МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для лабораторних робіт з курсу

« Математичні методи моделювання та обробки даних »

Частина 1

для спеціальності

122 – комп'ютерні науки

113 – прикладна математика

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 16.02.2023 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2023

Методичні вказівки до виконання лабораторних завдань з навчальної дисципліни «Математичні методи моделювання та обробки даних » для студентів денної та заочної форм навчання за спеціальностями «122 Комп'ютерні науки», та «113 Прикладна математика»/ уклад.: Ю.А. Вязовиченко, К.Є. Потопальська. – Харків: НТУ «ХПІ», 2023. – 25 с.

Укладач: Ю.А. Вязовиченко

К.Є. Потопальська

Рецензент: О.І. Трубаєв

Кафедра математичного моделювання на інтелектуальних обчислень в інженерії.

ЗМІСТ

ВСТУП

У сучасній науці та техніці математичне моделювання є основним інструментом аналізу складних фізичних, біологічних, економічних та інженерних процесів. Серед численних математичних засобів, які використовуються для опису динамічних систем, особливе місце займають диференціальні рівняння першого порядку. Саме вони дозволяють формалізувати зв'язки між швидкістю зміни певних величин та самими величинами, що критично важливо для розуміння, прогнозування та управління багатьма явищами реального світу.

Такі рівняння є базовими у моделюванні процесів теплообміну, хімічних реакцій, зростання популяцій, динаміки капіталовкладень, обробки сигналів тощо. Їх використання дозволяє створити точні та ефективні моделі, на основі яких можуть прийматися оптимальні рішення в технічних системах, економічному аналізі або екологічному прогнозуванні.

У межах даного курсу вивчаються чисельні та аналітичні методи розв'язування таких рівнянь, з урахуванням особливостей обробки даних та комп'ютерного моделювання.

Актуальність вивчення диференціальних рівнянь першого порядку зумовлена зростаючою потребою у математичному описі та комп'ютерній симуляції реальних процесів в умовах швидкого розвитку науки і техніки. Розуміння принципів побудови моделей і методів їх розв'язання є необхідною компетенцією для майбутніх фахівців у галузях інженерії, інформатики, прикладної математики та економіки.

Метою методичних вказівок є надання студентам теоретичних знань та практичних навичок щодо:

- побудови математичних моделей на основі диференціальних рівнянь першого порядку;

- аналізу поведінки моделей;

- застосування аналітичних та чисельних методів розв'язування;

- інтерпретації результатів з точки зору реальних задач;

- реалізації моделей у комп'ютерному середовищі.

Завдання курсу

1. Ознайомити студентів із класифікацією та видами диференціальних рівнянь першого порядку.

2. Розглянути методи розв’язання основних типів рівнянь (відокремлювані, лінійні, з повним диференціалом).

3. Навчити застосовувати диференціальні рівняння до побудови математичних моделей типових процесів.

4. Сформувати навички використання чисельних методів для розв’язання рівнянь у випадках, коли аналітичне розв’язання є складним або неможливим.

5. Розвивати вміння інтерпретувати результати моделювання та обробки даних у прикладних задачах.

6. Виховати аналітичне мислення та вміння обґрунтовувати вибір математичного методу в конкретній ситуації

РОЗДІЛ 1.ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Диференціальне рівняння першого порядку — це рівняння, в якому невідома функція залежить від однієї змінної та її першої похідної. Загальний вигляд такого рівняння:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ або } y' = f(x, y) \text{ або } \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Ці рівняння часто виникають у задачах моделювання процесів природи, техніки та економіки.

Класифікація рівнянь за типами та методи їх розв'язання

1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Загальний **вигляд**:

$$y' = f(x)g(y)$$

Метод розв'язання: Метод відокремлення змінних

Приклад:

$$y' = x \cdot y$$

Розв'язок:

- Розділимо змінні: $dy/y = x\,dx$
- Інтегруємо обидві частини: $\int (1/y)\,dy = \int x\,dx$
$$-ln|y| = x^2/2 + C$$
- Розв'язок: $y = Ce\text{^}\{x^2/2\}$

2. Лінійне диференціальне рівняння

Загальний **вигляд**:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Метод розв'язання: Метод інтегруючого множника

Приклад:

$$y' + y = e\text{^}x$$

Розв'язок:

- Інтегруючий множник: $\mu(x) = e\text{^}\{\int 1\,dx\} = e\text{^}x$
- Множимо рівняння на $e\text{^}x$: $e\text{^}x\,y' + e\text{^}x\,y = e\text{^}\{2x\}$

- Ліва частина: $(e^\wedge x\, y)' = e^\wedge\{2x\}$
- Інтегруємо: $\int (e^\wedge x\, y)'\, dx = \int e^\wedge\{2x\}\, dx$

$$- e^\wedge x\, y = (1/2)e^\wedge\{2x\} + C$$

- Розв'язок: $y = (1/2)e^\wedge x + Ce^\wedge\{-x\}$

3. Однорідне диференціальне рівняння

Загальний **вигляд**:

$$y' = f(y/x)$$

Метод розв'язання: Підстановка $y = ux, dy = udx + xdu$

Приклад: $y' = (x + y)/(x - y)$

Розв'язок:

- Підстановка: $y = ux \Rightarrow y' = u + x\, du/dx$
- Підставимо:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{x + ux}{x - ux} = (1 + u)/(1 - u)$$

$$- x\frac{du}{dx} = \frac{1 + u}{1 - u} - u = \frac{1 + u - u(1 - u)}{1 - u} = (1 + u^\wedge 2)/(1 - u)$$

- Інтегруємо (можна далі розписати за потребою – складна функція)

4. Рівняння з повним диференціалом

Загальний **вигляд**:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \text{де } \partial M/\partial y = \partial N/\partial x$$

Метод розв'язання: Інтегрування повного диференціалу

Приклад:

$$y\, dx + x\, dy = 0$$

Розв'язок:

- Перевірка: $\partial M/\partial y = 1, \partial N/\partial x = 1 \Rightarrow$ рівняння повне
- Інтегруємо: $\int y\, dx = xy, \int x\, dy = xy \Rightarrow$ загальний інтеграл: $xy = C$
- Розв'язок: $xy = C$

5. Рівняння звідні до рівнянь у повних диференціалах

Загальний **вигляд**:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

$$\text{але } \partial M/\partial y \neq \partial N/\partial x$$

Метод розв'язання: Знаходження інтегруючого множника μ (x або y).

Інтегруючий множник знаходиться згідно таблиці

№	**Якщо отримав вираз**	**то $\mu = \mu(z)$ знаходимо з …**
1	$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = F(x)$	$z = x$, $\frac{d \ln \mu}{dz} = F(z)$
2	$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = F_1\,(y)$	$z = y$, $\frac{d \ln \mu}{dz} = F_1(z)$
3	$\frac{1}{M+N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = F_2\,(x-y)$	$z = x - y$, $\frac{d \ln \mu}{dz} = F_2(z)$
4	$\frac{1}{M-N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = F_3\,(x+y)$	$z = x + y$, $\frac{d \ln \mu}{dz} = F_3(z)$
5	$\frac{1}{Mx-Ny}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = F_4\,(xy)$	$z = xy$, $\frac{d \ln \mu}{dz} = F_4(z)$
6	$\frac{1}{2Mx-2Ny}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = F_5\,(x^2+y^2)$	$z = x^2 + y^2$, $\frac{d \ln \mu}{dz} = F_5(z)$
7	$\frac{1}{2Mx+2Ny}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = F_6\,(x^2-y^2)$	$z = x^2 - y^2$, $\frac{d \ln \mu}{dz} = F_6(z)$

Приклад:

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

Розв'язок:

- Рівняння не є повним: $\partial M/\partial y = 1, \partial N/\partial x = -1 \Rightarrow \neq$
- Знайдемо множник: $\mu = 1/(x^2 + y^2)$

- Множимо: $(y\,dx\ -\ x\,dy)/(x^2\ +\ y^2)\ =\ 0$
- Це повний диференціал: $d(arctg(y/x))\ =\ 0$
- Розв'язок: $arctg(y/x)\ =\ C$.

РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

1. Розв'язати наведені вище задачі згідно свого номеру за списком +1. Значення констант для кожної задачі наведені у відповідних таблицях. Приклад оформлення звіту подано у наступному розділі.
2. Для кожної задачі вказати тип рівняння та метод його розв'язку.
3. Знайти частковий розв'язок, використовуючи початкову умову наведену в таблиці.
4. Побудувати графік розв'язку. Дати його опис, інтерпритацію результату у контексті задачі, що розв'язувалась.

Завдання до лабораторної работи №1

Завдання 1: Процес охолодження

- За законом Ньютона охолодження, швидкість зміни температури об'єкта пропорційна різниці між температурою об'єкта і навколишнього середовища: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{ambient}})$ де T - температура об'єкта, T_{ambient} - температура навколишнього середовища, k - константа пропорційності.
- Знайти аналітичний розв'язок для температури об'єкта $T(t)$ з початковою умовою $T(0) = T_0$.

Завдання 2: Моделювання популяції з урахуванням природного приросту Нехай популяція $P(t)$ змінюється за законом: $\frac{dP}{dt} = rP$ де r - коефіцієнт природного приросту.

- Знайти аналітичний розв'язок для популяції $P(t)$ з початковою умовою $P(0) = P_0$.

Завдання 3: Моделювання радіоактивного розпаду (лінійне однорідне рівняння).

- Швидкість розпаду радіоактивного ізотопу пропорційна кількості невитраченого матеріалу: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ де N - кількість невитраченого матеріалу, λ - константа розпаду.
- Знайти аналітичний розв'язок для кількості матеріалу $N(t)$ з початковою умовою $N(0) = N_0$.

Завдання 4: З ростання населення з обмеженими ресурсами (рівняння Бернуллі).

- Швидкість зростання популяції обмежена ресурсами: $\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$ де P популяція, r - коефіцієнт зростання, K - максимальна можливість популяції.
- Використати заміну $P = Kv$ та знайти аналітичний розв'язок для популяції $P(t)$ з початковою умовою $P(0) = P_0$.

Завдання 5: Електричне коло (лінійне неоднорідне рівняння).

- В електричному колі з опором R, індуктивністю L та джерелом напруги $E(t)$: $L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$ де I - струм у колі.
- Знайти аналітичний розв'язок для струму $I(t)$ з початковою умовою $I(0) = 0$ для випадку, коли $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$.

Завдання 6: Задача про змішування (рівняння з розділюваними змінними).

- В резервуарі об'ємом V знаходиться розчин із концентрацією $C(t)$. Розчин надходить зі швидкістю r_{in} з концентрацією C_{in} і витікає зі швидкістю r_{out}: $\frac{dC}{dt} = \frac{r_{\text{in}} C_{\text{in}} - r_{\text{out}} C}{V}$
- Знайти аналітичний розв'язок для концентрації $C(t)$ з початковою умовою $C(0) = C_0$

Завдання 7: Потенціальна енергія в механічній системі (рівняння в повних диференціалах).

- Розглянемо систему з потенціальною енергією $U(x, y)$. Якщо сила F залежить від координат x та y, то: $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$
- Відома залежність сили від координат: $F_x = 2x + y, F_y = x + 2y$. Перевірити, чи ϵ це рівнянням в повних диференціалах.
- Знайти потенціальну енергію $U(x, y)$, якщо вона існує.

Завдання по варіантах

Завдання 1: Процес охолодження $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{ambient}})$

Таблиця 1 – Варіанти для завдання 1

Коефіцієнти рівняння і початкові умови по варіантах				
№		$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{T_{\text{ambient}}}$, $^\circ$ C	$\boldsymbol{T_0}$, $^\circ$ C
Варіант	**1**	0,1	20	80
Варіант	**2**	0,2	25	100
Варіант	**3**	0,05	15	60
Варіант	**4**	0,3	30	90
Варіант	**5**	0,4	22	70
Варіант	**6**	0,15	18	85
Варіант	**7**	0,25	28	95
Варіант	**8**	0,1	20	40
Варіант	**9**	0,35	24	75
Варіант	**10**	0,2	35	100
Варіант	**11**	0,3	10	50
Варіант	**12**	0,25	32	85
Варіант	**13**	0,4	22	55
Варіант	**14**	0,05	20	90
Варіант	**15**	0,15	25	70
Варіант	**16**	0.12	18	60
Варіант	**17**	0.18	21	95
Варіант	**18**	0.22	19	88
Варіант	**19**	0.07	16	73
Варіант	**20**	0.3	26	100

Завдання 2: Моделювання популяції $\frac{dP}{dt} = rP$

Таблиця 2 – Варіанти для завдання 2

Коефіцієнти рівняння і початкові умови по варіантах			
№		$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{P_0}$
Варіант	**1**	100	0,1
Варіант	**2**	200	0,2
Варіант	**3**	50	0,05
Варіант	**4**	300	0,3
Варіант	**5**	150	0,4
Варіант	**6**	250	0,15

Варіант	**7**	350	0,25
Варіант	**8**	75	0,1
Варіант	**9**	400	0,35
Варіант	**10**	500	0,2
Варіант	**11**	600	0,3
Варіант	**12**	80	0,25
Варіант	**13**	120	0,4
Варіант	**14**	180	0,05
Варіант	**15**	90	0,15
Варіант	**16**	60	0,18
Варіант	**17**	220	0,12
Варіант	**18**	310	0,27
Варіант	**19**	95	0,09
Варіант	**20**	130	0,22

Завдання 3: Радіоактивний розпад $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$

Таблиця 3 – Варіанти для завдання 3

Коефіцієнти рівняння і початкові умови по варіантах			
№		$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{N_0}$
Варіант	**1**	0,1	1000
Варіант	**2**	0,2	500
Варіант	**3**	0,05	2000
Варіант	**4**	0,3	1500
Варіант	**5**	0,4	1200
Варіант	**6**	0,15	1800
Варіант	**7**	0,25	2500
Варіант	**8**	0,1	800
Варіант	**9**	0,35	3000
Варіант	**10**	0,2	600
Варіант	**11**	0,3	700
Варіант	**12**	0,25	1500
Варіант	**13**	0,4	2200
Варіант	**14**	0,05	100
Варіант	**15**	0,15	5000

Варіант	**16**	0,18	1600
Варіант	**17**	0,12	950
Варіант	**18**	0,3	2100
Варіант	**19**	0,22	1300
Варіант	**20**	0,08	1800

Завдання 4: Зростання населення з обмеженими ресурсами $\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$

Таблиця 4 – Варіанти для завдання 4

Коефіцієнти рівняння і початкові умови по варіантах				
№		$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{K}$	$\boldsymbol{P_0}$
Варіант	**1**	0,1	1000	100
Варіант	**2**	0,2	500	200
Варіант	**3**	0,05	2000	50
Варіант	**4**	0,3	1500	300
Варіант	**5**	0,4	1200	150
Варіант	**6**	0,15	1800	250
Варіант	**7**	0,25	3500	400
Варіант	**8**	0,1	800	75
Варіант	**9**	0,35	3000	500
Варіант	**10**	0,2	1000	600
Варіант	**11**	0,3	700	1000
Варіант	**12**	0,25	1200	80
Варіант	**13**	0,4	2200	120
Варіант	**14**	0,05	500	180
Варіант	**15**	0,15	2000	90
Варіант	**16**	0,12	1800	160
Варіант	**17**	0,18	2500	300
Варіант	**18**	0,22	2200	120
Варіант	**19**	0,07	1500	95
Варіант	**20**	0,3	2000	450

Завдання 5: Електричне коло $L\frac{dI}{dt} + RI = E_0 \sin(\omega t)$

Таблиця 5 – Варіанти для завдання 5

Коефіцієнти рівняння і початкові умови по варіантах					
№		$\boldsymbol{L}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{E_0}$	$\boldsymbol{\omega}$
Варіант	**1**	1	10	5	1
Варіант	**2**	2	5	10	2
Варіант	**3**	0,5	15	3	0,5
Варіант	**4**	1,5	20	8	1,5
Варіант	**5**	3	12	6	2,5
Варіант	**6**	0,8	8	4	1
Варіант	**7**	2	10	7	1,2
Варіант	**8**	1	5	9	2
Варіант	**9**	1,5	7	5	0,8
Варіант	**10**	2,5	15	12	1,5
Варіант	**11**	0,7	10	6	0,7
Варіант	**12**	1,2	12	8	1,8
Варіант	**13**	3	20	4	1
Варіант	**14**	1	8	10	2
Варіант	**15**	0,5	6	7	1,5
Варіант	**16**	1,1	9	6	1,1
Варіант	**17**	2,2	11	8	2,1
Варіант	**18**	0,9	13	10	1,5
Варіант	**19**	1,7	7	5	0,9
Варіант	**20**	2,8	10	7	1,8

Завдання 6: Задача про змішування $\frac{dC}{dt} = \frac{T_{\text{in}}\, C_{\text{in}} - r_{\text{out}}\, C}{V}$

Таблиця 6 – Варіанти для завдання 6

Коефіцієнти рівняння і початкові умови по варіантах						
№		$\boldsymbol{r_{\text{in}}}$	$\boldsymbol{r_{\text{out}}}$	$\boldsymbol{C_{\text{in}}}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{C_0}$
Варіант	**1**	2	1	5	100	10
Варіант	**2**	1,5	0,5	10	200	15
Варіант	**3**	3	2	8	150	5

Варіант	**4**	2,5	1	7	250	12
Варіант	**5**	4	3	6	300	20
Варіант	**6**	1	2	5	100	8
Варіант	**7**	2	1,5	9	200	14
Варіант	**8**	3,5	2,5	11	150	6
Варіант	**9**	2	1	8	250	10
Варіант	**10**	4	3	12	300	18
Варіант	**11**	1,5	2	7	100	13
Варіант	**12**	2,5	1,5	6	200	15
Варіант	**13**	3	2,5	9	150	12
Варіант	**14**	2	1	10	250	7
Варіант	**15**	3,5	2	11	300	22
Варіант	**16**	2,5	1,5	9	180	11
Варіант	**17**	3	2	10	250	14
Варіант	**18**	1,8	1,2	7	200	9
Варіант	**19**	2,2	1,7	8	220	10
Варіант	**20**	3,5	2,5	11	300	12

Завдання 7: Потенціальна енергія в механічній системі $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Таблиця 7 – Варіанти для завдання 7

№		$\boldsymbol{M(x, y)}$	$\boldsymbol{N(x, y)}$
Варіант	**1**	2x+y	x+2y
Варіант	**2**	x^2+y	2x+y^2
Варіант	**3**	3x-y	x+3y
Варіант	**4**	4x+2y	2x-y
Варіант	**5**	x^2-y^2	2xy
Варіант	**6**	5x+3y	x+4y
Варіант	**7**	x-2y	2x+y
Варіант	**8**	x+3y	2x-y
Варіант	**9**	x^2+3y	3x+y^2
Варіант	**10**	2x-y	x^2+y
Варіант	**11**	3x+y	2x-2y

Варіант	**12**	x^2-2y	4x+y^2
Варіант	**13**	2x+y	x-3y
Варіант	**14**	x+y	x^2-2y
Варіант	**15**	3x-y	x+y^2
Варіант	**16**	2x - y	x + y
Варіант	**17**	x^2 + 2y	2x + y^2
Варіант	**18**	3x + y	x - y
Варіант	**19**	4x - y	x + 2y
Варіант	**20**	x^2 + y^2	2x + y

РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ

В даному подано прикладі наведено зразок оформлення розв’язку задач для варіанту №1.

Завдання 1: Процес охолодження

Опис задачі: Температура тіла знижується до температури середовища відповідно до закону Ньютона.

Задані **константи**: $k = 0.1, T\_ambient = 20°C, T0 = 80°C$

Тип рівняння: Лінійне диференціальне рівняння

Метод розв’язку: Використано метод відокремлення змінних

Розв’язок:

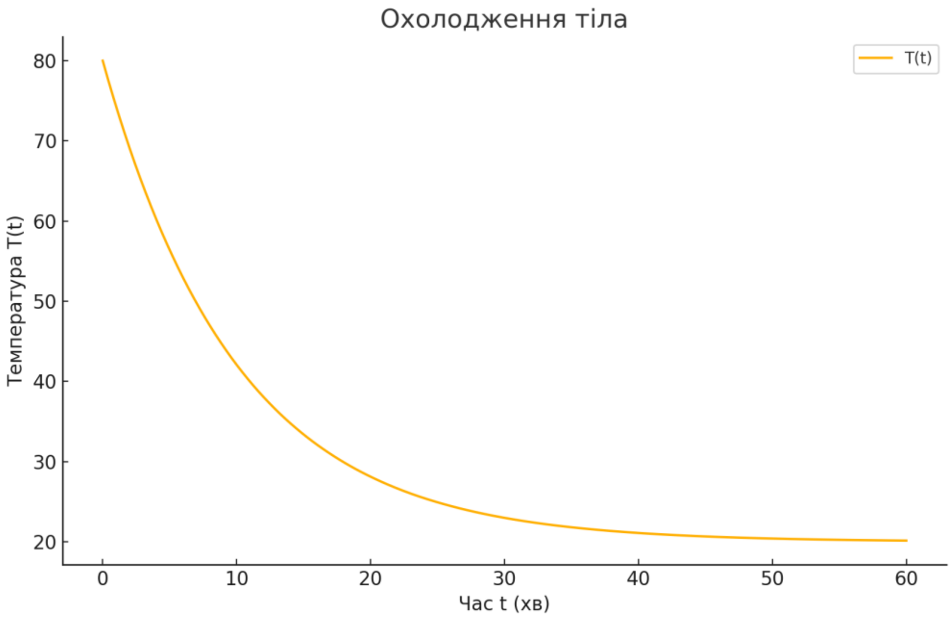
$$-dT/dt = -k(T - T\_ambient)$$

$$- dT/(T - T\_ambient) = -k\ dt$$

$$- ln|T - T\_ambient| = -kt + C$$

$$- T(t) = T\_ambient + (T0 - T\_ambient)e\text{^}(-kt)$$

$$- T(t) = 20 + (80 - 20)e\text{^}(-0.1t)$$



Температура експоненційно наближається до температури середовища, що видно на графіку.

<u>Завдання 2:</u> Модель зростання популяції

Опис задачі: Модель Мальтуса описує експоненційне зростання популяції без обмеження ресурсів.

Задані **константи**: $r = 100, P0 = 0.1$

Тип рівняння: Рівняння з відокремлюваними змінними

Метод розв'язку: Метод інтегрування змінних

Розв'язок:

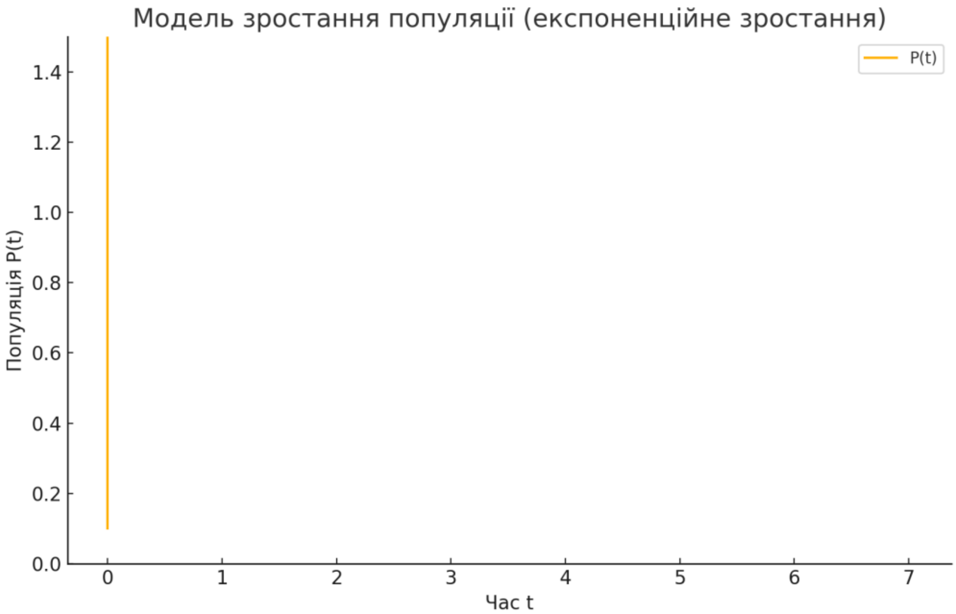
$$- dP/dt = rP$$

$$- dP/P = r\,dt$$

$$- ln|P| = rt + C$$

$$- P(t) = P0 * e\^(rt)$$

$$- P(t) = 0.1 * e\^(100t)$$



Інтерпретація графіка:

Популяція зростає дуже швидко, бо темп зростання r великий. Це видно по крутості експоненти.

<u>Завдання 3:</u> Радіоактивний розпад

Опис задачі: Розпад речовини пропорційний до її кількості.

Задані **константи**: λ = 0.1, N0 = 1000

Тип рівняння: Рівняння з відокремлюваними змінними

Метод розв’язку: Метод інтегрування змінних

Розв’язок:

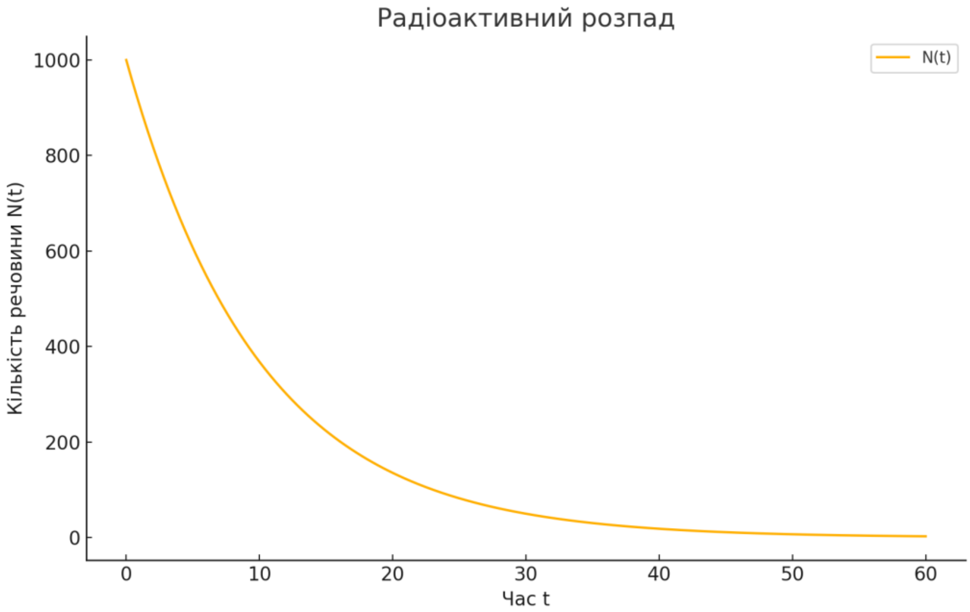
$$- dN/dt = -\lambda N$$

$$- dN/N = -\lambda\, dt$$

$$- ln|N| = -\lambda t + C$$

$$- N(t) = N0 * e\hat{}(-\lambda t)$$

$$- N(t) = 1000 * e\hat{}(-0.1t)$$



Інтерпретація графіка:

Кількість речовини експоненційно зменшується з часом — типова модель радіоактивного розпаду.

Завдання 4: Зростання населення з обмеженням

Опис задачі: Модель логістичного зростання описує реальні обмеження ресурсів у зростанні популяції.

Задані **константи**: $r = 0.1, K = 1000, P0 = 100$

Тип рівняння: Нелінійне рівняння з відокремлюваними змінними

Метод розв'язку: Підстановка v = P/K та розділення змінних

Розв'язок:

$$- dP/dt = rP(1 - P/K)$$

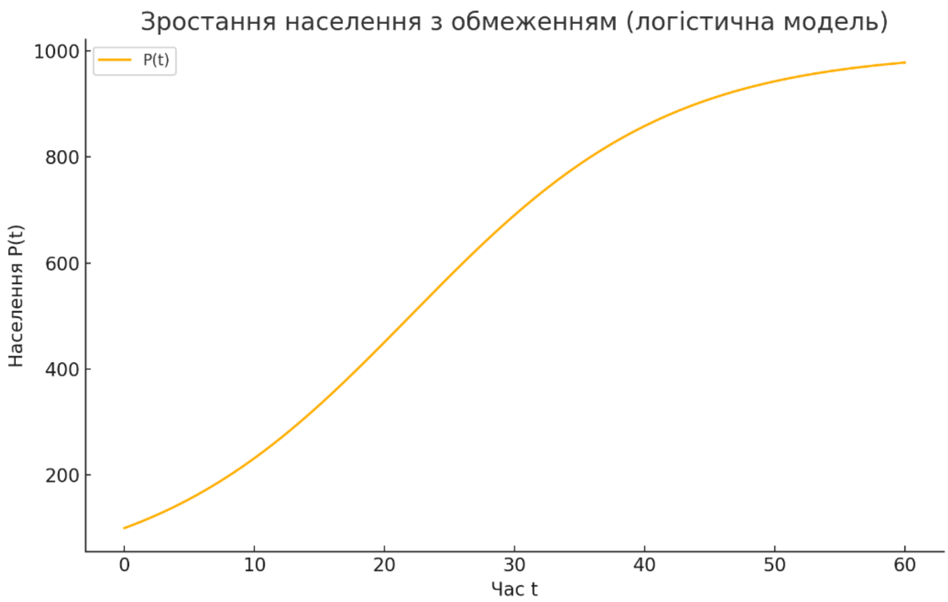
- Підстановка: $P = Kv \Rightarrow dP/dt = K\, dv/dt$
- Отримаємо: $dv/dt = rv(1 - v)$
- Розділимо змінні: $dv/(v(1 - v)) = r\, dt$
- Інтегруємо:

$$ln|v/(1 - v)| = rt + C \Rightarrow v = e\hat{}(rt + C)/(1 + e\hat{}(rt + C))$$

$$- P(t) = K * v(t)$$

- Розв'язок:

$$P(t) = 1000 * e\hat{}(0.1t + -2.20) \,/\, (1 + e\hat{}(0.1t + -2.20))$$



Інтерпретація графіка:

На початку популяція зростає швидко, але з наближенням до межі K зростання сповільнюється — S-подібна крива.

Завдання 5: Електричне коло з RLC-ланкою

Опис задачі: Струм у колі визначається законом Кірхгофа для змінного джерела.

Задані **константи**: $L = 1, R = 10, E0 = 5, \omega = 1$

Тип рівняння: Лінійне диференціальне рівняння з правою частиною

Метод розв'язку: Метод інтегруючого множника та інтегрування по частинах

Розв'язок:

$$\text{-}\ L\, dI/dt + RI = E0\, sin(\omega t)$$

- Знаходимо інтегруючий множник: $\mu(t) = e\verb|^|\{(R/L)t\}$

- Після множення: $d/dt\ (e\verb|^|\{(R/L)t\} \cdot I) = E0\, e\verb|^|\{(R/L)t\}\, sin(\omega t)$

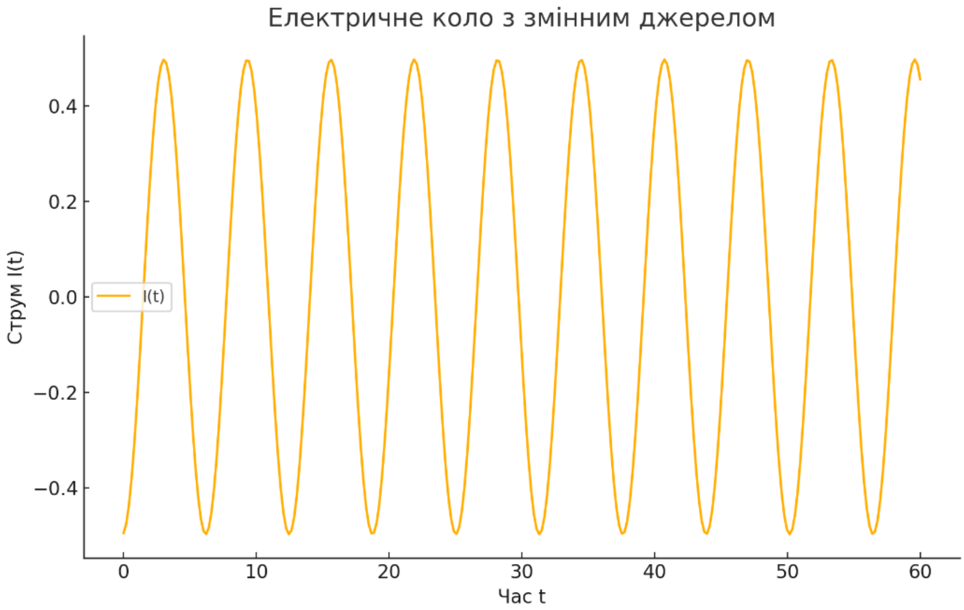
- Інтегруємо праву частину по частинах:

- $e^{\left\{\left(\frac{R}{L}\right)t\right\}\sin} \int \quad (\omega t)\, dt =$

$$= e^{\left\{\left(\frac{R}{L}\right)t\right\}} \cdot (\omega\, sin(\omega t) - (R/L)\, cos(\omega t)) \,/\, ((R/L)\verb|^|2 + \omega\verb|^|2)$$

- Отже:

$$I(t) = (E0\,(\omega\, sin(\omega t) - R/L\, cos(\omega t))) \,/\, (L((R/L)\verb|^|2 + \omega\verb|^|2)) + Ce\verb|^|(-(R/L)t)$$



Інтерпретація графіка:

Струм в колі змінюється гармонійно з демпфуванням, залежно від R та ω.

Завдання 6: Змішування розчинів у резервуарі

Опис задачі: Модель описує зміну концентрації в резервуарі при постійному притоку і відтоку розчину.

Задані **константи**: $r_{in} = 2, r_{out} = 1, C_{in} = 5, V = 100,$

$$C0 = 10$$

Тип рівняння: Лінійне рівняння з відокремленням змінних

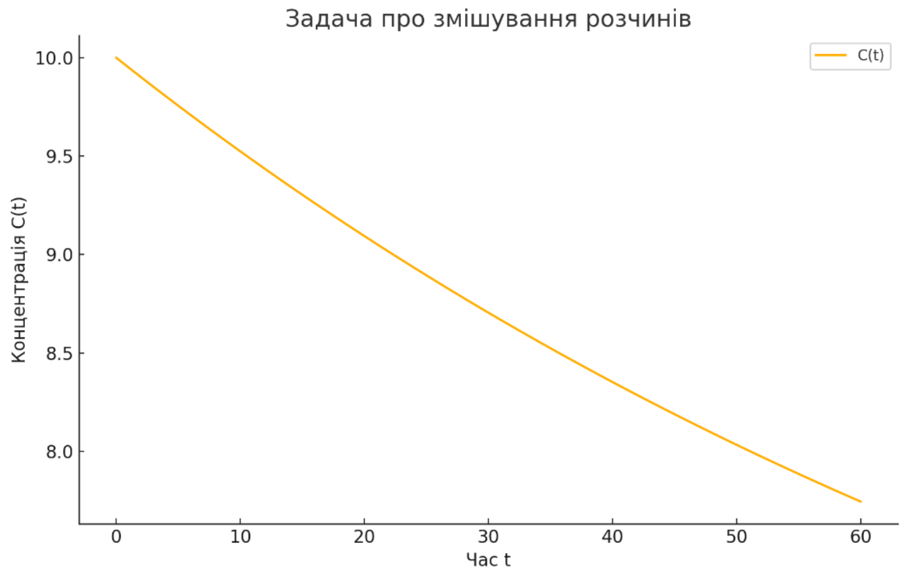
Метод розв'язку: Метод розділення змінних

Розв'язок:

$$- dC/dt = (r\_in \cdot C\_in - r\_out \cdot C) / V$$

- **Розв'язок**: $C(t) = C\_in - (C\_in - C0) \cdot e\hat{}(-(r\_in - r\_out)t / V)$

$$- C(t) = 5 - (5 - 10) \cdot e\hat{}(-(1/100)t)$$



Інтерпретація графіка:

Концентрація з часом прямує до вхідної концентрації C_in.

Завдання 7: Потенціальна енергія в механічній системі

Опис задачі: Знайти потенціальну енергію у полі сили, яке задається рівнянням повного диференціалу.

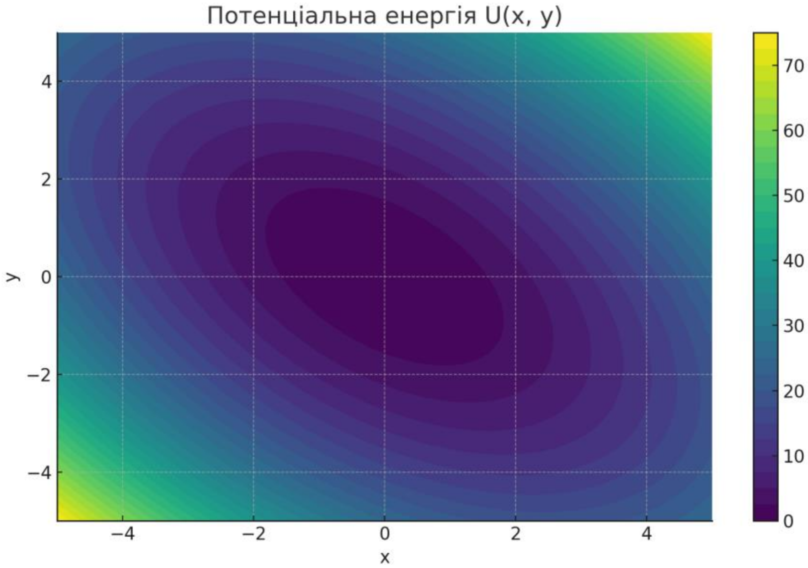
Задані **константи**: M(x,y) = 2x + y, N(x,y) = x + 2y

Тип рівняння: Повне диференціальне рівняння

Метод розв'язку: Знаходження потенціальної функції U(x, y) через інтегрування

Розв'язок:

- $\partial M/\partial y = 1$, $\partial N/\partial x = 1 \Rightarrow$ рівняння є повним диференціалом
- Інтегруємо M(x, y): $\int(2x + y)\,dx = x^2 + xy + h(y)$
- Знайдемо h'(y): $\partial U/\partial y = x + h'(y) = N(x, y) \Rightarrow h'(y) = 2y \Rightarrow h(y) = y^2$
- Отже: $U(x, y) = x^2 + xy + y^2$



Інтерпретація графіка:

Потенціальна енергія плавно зростає в напрямках зростання x та y. Енергетичні лінії відображають структуру поля.

Контрольні питання

1. Що таке диференціальне рівняння першого порядку? Наведіть загальний вигляд.
2. У чому полягає фізичний зміст диференціальних рівнянь першого порядку?
3. Як класифікуються диференціальні рівняння першого порядку за формою?
4. У чому суть методу відокремлення змінних? Для яких типів рівнянь він застосовується?
5. Як розв’язується лінійне диференціальне рівняння першого порядку?
6. Що таке інтегруючий множник? Як його знайти?
7. У чому полягає метод підстановки для однорідних рівнянь? Що таке підстановка y=uxy = uxy=ux?
8. Як перевірити, чи є рівняння рівнянням повного диференціалу?
9. Як знаходиться потенціальна функція для рівняння повного диференціалу?
10. Як розв’язуються рівняння, не розв’язані відносно похідної?

11. Наведіть приклад прикладної задачі, що розв’язується рівнянням з відокремлюваними змінними.
12. Опишіть математичну модель процесу охолодження згідно з законом Ньютона.
13. Як виглядає модель експоненційного зростання популяції? Яке рівняння її описує?
14. Що таке логістичне рівняння і як воно враховує обмеженість ресурсів?
15. Як моделюється радіоактивний розпад? Наведіть рівняння та його розв’язок.
16. Як формується модель електричного кола з джерелом змінної напруги?
17. Що таке задача про змішування рідини? Як формується рівняння для концентрації?
18. У чому різниця між повним диференціалом і неповним? Як обробляються останні?
19. Як знайти інтегруючий множник для неповного диференціального рівняння?
20. Для яких типів задач найбільш доцільно застосовувати чисельні методи?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бойчук І. І. Диференціальні рівняння : навч. посіб. Київ : Вища шк., 2005. 327 с.library.ukma.edu.ua+6Прво UA+6msu.edu.ua+6
2. Білецький В. С. Математичне моделювання : підручник. Донецьк : ДонНТУ, 2011. 284 с.
3. Капітонова Ю. В., Капітонов В. В. Диференціальні рівняння : навч. посіб. Київ : Центр учб. літ., 2010. 320 с.NURE Library+5Придунайська філія МАУП+5Grafiati+5
4. Кобилін О. А., Творошенко І. С. Методи цифрової обробки зображень : навч. посіб. Харків : ХНУРЕ, 2021. 124 с.NURE Library
5. Кучеренко Є. І., Кучеренко В. Є., Глушенкова І. С., Творошенко І. С. Методи, моделі та інформаційні технології оцінювання станів складних об'єктів : монографія. Харків, 2012. 276 с.Прво UA+2NURE Library+2msu.edu.ua+2
6. Ляшко І. І. Диференціальні рівняння : навч. посіб. Київ : Вища шк., 2004. 215 с.Придунайська філія МАУП+3Прво UA+3msu.edu.ua+3

7. Мельничук І. С. Диференціальні рівняння : навч. посіб. Київ : Кондор, 2012. 256 с.
8. Мороз І. С., Василенко Н. Ю. Маркетинг : конспект лекцій. Київ : Молодь, 2016. 102 с.msu.edu.ua+1msu.edu.ua+1
9. Петренко С. П. Математичне моделювання : навч. посіб. Київ : Либідь, 2009. 240 с.NURE Library+6Grafiati+6msu.edu.ua+6
10. Турута О. В. Правознавство : навч. посіб. Харків, 2016. 128 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки
до виконання лабораторних завдань
з навчальної дисципліни «Математичні методи моделювання та обробки даних»
для студентів денної та заочної форм навчання
за спеціальностями «122 Комп'ютерні науки», та
«113 Прикладна математика»

Укладач:
ВЯЗОВИЧЕНКО Юлія Андріївна
ПОТОПАЛЬСЬКА Ксенія Євгенівна

Відповідальний за випуск доц. Водка О.О.
Роботу до видання рекомендував доц. Федоров В.О.

В авторській редакції

План 2023 р., поз. 152
Підпісано до видання 24.10.2024
Гарнітура Times New Roman. Обсяг - 3,3 др. арк.

Електронна версія