \sigma_{xn} \vec{i} + \sigma_{yn} \vec{j} + \sigma_{zn} \vec{k}$$

при цьому його проекції визначаються формулами

$$\sigma_{xn} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n;$$

$$\sigma_{yn} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n;$$

$$\sigma_{zn} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n;$$

тому $\sigma_{xn} = \dots = 10.613 \text{ МПа}$; $\sigma_{yn} = \dots = -18.459 \text{ МПа}$; $\sigma_{zn} = \dots = 15.218 \text{ МПа}$.

5. Визначення величини повного напруження на нахилений площинці, його нормальної і дотичної складових. Величина повного напруження визначається по значеннях його проекцій в початковій системі координат

$$|\sigma_n| = \sqrt{\sigma_{xn}^2 + \sigma_{yn}^2 + \sigma_{zn}^2} = 26.171 \text{ (МПа)}$$

підрахунків. Нормальне напруження на нахилений площинці

визначається формулою

$$\sigma_m = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} ln = \dots = 25.218 \text{ (МПа)}$$

Дотичне напруження на тій же площадці:

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_m^2} = 7.0 \text{ (МПа)}$$

6. Розкладання тензора напружень на кульову і девіаторні складові. Тензор напружень може бути представлений у вигляді суми кульового тензора і девіатора $\hat{T}_\sigma = \hat{T}_0 + \hat{D}_\sigma$:

$$\hat{T}_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\sigma_x - \sigma_0) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_0) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_0) \end{Bmatrix}$$

де $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = \dots = 21.967 \text{ (МПа)}$ - середнє нормальне напруження. Кульовий тензор і девіатор в матричній формі має вигляд у даному випадку:

$$\hat{T}_0 = \begin{Bmatrix} 21.967 & 0 & 0 \\ 0 & 21.967 & 0 \\ 0 & 0 & 21.967 \end{Bmatrix}, \text{ МПа}; \hat{D}_\sigma = \begin{Bmatrix} -1.467 & 2.3 & 4.1 \\ 2.3 & 9.033 & -5.2 \\ 4.1 & -5.2 & -7.567 \end{Bmatrix}, \text{ МПа.}$$

7. Підрахунок інваріантів тензора напружень \hat{T}_σ :

1-й інваріант: $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 65.90 \text{ (МПа)}$;

2-й інваріант:

$I_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 + \sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2 + \sigma_z \sigma_x - \tau_{zx}^2 = 1327.960 \text{ (МПа)}$;

3-й інваріант:

$I_3 = \det(\hat{T}_\sigma) = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} = 7901.522 \text{ (МПа)}$.

Для виконання обчислень по п.8 та п.9 можливо скористуватись матричним калькулятором

[https://matrixcalc.org/ru/vectors.html#eigenvectors\(%7B%7B1,2,0%7D,%7B2,0,2%7D,%7B0,2,-1%7D%7D\)](https://matrixcalc.org/ru/vectors.html#eigenvectors(%7B%7B1,2,0%7D,%7B2,0,2%7D,%7B0,2,-1%7D%7D))

8. Визначення головних напружень. Головні напруження визначаються як корінь кубічного рівняння $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$. Рішення може бути одержано в тригонометричній формі з використанням допоміжних величин

$$p = -\frac{1}{3} I_1^2 + I_2 = -119.643 \text{ (МПа)}; q = -2 \left(\frac{I_1}{3} \right)^3 + \frac{1}{3} I_1 I_2 - I_3 = 69.986 \text{ (МПа)}$$

$$\alpha = \arccos \left(-\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}} \right) = 97.987^\circ. \text{ Три корені кубічного рівняння визначаються по}$$

$$\text{формулах } \sigma_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{3} I_1; \sigma_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\alpha}{3} + 60^\circ \right) + \frac{1}{3} I_1; \sigma_3 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\alpha}{3} - 60^\circ \right) + \frac{1}{3} I_1.$$

В результаті підрахунку коренів і розташування їх у порядку убавання виходять значення головних напружень:

$$\sigma_1 = 32.60 \text{ МПа}; \sigma_2 = 22.553 \text{ МПа}; \sigma_3 = 10.747 \text{ МПа.}$$

По знайдених головних напруженнях визначаються значення інваріантів:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \dots = 65.90 \text{ (МПа)}; \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \dots = 1327.957 \text{ (МПа)}; \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \dots = 7901.493 \text{ (МПа)}. \end{aligned}$$

Збіг з результатами п. 7 підтверджує правильність визначення головних напружень.

9. Визначення орієнтації головних площадок.

Орієнтація кожної з головних площадок визначається проекціями одиничної нормалі, що вказує відповідний головний напрям тензора напружень. Для k -ої головної площадки ($k=1,2,3$) проекції одиничної нормалі $\mathbf{n}_k \{l_k, m_k, n_k\}^T$ задовольняють відповідній системі лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1 = 0; \\ \tau_{yx}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 = 0; \\ \tau_{zx}l_1 + \tau_{zy}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} (\sigma_x - \sigma_2)l_2 + \tau_{xy}m_2 + \tau_{xz}n_2 = 0; \\ \tau_{yx}l_2 + (\sigma_y - \sigma_2)m_2 + \tau_{yz}n_2 = 0; \\ \tau_{zx}l_2 + \tau_{zy}m_2 + (\sigma_z - \sigma_2)n_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_3)l_3 + \tau_{xy}m_3 + \tau_{xz}n_3 = 0; \\ \tau_{yx}l_3 + (\sigma_y - \sigma_3)m_3 + \tau_{yz}n_3 = 0; \\ \tau_{zx}l_3 + \tau_{zy}m_3 + (\sigma_z - \sigma_3)n_3 = 0; \end{cases}$$

з додатковими умовами

$$\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1; \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1; \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

У приведених співвідношеннях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - значення головних напружень. Кожна з трьох систем рівнянь ($k=1,2,3$) лінійно залежна, оскільки її визначник дорівнює нулю:

$$\det \begin{pmatrix} (\sigma_x - \sigma_k) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_k) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_k) \end{pmatrix} = (\sigma_x - \sigma_k)(\sigma_y - \sigma_k)(\sigma_z - \sigma_k) -$$

$$-(\sigma_x - \sigma_k)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma_k)\tau_{xz}^2 - (\sigma_z - \sigma_k)\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} = 0.$$

Це значить, що одна з невідомих, наприклад n_1 (або, аналогічно, n_2 чи n_3), може бути виключена шляхом підстановки $l_1 = an_1; m_1 = bn_1$. Даний прийом виправданий тим, що $n_1 \neq 0$, оскільки інакше дана головна площадка повинна бути паралельна осі Oz , звідки витікає, що і перпендикулярна до Oz координатна площадка буде головною. Останнє неможливе по умові завдання, оскільки на цій площадці є дотичні напруження.

В результаті вказаної підстановки система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_1)a + \tau_{xy}b + \tau_{xz} = 0; \\ \tau_{yx}a + (\sigma_y - \sigma_1)b + \tau_{yz} = 0; \\ \tau_{zx}a + \tau_{zy}b + \sigma_z - \sigma_1 = 0. \end{cases}$$

Коефіцієнти a і b можуть бути знайдені по правилу Крамера з будь-яких двох рівнянь, наприклад з 1-го і 2-го:

$$a = \frac{\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_1)}{(\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1) - \tau_{xy}^2}; b = \frac{\tau_{xy}\tau_{xz} - \tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_1)}{(\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1) - \tau_{xy}^2}.$$

Тоді, відповідно до додаткової умови, визначається

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \text{ а потім } l_1 \text{ і } m_1.$$

Для першої головної площадки з нормаллю $n_1 \{l_1, m_1, n_1\}^T$ $\sigma_1 = 32.60$ МПа:

$$a = -0.384; b = -3.803; n_1 = 0.253; l_1 = -0.097; m_1 = -0.0963.$$

Для другої площадки $n_2 \{l_2, m_2, n_2\}^T$ $\sigma_2 = 22.553$ МПа:

$$a = 2.059; b = 0.055; n_2 = 0.437; l_2 = 0.899; m_2 = 0.024.$$

Для третьої площадки $n_3 \{l_3, m_3, n_3\}^T$ $\sigma_3 = 10.747$ МПа:

$$a = -0.494; b = 0.313; n_3 = 0.863; l_3 = -0.427; m_3 = 0.270.$$

Ортогональність головних напрямів перевіряється шляхом підрахунку скалярних добутків відповідних векторів:

$$n_1 n_2 = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = \dots = 0.0210468;$$

$$n_1 n_3 = l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = \dots = 0.02337570;$$

$$n_2 n_3 = l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = \dots = -0.000262.$$

Одержаний результат підтверджує правильність визначення орієнтації головних площадок.

Проекції одиничного вектора нормалі до k - головної площадки є його направляючими косинусами, що дозволяє знайти величину кутів $\theta_x^k, \theta_y^k, \theta_z^k$ між k -м головним напрямом і осями початкової системи координат: $\theta_x^1 = 95.58^\circ$; $\theta_y^1 = 164.27^\circ$; $\theta_z^1 = 75.34^\circ$; $\theta_x^2 = 25.94^\circ$; $\theta_y^2 = 86.62^\circ$; $\theta_z^2 = 64.10^\circ$; $\theta_x^3 = 115.25^\circ$; $\theta_y^3 = 74.33^\circ$; $\theta_z^3 = 30.32^\circ$.

Таким чином, тензор напружень відносно головних осей має вигляд:

$$\hat{T}_0 = \begin{Bmatrix} 32.60 & 0 & 0 \\ 0 & 22.553 & 0 \\ 0 & 0 & 10.747 \end{Bmatrix}, \text{ МПа}$$

11. Визначення напружень на октаедричній площадці. Октаедрична площадка, що проходить через дану точку, однаково нахилена до головних осей 1,2,3, як показано на рис. 5.3. Це значить, що одинична нормаль n^0 в даній системі координат має компоненти, рівні $1/\sqrt{3}$. Тому проекції вектора повного напруження на цій площадці визначаються аналогічно п. 3

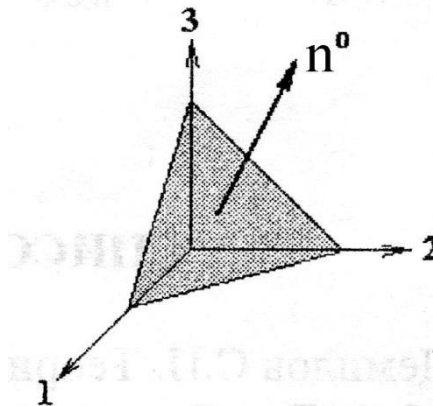


Рис. 5.3. Октаедрична площадка

Тоді, відповідно до п. 5, можна знайти величини повного, нормального і дотичного октаедричних напружень, виразив їх через головні напруження:

$$|\sigma_n|=23.713 \text{ (МПа)}; \sigma^0=21.967 \text{ (МПа)}; \tau^0=8.931 \text{ (МПа)}.$$

12. Побудова кругової діаграми Мора для напружень. Визначення максимального дотичного напруження і нормального напруження на відповідній площадці. Кругова діаграма Мора є сукупність точок площини, координати яких рівні нормальному σ і дотичному τ напруженням на всіляких площадках, що проходять через дану точку навантаженого тіла. Ця сукупність точок обмежена трьома напівколами, діаметри яких рівні різницям головних напружень, як показано на рис. 5.4. Відповідно до діаграми максимальне дотичне напруження $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 10.927 \text{ (МПа)}$.

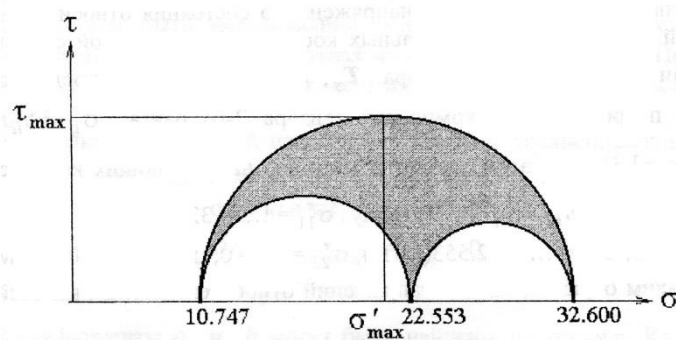


Рис. 5.4 Кругова діаграма Мора

На площадці максимального дотичного напруження є і нормальне напруження, яке дорівнює $\sigma'_{\max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 21.674 \text{ (МПа)}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Timoshenko S.P. Theory of elasticity – New York. 1981.
2. Божидарник ВВ., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності.- Львів: Світ, 1994. – 560 с.
3. Бабенко А.Є., Бобир М.І., Бойко С.Л., Боронко О.О. Теорія пружності. К.: Основа. 2009.- 236
4. J.R. BARBER. Elasticity. Kluwer Academic Publishers. 2002.
5. L.D.Landau, E.M. Livshits. Theory of elasticity. Pergamon Press. 1970
6. A.I. Lurie. Theory of elasticity. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2005

ЗМІСТ

1. Загальні положення
 2. Зміст завдання
 3. Вказівки до виконання роботи
 4. Варіанти завдань
 5. Приклад виконання завдання
- Список літератури

Навчальне видання

Львов Геннадій Іванович

Аналіз властивостей тензора другого рангу

Методичні вказівки до індивідуальних домашніх завдань
з курсу «Модулювання фізичних процесів»
для студентів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» та 113 «Прикладна
математика»

Укладачі: **Львов Геннадій Іванович**

Роботу до видання рекомендував доц. Трубаєв О.І.

Відповідальний за випуск **Г. І. Львов**

План 2023 р., поз.149 .