

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Т.Л. Корніль, Л.С. Тимченко, Г.О. Голотайстрова

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ**

Навчально-методичний посібник

Харків
2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Т.Л. Корніль, Л.С. Тимченко, Г.О. Голотайстрова

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ**

Навчально-методичний посібник
для студентів економічних спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол №1 від 03.02.2016 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2017

УДК 519.21

ББК 22.17

К 67

Рецензенти:

С.Г. Удовенко, д-р техн. наук, проф., Харківський національний
університет радіоелектроніки;

Л.В. Курпа, д-р техн. наук, проф., Національний технічний універ-
ситет «Харківський політехнічний інститут».

Корніль Т.Л

К 67 Теорія ймовірностей у прикладах і задачах : навч.-метод.
посіб. / Корніль Т.Л., Тимчинко Л.С., Голотайстрова Г.О. – Х. :
НТУ «ХПІ», 2017. – 124 с.

ISBN

Посібник містить теоретичний довідковий матеріал, докладно розібрану велику кількість прикладів, задачі та набір типових завдань для виконання індивідуальних домашніх завдань, а також довідковий додаток та список рекомендованої літератури.

Призначено для студентів вищих навчальних закладів, а також може бути корисний для викладачів і фахівців економічних спеціальностей.

Табл.20. Іл. 9 Бібліогр. 11

УДК 519.21

ББК 22.17

ISBN 978-617-05-0231-5

© Т.Л. Корнель,
Л.С. Тимченко,
Г.О. Голотайстрова, 2017 р.

ВСТУП

Теорія ймовірностей – одна з найцікавіших наук, прикладний характер якої дає можливість застосовувати її до розв’язання задач фізики, економіки, природознавства та різноманітних технічних дисциплін. Теорія ймовірностей зародилася в XVI – XVII століттях зі спроб започаткувати теорію азартних ігор.

Із теорією ймовірностей тісно пов’язана математична статистика – розділ математики, в якому за допомогою математичних методів систематизують, опрацьовують і застосовують статистичні дані для наукових і практичних висновків.

Теорія ймовірностей та математична статистика, які дедалі ширше застосовуються в багатьох галузях науки і техніки, є важливими складовими фундаментальної фахової підготовки сучасних економістів.

Сучасний навчальний посібник охоплює всі розділи курсу «Теорія ймовірностей», передбачені навчальною програмою для економічних спеціальностей. Кожен розділ містить основні формули, необхідні для розв’язання задач, рекомендації та набір завдань для самостійної роботи. Коротко викладено теоретичний матеріал, який ілюструється великою кількістю докладно розібраних задач, розв’язання яких сприятиме створенню у студентів практичних навичок, розвитку теоретично-ймовірнісної інтуїції спеціаліста, вмінню будувати та аналізувати математичні моделі реальних процесів.

Посібник містить більше чотирьохсот задач і має на меті надати допомогу студентам у оволодінні методикою розв’язання задач з теорії ймовірностей. Велика кількість завдань для виконання РГЗ дасть можливість викладачам забезпечити кожного студента персональним завданням.

Висловлюємо подяку рецензентам, які зробили ряд корисних зауважень.

Теорія ймовірностей

Індивідуальні домашні завдання та зразки виконання

ЗАВДАННЯ 1

ДОВІДКА 1. Формули комбінаторики

Вибір із n елементів по k ($n > k$)		Вибір із n елементів по k ($n = k$)
Порядок неважливий	Порядок важливий	Порядок завжди важливий
сполучення	розміщення	перестановки
<i>Без повторення елементів</i>		
$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$P_n = n!$
<i>Елементи можуть повторюватися (може бути $n < k$)</i>		
$\tilde{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)! k!}$ $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$	$\tilde{A}_n^k = n^k$	$\tilde{P}_n = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$ (розбиття множини на m груп по k_i ($i = 1, 2, \dots, m$) елементів, де $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$)

Задачі цього завдання в більшості випадків можуть бути вирішені кількома способами, наприклад із застосуванням однієї з формул комбінаторики або із послідовних міркувань.

Також зверніть увагу на формулювання завдання. Якщо його можна уточнити, треба дати кілька відповідей.

Правило додавання. Якщо у реченні між підрахованою кількістю варіантів вибору елементів із різних множин можна поставити союз АБО, то загальна кількість варіантів визначається як СУМА.

Приклад 1. На одній полиці книжкової шафи розташовано тридцять різних книг, а на іншій – сорок різних книг (не такі, як на першій). Скількома способами можна обрати одну книгу?

Можливо взяти або одну книгу з тридцяти на першій полиці, АБО одну із сорока – на другій. Тому існує способів:

$$N = 30 + 40 = 70.$$

Правило добутку. Якщо у реченні між підрахованою кількістю варіантів вибору елементів із різних множин можна поставити союз І (ТА), то загальна кількість варіантів визначається як ДОБУТОК.

Приклад 2. Нехай існує три кандидата на пост командира і два – на пост інженера. Скількома способами можна сформувати екіпаж корабля, що складається з командира ТА інженера?

Необхідно вибрати одну людину з трьох ТА одну – з двох, тому способів існує:

$$N = 3 \cdot 2 = 6.$$

Для розв’язання таких задач треба уважно розглянути таблицю з **формулами комбінаторики**.

Приклад 3. У крамниці продаються зошити 5 кольорів. Скільки є способів купити 3 зошити?

Уточнимо, що є два варіанти купівлі зошитів: у першому всі зошити повинні бути різного кольору, а у другому – кілька з них можуть бути однакового кольору. Тому даємо два варіанти відповідей. Розгляньте таблицю і подумайте, чому для розв’язання обрано саме такі формули.

1) Якщо всі зошити різного кольору, скористаємося формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}.$$

Тут $n = 5$, $k = 3$ ($n > k$),

$$N = C_5^3 = \frac{5!}{2! 3!} = 10 \text{ способів.}$$

2) Якщо кілька з них можуть бути однакового кольору, обираємо формулу

$$\tilde{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!}.$$

Тут $n = 5, k = 3$ ($n > k$),

$$N = \tilde{C}_5^3 = \frac{7!}{4!3!} = 35 \text{ способів.}$$

Приклад 4. Скільки є способів скласти подарунковий набір з 12 цукерок, якщо у вашому розпорядженні є тільки 8 видів цукерок?

Очевидно, що в цьому випадку може бути лише вибір з повторюванням, тобто треба використати формулу

$$\tilde{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!}.$$

Тут $n = 8, k = 12$ ($n < k$),

$$N = \tilde{C}_8^{12} = \frac{19!}{7!12!} = 50\,388 \text{ способів.}$$

Приклад 5. У дівчинки є дві білих намистини, три синіх і одна червона. Скількома способами їх можна нанизати на нитку?

Порядок розташування елементів важливий, елементи повторюються. Використовуємо число перестановок з повторенням:

$$\tilde{P}_n = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!},$$

де $k_1 = 2; k_2 = 3; k_3 = 1$ и $n = 2 + 3 + 1 = 6$.

$$N = \tilde{P}_6 = \frac{6!}{2!3!1!} = \frac{720}{12} = 6.$$

Приклад 6. У групі 8 студенток та 7 студентів. Скількома способами їх можна розподілити для проведення лабораторних робіт на 3 підгрупи по 5 студентів?

1-й спосіб ■ По-перше, сформуємо першу підгрупу з 5 осіб, це можна зробити числом $C_{15}^5 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3\,003$.

Потім із решти останніх 10 студентів сформуємо другу під-

групу з 5 осіб, це можна зробити числом $C_{10}^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$ і останні 5 студентів утворять третю підгрупу, це буде $C_5^5 = 1$ спосіб. Усього за правилом добутку одержимо:
 $N = C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5 = 3\,003 \cdot 252 \cdot 1 = 756\,756$ способів.
 2-й спосіб ■ Скористуємося формулою розбиття множини на групи:

$$N = \tilde{P}_n = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!},$$

де кількість груп $m = 3$, кількість елементів у групах однакова: $k_1 = k_2 = k_3 = 5$. Одержимо той же самий результат:

$$N = \tilde{P}_{15} = \frac{15!}{5! 5! 5!} = 756\,756.$$

Приклад 7. Скільки різних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, якщо жодна з цифр не буде повторюватися?

1-й спосіб ■ Всього цифр чотири. Якби серед заданих цифр не було нуля, задача вирішувалася б таким чином:

$$P_n = n! = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Але на першому місці не може стояти нуль. Таких варіантів $3! = 6$ (0123, 0132, 0213, 0231, 0312, 0321). Тому кількість чисел:

$$N = 4! - 3! = 24 - 6 = 18.$$

2-й спосіб ■ Більшість задач з важливим порядком слідування елементів можна вирішити, міркуючи таким чином. По-перше, скористуємось **правилом добутку**, тому що між кількістю варіантів вибору цифр на кожній позиції числа треба ставити союз І (ТА). По-друге, визначимо, що на першій позиції може бути 3 варіанти (немає нуля), на другій теж 3 (один варіант вже використаний на першій позиції), на третій – 2 варіанти, на четвертій – 1 (цифри не повторюються).

$$N = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18.$$

Приклад 8. Скільки п'ятизначних телефонних номерів можна скласти, якщо перші дві цифри мають бути однаковими, але не можуть бути нулями?

Зауважимо, що за умовчанням у кодуванні беруть участь усі 10 цифр, а також, що порядок слідування цифр у телефонному номері, очевидно, важливий.

Уточнимо, що є два варіанти складання останніх трьох цифр номера: без повторення і з повторенням цифр. Тому даємо два варіанти відповідей.

1-й спосіб ■

1) Для перших двох цифр номера існує 9 варіантів вибору (немає нуля). Враховуючи зауваження і уточнення – цифри у номері не повторюються за виключенням перших двох, вибираємо з таблиці формулу $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, в яку вносимо $n = 9$, $k = 3$: $A_9^3 = 9!/6! = 504$ способи розмістити три різні цифри з 9 на трьох останніх позиціях номера. Вибирають з 9, а не з 10 цифр, тому що один варіант уходить для перших двох цифр номера. Далі за правилом добутку одержимо:

$$N = 9 \cdot 504 = 4\,536.$$

2) Якщо цифри в номері можуть повторюватись, то для перших двох цифр номера існує 9 варіантів вибору (немає нуля). Для розташування трьох останніх цифр обираємо формулу $\tilde{A}_n^k = n^k$, в яку вносимо $n = 10$, $k = 3$:

$$\tilde{A}_9^3 = 10^3 = 1\,000.$$

Далі за правилом добутку одержимо:

$$N = 9 \cdot 1\,000 = 9\,000.$$

2-й спосіб ■

1) Аналогічно прикладу 7. Для перших двох цифр номера існує 9 варіантів вибору (нема нуля). Враховуючи зауваження і уточнення – цифри у номері не повторюються за виключенням перших двох, маємо 9 варіантів на третій, 8 на четвертій, 7 на п'ятій позиції номера. Далі за правилом добутку одержимо:

$$N = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536.$$

2) Уточнимо, що цифри в номері можуть повторюватись. Для перших двох цифр номера існує 9 варіантів вибору (нема нуля). Для всіх інших позицій номера буде по 10 варіантів вибору цифр.

Далі за правилом добутку одержимо:

$$N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000.$$

Приклад 9. Людина забула дві останні цифри в шестизначному телефонному номері, пам'ятаючи тільки, що вони були різні і непарні. Скільки таких телефонних номерів може бути?

Непарних цифр усього п'ять: 1, 3, 5, 7, 9. Цифри в умові задачі не повторюються. Порядок розташування елементів важливий.

1-й спосіб ■ За формулою $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; $n = 5, k = 2$.

Тоді

$$N = \frac{5!}{3!} = 20.$$

2-й спосіб ■ За правилом добутку отримуємо:

$$N = 5 \cdot 4 = 20.$$

Приклад 10. У складі деякого пароля можна використовувати латинські букви (26), цифри і символ підкреслення в будь-якому порядку, можливе повторювання знаків. Пароль до реєстру нечутливий. Користувач склав пароль з чотирьох знаків. Скільки всіляких варіантів таких паролів може бути?

Загальна кількість знаків: $n = 26 + 10 + 1 = 37$. На кожній з чотирьох позицій пароля може стояти будь-який з тридцяти сімох знаків.

1 спосіб ■ За формулою $\tilde{A}_n^k = n^k$; $n = 37$, $k = 4$.

$$N = 37^4 = 1\,874\,161.$$

2 спосіб ■ За правилом добутку одержимо:

$$N = 37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 = 1\,874\,161.$$

Приклад 11. У лотереї потрібно закреслити будь які вісім чисел з сорока. Скількома способами це можна зробити?

Елементи не повторюються, порядок розташування елементів не важливий, $n = 40$, $k = 8$. Отримуємо:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}; \quad N = C_{40}^8 = \frac{40!}{32!8!} = 76\,904\,685.$$

Приклад 12. У ліфт дев'ятиповерхового будинку на першому поверсі зайшли чотири людини. Скільки різних варіантів їх виходу може бути? Різними вважаються варіанти, що відрізняються тільки кількістю людей, що виходять на даному поверсі.

Варіанти виходу з ліфта можуть бути різними, наприклад, на другому поверсі вийде одна людина, на четвертому – два, і один – на дев'ятому. Або всі четверо вийдуть на п'ятому поверсі. І так далі. Говорячи абстрактною мовою, чотири елементи розподіляються по восьми комірках не зважаючи на порядок, $n = 8$, $k = 4$.

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{11!}{4!7!} = 330.$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 1

Варіант 1.

- а) Для проведення вступних іспитів створюється комісія з трьох викладачів. Скільки різних комісій можна скласти з десяти викладачів кафедри?
- б) Код замка складається з чотирьох цифр. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть брати участь шість цифр?
- в) У квітковому магазині продають гвоздики п'яти різних кольорів. Скільки існує способів зібрати букет із семи гвоздик?

Варіант 2.

- а) У групі десять студенток і дванадцять студентів. Скільки існує способів розбити їх для проведення лабораторних робіт на підгрупи складом в сім, сім і вісім студентів?
- б) Код замка складається з трьох цифр. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть брати участь з повторенням сім цифр?
- в) Множина містить тридцять літер алфавіту. Скільки можливо скласти буквopolучень по шість літер із цієї множини, якщо літери не повинні повторюватися?

Варіант 3.

- а) Скільки існує шестизначних телефонних номерів, що починаються з чотирьох двійок?
- б) Для проведення вступних іспитів створюється комісія з п'яти викладачів. Скільки різних комісій можна скласти з десяти викладачів кафедри?
- в) У квітковому магазині продають гвоздики п'яти різних відтінків. Скільки існує способів зібрати букет з п'яти гвоздик?

Варіант 4.

- а) Код замка складається з літери і трьох цифр. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть брати участь шість цифр і чотири літери?
- б) Скільки існує способів розкласти в ряд чотири білих, три зелених, дві червоних і одну синю кулі?
- в) Скільки існує шестизначних телефонних номерів з трьома одна-

ковими першими цифрами, і останньою – трійкою?

Варіант 5.

а) Код замка складається з чотирьох цифр. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть брати участь сім цифр?

б) На кафедрі працюють п'ятнадцять викладачів. На час приймальних випробувань усі вони розподіляються по комісіях, склад яких три, п'ять і сім чоловік. Скільки існує способів формування таких комісій?

в) У квітковому магазині продають гвоздики чотирьох різних відтінків. Скільки існує способів зібрати букет з п'яти гвоздик?

Варіант 6.

а) У групі п'ять студенток і шість студентів. Скільки існує способів скласти з них чергу на медогляд, якщо поставлено умову: студенток пропустити першими.

б) У магазині продають п'ять різних видів зошитів. Скільки існує способів купити дев'ять зошитів?

в) Код замка складається з п'яти цифр. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть брати участь шість цифр?

Варіант 7.

а) На кафедрі працюють дванадцять викладачів. На час приймальних випробувань всі вони розподіляються по комісіях, склад яких три, чотири, і п'ять чоловік. Скільки існує способів формування таких комісій?

б) У квітковому магазині продають гвоздики чотирьох різних відтінків. Скільки існує способів зібрати букет з трьох гвоздик?

в) Скільки існує способів розкласти в ряд три білих, п'ять зелених, дві червоних і дві сині кульки?

Варіант 8.

а) На залік з плавання прийшли три студентки і шість студентів. Скільки існує способів скласти з них чергу на плавальну доріжку, якщо поставлено умову: студенток пропустити першими?

- б)** Код замка складається із шести цифр. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть брати участь усі цифри?
- в)** Скільки існує п'ятизначних телефонних номерів з трьома однаковими парними цифрами?

Варіант 9.

- а)** Множина містить двадцять п'ять літер алфавіту. Скільки буквосполучень можна скласти з п'яти літер цієї множини (літери не повторюються)?
- б)** Код замка складається з букви і трьох цифр. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть брати участь шість букв і шість цифр без повторення?
- в)** У магазині продають п'ять різних видів зошитів. Скільки існує способів купити сім зошитів?

Варіант 10.

- а)** Множина містить десять літер алфавіту. Скільки буквосполучень можна скласти з шести літер цієї множини, якщо допустити можливість повторного використання літер?
- б)** На кафедрі працюють двадцять викладачів. На час приймальних випробувань всі вони розподіляються по комісіям, склад яких три, чотири, шість і сім чоловік. Скільки існує способів формування таких комісій?
- в)** Скільки існує шестизначних телефонних номерів, останні три цифри яких дорівнюють одиниці, а перша цифра кратна трьом?

Варіант 11.

- а)** Множина містить вісім літер алфавіту. Скільки буквосполучень можна скласти з п'яти літер цієї множини, якщо допустити можливість повторного використання літер?
- б)** Маша посварилася з Петром і не хоче їхати з ним в одному автобусі. Від гуртожитку до інституту з сьомої до восьмої години відправляється п'ять автобусів. Скількома способами Маша і Петя можуть доїхати до інституту в різних автобусах?
- в)** У квітковому магазині продають гвоздики чотирьох різних кольорів. Скільки існує способів зібрати букет з п'яти гвоздик?

Варіант 12.

- а)** В інформаційному відділі банку працюють три аналітика, десять програмістів і дев'ять інженерів. Скільки існує способів виділити для понаднормової роботи у святковий день будь-яких двох співробітників?
- б)** Множина містить тридцять шість літер алфавіту. Скільки буквосполучень можна скласти з чотирьох літер цієї множини (літери не повинні повторюватися)?
- в)** Скільки існує п'ятизначних телефонних номерів з двома однаковими, кратними трьома, останніми цифрами?

Варіант 13.

- а)** Скількома різними способами можна вибрати три особи на три різні посади з десяти кандидатів?
- б)** У квітковому магазині продають гвоздики шести різних кольорів. Скільки існує способів зібрати букет з трьох гвоздик?
- в)** Скільки існує способів розкласти в ряд чотири білих, три зелених, три червоних і одну чорну кулі?

Варіант 14.

- а)** Скільки різних буквосполучень можливо скласти, переставляючи букви в слові «мама»? Записати їх усі.
- б)** Усього продається одинадцять сортів тістечок. Скількома способами можна вибрати з них шість штук?
- в)** Скількома різними способами можуть розміститися на лавочці 5 осіб?

Варіант 15.

- а)** У Тані є двадцять марок, у Наталі – десять. Скількома способами можна обміняти дві Таніні марки на одну Наталіну?
- б)** Скількома способами компанію з двадцяти чоловіків можна поділити на три групи, щоб у першу входило три людини, у другу – п'ять, у третю – дванадцять?
- в)** Скільки різних буквосполучень можна скласти, переставляючи літери в слові «ваза»?

Варіант 16.

- а)** Всього продається вісім сортів тістечок. Скількома способами можна вибрати з них п'ять?
- б)** Скільки різних перестановок літер можна зробити в слові: «крокодил»?
- в)** У Тані є двадцять марок, у Наталі – тридцять. Скількома способами можна обміняти дві Таніні марки на дві Наталіні?

Варіант 17.

- а)** Скількома способами компанію з двадцяти чоловіків можна поділити на три групи, щоб у першу входило три людини, у другу – вісім, у третю – дев'ять?
- б)** Вам треба подзвонити п'ятьом своїм друзям. Скільки є способів вибудувати послідовність цих дзвінків?
- в)** Скільки слів, які складаються з двох голосних і двох приголосних, можна створити зі слова «функція»?

Варіант 18.

- а)** Квіткарка продає троянди чотирьох різних сортів. Скільки різних букетів можна скласти з дюжини троянд?
- б)** Маша посварилася з Петром і не хоче їхати з ним в одному автобусі. Від гуртожитку до інституту з сьомої до дев'ятої години відправляється шість автобусів. Скількома способами Маша і Петя можуть доїхати до інституту в різних автобусах?
- в)** У відділенні банку працюють три аналітика, сім програмістів і шість інженерів. Скільки існує способів виділити для понаднормової роботи у святковий день будь-яких трьох співробітників?

Варіант 19.

- а)** Одна з двох воюючих сторін захопила у полон дванадцять солдатів, а інша – п'ятнадцять. Скількома способами сторони можуть обміняти сімох військовополонених?
- б)** Код замка складається з букви і п'яти цифр. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть брати участь три цифри і чотири літери?

в) Скільки існує способів розкласти в ряд чотири зелених, три білих, п'ять синіх і одну червону кулі?

Варіант 20.

а) Скільки існує шестизначних телефонних номерів з першими трьома однаковими цифрами, і останньою – кратною п'яти?

б) У групі сім студенток і два студента. Скільки існує способів скласти з них чергу на медогляд, якщо поставлено умову: студенток пропустити першими?

в) У магазині продають шість різних видів зошитів. Скільки існує способів купити п'ять зошитів?

Варіант 21.

а) Код замка складається з п'яти цифр. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть брати участь шість цифр?

б) На залік з плавання прийшли чотири студентки і сім студентів. Скільки існує способів скласти з них чергу на плавальну доріжку, якщо поставлено умову: студенток пропустити першими?

в) У хокейному турнірі беруть участь шість команд. Кожна команда повинна зіграти з командою противника одну гру. Скільки ігор буде зіграно в турнірі?

Варіант 22.

а) Знайти кількість перестановок, утворених з усіх цифр числа «2333444455».

б) Множина містить тридцять літер алфавіту. Скільки буквосполучень можна скласти з п'яти літер цієї множини (літери не повторюються)?

в) Код замка складається з букви і трьох цифр. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть брати участь шість букв і шість цифр без повторення?

Варіант 23.

а) Скільки існує шестизначних телефонних номерів, останні чотири цифри яких вісімки?

б) У Тані є двадцять марок, у Наталі – десять. Скількома способами можна обміняти одну Таніну марку на дві Наталініх?

в) Скількома способами компанію з двадцяти чоловіків можна поділити на три групи, щоб у першу входило три людини, у другу – сім, у третю – десять?

Варіант 24.

а) Скільки різних буквосполучень можна скласти, переставляючи літери в слові «коло»?

б) У бібліотеці є шість підручників геометрії, сім підручників тригонометрії, чотири підручники алгебри. Скільки всього існує різних способів комплектування підручників з різних дисциплін, якщо всі екземпляри підручників вважати різними?

в) У кондитерській є сім видів тістечок. Скільки існує способів замовити два тістечка різних видів?

Варіант 25.

а) Скількома способами можна розташувати в один ряд шість червоних, шість чорних і шість білих м'ячів так, щоб м'ячі, що лежать на краях, були одного кольору?

б) В кондитерській є сім видів тістечок. Скільки існує способів замовити чотири тістечка?

в) Множина містить десять літер алфавіту. Скільки можна скласти буквосполучень з п'яти літер цієї множини, якщо можливо повторне використання літер?

Варіант 26.

а) На кафедрі працюють десять викладачів. На час приймальних іспитів усі вони розподіляються по комісіях, склад яких три, два, чотири і один чоловік. Скільки існує способів формування таких комісій?

б) Скільки існує шестизначних телефонних номерів, останні чотири цифри яких дорівнюють шість або вісім?

в) Множина містить десять букв алфавіту. Скільки можна скласти буквосполучень з чотирьох літер цієї множини, якщо не можна повторно використовувати літери?

Варіант 27.

- а) Маша посварилася з Петром і не хоче їхати з ним в одному автобусі. Від гуртожитку до інституту з шостої до восьмої години відправляється десять автобусів. Скількома способами Маша і Петя можуть дійхати до інституту в різних автобусах?
- б) У квітковому магазині продають гвоздики восьми різних відтінків. Скільки існує способів зібрати букет з п'яти гвоздик?
- в) У відділі банку працюють три аналітика, шість програмістів і одинадцять інженерів. Скільки існує способів виділити для понаднормової роботи у святковий день трьох будь-яких співробітників?

Варіант 28.

- а) Множина містить двадцять літер алфавіту. Скільки буквосполучень можна скласти з чотирьох літер цієї множини (літери не повинні повторюватися)?
- б) Скільки існує п'ятизначних телефонних номерів з трьома однаковими непарними останніми цифрами?
- в) У групі тридцять студентів. Скількома способами можна розбити групу на три підгрупи по десять, одинадцять і дев'ять чоловік відповідно?

Варіант 29.

- а) Скільки різних перестановок літер можна зробити в слові «замок»?
- б) Скільки існує чотиризначних номерів (можливо, що починаються з нуля)?
- в) Скількома способами можна розбити групу з двадцяти п'яти студентів на три підгрупи по шість, дев'ять і десять осіб?

Варіант 30.

- а) Два листоноші повинні рознести десять листів по десяти різним адресам. Скількома способами вони можуть розподілити роботу?
- б) Скількома способами можна вибрати з семи видів ручок чотири?
- в) Множина містить тридцять літер алфавіту. Скільки буквосполучень можна скласти з шість літер цієї множини (літери не повинні повторюватися)?

ЗАВДАННЯ 2

ДОВІДКА 2. Класичне означення ймовірності випадкової події

Випробування – реальний або мислений експеримент (виконаний за певної незмінної сукупності умов), результати якого піддаються спостереженню.

Подія – результат випробування.

Якщо в результаті випробування деяка подія неодмінно відбудеться, то вона називається **достовірною** і позначається літерою U . Подія, яка в даному випробуванні не може відбутись, називається **неможливою** і позначається літерою V .

Якщо в результаті випробування деяка подія може відбутись, а може не відбутись, то вона називається **випадковою**. Випадкові події позначаються літерами $A, B, C, D, \dots$

Випадкові події, які не можна розкласти на простіші, називаються **елементарними**. Можлива елементарна подія – це кожний із можливих результатів окремого випробування.

Простір елементарних подій – множина можливих елементарних подій, кожною з яких може закінчитись випробування. Якщо позначимо $\omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$ можливі елементарні події, то простір цих подій можна записати у вигляді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Простір Ω може містити скінченну, зліченну або незліченну множину значень.

Випадковій події A , яка може відбутись у результаті випробування, можна поставити у відповідність деяку множину елементарних подій, що сприяють появі цієї події: $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$, яка є підмножиною Ω .

Означення ймовірності.

Ймовірністю події A називається числова міра об'єктивної можливості настання цієї події у певному випробуванні.

Позначається така ймовірність $P(A)$.

Властивості ймовірності.

1. Ймовірність достовірної події $P(U) = 1$.
2. Ймовірність неможливої події $P(V) = 0$.

3. Ймовірність будь-якої випадкової події $0 < P(A) < 1$.

Класичне означення ймовірності.

Ймовірністю випадкової події A називається відношення кількості елементарних подій m , які сприяють появі цієї події (становлять множину її елементарних подій), до загальної кількості n рівноможливих елементарних подій, що утворюють простір елементарних подій Ω :

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Щоб обчислити ймовірність події A за цією формулою, потрібно знайти кількість елементарних подій у просторі Ω , а також кількість їх у множині, яка відповідає події A . Для цього часто (але не завжди) застосовують **формули комбінаторики**.

Приклад 13. Лотерея містить 1 000 білетів, із них: на один випадає виграш 500 грн., на 10 білетів – по 100 грн., на 20 білетів – по 50 грн., на 50 білетів – по 20 грн., останні білети не виграшні. Чому дорівнює ймовірність того, що навімання куплений білет виграє не менше 50 грн.?

Подія A – куплений білет принесе виграш не менше, ніж 50 гривень. За класичним визначенням ймовірності випадкової події $P(A) = m/n$, де n – загальна кількість білетів, а m – кількість білетів, які сприяють події A , тобто дають виграш не менше 50 гривень, тому маємо: $n = 1\,000$; $m = 1 + 10 + 20 = 31$;

$$P(A) = \frac{31}{1\,000} = 0,031.$$

Приклад 14. В урні лежать дві білих, чотири чорних і одна червона куля. Виймається одна куля навімання. Яка ймовірність того, що вийнята куля буде чорною?

Подія A – навімання вийнята чорна куля. Загальна кількість куль або варіантів $n = 2 + 4 + 1 = 7$. Сприяють події A 4

варіанти – чотири чорні кулі. Тому ймовірність події A дорівнює:

$$P(A) = \frac{4}{7}.$$

Приклад 15. Обчислити ймовірність випадання в сумі десяти очок при киданні пари гральних костей.

Загальну кількість рівноможливих варіантів випадання очок на двох костях можна підрахувати за правилом добутку: 6 варіантів на першій кості і 6 – на другій, тому $n = 6 \cdot 6 = 36$. Випадання в сумі десяти очок (подія A) можливе в трьох випадках: 4 очки на першій кості і 6 – на другій; 5 очок на першій і 5 – на другий; 6 очок на першій і 4 – на другій. Тому ймовірність події A (випадання в сумі десяти очок) дорівнює:

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Приклад 16. Яка ймовірність отримати прапор України, розфарбовуючи тканину смугами в два кольори, якщо є фарби п'яти кольорів: жовтого, зеленого, червоного, білого, блакитного.

Тут порядок фарб важливий, тому існує $A_5^2 = 5!/3! = 20$ способів скласти двоколірний смугастий прапор ($n = 20$). І тільки один з них буде прапором України ($m = 1$). Тому

$$P(A) = \frac{1}{20}.$$

Приклад 17. Усі натуральні числа від 1 до 30 записані на однакових картках і поміщені в урну. Після ретельного перемішування карток з урни витягується одна картка. Яка ймовірність того, що число на взятій картці буде кратним п'яти?

Позначимо через A подію – число на взятій картці кратне 5. У даному випробуванні є 30 рівноможливих елементарних результатів, з яких події A сприяють 6 випадків (числа 5, 10, 15, 20, 25, 30). Отже:

$$P(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Приклад 18. З літер слова «математика» навмання обирається одна літера. Яка ймовірність того, що ця літера буде: а) голосною; б) літерою «а»?

У слові «математика» 10 букв, з них 5 голосних і 5 приголосних. Позначимо події: A – голосна літера, B – літера «а». Число сприятливих елементарних фіналів: $m_1 = 5$ – для події A , $m_2 = 3$ – для події B . Оскільки $n = 10$, то:

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{3}{10}.$$

Приклад 19. Секретний кодовий замок містить п'ять різних цифр. При правильному їх наборі замок відкривається. Яка ймовірність відкрити замок з першої спроби?

Подія A – замок відкритий з першої спроби. Експеримент полягає у виборі п'яти необхідних цифр з десяти в певному порядку. Число випадків, які сприяють події A дорівнює одному ($m = 1$). Визначимо загальну кількість усіх можливих варіантів кодів n (елементарних результатів).

1-й спосіб ■ За формулою $A_N^k = N!/(N - k)!$; $N = 10$, $k = 5$.

$$n = \frac{10!}{5!} = 30\,240.$$

2-й спосіб ■ При наборі цифрового коду необхідно вибрати п'ять різних цифр з десяти, при цьому важливий порядок набору цифр і цифри не повторюються, за правилом добутку отримуємо:

$$n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 30\,240.$$

$$P(A) = 1/30\,240 \sim 3,3 \cdot 10^{-5}.$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 2

Варіант 1.

- а) Кидаються дві гральні кості одночасно. Яка ймовірність того, що сума очок дорівнюватиме дев'яти?
- б) Числа 1, 2, 3, 4, 5 написані на п'яти картках. Навмання послідовно вибираються три картки і розташовуються в порядку появи зліва направо. Знайти ймовірність того, що отримане при цьому трьохзначне число буде парним.
- в) Кожна з літер Т, М, Р, О, Ш написана на одній з п'яти карток розрізної абетки. Яка ймовірність того, що дитина, яка не вміє читати, складаючи картки в ряд, складе з них слово «ШТОРМ»?

Варіант 2.

- а) Пристрій секретного замка включає в собі чотири комірки. У першій комірці здійснюється набір однієї з чотирьох букв А, В, С, D, в трьох інших – однієї з десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифри можуть повторюватися). Чому дорівнює ймовірність того, що замок буде відкритий з першої спроби?
- б) Набираючи номер телефону, абонент забув останні 3 цифри, і пам'ятаючи лише, що всі вони різні, набрав їх навмання. Яка ймовірність того, що він набрав потрібний номер телефону?
- в) На столі лежать перемішані тридцять шість екзаменаційних білетів з номерами 1, 2,..., 36. Викладач навмання бере три квитки. Яка ймовірність того, що всі вони будуть з першого десятка?

Варіант 3.

- а) Яка ймовірність того, що у вибраному навмання двозначному числі цифри однакові?
- б) У лотереї тисяча квитків. На один з них припадає виграш 500, на десять квитків – 100, на двадцять – по 50, і на п'ятдесят – по 20 гривень, решта квитків – не виграшні. Яка ймовірність виграти не менше двадцяти гривень, купивши один квиток?
- в) На картках написані цифри 1, 2, 3, 4, 5. Навмання дістають дві картки. Яка ймовірність того, що сума цифр на них буде парною?

Варіант 4.

- а)** Кидаються дві гральні кості одночасно. Яка ймовірність того, що сума очок дорівнюватиме вісім?
- б)** З літер розрізної абетки, що складають слово «ротор», навмання послідовно витягуються три літери і складаються в ряд. Яка ймовірність того, що вийде слово «тор»?
- в)** У першому ящику знаходяться кулі з номерами 1, 2, 3, 4, 5, а в другому – з номерами 6, 7, 8, 9, 10. З кожного ящика виймають по одній кулі. Яка ймовірність того, що сума номерів вийнятих куль дорівнюватиме 11?

Варіант 5.

- а)** Замок містить на загальній осі чотири диски, кожен з яких розділений на шість секторів з різними нанесеними на них літерами. Визначити ймовірність того, що замок відкриється, якщо встановлена випадкова комбінація букв.
- б)** П'ять студентів випадковим чином сідають за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що студенти А і В сидітимуть поруч.
- в)** Кинуті три монети. Знайти ймовірність того, що випадуть 2 герби.

Варіант 6.

- а)** Маємо відрізки довжиною 2, 5, 6 і 10 одиниць. Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків можна скласти трикутник? Вказівка: з трьох відрізків можна скласти трикутник, якщо довжина більшого з них менша за суму двох останніх.
- б)** Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 написані на картках. Навмання послідовно вибираються дві картки і розташовуються в порядку появи. Знайти ймовірність того, що друге число буде більше першого.
- в)** Кинуті 2 гральні кості. Яка ймовірність випадання в сумі 5 очок?

Варіант 7.

- а)** У кишені лежать 7 монет вартістю 10 коп. та 3 монети вартістю 2 коп. Навмання виймається одна монета, а потім друга, яка виявилась монетою 10 коп. Визначити ймовірність того, що і перша монета була вартістю 10 коп.

- б)** Десять книжок розставляються навмання на одній полиці. Визначити ймовірність того, що три певні книжки стоятимуть поруч.
- в)** Кинуті дві гральні кості. Яка ймовірність випадання в сумі шістьох очок?

Варіант 8.

- а)** Знайти ймовірність того, що з шістьох книг, розташованих на полиці у випадковому порядку, три певні книги виявляться поруч.
- б)** Код домофону складається з чотирьох цифр. Знайти ймовірність того, що, випадково набираючи цифри, можна вгадати код, якщо цифри можуть повторюватися.
- в)** Кинута дві гральні кості. Яка ймовірність випадання в сумі сімох очок?

Варіант 9.

- а)** На дев'яти однакових картках написано по одній цифрі – від 1 до 9. Навмання беруться чотири картки і розташовуються в рядок. Знайти ймовірність того, що отримане число ділиться на 25.
- б)** Хтось написав на листку чотиризначне число і запропонував відгадати його. Яка ймовірність вгадування числа з першої спроби?
- в)** Кинута дві гральні кості. Яка ймовірність випадання в сумі 9 очок?

Варіант 10.

- а)** На восьми однакових картках написані числа 2, 4, 6, 8, 9, 11, 12 і 13. Навмання беруть дві картки. Визначити ймовірність того, що дріб, утворену з вибраних чисел, можна скоротити.
- б)** Залізничний поїзд з дев'яти вагонів і вагона-ресторану формується довільним чином. Яка ймовірність того, що вагон №7 і вагон-ресторан розташовані поруч?
- в)** Кинуті дві гральні кості. Яка ймовірність випадання в сумі десяти очок?

Варіант 11.

- а)** 3 групи в двадцять п'ять студентів навмання викликають трьох. Визначити ймовірність того, що будуть викликані студенти Петров, Іванов і Сидоров у даному порядку.

б) На дев'яти однакових картках написано по одній цифрі – від 1 до 9 (всі різні). Навмання беруться чотири картки і розташовуються в рядок. Знайти ймовірність того, що отримане число кратне 5.

в) Кинуто 2 гральні кості. Яка ймовірність випадання в сумі 3 очок?

Варіант 12.

а) Код домофону складається з п'яти цифр. Знайти ймовірність того, що, випадково набираючи цифри, можна вгадати код, якщо цифри не повторюються.

б) На дев'яти однакових картках написано по одній цифрі – від 1 до 9 (всі різні). Навмання беруться дві картки і розташовуються в ряд. Знайти ймовірність того, що отримане число кратне 5.

в) Кинуто дві гральні кості. Яка ймовірність випадання в сумі одинадцяти очок?

Варіант 13.

а) Один раз кидається гральна кістка. Знайти ймовірність випадання числа очок, кратного трьом.

б) У наявності є 5 білетів вартістю в одну гривню, 3 білети по 3 гривні і 2 білети по п'ять гривень. Навмання беруть три білети. Визначити ймовірність того, що всі три білети коштують 7 гривень.

в) З чотирьох карток з буквами Р, І, І, К навмання вибирають три і складають в ряд у порядку появи. Яка ймовірність того, що вийде слово «РІК»?

Варіант 14.

а) У лотереї тисяча квитків. На один з них випадає виграш п'ятсот, на десять квитків – по сто, на двадцять квитків – по п'ятдесят, і на п'ятдесят квитків – по двадцять гривень, решта квитків – не виграшні. Яка ймовірність виграти не менше п'ятдесяти гривень, купивши один квиток?

б) Хлопчик народився в березні. Яка ймовірність того, що він народився ще до жіночого дня?

в) З шести карток з буквами А, Б, В, Г, Д, О навмання вибирають чотири і складають в ряд у порядку появи. Яка ймовірність того,

що вийде слово «ВОДА»?

Варіант 15.

а) На картках написані цифри 1, 2, 3, 4, 5. Навмання дістають дві картки. Яка ймовірність того, що сума цифр на них буде дорівнюватися шість?

б) З семи карток з літерами А, Б, В, Г, Д, І, Ж навмання вибирають три і розташовують у порядку появи. Яка ймовірність того, що вийде слово «БІГ»?

в) Яка ймовірність того, що в створеній біля банкомата черзі з 10 студентів студенти Іванов і Петров виявляться поруч?

Варіант 16.

а) Числа 1, 2, 3, 4, 5 написані на п'яти картках. Навмання послідовно вибираються три картки і розташовуються в порядку появи зліва направо. Знайти ймовірність того, що отримане при цьому трьохзначне число буде кратне п'яти.

б) На столі лежать перемішані тридцять шість екзаменаційних білетів з номерами 1, 2,..., 36. Викладач навмання бере три квитки. Яка ймовірність того, що всі вони будуть з другого десятка?

в) З п'ятих карток з літерами А, Т, В, А, К випадково вибирають три і розташовують в ряд у порядку появи. Яка ймовірність того, що вийде слово «КАТ»?

Варіант 17.

а) З семи карток з літерами А, Б, В, Г, Д, Е, І випадковим чином вибирають чотири і розташовують в ряд у порядку появи. Яка ймовірність того, що вийде слово «ДІВА»?

б) Маємо відрізки довжиною 1, 3, 5, 7 і 9 одиниць. Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків можна скласти трикутник? Вказівка: з трьох відрізків можна скласти трикутник, якщо довжина більшого з них менша за суму двох останніх.

в) З шістдесяти питань, що входять в екзаменаційні білети, студент підготував п'ятдесят. Яка ймовірність того, що взятий навмання студентом квиток, який містить два питання, буде складатися з підготовлених ним питань?

Варіант 18.

- а) Телефонний номер складається з шісти цифр. Хтось забув номер телефону, але пам'ятає, що він складається з непарних цифр. Яка ймовірність того, що номер буде вгаданий з першої спроби?
- б) З повного набору костей доміно (28 костей) навмання обрана одна. Яка ймовірність того, що сума очок на ній дорівнює 5?
- в) Маємо відрізки довжиною 2, 5, 6 і 10 одиниць. Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків можна скласти трикутник? Вказівка: з трьох відрізків можна скласти трикутник, якщо довжина більшого з них менша за суму двох останніх.

Варіант 19.

- а) Числа 1, 2, ..., 20 написані на картках. Картки ретельно перемішуються, а потім витягають дві з них. Яка ймовірність того, що сума чисел на вийнятих картках дорівнюватиме тридцяти?
- б) Продавець квітів виставив на продаж п'ятнадцять білих і десять червоних троянд. Хтось просить підібрати йому букет з семи троянд. Яка ймовірність того, що в букеті будуть тільки білі троянди?
- в) У черзі за стипендією біля банкомата стоять 7 студентів. Яка ймовірність того, що студент А і студент В стоять поруч?

Варіант 20.

- а) З колоди в 36 карт навмання витягується одна. Знайти ймовірність того, що вона має пікову масть.
- б) Знайти ймовірність того, що учасник лотереї «Спортлото 6 з 49», що купив один квиток, вгадає правильно шість номерів.
- в) Задумано двозначне число, цифри якого різні. Знайти ймовірність того, що квадрат задуманого числа закінчується на одиницю.

Варіант 21.

- а) Набираючи номер телефону, абонент забув останні три цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні та жодна з них не дорівнює трьом, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що абонент додзвониться з першого разу.

б) Маємо відрізки довжиною 1, 3, 5, 7 і 9 одиниць. Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків можна скласти трикутник? Вказівка: з трьох відрізків можна скласти трикутник, якщо довжина більшого з них менша за суму двох останніх.

в) З шести карток з буквами А, Б, В, Р, Д, У випадковим чином вибирають чотири і кладуть в ряд у порядку появи. Яка ймовірність того, що вийде слово «РУДА»?

Варіант 22.

а) У черзі за стипендією біля банкомата стоять 10 студентів. Яка ймовірність того, що студент А і студент В стоять поруч?

б) На столі лежать перемішані тридцять екзаменаційних білетів з номерами 1, 2, ..., 30. Викладач навмання бере три квитки. Яка ймовірність того, що всі вони будуть з третього десятка?

в) Пристрій секретного замка включає в собі чотири комірки. У першій комірці здійснюється набір однієї з чотирьох букв А, В, С, Д, в трьох інших – однієї з десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифри можуть повторюватися). Чому дорівнює ймовірність того, що замок буде відкритий з першої спроби?

Варіант 23.

а) На картках написані цифри 1, 2, 3, 4, 5. Навмання дістають дві картки. Яка ймовірність, що сума цифр на них більша за 5?

б) З семи карток з буквами А, Б, В, Г, Д, Е, І випадковим чином вибирають три і розташовують у порядку появи. Яка ймовірність того, що вийде слово «БІГ»?

в) На семи однакових картках написані числа 2, 4, 6, 8, 11, 12 і 13. Навмання беруть дві картки. Визначити ймовірність того, що дріб, утворену з вибраних чисел, можна скоротити.

Варіант 24.

а) Залізничний поїзд з дев'яти вагонів і вагона-ресторану формується довільним чином. Яка ймовірність того, що вагон №5 і вагон-ресторан розташовані поруч?

б) Продавець квітів виставив на продаж п'ятнадцять білих і десять червоних троянд. Хтось просить підібрати йому букет з семи тро-

янд. Яка ймовірність того, що в букеті будуть тільки білі троянди?

в) У черзі за стипендією біля банкомата стоять 7 студентів. Яка ймовірність того, що студент А і студент В стоятимуть поруч?

Варіант 25.

а) Яка ймовірність, що навімання взате трьохзначне число буде кратним п'яти?

б) На семи однакових картках написані числа 2, 4, 6, 8, 11, 12 і 13. Навмання беруть дві картки. Визначити ймовірність того, що дріб, утворену з вибраних чисел, можна скоротити.

в) Знайти ймовірність того, що з п'яти книг, розташованих на полиці у випадковому порядку, три певні книги виявляться поруч.

Варіант 26.

а) Набираючи номер телефону, абонент забув останні три цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навімання. Знайти ймовірність того, що абонент додзвониться з першого разу.

б) Навмання обрано натуральне число, що не перевищує 20. Яка ймовірність того, що воно кратне 5?

в) Код домофона складається з чотирьох цифр. Знайти ймовірність того, що, випадково набираючи цифри, можна вгадати код, якщо цифри можуть повторюватися.

Варіант 27.

а) Числа 1, 2, ..., 20 написані на картках. Картки ретельно перемішуються, а потім витягають дві з них. Яка ймовірність того, що сума чисел на вийнятих картках дорівнюватиме десяти?

б) З дев'яти карток з буквами А, Б, В, Г, Д, Е, В, З, А випадковим чином вибирають чотири і розташовують у порядку появи. Яка ймовірність того, що вийде слово «ВАЗА»?

в) У лотереї тисяча квитків. На один з них падає виграш двісті, на десять квитків – по сто, на десять квитків – по п'ятдесят, і на п'ятдесят квитків – по двадцять гривень, решта квитків – не виграшні. Яка ймовірність виграти не менше ста гривень, купивши один квиток?

Варіант 28.

а) У першому ящику знаходяться кулі з номерами 1, 2, 3, 4, 5, а в другому – з номерами 6, 7, 8, 9, 10. З кожного ящика виймається по одній кулі. Яка ймовірність того, що сума номерів вийнятих куль дорівнюватиме десяти?

б) Замок містить на загальній осі чотири диски, кожен з яких розділений на три сектори з різними нанесеними на них літерами. Визначити ймовірність відкриття замка з першого разу, якщо встановлена довільна комбінація букв.

в) Маємо відрізки довжиною 2, 5, 6 і 10 одиниць. Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків можна скласти трикутник? Вказівка: з трьох відрізків можна скласти трикутник, якщо довжина більшого з них менша за суму двох останніх.

Варіант 29.

а) З повного набору костей доміно (28 костей) навмання вибрана одна. Яка ймовірність того, що сума очок на ній дорівнює 10?

б) Продавець квітів виставив на продаж п'ятнадцять білих і десяти червоних троянд. Хтось просить підібрати йому букет з шість троянд. Яка ймовірність того, що в букеті будуть тільки червоні троянди?

в) Кожна з літер І, Д, З, Н, В написана на одній з п'яти карток різної абетки. Яка ймовірність того, що дитина, яка не вміє читати, складаючи кубики в ряд, складе з них слово «ДЗВІН»?

Варіант 30.

а) Числа 1, 2, 3, 4, 5 написані на п'яти картках. Навмання послідовно вибираються три картки і розташовуються в порядку появи зліва направо. Знайти ймовірність того, що отримане при цьому трьохзначне число буде непарним.

б) На столі лежать перемішані двадцять екзаменаційних білетів з номерами 1, 2,..., 20. Викладач навмання бере три квитки. Яка ймовірність того, що всі вони будуть з першого десятка?

в) З повного набору костей доміно (28 костей) навмання вибрана одна. Яка ймовірність того, що сума очок на ній дорівнює 9?

ЗАВДАННЯ 3

ДОВІДКА 3. Класичне означення ймовірності випадкової події

Нехай у множині з N елементів виділяється підмножина з M елементів, що мають якусь відзнаку. Інакше кажучи, є M елементів з відзнакою і $N - M$ елементів без відзнаки. Треба знайти ймовірність події A – з відібраних k елементів s елементів мають відзнаку.

Число всіх елементарних подій n – це число способів, якими можна вибрати k елементів із множини, що містить N елементів, воно дорівнює $n = C_N^k$, якщо порядок слідування елементів неважливий і немає повторень. Число елементарних подій, що сприяють події A , згідно з правилом добутку комбінаторики, буде $m = C_M^s \cdot C_{N-M}^{k-s}$. Тоді

$$P(A) = \frac{C_M^s \cdot C_{N-M}^{k-s}}{C_N^k}.$$

Приклад 20. До складу привезли партію із 40 виробів, серед яких 5 бракованих. Контролер навімання перевіряє 10 виробів. Чому дорівнює ймовірність того, що серед них буде 2 браковані?

Користуємось класичним визначенням ймовірності події:

$$P(A) = \frac{m}{n};$$

$$n = C_{40}^{10} = \frac{40!}{30! \cdot 10!};$$

$$m = C_5^2 \cdot C_{35}^8;$$

$$P(A) = \frac{C_5^2 \cdot C_{35}^8}{C_{40}^{10}} = \frac{5! \cdot 35! \cdot 10! \cdot 30!}{40! \cdot 2! \cdot 8! \cdot 3! \cdot 27!} \cong 0,28.$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 3

Варіант 1. У ящику лежать 15 деталей, серед яких 6 бракованих. Контролер навання виймає 6 деталей. Чому дорівнює ймовірність того, що серед них 4– браковані?

Варіант 2. На склад прибула партія із 50 виробів, серед яких 8 бракованих. Контролер навання перевіряє 10 виробів. Яка ймовірність того, що серед них 5 – браковані?

Варіант 3. У групі 20 студентів, серед яких 12 контрактників. Навання вибрано 12 студентів. Яка ймовірність того, що 4 з них – контрактники?

Варіант 4. В фірмі працюють 7 жінок та 8 чоловіків. У відрядженні знаходяться 5 робітників. Яка ймовірність того, що 3 з них – жінки?

Варіант 5. На базу доставлено 25 на вигляд однакових станків. Із них 15 – виробництва Польщі та 10 – Туреччини. Навання відібрано 5 станків. Яка ймовірність того, що серед них буде 3 станки виробництва Польщі та 2 – виробництва Туреччини?

Варіант 6. На полиці розставлено 12 книжок, із яких 5 неправильно зброшуровані. Навання взяті 3 книги. Обчислити ймовірність того, що 2 з них – неправильно зброшуровані.

Варіант 7. У ящику лежать 20 виробів, з яких 12 червоних. Навання вибрано 5 виробів. Яка ймовірність того, що 3 з них – червоні?

Варіант 8. У ящику лежать 20 виробів, з яких 8 бракованих. Контролер навання виймає 6 виробів. Яка ймовірність того, що 4 з них – браковані?

Варіант 9. На склад прибула партія із 40 виробів, серед яких 5 бракованих. Контролер навання перевіряє 10 виробів. Яка ймовірність того, що 5 з них – браковані?

Варіант 10. У групі 25 студентів, серед яких 15 контрактників. Навання вибрано 10 студентів. Яка ймовірність того, що 4 з них – контрактники?

Варіант 11. У фірмі працюють 8 жінок та 12 чоловіків. У відрядженні знаходяться 8 робітників. Яка ймовірність того, що серед них 3 – жінки?

Варіант 12. На базу доставлено 40 на вигляд однакових станків. Із них 25 виробництва Польщі та 15 – виробництва Туреччини. Навмання відібрано 10 станків. Яка ймовірність того, що серед них буде 7 станків – виробництва Польщі та 3 – виробництва Туреччини?

Варіант 13. На полиці розставлено 15 книжок, із яких 5 неправильно зброшурованих. Навмання взяті 4 книги. Обчислити ймовірність того, що 2 з них – неправильно зброшуровані.

Варіант 14. У ящику лежать 25 виробів, з яких 12 червоних. Навмання вибрано 7 виробів. Яка ймовірність того, що 4 з них – червоні?

Варіант 15. У ящику лежать 20 деталей, серед яких 5 бракованих. Контролер навімання виймає 6 деталей. Чому дорівнює ймовірність того, що серед них 2 – браковані?

Варіант 16. На склад прибула партія із 40 виробів, серед яких 8 бракованих. Контролер навімання перевіряє 5 виробів. Яка ймовірність того, що серед них 2 – браковані?

Варіант 17. В групі 20 студентів, серед яких 10 контрактників. Навмання вибрано 8 студентів. Яка ймовірність того, що серед них 4 – контрактники?

Варіант 18. У фірмі працюють 7 жінок та 8 чоловіків. У відрядженні знаходяться 6 робітників. Яка ймовірність того, що серед них 4 – жінки?

Варіант 19. На базу доставлено 20 на вигляд однакових станків. Із них 15 – виробництва Польщі та 5 – Туреччини. Навмання відібрано 5 – станків. Яка ймовірність того, що серед них буде 3 – виробництва Польщі та 2 – виробництва Туреччини?

Варіант 20. На полиці розставлено 15 книжок, із яких 5 неправильно зброшуровані. Навмання взяті 3 книги. Обчислити ймовірність

того, що всі 3 – неправильно зброшуровані.

Варіант 21. У ящику лежать 25 виробів, з яких 12 червоних. Навмання вибрано 5 виробів. Яка ймовірність того, що 2 з них – червоні?

Варіант 22. У ящику лежать 20 деталей, серед яких 5 бракованих. Контролер навмання виймає 10 деталей. Чому дорівнює ймовірність того, що серед них 4 – браковані?

Варіант 23. На склад прибула партія із 30 виробів, серед яких 5 бракованих. Контролер навмання перевіряє 15 виробів. Яка ймовірність того, що серед них 4 – браковані?

Варіант 24. У групі 15 студентів, серед яких 5 контрактників. Навмання вибрано 7 студентів. Яка ймовірність того, що серед них 2 – контрактники?

Варіант 25. К фірмі працюють 13 жінок та 12 чоловіків. У відрядженні знаходяться 8 робітників. Яка ймовірність того, що серед них 5 – жінки?

Варіант 26. На базу доставлено 45 на вигляд однакових станків. Із них 25 виробництва Кореї та 20 – виробництва Німеччини. Навмання відібрано 10 станків. Яка ймовірність того, що серед них 7 – виробництва Кореї?

Варіант 27. На полиці розставлено 25 книжок, із яких 10 неправильно зброшурованих. Навмання взяті 8 книг. Обчислити ймовірність того, що 3 з них – неправильно зброшуровані.

Варіант 28. У ящику лежать 25 деталей, серед яких 5 бракованих. Контролер навмання виймає 10 деталей. Чому дорівнює ймовірність того, що серед них 2 – браковані?

Варіант 29. На склад прибула партія із 45 виробів, серед яких 10 бракованих. Контролер навмання перевіряє 10 виробів. Яка ймовірність того, що серед них 5 – браковані?

Варіант 30. У групі 25 студентів, серед яких 15 контрактників. Навмання вибрано 7 студентів. Яка ймовірність того, що 5 з них – контрактники?

ЗАВДАННЯ 4

ДОВІДКА 4. Геометричне означення ймовірності

При рішення завдань даного розділу використовують геометричну ймовірність, яка є розширенням поняття класичної ймовірності на випадок незліченної множини елементарних подій.

Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу, а множину елементарних подій, що сприяють події A – як частину цього геометричного образу, то ймовірність події A визначається як відношення мір цих множин:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

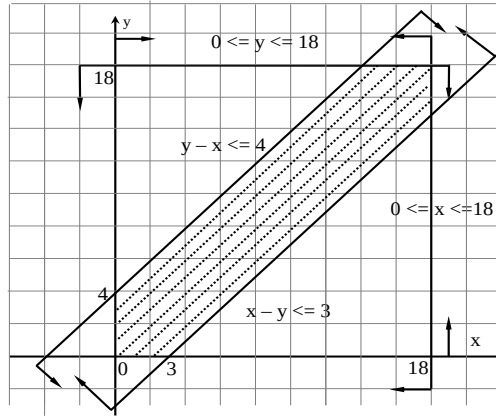
При цьому вважається, що ймовірність попадання в деяку частину геометричного образу пропорційна до міри цієї частини.

Приклад 21. Два теплохода підходять до одного причалу. Час приходу обох теплоходів незалежний і рівноможливий протягом 18 годин. Знайти ймовірність того, що одному з них потрібно буде чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого теплохода три години, а другого – чотири години.

Позначимо час прибуття першого теплохода x ($0 \leq x \leq 18$); другого теплохода – y ($0 \leq y \leq 18$). Вводимо подію A – один з теплоходів буде чекати звільнення причалу. Події A відповідають дві нерівності: $x - y \leq 3$ і $y - x \leq 4$.

У прямокутній системі координат XOY зображуємо геометричні області зміни x і y . Простором елементарних подій буде квадрат: $x \in [0; 18]$, $y \in [0; 18]$. Його площа $S = 18^2 = 324$.

Події A відповідає заштрихована область, площа якої дорівнює площі квадрата S мінус площі двох прямокутних, рівнобедрених трикутників, з катетами $(18 - 4 = 14)$ і $(18 - 3 = 15)$:



$$s = S - \frac{14^2}{2} - \frac{15^2}{2} = 324 - 98 - 112,5 = 113,4.$$

Ймовірність події A дорівнює ймовірності того, що точка, випадковим чином обрана в квадраті, попаде в заштриховану область. Вважається, що ймовірність попадання точки в область пропорційна площі області и не залежить від її положення. Тоді ймовірність події A буде відношенням площ:

$$P(A) = \frac{s}{S} = \frac{113,5}{324} \approx 0,35.$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 4

Варіант 1. В інтервалі $[-1, 5]$ навмання взяті два числа. Яка ймовірність того, що їх сума більше 2,5, а різниця менша 1?

Варіант 2. Два теплоходи повинні підійти до одного і того ж причалу. Час приходу обох теплоходів незалежний і рівноможливий протягом доби. Визначити ймовірність того, що одному з них доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого теплохода 6 годин, а другого – 8 годин.

Варіант 3. Штраф за порушення правил рівноможливий і становить від 10 до 50 гривень. Знайти ймовірність того, що сума двох штрафів буде лежати в інтервалі від 40 до 75 гривень.

Варіант 4. Вага яблука становить від 80 до 200 г. Знайти ймовірність того, що різниця між вагою двох яблук не перевищить 80 г, якщо в зазначеному інтервалі будь-яка вага яблука рівноможлива.

Варіант 5. Робочий обслуговує два агрегати. Багатоденні спостереження показали, що кожен з агрегатів вимагає протягом години уваги робітника в середньому 15 хв. Передбачається, що зупинка кожного з агрегатів протягом години може відбутися в будь-який момент незалежно від іншого. Знайти ймовірність того, що протягом години один з агрегатів потребуватиме уваги робітника в той момент часу, коли він зайнятий обслуговуванням іншого.

Варіант 6. Два танкери повинні підійти до одного і того ж причалу. Час приходу обох танкерів рівноможливий протягом однієї доби. Знайти ймовірність того, що одному з танкерів доведеться чекати звільнення причалу, якщо час розвантаження першого танкера становить 3 години, а другого – 4 години.

Варіант 7. У безпрограшній лотереї вартість призу не перевищує 8 гривень. Знайти ймовірність того, що виграш на два квитки складе більше 4 гривень, але менше 10 гривень, вважаючи рівноможливою будь-яку вартість призу.

Варіант 8. По маршруту незалежно один від одного ходять два тролейбуси з інтервалом: № 20 – 10 хвилин, № 10 – 7 хвилин. Студент приходить на зупинку у випадковий момент часу. Яка ймовірність, що йому доведеться чекати будь-який тролейбус менш ніж п'ять хвилин?

Варіант 9. В інтервалі $[-1, 4]$ навмання взяті два числа. Яка ймовірність того, що їх сума більше 2, а різниця менше 1?

Варіант 10. Два студенти домовилися зустрітися у визначеному місці між 18 і 19 годинами. Той, хто прийшов першим, чекає другого протягом 10 хвилин, а потім іде. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен студент навмання вибирає момент свого приходу від 18 до 19 год.

Варіант 11. На відрізку довжиною 20 см обрані випадковим чином дві точки. Знайти ймовірність того, що відстань між точками буде більше 5 см.

Варіант 12. Два теплоходи повинні підійти до одного і того ж причалу протягом доби. Визначити ймовірність того, що одному з теплоходів доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки одного теплохода 1 година, іншого – 2 години.

Варіант 13. В інтервалі $[-2, 5]$ випадковим чином взяті два числа. Яка ймовірність того, що їх сума більше 2, а різниця менше 1,5?

Варіант 14. У безпрограшній лотереї вартість призу не перевищує 7 грн. Знайти ймовірність того, що виграш на два квитки складе більше 6 грн., але менше 11, вважаючи рівноможливою будь-яку вартість призу.

Варіант 15. Студент домовився зустрітися зі своєю подругою між трьома і чотирма годинами дня. Хто прийшов на зустріч перший, чекає іншого 15 хвилин, а потім іде. Яка ймовірність зустрічі друзів, якщо кожен із студентів може прийти в будь-який час протягом зазначеної години?

Варіант 16. Вага яблука становить від 70 до 200 грам. Знайти ймо-

вірність того, що різниця між вагою двох яблук не перевищить 60 грам, якщо в зазначеному інтервалі будь-яка вага яблука рівноможлива.

Варіант 17. Перший штраф становить від 15 до 40 грн., а наступний – на 40 % більше. Знайти ймовірність того, що сума двох штрафів не перевищить 45 гривень, вважаючи рівноможливими будь-які значення штрафів.

Варіант 18. На відрізок довжиною 20 см, обрані випадковим чином дві точки. Знайти ймовірність того, що відстань між точками буде менше 5 см.

Варіант 19. Пасажир може скористатися трамваями двох маршрутів, що йдуть з інтервалами 10 і 15 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який прийшов на зупинку, буде чекати не більше 8 хвилин.

Варіант 20. Робочий обслуговує два агрегати. Багатоденні спостереження показали, що кожний з агрегатів вимагає протягом години уваги робітника в середньому 10 хвилин. Передбачається, що зупинка кожного з агрегатів протягом години може відбутися в будь-який момент незалежно від іншого. Знайти ймовірність того, що протягом години один з агрегатів потребуватиме уваги робітника в той момент часу, коли він зайнятий обслуговуванням іншого.

Варіант 21. В інтервалі $[-1, 5]$ навмання взяті два числа. Яка ймовірність того, що їх сума більше 3, а різниця менше 2.

Варіант 22. Коля і Петя домовилися про зустріч у проміжку часу між 9-ю годиною і пів на десяту. Петя чекає Колю 15 хвилин і йде, а Коля чекає Петю 10 хвилин і йде. Яка ймовірність того, що зустріч відбудеться?

Варіант 23. У безпрограшній лотереї вартість призу не перевищує 10 гривень. Знайти ймовірність того, що виграш на два квитки складе більше 4 гривень, але менше 15 гривень, вважаючи рівноможливою будь-яку вартість призу.

Варіант 24. Вага яблука становить від 120 до 250 грам. Знайти ймовірність того, що різниця між вагою двох яблук не перевищить 100 грам, якщо в зазначеному інтервалі будь-яка вага яблука рівноможлива.

Варіант 25. Перший штраф становить від 10 до 40 гривень, а наступний на 30 % більше. Знайти ймовірність того, що сума двох штрафів не перевищить 45 гривень, вважаючи рівноможливим будь-яке значення штрафів.

Варіант 26. На відрізка довжиною 20 см обрані випадковим чином дві точки. Знайти ймовірність того, що відстань між точками буде більше 8 см.

Варіант 27. По маршруту незалежно один від одного ходять два тролейбуси з інтервалом: № 2 – 20 хвилин, № 10 – 10 хвилин. Студент приходить на зупинку у випадковий момент часу. Яка ймовірність того, що йому доведеться чекати будь-який тролейбус менше восьми хвилин?

Варіант 28. На відрізок $[2;5]$ навмання кидаються дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними менше 2?

Варіант 29. Дві особи умовилися зустрітися у визначеному місці між 12 і 13 годинами. Хто прийшов першим, чекає другого протягом 20 хвилин, після чого йде. Чому дорівнює ймовірність зустрічі осіб, якщо поява кожного з них може статися будь-коли у зазначену годину та моменти приходу незалежні?

Варіант 30. У безпрограшній лотереї вартість призу не перевищує 15 гривень. Знайти ймовірність того, виграш на два квитки складе більше 5 гривень, але менше 20 гривень, вважаючи рівноможливою будь-яку вартість призу.

ЗАВДАННЯ 5

ДОВІДКА 5. Теореми множення та додавання ймовірностей. Ймовірність настання принаймні однієї події

Теореми множення та додавання ймовірностей.

Події B і C називаються *залежними*, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась друга подія, чи ні. У протилежному разі події називаються *незалежними*. Ймовірність події C , яка визначена за умови, що подія B відбулася, називається *умовною* і позначається $P(C/B)$.

Теореми множення ймовірностей

Нехай подія A є добутком двох подій B і C , $A = B \cdot C$. Тоді:

- а) якщо події B і C *незалежні*, то $P(A) = P(B) \cdot P(C)$;
- б) якщо події B і C *залежні*, то $P(A) = P(B) \cdot P(C/B)$.

Ці теореми дійсні й для добутку n ($n > 2$) подій.

Теореми додавання ймовірностей

Нехай подія A є сумою двох подій B і C , $A = B + C$. Тоді:

- а) якщо події B і C *несумісні*, то $P(A) = P(B) + P(C)$;
- б) якщо події B і C *сумісні*, то $P(A) = P(B) + P(C) - P(B \cdot C)$.

Ймовірність настання принаймні однієї події.

Нехай у результаті випробування можуть відбутися n подій $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}$. Потрібно знайти ймовірність того, що відбудеться принаймні одна з них. Позначимо цю подію літерою A :

$$A = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \dots + \overline{A_n}.$$

Тоді протилежною буде подія $\overline{A}$, яка полягає в тому, що в результаті випробування жодної з подій не відбудеться, тобто одночасно настануть всі протилежні події:

$$\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}.$$

Знайдемо ймовірність події A через ймовірність протилежної події:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}).$$

Рекомендації. При розв'язанні таких задач буде зручно, якщо дотримуватися такого порядку дій:

- Позначити буквами всі події, про які йде мова в умові задачі.
- Побудувати складну подію, про яку йде мова у запитанні задачі.
- Визначити, сумісні чи несумісні (в сумі), залежні чи незалежні ці події (у добутку).
- Обрати потрібну формулу та обчислити ймовірність.

Приклад 22. Випробовується прилад, який має три робочих блоки. Ймовірність безвідмовної роботи першого блоку за певний час дорівнює 0,8; другого – 0,9; третього – 0,7. Блоки відмовляють незалежно один від одного. Знайти ймовірність:

- а) відмови двох блоків;
- б) відмови принаймні (хоча б) одного блоку.

Розглянемо події:

A_1 – безвідмовна робота першого блоку, A_2 – безвідмовна робота другого блоку, A_3 – безвідмовна робота третього блоку,	$\left. \vphantom{\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix}} \right\}$ сумісні, незалежні.
--	---

$$P(A_1) = 0,8; \quad P(\overline{A_1}) = 0,2;$$

$$P(A_2) = 0,9; \quad P(\overline{A_2}) = 0,1;$$

$$P(A_3) = 0,7; \quad P(\overline{A_3}) = 0,3.$$

- а) Розглянемо складну подію B – два із трьох блоків відмовили:

$$B = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3},$$

де у сумі події несумісні, а в добутках – незалежні.

За відповідними теоремами суми та множення одержимо

$$P(B) = 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,3 = 0,092.$$

б) Розглянемо складну подію C – хоча б один з блоків відмовив. Це досить велика складна подія, бо складається з подій: один з трьох блоків відмовив, або два з трьох відмовили, або три відмовили. Краще перейти до протилежної події: $\bar{C} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ – усі блоки не відмовили, працюють. За теоремою добутку незалежних подій

$$P(\bar{C}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3);$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C});$$

$$P(C) = 1 - 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,496.$$

Приклад 23. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі для першого стрілка 0,25, для другого – 0,59. Перший стрілок робить два постріли по цілі, другий – три постріли. Визначити ймовірність того, що:

- а) не буде жодного влучення в ціль;
- б) буде хоча б одно влучення;
- в) буде тільки одно влучення.

Розглянемо події:

A_i – влучення першим стрілком, $i = 1, 2$
 B_j – влучення другим стрілком, $j = 1, 2, 3$ } сумісні, незалежні.

$$P(A_i) = 0,25; \quad P(\bar{A}_i) = 0,75; \quad i = 1, 2.$$

$$P(B_j) = 0,59; \quad P(\bar{B}_j) = 0,41; \quad j = 1, 2, 3.$$

а) Розглянемо подію C – не буде жодного влучення в ціль. Ця подія складається з таких: перший стрілок зробив два промахи і другий стрілок зробив три промахи, або

$$C = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3}.$$

У добутку події незалежні. За відповідною теоремою множення ймовірностей:

$$P(C) = 0,75^2 \cdot 0,41^3 = 0,388.$$

б) Розглянемо подію D – буде хоча б одно влучення в ціль. Її ймовірність доцільно знайти через протилежну подію $\overline{D}$ – не буде жодного влучення в ціль. До речі, ймовірність цієї події вже знайдена у пункті а), тобто $\overline{D} = C$.

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}); P(D) = 0,612.$$

в) Розглянемо подію E – буде тільки одно влучення в ціль. На відзнаку від події D вона досить складна:

$$E = (A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2) \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot B_3 + (B_1 \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3} + \\ + \overline{B_1} \cdot B_2 \cdot \overline{B_3} + \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot B_3) \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}.$$

У сумі події несумісні, а в добутках – незалежні. За відповідними теоремами

$$P(E) = 2 \cdot 0,25 \cdot 0,75 \cdot 0,41^3 + 3 \cdot 0,59 \cdot 0,41^2 \cdot 0,75^2 \cong \\ \cong 0,193.$$

Приклад 24. В урні лежать 4 білих та 5 чорних кульок. З урни послідовно виймають дві кульки. Чому дорівнює ймовірність того, що обидві кульки одного кольору?

Розглянемо події:

A – перша вийнята кулька біла } сумісні, залежні.
 B – друга вийнята кулька біла }

C – обидві кульки одного кольору, будуюмо складну подію

$$C = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

і обираємо теореми для обчислення її ймовірності – події у добутках залежні, у сумі – несумісні:

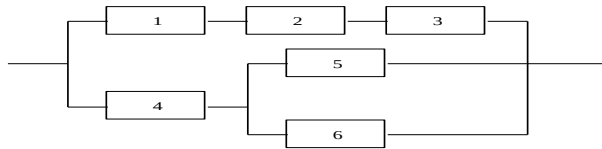
$$P(C) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}/\bar{A}).$$

$$P(A) = 4/9; P(B/A) = 3/8;$$

$$P(\bar{A}) = 5/9; P(\bar{B}/\bar{A}) = 4/8.$$

$$P(C) = (4/9) \cdot (3/8) + (5/9) \cdot (4/8) = 4/9.$$

Приклад 25. Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Вводимо такі позначення: A_k – {елемент з номером k працює}, тоді $\bar{A}_k$ – {елемент з номером k відмовив}; B – {система елементів працює}, $\bar{B}$ – {система елементів відмовила}.

$$P(A_k) = 0,8 = p; P(\bar{A}_k) = 0,2 = q; k = 1, 2, \dots, 6.$$

Ймовірність відмови системи знайдемо як ймовірність події, протилежної роботі системи: $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$.

Складемо подію B , користуючись міркуванням: система працює, якщо працюють елементи 1 і 2 і 3 або 4 і з ним 5 або 6. За правилами додавання и добутку (завдання 1) отримаємо:

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_4 \cdot (A_5 + A_6).$$

У сумі події сумісні, у добутках – незалежні. Розглянемо добутки. За теоремою множення для незалежних подій:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = p^3.$$

$$P(A_4 \cdot (A_5 + A_6)) = P(A_4)P(A_5 + A_6) = p \cdot P(A_5 + A_6).$$

За теоремою додавання для сумісних подій і теоремою множення для незалежних подій:

$$P(A_5 + A_6) = P(A_5) + P(A_6) - P(A_5) \cdot P(A_6) = 2p - p^2, \\ P(A_4 \cdot (A_5 + A_6)) = p \cdot (2p - p^2).$$

Для суми добутків вибираємо теорему додавання для сумісних подій:

$$P(B) = P(A_1 A_2 A_3) + P(A_4 (A_5 + A_6)) - \\ - P(A_1 A_2 A_3 A_4 (A_5 + A_6)).$$

Розкриваємо з урахуванням теореми множення для незалежних подій

$$P(B) = p^3 + p \cdot (2p - p^2) - p^4 \cdot (2p - p^2).$$

Далі спрощуємо вираз

$$P(B) = p^3 + p^2(2 - p)(1 - p^3),$$

Обчислюємо

$$P(B) = 0,8^3 + 0,8^2(2 - 0,8)(1 - 0,8^3) \approx 0,887.$$

Тоді

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B);$$

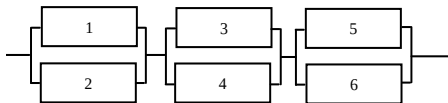
$$P(\bar{B}) = 1 - 0,887 = 0,113.$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 5

Варіант 1. а) Робочий обслуговує три прилади, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що за зміну перший прилад не вимагатиме уваги робітника, дорівнює 0,9, другий – 0,8, третій – 0,75. Знайти ймовірність того, що за зміну:

- тільки третій прилад не вимагатиме уваги;
- тільки один прилад не вимагатиме уваги.

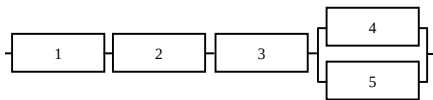
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 2. а) Робочий обслуговує три прилади, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що за зміну перший прилад не вимагатиме уваги робітника, дорівнює 0,95, другий – 0,85, третій – 0,7. Знайти ймовірність того, що за зміну:

- тільки першому приладу буде потрібна увага;
- тільки одному приладу буде потрібна увага.

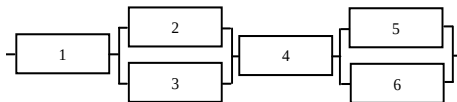
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



Варіант 3. а) Студент розшукує потрібну формулу в трьох довідниках. Ймовірність того, що формула міститься в першому, другому і третьому довідниках, дорівнює відповідно 0,6, 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність того, що ця формула міститься:

- не менш ніж у двох довідниках;
- тільки в першому довіднику.

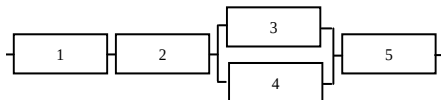
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



Варіант 4. а) Студент розшукує потрібну формулу в трьох довідниках. Ймовірність того, що формула міститься в першому, другому і третьому довідниках, дорівнює відповідно 0,65, 0,7 і 0,85. Знайти ймовірність того, що ця формула міститься:

- не менш ніж у двох довідниках;
- або в першому, або в третьому довідниках.

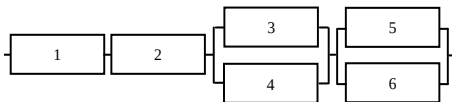
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 5. а) У грошово-речовій лотереї на кожну тисячу квитків припадає п'ятнадцять грошових і двадцять речових виграшів. Знайти ймовірність того, що при покупці трьох квитків:

- буде не менше двох виграшних;
- в одному з квитків буде речовий приз.

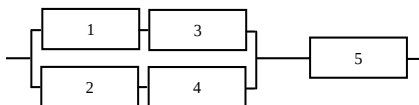
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 6. а) У грошово-речовій лотереї на кожну тисячу квитків припадає десять грошових і двадцять п'ять речових виграшів. Знайти ймовірність того, що при покупці трьох квитків:

- тільки один буде виграшний;
- в двох квитках будуть грошовий і речовий призи.

б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.

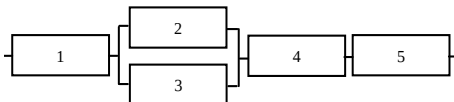


Варіант 7. а) Для прийому партії, що складається з сорока шістьох стандартних виробів і чотирьох бракованих, застосовують вибірко-вий контроль. Визначити ймовірність того, що партія буде прийня-

та для обох випадків. Партія бракується, якщо серед узятих трьох виробів виявиться:

- хоча б один бракований;
- більше одного бракованого.

б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.

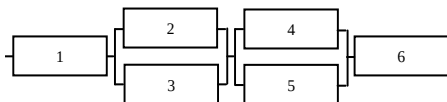


Варіант 8. а) Для прийому партії, що складається з сорока стандартних виробів і десяти бракованих, застосовують вибірковий контроль. Партія бракується, якщо серед узятих навмання п'яти виробів виявиться:

- хоча б два бракованих;
- більше трьох бракованих.

Для обох випадків визначити ймовірність того, що партію забракують.

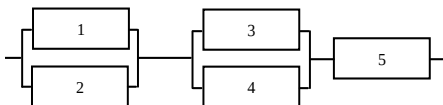
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 9. а) У двох партіях п'ятдесят і шістдесят відсотків доброякісних виробів відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Знайти ймовірність того, що серед вибраних виробів:

- один доброякісний і один бракований;
- хоча б один бракований.

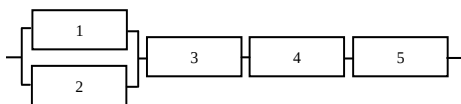
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 10. а) У двох партіях шістдесят відсотків і сімдесят відсотків доброякісних виробів відповідно. Навмання обирають по два вироби з кожної партії. Знайти ймовірність того, що серед обраних виробів виявиться:

- три доброякісних;
- принаймні один доброякісний.

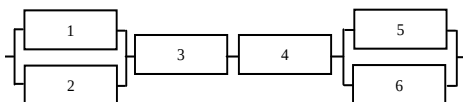
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



Варіант 11. а) Ймовірність попадання в «десятку» при одному пострілі дорівнює 0,4, а в «дев'ятку» – 0,8. Знайти ймовірність того, що при трьох пострілах стрілок набере:

- не менше двадцяти дев'яти очок;
- двадцять вісім очок.

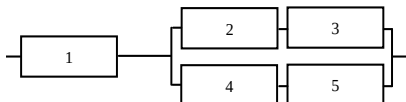
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



Варіант 12. а) Ймовірність попадання в «десятку» при одному пострілі дорівнює 0,45, а в «дев'ятку» – 0,85. Знайти ймовірність того, що при трьох пострілах стрілок набере:

- не менше двадцяти восьми очок;
- двадцять дев'ять очок.

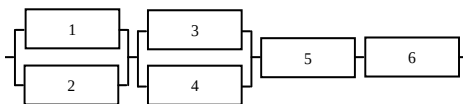
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 13. а) Станція метрополітену обладнана трьома ескалаторами. Ймовірність безвідмовної роботи для першого ескалатора дорівнює 0,9; для другого – 0,8; для третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що станеться поломка:

- не більше одного ескалатора;
- другого або третього ескалаторів.

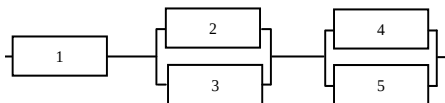
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 14. а) Станція метрополітену обладнана трьома ескалаторами. Ймовірність безвідмовної роботи для першого ескалатора дорівнює 0,9; для другого – 0,85; для третього – 0,8. Знайти ймовірність того, що станеться поломка:

- не більше двох ескалаторів;
- третього ескалатора.

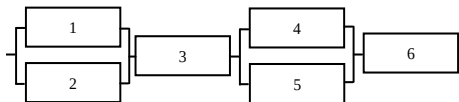
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



Варіант 15. а) Один студент вивчив двадцять з тридцяти питань програми, а другий – тільки п'ятнадцять. Кожному з них задають по одному питанню. Знайти ймовірність того, що правильно дадуть відповідь:

- обидва студента;
- хоча б один із студентів.

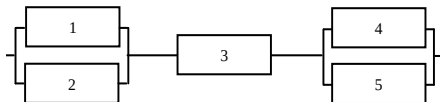
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



Варіант 16. а) Один студент вивчив двадцять п'ять з тридцяти питань програми, а другий – тільки двадцять. Кожному з них задають по одному питанню. Знайти ймовірність того, що правильно дадуть відповідь:

- тільки перший;
- тільки один з них.

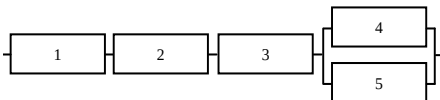
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 17. а) Автор направляє в журнал три статті за різною тематикою. Ймовірність того, що буде прийнята до друку перша стаття – 0,7, для другої статті така ймовірність дорівнює – 0,8, для третьої – 0,9. Знайти ймовірність того, що серед статей автора:

- хоча б дві буде прийняті до друку;
- тільки одна буде прийнята до друку.

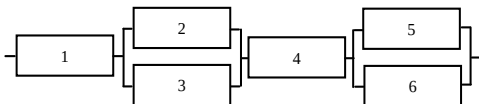
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 18. а) Автор направляє в журнал три статті за різною тематикою. Ймовірність того, що буде прийнята до друку перша стаття – 0,6, для другої статті така ймовірність дорівнює – 0,8, для третьої – 0,7. Знайти ймовірність того, що серед статей автора:

- хоча б одна буде прийнята до друку;
- тільки дві будуть прийняті до друку.

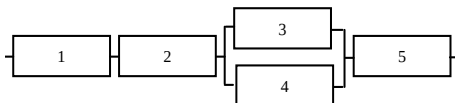
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



Варіант 19. а) В урні чотири білих і шість чорних куль. З неї виймають три кулі. Знайти ймовірність того, що хоча б дві кулі білих, якщо здійснюється вибір:

- з поверненням;
- без повернення.

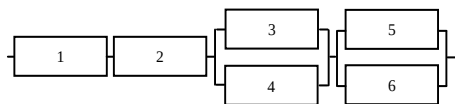
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



Варіант 20. а) В урні чотири білих і п'ять чорних куль. З неї виймають дві кулі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна куля біла, якщо здійснюється вибір:

- з поверненням;
- без повернення.

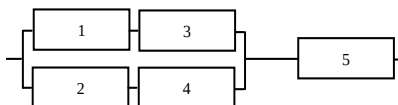
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 21. а) Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність безвідмовної роботи протягом деякого часу кожного з них відповідно дорівнює 0,9, 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність того, що протягом деякого часу:

- не більше двох елементів вийдуть з ладу;
- хоча б один елемент вийде з ладу.

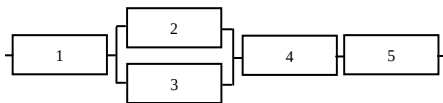
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 22. а) Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність безвідмовної роботи протягом деякого часу кожного з них відповідно дорівнює 0,9, 0,7 і 0,6. Знайти ймовірність того, що протягом деякого часу:

- більше двох елементів вийдуть з ладу;
- не менше двох елементів вийдуть з ладу.

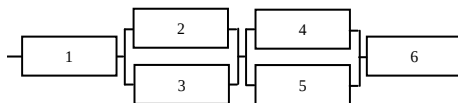
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



Варіант 23. а) Ймовірність виявлення вірусу А дорівнює 0,6, вірусу В – 0,7, а вірусу С – 0,5. Яка ймовірність того, що при обстеженні буде виявлено:

- не менше двох вірусів;
- тільки один вірус?

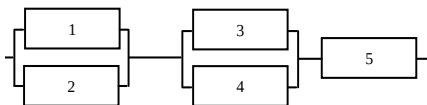
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



Варіант 24. а) Ймовірність виявлення вірусу А дорівнює 0,7, вірусу В – 0,7, а вірусу С – 0,9. Яка ймовірність того, що при обстеженні буде виявлений:

- хоча б один вірус;
- вірус С?

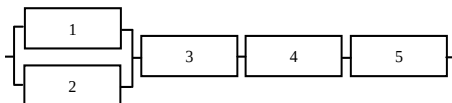
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 25. а) Ймовірність того, що студент здасть перший іспит, дорівнює 0,9, другий – 0,9, третій – 0,8. Знайти ймовірність того, що будуть здані:

- тільки другий іспит;
- хоча б один іспит.

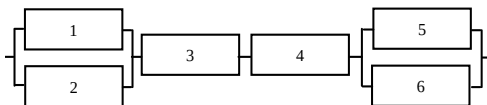
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 26. а) Ймовірність того, що студент здасть перший іспит, дорівнює 0,9, другий – 0,7, третій – 0,8. Знайти ймовірність того, що будуть здані:

- всі три іспити;
- хоча б один іспит.

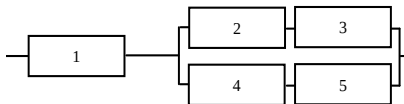
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



Варіант 27. а) Ймовірність додзвонитися з першої спроби в довідкове бюро вокзалу дорівнює 0,4. Яка ймовірність того, що:

- вдасться додзвонитися при другому дзвінку;
- доведеться дзвонити не більше трьох разів?

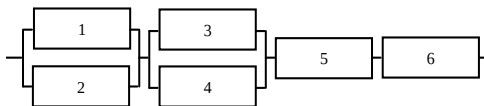
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



Варіант 28. а) Ймовірність додзвонитися з першої спроби в довідкове бюро вокзалу дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що:

- вдасться додзвонитися при третьому дзвінку;
- доведеться дзвонити не більше двох разів?

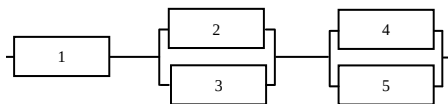
б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 29. а) На АТС можуть надійти виклики трьох типів. Ймовірність надходження викликів першого, другого і третього типу відповідно 0,4, 0,3, 0,5. Надійшло три виклики. Яка ймовірність того, що:

- усі вони різних типів;
- серед них немає виклику другого типу?

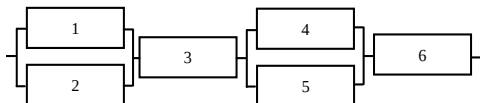
б) Знайти ймовірність роботи системи елементів, якщо ймовірність відмови кожного з них 0,2.



Варіант 30. а) На АТС можуть надійти виклики трьох типів. Ймовірність надходження викликів першого, другого і третього типу відповідно 0,4, 0,6, 0,5. Надійшло три виклики. Яка ймовірність того, що:

- всі вони одного типу;
- хоча б два з них першого типу?

б) Знайти ймовірність відмови системи елементів, якщо ймовірність роботи кожного з них 0,8.



ЗАВДАННЯ 6

ДОВІДКА 6. Формула повної ймовірності. Формула гіпотез (Басса)

Нехай подія A може відбутися тільки за умови настання однієї із несумісних подій H_i ($i = 1, 2, \dots, n$), які утворюють повну групу. Ці події називатимемо *гіпотезами*. Тоді ймовірність події A обчислюється за *формулою повної ймовірності*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i),$$

де $P(A/H_i)$ – умовні ймовірності настання події A , $P(H_i)$ – ймовірності гіпотез H_i ($i = 1, 2, \dots, n$) і

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1.$$

Подія A може відбутись одночасно з однією із подій H_i . Відомі ймовірності подій H_i та умовні ймовірності того, що подія A відбудеться. Якщо в результаті випробування подія A відбулась, ймовірності гіпотез зміняться і їх можна обчислити за *формулою Басса*:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(H_i)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

За цією формулою переоцінюють ймовірності гіпотез H_i після проведення випробування.

Приклад 26. Йде випробування машин трьох заводів, позначимо їх I , II , III . Ймовірність того, що машина заведеться з однієї спроби для заводу I дорівнює 0,6; для заводу II – 0,8 і для заводу III – 0,9. Знайти ймовірність того, що будь-яка машина заведеться з двох спроб, якщо машин заводу I 15 штук, заводу II – 10 штук і заводу III – 25 штук. Яка ймовірність того, що заведена з двох спроб машина виготовлена заводом I ?

Зверніть увагу – в задачі поставлено два питання, тому буде дві відповіді.

1) Нехай подія A – *{будь-яка машина заведеться з двох спроб}*. Подія A може відбутися тільки за умови настання однієї з трьох подій-гіпотез (настає одночасно з ними):

H_1 – *{обрана машина виготовлена заводом I};*

H_2 – *{обрана машина виготовлена заводом II};*

H_3 – *{обрана машина виготовлена заводом III}.*

Події (гіпотези) H_1 , H_2 і H_3 несумісні і утворюють повну групу. Розрахуємо ймовірності цих гіпотез:

$$P(H_1) = \frac{15}{50} = 0,3; \quad P(H_2) = \frac{10}{50} = 0,2; \quad P(H_3) = \frac{25}{50} = 0,5.$$

Перевірка:

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1.$$

Тому що є дві спроби завести машину, то $A = A_1 + \bar{A}_1 \cdot A_2$, тобто або вона заводиться з першого разу (подія A_1), або не заводиться з першого разу, але заводиться з другого разу (складна подія $\bar{A}_1 \cdot A_2$). За теоремами множення незалежних подій і додавання несумісних подій отримаємо:

$$P(A) = P(A_1) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2).$$

Додаємо умову – одну з гіпотез, та знаходимо умовні ймовірності. Наприклад, $P(A/H_1)$ – це ймовірність того, що машина заведеться з двох спроб, якщо вона виготовлена заводом I.

$$\begin{aligned} P(A/H_1) &= P(A_1/H_1) + P(\bar{A}_1/H_1)P(A_2/H_1) = \\ &= 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,84. \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$P(A/H_2) = 0,8 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,96;$$

$$P(A/H_3) = 0,9 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,99.$$

Рекомендуємо розрахунки зводити в таблицю:

H_1	$P(H_1) = \frac{15}{50} = 0,3$	$P(A/H_1) = 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,84$
H_2	$P(H_2) = \frac{10}{50} = 0,2$	$P(A/H_2) = 0,8 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,96$
H_3	$P(H_3) = \frac{25}{50} = 0,5$	$P(A/H_3) = 0,9 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,99$

За формулою повної ймовірності обчислюємо ймовірність того, що будь-яка машина заведеться з двох спроб:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) P(A/H_i) =$$

$$= 0,3 \cdot 0,84 + 0,2 \cdot 0,96 + 0,5 \cdot 0,99 = 0,939.$$

Отже, приблизно 94 % всіх машин заведеться з двох спроб.

2) Величина $P(H_1) = 0,3$ є ймовірністю події H_1 . Вона показує, що з ймовірністю 0,3 обрана машина належить заводу I . Знаючи тепер, що обрана машина завелася з 2-ї спроби (подія A відбулася), перерахуємо ймовірність її належності до заводу I . За формулою Баєса обчислимо апостеріорну (після випробування) ймовірність події H_1 :

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,84}{0,939} \approx 0,268.$$

Отже, серед машин, які заводяться з двох спроб, трохи більше чверті припадає на машини заводу I .

ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 6

Варіант 1. У групі 20 студентів, з них 5 відмінників, 7 – вчаться добре, решта студентів вчаться задовільно. Ймовірність здачі заліку з однієї спроби для відмінників – 0,9; для студентів, які вчаться добре – 0,65; для решти студентів – 0,25. Знайти ймовірність того, що будь-який студент здасть залік з першої спроби. Яка ймовірність того, що цей студент вчиться добре?

Варіант 2. У групі 10 студентів, з них 2 відмінника, 5 – вчаться добре, решта студентів вчаться задовільно. Ймовірність здачі заліку з першої спроби для відмінників – 0,9; для студентів, які вчаться добре – 0,6; для решти студентів – 0,3. Знайти ймовірність того, що будь-який студент здасть іспит з першої спроби. Яка ймовірність того, що цей студент відмінник?

Варіант 3. Троє мисливців одночасно вистрілили по вовку. Знайти ймовірність того, що один з трьох мисливців влучив. Визначити ймовірність того, що у вовка влучив другий мисливець, якщо ймовірності влучення дорівнюють відповідно 0,4; 0,5; 0,6.

Варіант 4. Троє мисливців одночасно вистрілили по вовку. Знайти ймовірність того, що один з трьох мисливців влучив. Визначити ймовірність того, що у вовка влучили третій мисливець, якщо ймовірності промаху для мисливців рівні відповідно 0,4; 0,3; 0,2.

Варіант 5. У кондитерській є два види тістечок: заварні в кількості 18 штук та пісочні в кількості 12 штук. Ймовірність того, що тістечко якісне: для заварного дорівнює 0,9; для пісочного – 0,8. Відвідувач придбав одне тістечко. Знайти ймовірність того, що воно не якісне. Яка ймовірність того, що це було пісочне тістечко?

Варіант 6. Прилад може працювати в трьох режимах: нормальному, перевантаженому і недовантаженому. Нормальний режим спостерігається в 65 % випадків роботи приладу, перевантажений – в 25 % і недовантажений – у 10 %. Надійність приладу (ймовірність його безвідмовної роботи протягом заданого часу) для нормального режиму дорівнює 0,85; для недовантаженого – 0,7; для перевантаженого – 0,6. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу,

якщо відомо, що він працював в одному режимі. Визначити ймовірність того, що прилад працював у нормальному режимі.

Варіант 7. На складання протягом зміни потрапляють деталі з трьох ліній. Відомо, що з першої лінії потрапляє 15 % браку, з другої – 10 %, а з третьої – 5 %. Яка ймовірність потрапляння на складання однієї бракованої деталі протягом зміни, якщо з першої лінії надійшло 1 000, з другої – 1 500 і з третьої – 2 500 деталей? Знайти ймовірність того, що бракована деталь з другої лінії?

Варіант 8. Прилад може працювати в трьох режимах: нормальному, перевантаженому і недовантаженому. Нормальний режим спостерігається в 60 % випадків роботи приладу, перевантажений – в 25 % і недовантажений – у 15 %. Надійність приладу (ймовірність його безвідмовної роботи протягом заданого часу) для нормального режиму дорівнює 0,8, для недовантаженого – 0,7, у перевантаженому – 0,5. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу, якщо відомо, що він працював в одному режимі. Визначити ймовірність того, що прилад працював в перевантаженому режимі.

Варіант 9. З деякого вокзалу протягом доби відправляється 25 % – електричок, 60 % – місцевих потягів, решта – міжнародних. Серед пасажирів електричок 20 % їздять у справах, поєднаних з бізнесом, на місцевих – 50 %, на міжнародних – 35 %. Знайти ймовірність того, що навімання вибраний на пероні пасажир їде у справах бізнесу. Яка ймовірність того, що він від'їжджає електричкою?

Варіант 10. З числа потягів деякого вокзалу 20 % – електрички, 65 % – місцеві, решта – міжнародні. Серед пасажирів електричок 15 % їздять у справах, пов'язаних з бізнесом, на місцевих – 60 %, на міжнародних – 30 %. Знайти ймовірність того, що навімання вибраний на пероні пасажир – не бізнесмен. Яка ймовірність того, що він прибув не електричкою?

Варіант 11. В олімпіаді з математики беруть участь 5 школярів зі спеціалізованих шкіл, 8 – з гімназій та 7 школярів із звичайних

шкіл. Ймовірність того, що учень спеціалізованої школи вирішить задачу – 0,9, учень гімназії – 0,7, учень звичайної школи – 0,5. Кожному школяру дається 2 завдання. Знайти ймовірність того, що будь-який із школярів впорається із усіма завданнями. Яка ймовірність того, що це школяр звичайної школи?

Варіант 12. В олімпіаді з математики беруть участь 5 школярів із спеціалізованих шкіл, 8 – з гімназій та 7 школярів із звичайних шкіл. Ймовірність того, що учень спеціалізованої школи вирішить задачу – 0,9, гімназії – 0,7, звичайної школи – 0,6. Кожному школяру дається 2 завдання. Знайти ймовірність того, що будь-який із школярів впорається з двома завданнями. Яка ймовірність того, що це школяр спеціалізованої школи?

Варіант 13. В олімпіаді з математики беруть участь 7 школярів із спеціалізованих шкіл, 8 – з гімназій та 15 школярів із звичайних шкіл. Ймовірність того, що учень спеціалізованої школи вирішить задачу – 0,9, гімназії – 0,7, звичайної школи – 0,5. Кожному школяру дається 2 завдання. Знайти ймовірність того, що будь-який із школярів впорається хоча б з одним завданням. Яка ймовірність того, що це школяр гімназії?

Варіант 14. Вкладник має можливість відкрити рахунок в одному із трьох банків: А, В і С. Ймовірності банкрутства протягом року для банків А, В і С відповідно рівні 0,5; 0,4 і 0,2. Вкладник з однаковою ймовірністю може вибрати один з трьох банків. Знайти ймовірність того, що обраний вкладником банк збанкрутує протягом року. Яка ймовірність того, що це банк А?

Варіант 15. Вкладник має можливість відкрити рахунок в одному із трьох банків: А, В і С. Ймовірності банкрутства протягом року для банків А, В і С відповідно рівні 0,3; 0,25 і 0,15. Вкладник з однаковою ймовірністю може вибрати банки А і В та з ймовірністю 0,4 банк С. Знайти ймовірність банкрутства обраного вкладником банку протягом року. Яка ймовірність того, що це не банк В?

Варіант 16. У дитячому магазині представлені іграшки трьох фірм: А, В і С. Купується одна іграшка навмання обраної фірми.

Ймовірність підробки кожної іграшки у фірми А – 0,4, у фірми В – 0,3 і у фірмі С – 0,1. Знайти ймовірність того, що куплена іграшка є підробкою. Яка ймовірність того, що ця іграшка фірми А?

Варіант 17. У дитячому магазині представлені іграшки трьох фірм: А, В і С. Покупець з однаковою ймовірністю може вибрати іграшки фірм А і В та з ймовірністю 0,5 – фірми С. Купується одна іграшка навмання обраної фірми. Ймовірність підробки для кожної іграшки фірми А – 0,3, фірми В – 0,2 і фірми С – 0,1. Знайти ймовірність того, що куплена іграшка буде підробкою. Яка ймовірність того, що куплена іграшка фірми В?

Варіант 18. У дитячому магазині представлені іграшки трьох фірм: А, В і С. 10 іграшок фірми А, 7 – фірми В і 13 – фірми С. Купується одна іграшка навмання обраної фірми. Ймовірність підробки для кожної іграшки фірми А – 0,3, фірми В – 0,2 і фірми С – 0,1. Знайти ймовірність того, що іграшка буде підробкою. Яка ймовірність того, що куплена іграшка належить фірмі С?

Варіант 19. У тирі є три рушниці, ймовірності попадання з яких дорівнюють відповідно 0,5; 0,6 і 0,7. Знайти ймовірність влучення хоча б один раз при двох пострілах, якщо стрілець бере одну з рушниць навмання. Яка ймовірність того, що постріли зроблені з першої рушниці?

Варіант 20. У тирі є три рушниці, ймовірності попадання з яких дорівнюють відповідно 0,6; 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність влучення двічі при двох пострілах, якщо стрілець з однаковою ймовірністю може вибрати першу або другу рушницю та з ймовірністю 0,5 третю рушницю. Яка ймовірність того, що постріли зроблені з другої рушниці?

Варіант 21. У тирі є три види рушниць, ймовірності попадання з яких дорівнюється відповідно 0,7; 0,9 і 0,8. Знайти ймовірність влучити один раз при двох пострілах, якщо стрілець бере одну з рушниць навмання. Яка ймовірність того, що постріли зроблені з рушниць другого виду, якщо рушниць першого виду – 8 штук, дру-

гого – 9, а третього – 13?

Варіант 22. Офіс має DVD-диски виробництва: фірми А – 15 штук, фірми В – 10, фірми С – 25 штук. Ймовірність того, що на DVD-диск фірми А дані запишуться з однієї спроби – 0,85, для фірми В – 0,9 і для фірми С – 0,95. Знайти ймовірність того, що на будь-який диск дані запишуться з першої спроби. Яка ймовірність того, що дані записані на диск фірми А?

Варіант 23. Офіс має DVD-диски виробництва трьох фірм А, В і С в однаковій кількості. Ймовірність того, що на DVD-диск фірми А дані запишуться з однієї спроби – 0,9, для фірми В – 0,95 і для фірми С – 1. Знайти ймовірність того, що на будь-який диск дані запишуться з першої спроби, якщо з однаковою ймовірністю можуть бути вибрані DVD-диски фірм А і В та з ймовірністю 0,6 – диск фірми С. Яка ймовірність того, що дані записані на диск фірми С?

Варіант 24. Кількість DVD-дисків виробництва трьох фірм А, В і С, що використовують в офісі, співвідноситься як 2:1:2. Ймовірність того, що на DVD-диск фірми А дані запишуться з однієї спроби – 0,85, для фірми В – 0,9 і для фірми С – 0,95. Знайти ймовірність того, що на будь-який диск дані запишуться з першої спроби. Яка ймовірність того, що дані записані на диск фірми В?

Варіант 25. Двадцять екзаменаційних білетів містять по два питання, які не повторюються. Відмінник вивчив 35 питань, а студент, що вчиться добре – 30 питань, а трієчник – 10. В групі 25 студентів, з них 4 відмінники і 9 трієчників. Визначити ймовірність того, що навмання викликаний студент здасть іспит, якщо для цього потрібно відповісти на два питання одного білета. Яка ймовірність того, що відповідав відмінник?

Варіант 26. Двадцять екзаменаційних білетів містять по три питання, які не повторюються. Відмінник вивчив 55 питань, студент, що вчиться добре, – 45 питань, а трієчник – 30. Співвідношення відмінників, учнів, що добре вчать і трієчників у групі 1:5:4. Визначити ймовірність того, що навмання викликаний студент

здасть іспит, якщо для цього потрібно відповісти на два з трьох питань білета. Яка ймовірність того, що відповідав трієчник?

Варіант 27. Двадцять екзаменаційних білетів містять по три питання, які не повторюються. Відмінник вивчив 55 питань, студент, що вчиться добре, – 45 питань, трієчник – 30. Визначити ймовірність того, що навімання викликаний студент здасть іспит, якщо для цього потрібно відповісти на всі три питання білета. Яка ймовірність того, що відповідав відмінник, якщо в групі із 20 студентів 7 відмінників і 5 трієчників?

Варіант 28. Результати психологічних досліджень показують, що 70 % молоді позитивно реагують на досліджувану ситуацію і 50 % дорослих людей – негативно. Анкету заповнили 40 дорослих людей і 60 підлітків. Знайти ймовірність того, що навімання взята анкета містить позитивну реакцію. Яка ймовірність того, що її заповнював підліток?

Варіант 29. Є дві урни: у першій 4 білих і 6 чорних куль, у другій 5 білих і 3 чорні кулі. З першої урни в другу не дивлячись перекладають дві кулі. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла. Яка ймовірність того, що з першої урни були перекладені дві чорні кулі?

Варіант 30. Є дві урни: у першій 4 білих і 6 чорних куль, у другій 5 білих і 3 чорні кулі. З першої урни в другу перекладають не дивлячись три кулі. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла. Яка ймовірність того, що з першої урни були перекладені три білих кулі?

ЗАВДАННЯ 7

ДОВІДКА 7. Незалежні повторні випробування. Формула БЕРНУЛЛІ і асимптотичні формули обчислення ймовірностей

Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія A може відбутись з ймовірністю $P(A) = p$ або не відбутись з ймовірністю

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A), q = 1 - p.$$

Якщо ймовірність події у кожному випробуванні не залежить від того, відбулась вона в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називаються *незалежними щодо події A* .

Для розв'язування задач на повторні незалежні випробування застосовують такі формули і теореми.

✓ **Формула Бернуллі.** Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність $P(A) = p$, подія A відбудеться k раз, подається так:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Формулу рекомендується застосовувати, якщо $n \leq 10$.

✓ **Найімовірніша кількість.** Число k_0 настання події A в n незалежних повторних випробуваннях називається *найімовірнішою кількістю* (появи цієї події), якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Воно визначається за формулою:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

Зауважимо, що можна отримати одно або два найімовірніших числа.

✓ **Локальна теорема Лапласа.** Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких $P(A) = p$, подія A відбудеться k раз, подається такою наближеною залежністю:

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – стандартна функція, для якої є спеціальні таблиці. Ця функція **парна**: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Локальна теорема Лапласа дає змогу асимптотично (приблизно) обчислювати ймовірності $P_n(k)$, якщо $n > 10$ і $p > 0,1$.

✓ **Формула Пуассона (Закон рідких подій)**. Якщо в кожному з n незалежних повторних випробувань $P(A) = p$, причому $p \ll 1$ ($p < 0,1$), а n велике, то

$$P_n(k) \cong \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

✓ **Інтегральна теорема Лапласа**. Ймовірність того, що подія A відбудеться від k_1 до k_2 раз при проведенні n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю p , подається формулою:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Тут $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – інтеграл або інтегральна функція Лапласа. Значення функції Лапласа наводяться у спеціальних таблицях. Ця функція **непарна**: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Приклад 27. Проведено n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A з'являється з ймовірністю p . Визначити ймовірність того, що подія A з'явиться:

- рівно k разів,
- не менш ніж k_1 і не більш ніж k_2 раз (від k_1 до k_2 разів).
- знайти найімовірнішу кількість випробувань, в яких з'явиться подія A .

Якщо ↓, то →	n	k	k_1	k_2	p
$i \leq 5; j < 5$	$i + j + 4$	i	$i + 1$	$i + 3$	$0, (i + j + 1)$
$i \leq 5; j \geq 5$	$j + 2$	$i + 3$	i	$i + 2$	$0, (j - 2)$
$i \geq 5; j < 5$	$j + 7$	$i - 2$	$i - 5$	$i - 3$	$0, (j + 3)$
$i \geq 5; j \geq 5$	$i + j - 6$	$i - 4$	$i - 3$	$i - 1$	$0, (i + j - 2)$

де i, j – останні дві цифри номера студентського білета.

■ Нехай $i = 7$, а $j = 3$. Обираємо в таблиці відповідний рядок (третій) і обчислюємо потрібні величини:

$i \geq 5, j < 5$	n	k	k_1	k_2	p
	10	5	2	4	0,6

а) Користуємося формулою Бернуллі.

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^5 \cong 0,1213.$$

$$\text{б) } P_{10}(2 \leq k \leq 4) = P_{10}(2) + P_{10}(3) + P_{10}(4) =$$

$$= C_{10}^2 0,6^2 0,4^8 + C_{10}^3 0,6^3 0,4^7 + C_{10}^4 0,6^4 0,4^6 \cong 0,164.$$

в) За формулою $np - q \leq k_0 \leq np + p$ маємо наступне: $6 - 0,4 \leq k_0 \leq 6 + 0,6$; або $5,6 \leq k_0 \leq 6,6$. Єдине **ціле** число на цьому проміжку и буде найімовірнішою кількістю випробувань, в яких з'явиться подія A . $k_0 = 6$.

Приклад 28. Цех має 6 витяжних пристроїв. Ймовірність того, що на даний момент обладнання включено, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що на даний момент включено більше чотирьох пристроїв.

Користуємося формулою Бернуллі $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

$$P_6(k > 4) = P_6(k = 5) + P_6(k = 6) =$$

$$= C_6^5 \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^1 + C_6^6 \cdot 0,7^6 \cdot 0,3^0 \cong 0,4201.$$

Приклад 29. Партія із 10 000 виробів має 20 бракованих. Обчислити ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде рівно 2 бракованих.

Подія A – навмання вибраний виріб бракований.

$P(A) = 20/10\,000 = 0,002$ – дуже мала, треба користуватися формулою Пуассона (закон рідких подій):

$$P_n(k) \cong \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

Маємо $n = 50, k = 2, p = 0,002, np = 50 \cdot 0,002 = 0,1$.

$$P_{50}(2) = \frac{0,1^2}{2!} e^{-0,1} = 0,0045.$$

Приклад 30. Ймовірність влучення стрілкою у мішень при одному пострілі дорівнює 0,75. Обчислити ймовірність того, що при 100 пострілах буде рівно 70 влучень; не більше 70 влучень.

а) Подія A – стрілок влучить у мішень. $P(A) = 0,75 = p$, $n = 100$ – кількість випробувань велика, а ймовірність $p > 0,1$. Треба визначити ймовірність $P_{100}(70)$.

За локальною теоремою Лапласа:

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Спочатку знайдемо $x = \frac{70 - 100 \cdot 0,75}{\sqrt{100 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \cong 1,16$.

За таблицею $\varphi(-1,16) = \varphi(1,16) = 0,20357$.

$$P_{100}(70) \cong \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \cdot 0,20357 = 0,047.$$

б) Треба визначити ймовірність $P_{100}(k \leq 70)$, тобто $P_{100}(0 \leq k \leq 70)$, це можна зробити, скориставшись інтегральною теоремою Лапласа:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Обчислюємо

$$x_1 = \frac{0 - 100 \cdot 0,75}{\sqrt{100 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = -17,32;$$

$$x_2 = \frac{70 - 100 \cdot 0,75}{\sqrt{100 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = -1,155.$$

Значення $\Phi(-1,155) = -0,377$ та $\Phi(-17,32) = -0,5$ знаходимо в таблицях функції $\Phi(x)$ – інтеграла Лапласа.

$$P_{100}(0 \leq k \leq 70) = -0,377 - (-0,5) = 0,123.$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 7

Варіанти 1–30.

а) Проведено n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A з'являється з ймовірністю p . Визначити ймовірність того, що подія A :

- а) з'явиться рівно k разів;
- б) з'явиться не менш ніж k_1 і не більш ніж k_2 раз (від k_1 до k_2 разів);
- в) знайти найімовірнішу кількість випробувань, в яких з'явиться подія A .

Якщо ↓, то →	n	k	k_1	k_2	p
$i \leq 5; j < 5$	$i + j + 4$	i	$i + 1$	$i + 3$	$0, (i + j + 1)$
$i \leq 5; j \geq 5$	$j + 2$	$i + 3$	i	$i + 2$	$0, (j - 2)$
$i \geq 5; j < 5$	$j + 7$	$i - 2$	$i - 5$	$i - 3$	$0, (j + 3)$
$i \geq 5; j \geq 5$	$i + j - 6$	$i - 4$	$i - 3$	$i - 1$	$0, (i + j - 2)$

де i, j – останні дві цифри номера студентського білета.

! В усіх варіантах завдання **б)** вирішується за формулою Пуассона, а в завданнях **в)** – за теоремами Лапласа.

Варіант 1.

б) У партії з 10 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде рівно 1 бракований.

в) Знайти ймовірність того, що при 400 випробуваннях подія A настане рівно 104 рази; не менш ніж 104 рази, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

Варіант 2.

б) У партії з 10 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде не менше 1 бракованого.

в) Знайти ймовірність того, що при 2 400 випробуваннях подія A настане рівно 1 400 разів; не більш ніж 1 400 разів, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

Варіант 3.

б) У партії з 10 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів не буде жодного бракованого.

в) По мішені стріляють 100 разів. Ймовірність влучення у мішень при одному пострілі 0,75. Знайти ймовірність 80 влучень; ймовірність від 70 до 80 влучень.

Варіант 4.

б) У партії з 10 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде рівно 2 бракованих.

в) По мішені стріляють 100 разів. Ймовірність влучення у мішень при одному пострілі 0,75. Знайти ймовірність 70 влучень; ймовірність не більш ніж 70 влучень.

Варіант 5.

б) У партії з 10 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде не менше 2 бракованих.

в) Ймовірність появи події A в кожному з 2 100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно 1 500 разів; ймовірність настання події A від 1 470 до 1 500 разів.

Варіант 6.

б) У партії з 10 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде менше 2 бракованих.

в) Ймовірність появи події A в кожному з 2 100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно 1 470 разів; ймовірність настання події A не менше 1 470 разів.

Варіант 7.

б) У партії з 10 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде не менше 3 бракованих.

в) Ймовірність появи події A в кожному з 2 100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно 1 469 разів; ймовірність настання події A не більше 1 469 разів.

Варіант 8.

б) У партії з 10 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде менше 3 бракованих.

в) Монету кидають 200 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде рівно 100 разів; не менше 100 разів.

Варіант 9.

б) У партії з 5 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде рівно 1 бракований.

в) Монету кидають 200 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде рівно 120 разів; не менше 120 разів.

Варіант 10.

б) У партії з 5 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 100 виробів буде не менше 1 бракованого.

в) Монету кидають 200 разів. Знайти ймовірність того, що герб

випаде рівно 100 разів; від 100 до 120 разів.

Варіант 11.

б) У партії з 5 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 100 виробів не буде жодного бракованого.

в) Монету кидають 800 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде рівно 400 разів; не менше 400 разів.

Варіант 12.

б) У партії з 5 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 100 виробів буде рівно 2 бракованих.

в) Ймовірність появи події в кожному із 100 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність появи події рівно у 90 випробуваннях; у від 75 до 90 випробуваннях.

Варіант 13.

б) У партії з 5 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 100 виробів буде не менше 2 бракованих.

в) Ймовірність появи події в кожному зі 100 незалежних випробувань дорівнює 0,75. Знайти ймовірність появи події рівно у 75 випробуваннях; у не менш ніж 75 випробуваннях.

Варіант 14.

б) У партії з 5 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 100 виробів буде менш ніж 2 бракованих.

в) Ймовірність появи події в кожному зі 100 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність появи події рівно у 74 випробуваннях; у не більш ніж у 74 випробуваннях.

Варіант 15.

б) У партії з 5 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 100 виробів буде не менше 3 бракованих.

в) Знайти ймовірність того, що при 600 випробуваннях подія A настане рівно 104 рази; не більш ніж 104 рази, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

Варіант 16.

б) У партії з 10 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде менш 3 бракованих.

в) Знайти ймовірність того, що при 2 600 випробуваннях подія A настане рівно 1 400 разів; не більш ніж 1 400 разів, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,6.

Варіант 17.

б) У партії з 8 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде рівно 1 бракований.

в) Ймовірність влучення у мішень при одному пострілі 0,75. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах буде рівно 85 влучень; що влучень буде від 75 до 85.

Варіант 18.

б) У партії з 8 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде не менш ніж 1 бракований.

в) Ймовірність влучення у мішень при одному пострілі 0,75. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах буде рівно 75 влучень; що влучень буде не більш 75.

Варіант 19.

б) У партії з 8 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів не буде жодного бракованого.

в) Знайти ймовірність того, що при 2 000 випробуваннях подія A настане рівно 1 600 разів; від 1 500 до 1 600 разів, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,7.

Варіант 20.

б) У партії з 8 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде рівно 2 бракованих.

в) Знайти ймовірність того, що при 2 000 випробуваннях подія A настане рівно 1 500 разів; не менше 1 500 разів, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,7.

Варіант 21.

б) У партії з 8 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде не менше 2 бракованих.

в) Знайти ймовірність того, що при 2 000 випробуваннях подія A настане рівно 1 600 разів; не більше 1 600 разів, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,7.

Варіант 22.

б) У партії з 8 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде менше двох бракованих.

в) Знайти ймовірність того, що при 2 000 випробуваннях подія A настане рівно 1 499 разів; не більш 1 499 разів, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,7.

Варіант 23.

б) У партії з 8 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде не менше 3 бракованих.

в) Монету кидають 400 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде рівно 200 разів; не менш 200 разів.

Варіант 24.

б) У партії з 8 000 виробів 20 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 50 виробів буде менше 3 бракованих.

в) Монету кидають 400 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде рівно 250 разів; не менш 250 разів.

Варіант 25.

б) У партії з 5 000 виробів 50 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 100 виробів буде рівно 1 бракований.

в) Монету кидають 400 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде рівно 200 разів; від 200 до 250 разів.

Варіант 26.

б) У партії з 5 000 виробів 50 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 100 виробів буде не менше 1 бракованого.

в) Монету кидають 400 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде рівно 250 разів; більш 250 разів.

Варіант 27.

б) У партії з 5 000 виробів 50 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 100 виробів не буде жодного бракованого.

в) Монету кидають 400 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде рівно 240 разів; менш 240 разів.

Варіант 28.

б) У партії з 5 000 виробів 50 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 100 виробів буде рівно 2 бракованих.

в) Знайти ймовірність того, що при 200 випробуваннях подія A настане рівно 180 разів; від 150 до 180 разів, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,8.

Варіант 29.

б) У партії з 5 000 виробів 50 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 100 виробів буде не менше 2 бракованих.

в) Знайти ймовірність того, що при 200 випробуваннях подія A настане рівно 150 разів; не менше 150 разів, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,75.

Варіант 30.

б) У партії з 5 000 виробів 50 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 100 виробів буде менше 2 бракованих.

в) Знайти ймовірність того, що при 150 випробуваннях подія A настане рівно 100 разів; не більше 100 разів, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,8.

ЗАВДАННЯ 8

ДОВІДКА 8. Випадкові величини. Числові характеристики випадкових величин

Випадкова величина (ВВ) – величина, яка в разі випробувань може набувати різних числових значень з різними ймовірностями. Якщо всі ці значення можна перелічити, випадкова величина називається **дискретною (ДВВ)**. Якщо неможливо перелічити всі значення – **неперервною випадковою величиною (НВВ)**.

Позначення $X = \{x_1; x_2; \dots x_n\}$ читається як: ДВВ X може набувати значень $x_1; x_2; \dots x_n$.

Співвідношення між значеннями випадкової величини і їхніми ймовірностями називається **законом розподілу випадкової величини**.

Закони розподілу випадкових величин задаються:

ДВВ	НВВ
■ У табличній формі (у таблиці подаються значення випадкової величини x_i у порядку зростання та їхні ймовірності p_i). $\sum_{i=1}^n p_i = 1$	■ В аналітичній формі, тобто у вигляді <i>функції щільності розподілу</i> $f(x)$. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
■ Найбільш поширений універсальний спосіб завдання закону розподілу ймовірностей – функція розподілу $F(x) = P(X < x)$. Функція розподілу – не спадна, неперервна зліва. Ймовірність влучення ВВ в інтервал $[\alpha; \beta) : P(\alpha \leq x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$. Для ДВВ це накопичувальна сума $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$	Для НВВ це невласний інтеграл $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$
З огляду на зв'язок між функціями: $f(x) = F'(x)$ їм дали такі назви: $f(x)$ – диференціальна функція; $F(x)$ – інтегральна функція.	

ДВВ	НВВ
■ Графічна форма – у прямокутній системі координат задається набір точок $(x_i; p_i)$, сполучивши точки відрізками прямих, дістанемо <i>многокутник розподілу</i> ймовірностей.	■ Графічна форма – графік функції щільності розподілу.

Графіки функцій розподілу ДВВ и НВВ та інших функцій наведені у прикладах.

Числові характеристики випадкових величин та їх обчислення.

Математичне сподівання M_x випадкової величини характеризує середнє значення X .

$M_x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$	$M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$
------------------------------------	--

Дисперсія D_x випадкової величини характеризує розсіювання значень X навколо її середнього значення M_x і визначається за формулою:

$$D_x = M(X - M_x)^2 = M(X^2) - M_x^2.$$

$D_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - M_x^2$	$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - M_x^2$
--	--

Середнє квадратичне відхилення σ_x (*сигма*) є квадратним коренем із дисперсії. $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Медіаною M_e випадкової величини є значення X , для якого

$$P(x < M_e) = P(x > M_e) = 0,5.$$

Мода випадкової величини M_0 – це таке значення ВВ, ймовірність якого найбільша.

Приклад 31. ДВВ. Закон розподілу дискретної випадкової величини X заданий таблицею:

x_i	$i - j - 2$	$i - j - 1$	$i - j$	$i - j + 1$	$i - j + 2$	$i - j + 3$
p_i	$\frac{i+2}{k}$	$\frac{j+1}{k}$	$\frac{i+4}{k}$	$\frac{j+3}{k}$	$\frac{i+3}{k}$	$\frac{j+2}{k}$

де $k = 3(i + j + 5)$.

- побудувати багатокутник розподілу;
- записати інтегральну функцію розподілу та побудувати її графік;
- обчислити числові характеристики M_x , D_x , σ_x , M_0 . Позначити M_x , M_0 на графіку багатокутника розподілу;
- знайти ймовірність попадання ВВ в інтервал $[i - j - 3; i - j + 1]$.

■ Нехай $i = 4, j = 5$.

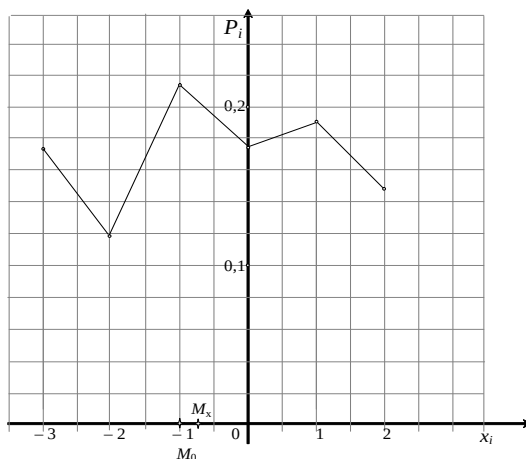
Маємо закон розподілу:

x_i	-3	-2	-1	0	1	2
p_i	$\frac{7}{42}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{9}{42}$	$\frac{7}{42}$	$\frac{8}{42}$	$\frac{6}{42}$
p_i	0,167	0,119	0,214	0,167	0,190	0,143

Зауваження. Ймовірності p_i краще перерахувати у десятковому дробу. Але при округленні (бажано до трьох знаків) треба переконатися, що

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

- Побудова багатокутника розподілу заданої ДВВ.

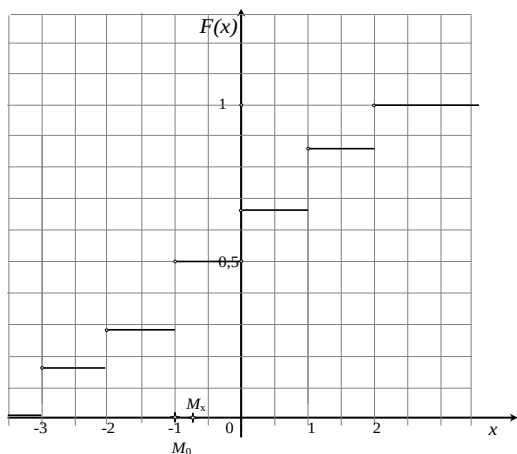


б) Інтегральна функція розподілу і пояснення розрахунків. Кожне наступне значення функції розподілу знаходять додаванням до попереднього значення ймовірності з таблиці. Обчислення у простих дробах:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq -3; \\ 0 + \frac{7}{42} = \frac{7}{42}; & -3 < x \leq -2; \\ \frac{7}{42} + \frac{5}{42} = \frac{12}{42}; & -2 < x \leq -1; \\ \frac{12}{42} + \frac{9}{42} = \frac{21}{42}; & -1 < x \leq 0; \\ \frac{21}{42} + \frac{7}{42} = \frac{28}{42}; & 0 < x \leq 1; \\ \frac{28}{42} + \frac{8}{42} = \frac{36}{42}; & 1 < x \leq 2; \\ \frac{36}{42} + \frac{6}{42} = \frac{42}{42} = 1; & x > 2. \end{cases}$$

Обчислення у десяткових дробах:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq -3; \\ 0 + 0,167 = 0,167; & -3 < x \leq -2; \\ 0,167 + 0,119 = 0,286; & -2 < x \leq -1; \\ 0,286 + 0,214 = 0,500; & -1 < x \leq 0; \\ 0,500 + 0,167 = 0,667; & 0 < x \leq 1; \\ 0,667 + 0,190 = 0,857; & 1 < x \leq 2; \\ 0,857 + 0,143 = 1; & x > 2. \end{cases}$$



Будувати графіки краще, якщо функції обчислені в десяткових дробах.

в) Обчислення числових характеристик.

Математичне сподівання (середнє значення):

$$M_x = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot p_i.$$

$$\begin{aligned} M_x &= -3 \cdot \frac{7}{42} - 2 \cdot \frac{5}{42} - 1 \cdot \frac{9}{42} + 0 \cdot \frac{7}{42} + 1 \cdot \frac{8}{42} + 2 \cdot \frac{6}{42} = \\ &= -\frac{20}{42} = -0,476. \end{aligned}$$

Дисперсія:

$$D_x = \sum_{i=1}^6 x_i^2 \cdot p_i - M_x^2.$$

Спочатку рахуємо математичне сподівання квадрата випадкової величини:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 x_i^2 \cdot p_i &= (-3)^2 \cdot \frac{7}{42} + (-2)^2 \cdot \frac{5}{42} + (-1)^2 \cdot \frac{9}{42} + \\ &+ 0^2 \cdot \frac{7}{42} + 1^2 \cdot \frac{8}{42} + 2^2 \cdot \frac{6}{42} = \frac{124}{42} \cong 2,952 \end{aligned}$$

Від нього віднімаємо квадрат математичного сподівання випадкової величини:

$$D_x = 2,952 - (-0,476)^2 = 2,725.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{2,725} = 1,651.$$

Мода $M_0 = -1$, тому що це значення ВВ має найбільшу ймовірність.

г) знайдемо ймовірність попадання ВВ в інтервал $(-2; 2]$ за допомогою правила додавання (завдання 1, приклад 1), тому що ВВ у заданому інтервалі може набувати значення або -1 , або 0 , або 1 , або 2 з відповідними ймовірностями із закону розподілу:

$$\begin{aligned} P(-2 < x \leq 2) &= P(x = -1) + P(x = 0) + P(x = 1) + \\ &+ P(x = 2) = 0,214 + 0,167 + 0,190 + 0,143 = 0,714. \end{aligned}$$

Приклад 32. НВВ. Задано функцію розподілу неперервної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq i; \\ \frac{x^2 - (i-j)x - ij}{(i+j+1)}, & i \leq x \leq i+1; \\ 1; & x \geq i+1. \end{cases}$$

- знайти щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X ;
- побудувати графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$;
- обчислити числові характеристики M_x, D_x, σ_x ;
- знайти ймовірність попадання ВВ в інтервал $[i-1; i+0,75]$.

■ Нехай $i = 3, j = 6$.

Функція розподілу має вигляд:

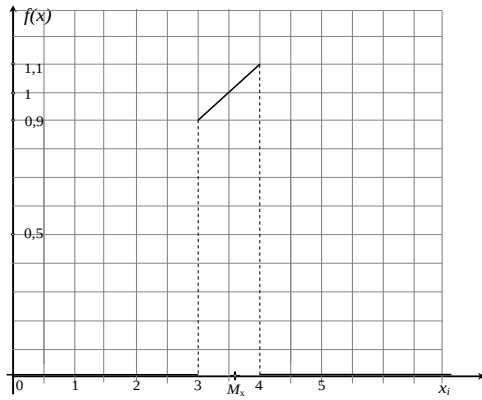
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3; \\ \frac{1}{10}(x^2 + 3x - 18); & 3 \leq x < 4; \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

- Щільність розподілу випадкової величини $f(x) = F'(x)$:

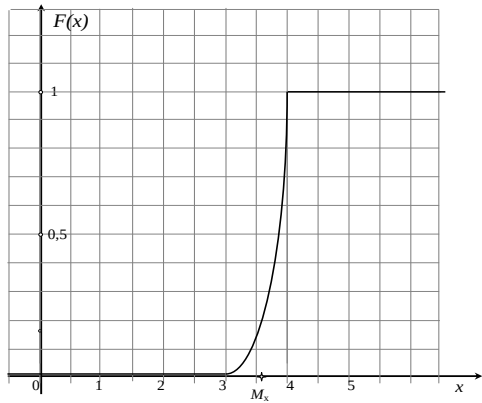
$$f(x) = \begin{cases} 0; & x < 3; \\ \frac{1}{10}(2x + 3); & 3 \leq x < 4; \\ 0; & x \geq 4. \end{cases}$$

- Графіки.

Функція *щільності розподілу* буде прямою лінією для $3 \leq x < 4$, і буде дорівнювати нулю для усіх інших значень ВВ x . Знайдемо точки для зображення прямої: $f(3) = 0,9$ і $f(4) = 1,1$.



Неважко перевірити, що функція *розподілу* має значення: $F(3) = 0$ и $F(4) = 1$. Між ними знаходиться парабола, бо функція подана квадратичною залежністю.



в) Числові характеристики.

$$M_x = \int_3^4 \frac{x}{10} \cdot (2x + 3) dx = \frac{1}{10} \cdot \left(2 \cdot \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_3^4 = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (64 - 27) + \frac{3}{2} \cdot (19 - 9) \right) = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{74}{3} - \frac{21}{2} \right) \approx 3,517.$$

Дисперсію обчислюємо за формулою $D_x = M[X^2] - M_x^2$.
Спочатку вираховуємо математичне сподівання квадрата випадкової величини:

$$\begin{aligned} M[X^2] &= \int_3^4 \frac{x^2}{10} \cdot (2x + 3) dx = \frac{1}{10} \cdot \left(2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_3^4 = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{256 - 81}{2} + (64 - 27) \right) = \frac{249}{20} \approx 12,450. \end{aligned}$$

Тепер маємо

$$D_x = M[X^2] - M_x^2 = 12,45 - 3,52^2 = 0,0596.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0,0596} = 0,244.$$

г) знайдемо ймовірність попадання ВВ в інтервал $[2; 3,75]$ за допомогою функції розподілу: $P(\alpha \leq x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$;

$$P(-2 \leq x < 2) = F(3,75) - F(2),$$

$$F(3,75) = \frac{1}{10} (3,75^2 + 3 \cdot 3,75 - 18) = 0,731,$$

$$F(2) = 0,$$

$$P(-2 \leq x < 2) \cong 0,731,$$

або за допомогою функції щільності розподілу ($f(x) = 0$ при $2 < x < 3$):

$$\begin{aligned} P(2 \leq x < 3,75) &= \int_2^{3,75} f(x) dx = \int_2^{3,75} \frac{x}{10} \cdot (2x + 3) dx = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2 \cdot x^3}{3} + \frac{3 \cdot x^2}{2} \right) \Big|_2^{3,75} = \frac{1}{10} \cdot (5,0625 + 2,25) \approx 0,731. \end{aligned}$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 8

Варіанти 1–30.

А. **ДВВ**. Закон розподілу дискретної випадкової величини X заданий таблицею:

x_i	$i - j - 2$	$i - j - 1$	$i - j$	$i - j + 1$	$i - j + 2$	$i - j + 3$
p_i	$\frac{i+2}{k}$	$\frac{j+1}{k}$	$\frac{i+4}{k}$	$\frac{j+3}{k}$	$\frac{i+3}{k}$	$\frac{j+2}{k}$

де $k = 3(i + j + 5)$.

- а) побудувати багатокутник розподілу;
- б) записати інтегральну функцію розподілу та побудувати її графік;
- в) обчислити числові характеристики M_x, D_x, σ_x, M_0 . Позначити M_x, M_0 на графіку багатокутника розподілу;
- г) знайти ймовірність попадання ВВ в інтервал $[i - j - 3; i - j + 1]$.

Б. **НВВ**. Задано функцію розподілу неперервної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq i; \\ \frac{x^2 - (i-j)x - ij}{(i+j+1)}, & i \leq x \leq i+1; \\ 1; & x \geq i+1. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X ;
- б) побудувати графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$;
- в) обчислити числові характеристики M_x, D_x, σ_x ;
- г) знайти ймовірність попадання ВВ в інтервал $[i - 1; i + 0,75]$.

ЗАВДАННЯ 9

ДОВІДКА 9. Випадкові величини. Основні закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин

Основні типи розподілів дискретних випадкових величин.

✓ Біноміальний закон розподілу.

Біноміальним називається закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появ події A в n незалежних повторних випробуваннях, в кожному з яких події A може наступити з ймовірністю p ($0 < p < 1$) або не наступити з ймовірністю $q = 1 - p$. Тоді $P(X = m)$ – можливість появи події A рівно m ($0, 1, 2, \dots, n$) раз в n випробуваннях обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Біноміальний закон розподілу з параметром p ($0 < p < 1$) задається наступною таблицею:

$X = m$	0	1	2	...	m	...	n
$P(X = m)$	q^n	$C_n^1 p^n q^{n-1}$	$C_n^2 p^n q^{n-2}$	...	$C_n^m p^n q^{n-m}$	...	p^n

Числові характеристики біноміального закону розподілу:

$$M_x = n \cdot p;$$

$$D_x = n \cdot p \cdot q;$$

$$\sigma_x = \sqrt{n \cdot p \cdot q},$$

$$n \cdot p - q \leq M_0 \leq n \cdot p + p.$$

✓ Закон розподілу Пуассона.

Формула Бернуллі зручна для обчислень лише при порівняно невеликому числі випробувань. Якщо число незалежних випробувань n спрямувати до нескінченності $n \rightarrow \infty$, а ймовірність p спрямувати до нуля $p \rightarrow 0$ так, щоб $n \cdot p$ прагнуло до деякої постійної λ ,

то біноміальний розподіл буде необмежено наближатися до розподілу Пуассона. У загальному випадку говорять, що випадкова величина X розподілена за законом Пуассона с параметром $\lambda > 0$, якщо вона може приймати тільки цілі невід'ємні значення $0, 1, 2, \dots, m, \dots$, а ймовірності цих значень визначаються формулою Пуассона:

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda),$$

де e – число Ейлера, експонента ($e \approx 2,718$).

Закон розподілу Пуассона з параметром $\lambda > 0$ задається наступною таблицею:

$X = m$	0	1	2	...	m	...
$P(X = m)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$	...

Числові характеристики закону розподілу Пуассона:

$$M_x = \lambda;$$

$$D_x = \lambda;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\lambda},$$

$$\lambda - 1 \leq M_0 \leq \lambda.$$

✓ Геометричний закон розподілу.

I випадок.

Випадкова величина X визначається як число незалежних випробувань, які потрібно зробити до першої появи події A . Можливі значення цієї випадкової величини: $1, 2, \dots, m, \dots$, а ймовірність кожного з

II випадок.

Якщо випадкова величина X , визначає число невдач, що передують успіху, теж маємо геометричний закон розподілу. Можливі значення цієї випадкової величини: $0, 1, 2, \dots, m, \dots$, а ймовірність кожного з цих зна-

цих значень визначається за формулою:

$$P(X = m) = q^{m-1} \cdot p \qquad P(X = m) = q^m \cdot p.$$

де p ($0 < p < 1$) – ймовірність настання події A , $q = 1 - p$ – ймовірність того, що подія A не відбудеться.

Для I випадку геометричний закон розподілу з параметром p ($0 < p < 1$) задається наступною таблицею:

$X = m$	1	2	...	m	...
$P(X = m)$	p	$p \cdot q$	...	$q^{m-1} \cdot p$	...

Для II випадку геометричний закон розподілу з параметром p ($0 < p < 1$) задається наступною таблицею:

$X = m$	0	1	...	m	...
$P(X = m)$	p	$p \cdot q$	...	$q^m \cdot p$	...

Числові характеристики геометричного закону розподілу:

I випадок.

$$M_x = \frac{1}{p};$$

$$D_x = \frac{q}{p^2};$$

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

II випадок.

$$M_x = \frac{1}{q};$$

$$D_x = \frac{q}{p^2};$$

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

✓ **Гіпергеометричний закон розподілу.**

Нехай є множина N елементів, з яких M елементів мають деяку ознаку A . Витягується випадковим чином без повернення n елементів. Потрібно знайти ймовірність того, що з них m елементів

мають ознаку A . Така ймовірність (що залежить від N, M, n, m) ви-
значається за формулою:

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

де m – таке, що $0 \leq m \leq n, m \leq M$ і $n - m \leq N - M$.

Якщо за цією формулою обчислити ймовірності для всіх
можливих значень m , то отриманий ряд розподілу називається гі-
пергеометричну законом розподілу:

$X = m$	0	1	...	m	...	n
$P(X = m)$	$\frac{C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 \cdot C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	...	$\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	...	$\frac{C_M^n}{C_N^n}$

**Числові характеристики гіпергеометричного закону роз-
поділу:**

$$M_x = \frac{n \cdot M}{N};$$

$$D_x = \frac{n \cdot M \cdot (N - m)}{N^2} \cdot \frac{N - n}{N - 1};$$

$$M_o = \frac{(M + 1) \cdot (n + 1)}{N + 2}.$$

Основні типи розподілів неперервних випадкових величин.

✓ Закон рівномірного розподілу ймовірностей.

Випадкова величина X називається рівномірно розподіле-
ною на відрізьку $[a, b]$, якщо її щільність розподілу ймовірностей
має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \end{cases}$$

Функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & b < x < +\infty \end{cases}$$

Числові характеристики рівномірного закону розподілу:

$$M_x = \frac{a+b}{2};$$

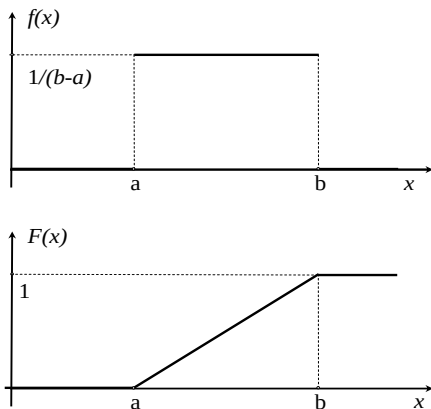
$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$M_e = M_x; \quad M_o - \text{не має.}$$

Ймовірність того, що випадкова величина X , яка рівномірно розподілена на відрізку $[a, b]$, потрапить на відрізок (α, β) , який цілковито належить відрізку $[a, b]$ дорівнюється:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Графіки щільності $f(x)$ і функції $F(x)$ рівномірного розподілу:



✓ **Закон експоненціального розподілу ймовірностей.**

Випадкова величина X називається експоненціальна розподіленою с параметром $\lambda > 0$, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

Функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

Числові характеристики експоненціального закону розподілу:

$$M_x = \frac{1}{\lambda};$$

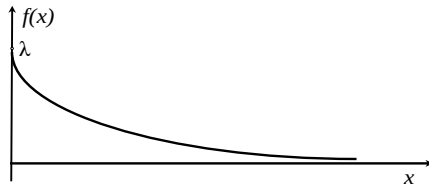
$$D_x = \frac{1}{\lambda^2};$$

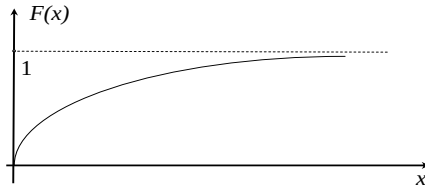
$$M_e = \frac{\ln 2}{\lambda}; M_o = 0.$$

Ймовірність того, що випадкова величина X , яка має експоненціальний розподіл, потрапить на відрізок (α, β) дорівнюється:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-\lambda \cdot \alpha} - e^{-\lambda \cdot \beta}.$$

Графіки щільності $f(x)$ і функції $F(x)$ рівномірного розподілу:





Зауваження. Експоненціальний закон розподілу ймовірностей зустрічається у багатьох задачах, пов'язаних з найпростішим потоком подій. Під потоком подій мають на увазі послідовність подій, що трапляються одна за одною у випадкові моменти.

✓ **Закон нормального розподілу ймовірностей.**

Випадкова величина X називається нормально розподіленою з параметрами (a, σ) , якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}}.$$

Функція розподілу:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Числові характеристики рівномірного закону розподілу:

$$M_x = a; \quad D_x = \sigma^2; \quad M_e = M_o = a.$$

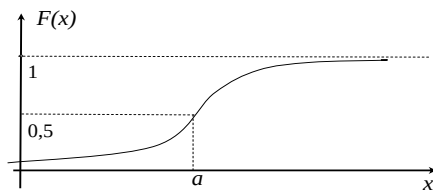
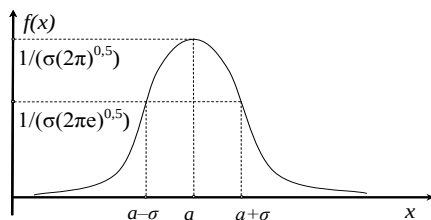
Ймовірність того, що випадкова величина X , яка має нормальний розподіл з параметрами (a, σ) , потрапить на відрізок (α, β) дорівнюється:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Ймовірність того, що випадкова величина X , яка має нормальний розподіл с параметрами (a, σ) , відхилиться від свого математичного сподівання не більше, ніж на величину δ , дорівнюється:

$$P\{|X - a| < \delta\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Графіки щільності $f(x)$ і функції $F(x)$ рівномірного розподілу:



Правило трьох сигм. Ймовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого математичного очікування на величину більшу, ніж потроєне середнє квадратичне відхилення, практично дорівнює нулю. Правило справедливо тільки для випадкових величин, розподілених за нормальним законом.

$$P\{|X - a| < 3 \cdot \sigma\} \approx 0,9973.$$

Приклад 33. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням $a_z = 2$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma_z = 3$. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – число дослідів з 3-х, коли $2,5 < Z < 5$.

Скористаємось формулою для знаходження ймовірності потрапляння випадкової величини на певний відрізок і знайдемо ймовірність потрапляння випадкова величина Z на відрізок $[2,5; 5]$:

$$P(2,5 \leq Z \leq 5) = F(5) - F(2,5) = \Phi\left(\frac{5-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2,5-2}{3}\right) = \\ = \Phi(1) - \Phi(0,167) = 0,341 - 0,067 = 0,274.$$

Побудуємо закон розподілу випадкової величини X – число дослідів з 3-х, коли $2,5 < Z < 5$. X – дискретна випадкова величина, яка має біноміальний розподіл і може приймати наступні значення: $X: \{0, 1, 2, 3\}$. Побудуємо закон розподілі випадкової величини X .

$X = m$	0	1	2	3
$P(X = m)$	0,383	0,433	0,164	0,021

$$P(X = 0) = 0,726^3 = 0,383,$$

$$P(X = 1) = 3 \cdot 0,274^1 \cdot 0,726^2 = 0,433,$$

$$P(X = 2) = 3 \cdot 0,274^2 \cdot 0,726^1 = 0,16,$$

$$P(X = 3) = 0,274^3 = 0,021.$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 9

Варіант 1.

а. Випадкова величина X розподілена по рівномірному закону в інтервалі $[-2; 4]$. Знайти ймовірність того, що при проведенні 390 випробувань, хоча б в 130 відхилення випадкової величини X від M_x не перевищує одиниці.

б. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $\mu = 2$ і $\sigma = 2$. Знайти ймовірність того, що в 100 проведених випробуваннях величина X буде приймати значення більше трьох більше ніж у 60 випробуваннях.

Варіант 2.

а. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $\mu = 0$ і $\sigma = 2$. Знайти ймовірність того, що в 100 проведених вимірюваннях від 40 до 60 разів величина X буде лежати в інтервалі $[-1; 2]$.

б. Випадкова величина X розподілена по рівномірному закону в інтервалі $[0; 10]$. Знайти ймовірність того, що при проведенні 200 вимірювань, хоча б в 100 відхилення випадкової величини X від M_x на перевищить 2.

Варіант 3.

а. Для випадкової величини Z відома функція розподілу:

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - e^{-3 \cdot z}, & z > 0 \end{cases}$$

Визначивши закон розподілу, знайти математичне сподівання, дисперсію Z і ймовірність того, що при проведенні 3-х спостережень хоча б в одному буде $Z > 0,5$.

б. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням 2 і середнім квадратичним відхиленням 3. Знайти ймовірність того, що принаймні в двох з шести проведених дослідів величина X не потрапить в інтервал від 0 до 4.

Варіант 4.

а. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом і всі її можливі спостережливі значення потрапили в інтервал $[6; 12]$. Знайти ймовірність того, що принаймні в трьох з чотирьох вимірювань відхилення Z від математичного очікування не перевищить 2.

б. Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі $[10; 16]$. Проведено 100 вимірювань, причому вдалим вважається таке, коли величина X за абсолютним значенням відхилиться від математичного очікування менш, ніж на 2. Знайти ймовірність того, що буде проведено 50 успішних дослідів.

Варіант 5.

а. Випадкова величина X розподілена по експоненціальному закону з дисперсією, рівній 4. Знайти ймовірність того, що більш ніж в 42 дослідах з 100 проведених величина X буде більше 2.

б. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з $\alpha_z = 0$ і $\sigma_z = 5$. Проведено 100 вимірювань, серед яких вдалими є ті, коли величина Z лежить в інтервалі $[-5; 0]$. Знайти ймовірність того, що було проведено понад 60 вдалив вимірювань.

Варіант 6.

а. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням 2 і середнім квадратичним відхиленням 3. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – число дослідів з 3-х, коли $Z > 5$.

б. Для випадкової величини Z відома функція розподілу:

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - e^{-5 \cdot z}, & z > 0 \end{cases}$$

Визначивши закон розподілу, знайти математичне сподівання, дисперсію Z і ймовірність того, що при проведенні 5-ти спостережень хоча б в одному буде $Z > 0,5$.

Варіант 7.

а. Проводиться зважування деякої речовини. Випадкові помилки зважування підпорядковані нормальному закону із середнім квад-

98

ратичним відхиленням 20 і математичним очікуванням 0. Оцінити ймовірність того, що при триразовому зважуванні хоча б один раз абсолютна величина помилки буде більше 15.

б. Випадкова величина X розподілена по експоненціальному закону з дисперсією, рівній 3. Знайти ймовірність того, що більш ніж в 35 дослідах з 100 проведених величина X буде більше 2.

Варіант 8.

а. Випадкова величина Y розподілена по рівномірному закону з $M_y = 5$; $\sigma_y = \sqrt{3}$. Знайти M_z, D_z, M_{oz} для випадкової величини Z - число дослідів з 4-х, коли значення Y потрапляє в інтервал $[2; 4]$.

б. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з $a_z = 1$ і $\sigma_z = 5$. Проведено 100 вимірювань, серед яких вдалими є ті, коли величина Z лежить в інтервалі $[-1; 3]$. Знайти ймовірність того, що було проведено понад 75 вдалих вимірювань.

Варіант 9.

а. Випадкова величина X розподілена по експоненціальному закону з $M_x = 4$. Знайти ймовірність того, що більш ніж в 64 дослідах з 200 проведених величина X буде більше 4.

б. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням 2 і середнім квадратичним відхиленням 10. Знайти ймовірність того, що принаймні в двох з шести проведених дослідів величина X не потрапить в інтервал від 0 до 5.

Варіант 10.

а. Проводиться зважування деякої речовини. Випадкові помилки зважування підпорядковані нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням 30 гр і математичним очікуванням 0 гр. Оцінити ймовірність того, що при п'ятикратному зважуванні хоча б два рази абсолютна величина помилки буде менше 20 гр.

б. Випадкова величина Y розподілена по рівномірному закону з $M_y = 6$; $\sigma_y = \sqrt{3}$. Знайти M_z, D_z, M_{oz} для випадкової величини Z - число дослідів з 4-х, коли значення Y потрапляє в інтервал $[3; 5]$.

Варіант 11.

а. Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі $[10; 14]$. Проведено 100 вимірювань, причому вдалим вважається таке, коли величина X за абсолютним значенням відхилиться від математичного очікування менше, ніж на 1. Знайти ймовірність того, що буде проведено 50 успішних дослідів.

б. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з $\alpha_z = 2$ і $\sigma_z = 1,5$. Побудувати графік функції розподілу випадкової величини X – число дослідів з двох проведених, при якому величина Z лежить в інтервалі $[1; 3]$.

Варіант 12.

а. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з $\alpha_z = 0,5$ і $\sigma_z = 1$. Знайти ймовірність того, що при проведенні 5 дослідів, хоча б в 3-х абсолютна величина Z буде менше 1.

б. Для випадкової величини Z відома функція розподілу:

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - e^{-2 \cdot z}, & z > 0 \end{cases}$$

Визначивши закон розподілу, знайти математичне сподівання, дисперсію і ймовірність того, що $Z > 0,5$ принаймні від 20 до 40 разів при проведенні 100 спостережень.

Варіант 13.

а. Випадкова величина X розподілена по рівномірному закону в інтервалі $[0; 6]$. Знайти ймовірність того, що при проведенні 300 вимірювань, хоча б в 125 значеннях X відхиляється від M_x на величину не більше 1.

б. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом і все її можливі спостережливі значення потрапили в інтервал $[6; 12]$. Знайти ймовірність того, що принаймні в трьох з чотирьох вимірювань відхилення Z від математичного очікування не перевищить 3.

Варіант 14.

а. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням 2 і середнім квадратичним відхиленням 100

ням 10. Знайти ймовірність того, що принаймні в двох з шести проведених дослідів величина X не потрапить в інтервал від 0 до 5.

б. Випадкова величина X розподілена по рівномірному закону в інтервалі $[1; 7]$. Проведено 100 дослідів, причому фіксувалися такі, де відхилення величини X за абсолютним значенням від математичного очікування було більше 2. Знайти ймовірність того, що було зафіксовано понад 70 результатів.

Варіант 15.

а. Для випадкової величини Z відома функція розподілу:

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - e^{-2 \cdot z}, & z > 0 \end{cases}$$

Визначивши закон розподілу, знайти математичне сподівання, дисперсію і ймовірність того, що $Z > 0,5$ принаймні від 30 до 40 разів при проведенні 100 спостережень.

б. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $\mu = 2$ і $\sigma = 3$. Знайти ймовірність того, що в 100 проведених випробуваннях величина X буде приймати значення більше чотирьох більше ніж у 60 випробувань.

Варіант 16.

а. Випадкова величина X розподілена по рівномірному закону в $[2; 7]$. Проведено 100 дослідів, причому фіксувалися такі, де відхилення величини X за абсолютним значенням від математичного очікування було більше 1. Знайти ймовірність того, що було зафіксовано понад 60 результатів.

б. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом і всі її можливі спостережливі значення потрапили в інтервал $[0; 6]$. Знайти ймовірність того, що принаймні в трьох з чотирьох вимірювань відхилення Z від математичного очікування не перевищить 2.

Варіант 17.

а. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з $\mu_z = 2$ і $\sigma_z = 0,5$. Побудувати графік функції розподілу випадкової

величини X – число дослідів з двох проведених, при якому величина Z лежить в інтервалі $[1,5; 3]$.

б. Випадкова величина X розподілена по експоненціальному закону з дисперсією, рівній 4. Побудувати функцію розподілу випадкової величини Z – число спостережень із 3-х, коли величина X буде більше 1.

Варіант 18.

а. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з параметрами $a_z = 0$ і $\sigma_z = 2$. Знайти ймовірність того, що в 100 проведених вимірювань від 40 до 60 разів величина Z буде знаходитись в інтервалі $[-1; 2]$.

б. Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі $[1; 5]$. Проведено 50 вимірювань, причому вдалим вважається таке, коли величина X за абсолютним значенням відхилиться від математичного очікування менше, ніж на 2. Знайти ймовірність того, що буде проведено 20 успішних дослідів.

Варіант 19.

а. Для випадкової величини Z відома функція розподілу:

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - e^{-2 \cdot z}, & z > 0 \end{cases}$$

Визначивши закон розподілу, знайти математичне сподівання, дисперсію Z і ймовірність того, що при проведенні 3-х спостережень хоча б в одному буде $Z > 1$.

б. Проводиться зважування деякої речовини. Випадкові помилки зважування підпорядковані нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням 10 гр. і математичним очікуванням 30 гр. Оцінити ймовірність того, що при триразовому зважуванні хоча б один раз абсолютна величина помилки буде більше 20 гр.

Варіант 20.

а. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з $a = 0$ і $\sigma = 2$. Знайти ймовірність того, що в 100 проведених вимірювань, хоча б в 48 величина X буде лежати в інтервалі $[-1; 1]$.

б. Випадкова величина Y розподілена по рівномірному закону з $M_y = 4$; $\sigma_y = \sqrt{3}$. Знайти M_z, D_z, M_{oz} для випадкової величини Z - число дослідів з 3-х, коли значення Y потрапляє в інтервал $[1; 4]$.

Варіант 21.

а. Випадкова величина X розподілена по експоненціальному закону з дисперсією, рівній 4. Побудувати функцію розподілу випадкової величини Z – число спостережень із 4-х, коли величина X буде більше 2.

б. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з параметрами $a_z = 6$ і $\sigma_z = 2$. Знайти ймовірність того, що в 100 проведених вимірювань від 40 до 60 разів величина Z буде знаходитись в інтервалі $[0; 2]$.

Варіант 22.

а. Проводиться зважування деякої речовини. Випадкові помилки зважування підпорядковані нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням 20 гр. і математичним очікуванням 10 гр. Оцінити ймовірність того, що при триразовому зважуванні хоча б один раз абсолютна величина помилки буде більше 15 гр.

б. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з $a_z = 0,5$ і $\sigma_z = 0,5$. Знайти ймовірність того, що при проведенні чотирьох дослідів, хоча б в двох абсолютна величина Z буде менше 1,5.

Варіант 23.

а. Випадкова величина X розподілена по експоненціальному закону з $M_x = 1$. Побудувати закон розподілу випадкової величини Y – число вимірювань з двох проведених, при яких $X < 2$.

б. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з параметрами $a_z = 0$ і $\sigma_z = 2$. Знайти ймовірність того, що в 100 проведених вимірювань в 60 з них величина Z буде знаходитись в інтервалі $[-3; 1]$.

Варіант 24.

а. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з $a_z = 0$ і $\sigma_z = 5$. Проведено 200 вимірювань, серед яких вдалими є ті, коли величина Z лежить в інтервалі $[-5; 0]$. Знайти ймовірність того, що було проведено понад 80 вдалих вимірювань.

б. Випадкова величина X розподілена по експоненціальному закону з дисперсією, рівній 3. Знайти ймовірність того, що більш ніж в 30 дослідах з 100 проведених величина X буде більше 3.

Варіант 25.

а. Для випадкової величини X відома функція розподілу.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-4 \cdot x}, & x > 0 \end{cases}$$

Визначивши закон розподілу, знайти M_x і ймовірність того, що $X > 1$.

б. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням $a_x = 2$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma_x = 1$. Знайти ймовірність того, що принаймні у двох з п'яти проведених дослідів величина X не потрапить в інтервал $[0; 4]$.

Варіант 26.

а. Проводиться зважування деякої речовини. Випадкові помилки зважування підпорядковані нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням 15 гр. і математичним очікуванням 0 гр. Оцінити ймовірність того, що при п'ятикратному зважуванні хоча б два рази абсолютна величина помилки буде менше 20 гр.

б. Випадкова величина X розподілена по експоненціальному закону з $M_x = 5$. Знайти ймовірність того, що більш ніж в 30 дослідах з 100 проведених, випадкова величина X буде більше 3.

Варіант 27.

а. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з $a_x = 0$ і $\sigma_x = 0,2$. Проведено 2 вимірювання, причому вимір вважається вдалим, якщо значення X лежить в інтервалі $[0; 0,2]$.

Побудувати закон розподілу випадкової величини Y – числа вдалих вимірювань серед двох проведених.

б. Випадкова величина X розподілена по експоненціальному закону з $M_x = 1$. Побудувати закон розподілу випадкової величини Y – число вимірювань з двох проведених, при яких $X < 1,5$.

Варіант 28.

а. Рівномірно розподілена випадкова величина X має $M_x = 10$ і $D_x = 3$. Знайти ймовірність того, що при проведенні 200 дослідів значення випадкової величини X потрапить в інтервал $[11, 13]$ від 60 до 70 разів.

б. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з параметрами $a_z = 0$ і $\sigma_z = 0,5$. Знайти ймовірність того, що в 100 проведених вимірювань від 35 до 65 разів величина Z буде знаходитись в інтервалі $[-1; 1]$.

Варіант 29.

а. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним очікуванням $a_x = 2$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma_x = 10$. Знайти ймовірність того, що принаймні у двох з п'яти проведених дослідів випадкова величина X не потрапить в інтервал $[0; 5]$.

б. Для випадкової величини X відома функція розподілу.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-4 \cdot x}, & x > 0 \end{cases}$$

Визначивши закон розподілу, знайти M_x і ймовірність того, що $X > 3$.

Варіант 30.

а. Випадкова величина X розподілена по експоненціальному закону з $M_x = 2$. Знайти ймовірність того, що більш ніж в 37 дослідах з 100 проведених, випадкова величина X буде більше 2.

б. Випадкова величина Z розподілена за нормальним законом з $a_z = 5$ і $\sigma_z = 5$. Проведено 100 вимірювань, серед яких вдалими є ті, коли величина Z лежить в інтервалі $[-3; 10]$. Знайти ймовірність того, що було проведено понад 70 вдалих вимірювань.

ЗАВДАННЯ 10

ДОВІДКА 10. Системи дискретних випадкових величин (СДВВ). Числові характеристики СДВВ

Сукупність випадкових величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, які розглядаються спільно, називається **системою n випадкових величин**. Якщо $n = 2$ тобто розглядається система двох випадкових величин (X, Y) , то геометрично її можна тлумачити як випадкову точку з координатами (X, Y) на площині XOY . Аналогічно, якщо $n = 3$, то маємо випадкову точку (X, Y, Z) у тривимірному просторі. У загальному випадку систему n випадкових величин можна інтерпретувати як випадкову точку або випадковий вектор у просторі n вимірів.

Розглядають системи дискретних випадкових величин, неперервних випадкових величин, а також системи, до яких входять як дискретні, так і неперервні випадкові величини. Закони розподілу систем випадкових величин задаються різними способами. Так, закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин можна задати таблицею:

$Y \rightarrow$ $X \downarrow$	y_1	$\dots$	y_n
x_1	P_{11}	$\dots$	P_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	P_{m1}	$\dots$	P_{mn}

У цій таблиці $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

Числові характеристики системи випадкових величин та їх обчислення.

Початковим моментом порядку $k + r$ системи (X, Y) називається величина $v_{k,r} = M(X^k \cdot Y^r)$.

Якщо $k = 1$, $r = 0$ маємо $v_{1,0} = M_x$; при $k = 0$ $r = 1$ одержимо $v_{0,1} = M_y$.

Центральним моментом порядку $k + r$ називається величина $\mu_{k,r} = M((X - M_x)^k (Y - M_y)^r)$.

При значеннях $k = 2, r = 0$ $\mu_{2,0} = M(X - M_x)^2 = D_x$.

Якщо навпаки, $k = 0, r = 2$ то $\mu_{0,2} = M(Y - M_y)^2 = D_y$.

Нарешті, при $k = 1, r = 1$ $\mu_{1,1} = M((X - M_x)(Y - M_y)) = K_{xy}$ – **кореляційний момент (коваріація)** випадкових величин X і Y .

Кореляційний момент можна обчислити також за формулою

$$K_{xy} = M(XY) - M_x \cdot M_y.$$

Для незалежних випадкових величин кореляційний момент дорівнює нулю.

Кореляційний момент характеризує тісноту лінійної залежності між величинами. З цією самою метою застосовують **коефіцієнт кореляції**:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Якщо кореляційний момент (коефіцієнт кореляції) дорівнює нулю, то величини називаються **некорельованими**. Із незалежності величин випливає їх некорельованість, але із некорельованості величин не випливає їх незалежність. Якщо величини пов'язані лінійною функціональною залежністю, то $r_{xy} = \pm 1$.

Коли відомий закон розподілу системи випадкових величин, то можна знайти закони розподілу для її складових.

Якщо треба побудувати **безумовні закони** розподілу складових системи (X, Y) , то ймовірності $p(x_i)$ і $p(y_j)$ визначаються за формулами:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij}, \quad i = \overline{1, m}; \quad p(y_j) = \sum_{i=1}^m p_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Умовним законом розподілу випадкової величини, яка належить системі, називається закон розподілу, знайдений за умови, що друга випадкова величина набула певного значення.

Умовні ймовірності визначаються за формулами:

$$P(x_i/y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n};$$

$$P(y_j/x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

Для умовних законів розподілу розглядають числові характеристики – умовне математичне сподівання і умовну дисперсію, які обчислюються за формулами:

$$M(Y/x_i) = \sum_{j=1}^n y_j P(y_j/x_i);$$

$$D(Y/x) = M(Y^2/x) - (M(Y/x))^2;$$

$$M(X/y_j) = \sum_{i=1}^m x_i P(x_i/y_j);$$

$$D(X/y) = M(X^2/y) - (M(X/y))^2.$$

Рівняння регресії першого роду – це рівняння, що виражають залежність умовних математичних сподівань від значення випадкової величини, тобто:

$$M(Y/x_i) = f(x); M(X/y_i) = \varphi(y).$$

Випадкові величини, які входять до системи, *незалежні*, якщо умовні закони розподілу для них збігаються з безумовними.

Приклад 34. СДВВ. Закон розподілу системи двох випадкових величин задано таблицею:

$X \downarrow Y \rightarrow$	$j + 1$	$j + 4$	$j + 7$
$i - 4$	$\frac{(j - i + 10)}{2(i + j + 30)}$	$\frac{(i + 3)}{2(i + j + 30)}$	$\frac{(j + 4)}{2(i + j + 30)}$
$i - 2$	$\frac{(j + 1)}{2(i + j + 30)}$	$\frac{(i - j + 12)}{2(i + j + 30)}$	$\frac{(i + 1)}{2(i + j + 30)}$
i	$\frac{(i + 4)}{2(i + j + 30)}$	$\frac{(j + 5)}{2(i + j + 30)}$	$\frac{(20 - i - j)}{2(i + j + 30)}$

- Побудувати безумовні закони розподілу складових системи.
- Обчислити всі числові характеристики системи: математичні сподівання і дисперсії складових, кореляційний момент системи, коефіцієнт кореляції.
- Побудувати всі умовні закони розподілення складових та обчислити їх математичні сподівання.
- Побудувати рівняння середньоквадратичної лінійної регресії.
- Зробити рисунок.

■ Формуємо закон розподілу системи для $i = 7, j = 3$.

$X \downarrow Y \rightarrow$	4	7	10
3	$\frac{6}{80}$	$\frac{10}{80}$	$\frac{7}{80}$
5	$\frac{4}{80}$	$\frac{16}{80}$	$\frac{8}{80}$
7	$\frac{11}{80}$	$\frac{8}{80}$	$\frac{10}{80}$

$$\sum_{i,j=1}^3 p_{ij} = \frac{6}{80} + \frac{10}{80} + \frac{7}{80} + \frac{4}{80} + \frac{16}{80} + \frac{8}{80} + \frac{11}{80} + \frac{8}{80} + \frac{10}{80} = 1$$

– сума за всіма клітинками таблиці.

а) Безумовні закони складових системи:

X	3	5	7
p	$\frac{23}{80}$	$\frac{28}{80}$	$\frac{29}{80}$

Ймовірності обчислюються як суми по рядках основної таблиці.

$$\sum_{i=1}^3 p_i = \frac{23}{80} + \frac{28}{80} + \frac{29}{80} = 1$$

Y	4	7	10
p	$\frac{21}{80}$	$\frac{34}{80}$	$\frac{25}{80}$

Ймовірності обчислюються як суми по стовпчиках основної таблиці.

$$\sum_{j=1}^3 p_j = \frac{21}{80} + \frac{34}{80} + \frac{25}{80} = 1.$$

б) Числові характеристики системи ДВВ.

$$M_x = 3 \cdot \frac{23}{80} + 5 \cdot \frac{28}{80} + 7 \cdot \frac{29}{80} = \frac{412}{80} = 5,150.$$

$$\begin{aligned} D_x &= 3^2 \cdot \frac{23}{80} + 5^2 \cdot \frac{28}{80} + 7^2 \cdot \frac{29}{80} - \left(\frac{412}{80}\right)^2 = \\ &= \frac{2328}{80} - \frac{169744}{6400} = \frac{16496}{6400} = 2,5775. \end{aligned}$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}; \quad \sigma_x = \sqrt{2,5775} = 1,6054.$$

$$M_y = 4 \cdot \frac{21}{80} + 7 \cdot \frac{34}{80} + 10 \cdot \frac{25}{80} = \frac{572}{80} = 7,150.$$

$$\begin{aligned}
 D_y &= 4^2 \cdot \frac{21}{80} + 7^2 \cdot \frac{34}{80} + 10^2 \cdot \frac{25}{80} - \left(\frac{572}{80}\right)^2 = \\
 &= \frac{4502}{80} - \frac{327184}{6400} = \frac{32976}{6400} = 5,1525. \\
 \sigma_y &= \sqrt{D_y}; \quad \sigma_y = \sqrt{5,1525} = 2,2699.
 \end{aligned}$$

Зверніть увагу, що всі обчислення повинні бути з однаковою кількістю знаків після коми.

Кореляційний момент краще обчислювати за скороченою формулою:

$$K_{xy} = M(XY) - M_x \cdot M_y,$$

де $M(XY)$ – математичне сподівання добутку складових системи.

$$\begin{aligned}
 K_{xy} &= 4 \cdot 3 \cdot \frac{6}{80} + 7 \cdot 3 \cdot \frac{10}{80} + 10 \cdot 3 \cdot \frac{7}{80} + 4 \cdot 5 \cdot \frac{4}{80} + 7 \cdot 5 \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{16}{80} + 10 \cdot 5 \cdot \frac{8}{80} + 4 \cdot 7 \cdot \frac{11}{80} + 7 \cdot 7 \cdot \frac{8}{80} + \\
 &\quad + 10 \cdot 7 \cdot \frac{10}{80} - 5,150 \cdot 7,150 = -0,1725
 \end{aligned}$$

Коефіцієнт кореляції: $r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y};$

$$r_{xy} = \frac{-0,1725}{2,26992 \cdot 1,6054} = -0,0473.$$

в) Умовні закони розподілу складових системи.

В усіх умовних законах треба вираховувати умовні ймовірності, це робимо за формулами, наведеними у довідці 9.

Умовні закони розподілення випадкової величини X .

$P(x_i/y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$; $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,3}$; – ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення x_i (чи $X = x_i$), за умовою того, що $Y = y_j$.

$P(Y = y_1 = 4) = 21/80$ – відомо з безумовного закону розподілення Y .

$X/(y_1 = 4)$	3	5	7
$P(x_i/y_1 = 4)$	6/21	4/21	11/21

$$\sum P(x_i/y_1 = 4) = \frac{6}{21} + \frac{4}{21} + \frac{11}{21} = 1;$$

$$M(X/y_1 = 4) = 3 \cdot \frac{6}{21} + 5 \cdot \frac{4}{21} + 7 \cdot \frac{11}{21} = \frac{115}{21} = 4,7931.$$

$$P(Y = y_2 = 7) = 34/80.$$

$X/(y_2 = 7)$	3	5	7
$P(x_i/y_2 = 7)$	10/34	16/34	8/34

$$\sum P(x_i/y_2 = 7) = \frac{10}{34} + \frac{16}{34} + \frac{8}{34} = 1;$$

$$M(X/y_2 = 7) = 3 \cdot \frac{10}{34} + 5 \cdot \frac{16}{34} + 7 \cdot \frac{8}{34} = \frac{166}{34} = 4,8824.$$

$$P(Y = y_3 = 10) = 25/80.$$

$X/(y_3 = 10)$	3	5	7
$P(x_i/y_3 = 10)$	7/25	8/25	10/25

$$\sum P(x_i/y_3 = 10) = \frac{7}{25} + \frac{8}{25} + \frac{10}{25} = 1;$$

$$M(X/y_3 = 10) = 3 \cdot \frac{7}{25} + 5 \cdot \frac{8}{25} + 7 \cdot \frac{10}{25} = \frac{131}{25} = 5,2400.$$

Умовні закони розподілення випадкової величини Y .

$P(y_j/x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$; $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,3}$ – ймовірність того, що випадкова величина Y набуває значення y_j (чи $Y = y_j$), за умовою того, що $X = x_i$.

$P(X = x_1 = 3) = 23/80$ – відомо з безумовного закону розподілення X .

$Y/(x_1 = 3)$	4	7	10
$P(y_j/x_1 = 3)$	6/23	10/23	7/23

$$\sum P(y_j/x_1 = 3) = \frac{6}{23} + \frac{10}{23} + \frac{7}{23} = 1;$$

$$M(Y/x_1 = 3) = 4 \cdot \frac{6}{23} + 7 \cdot \frac{10}{23} + 10 \cdot \frac{7}{23} = \frac{164}{23} = 7,1304.$$

$$P(X = x_2 = 5) = 28/80.$$

$Y/(x_2 = 5)$	4	7	10
$P(y_j/x_2 = 5)$	4/28	16/28	8/28

$$\sum P(y_j/x_2 = 5) = \frac{4}{28} + \frac{16}{28} + \frac{8}{28} = 1;$$

$$M(Y/x_2 = 5) = 4 \cdot \frac{4}{28} + 7 \cdot \frac{16}{28} + 10 \cdot \frac{8}{28} = \frac{208}{28} = 7,4284.$$

$$P(X = x_3 = 7) = 29/80.$$

$Y/(x_3 = 7)$	4	7	10
$P(y_j/x_3 = 7)$	11/29	8/29	10/29

$$\sum P(y_j/x_3 = 7) = \frac{11}{29} + \frac{8}{29} + \frac{10}{29} = 1;$$

$$M(Y/x_3 = 7) = 4 \cdot \frac{11}{29} + 7 \cdot \frac{8}{29} + 10 \cdot \frac{10}{29} = \frac{200}{29} = 6,8966.$$

г) Побудуємо рівняння середньоквадратичної лінійної регресії:

$$X \text{ на } Y: \quad x - M_x = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot (y - M_y);$$

$$Y \text{ на } X: \quad y - M_y = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - M_x).$$

$$\text{Коефіцієнти } \beta_x = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{K_{xy}}{\sigma_y^2} \text{ і } \beta_y = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x^2}$$

називаються коефіцієнтами регресії. Підставивши одержані результати до рівнянь, одержимо

$$\beta_x = -0,033; \quad \beta_y = -0,067.$$

$$x = -0,033 \cdot y + 5,389 \text{ та } y = -0,067 \cdot x + 7,495.$$

Обидві прямі проходять через центр розсіювання системи – точку $(M_x; M_y)$. Якщо вони співпадуть (тобто $r_{xy} = \pm 1$), між складовими системи X та Y наявна лінійна функціональна залежність. Але одержаний коефіцієнт кореляції $r_{xy} = -0,0473$ указує на слабкий зв'язок між складовими системи.

Приблизно можна вказати такі інтервали для означення виду зв'язку:

$0 \leq |r_{xy}| \leq 0,3$ – слабкий зв'язок; $0,3 < |r_{xy}| \leq 0,7$ – середній; $0,7 < |r_{xy}| \leq 1$ – сильний.

д) Рисунок. Позначено дев'ять точок, що входять до СДВВ, та центр розсіювання системи – точку з координатами $(M_x; M_y)$.

Пунктирні лінії з'єднують точки, що позначають умовні математичні сподівання для умовних законів:

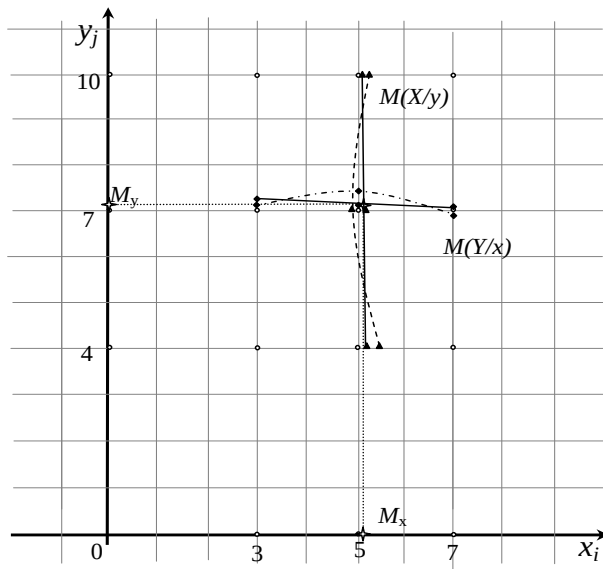
$M(X/y)$: точки (5,4762; 4); (4,8824; 7); (5,2400; 10),

$M(Y/x)$: точки (3; 7,1304); (5; 7,4286); (7; 6,8966).

Неперервними лініями показані рівняння середньоквадратичної лінійної регресії, для побудови були розраховані такі точки:

$x = -0,033 \cdot y + 5,389$		$M(X/y)$	$y = -0,067 \cdot x + 7,495$		$M(Y/x)$
y	x		x	y	
4	5,254	5,476	3	7,294	7,1304
7	5,155	4,882	5	7,160	7,4286
10	5,055	5,2400	7	7,026	6,8966

Ці лінії «спрямляють» реальні лінії регресії.



ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 10

Варіанти 1–30. СДВВ. Закон розподілу системи двох випадкових величин задано таблицею:

$X \downarrow Y \rightarrow$	$j + 1$	$j + 4$	$j + 7$
$i - 4$	$\frac{(j - i + 10)}{2(i + j + 30)}$	$\frac{(i + 3)}{2(i + j + 30)}$	$\frac{(j + 4)}{2(i + j + 30)}$
$i - 2$	$\frac{(j + 1)}{2(i + j + 30)}$	$\frac{(i - j + 12)}{2(i + j + 30)}$	$\frac{(i + 1)}{2(i + j + 30)}$
i	$\frac{(i + 4)}{2(i + j + 30)}$	$\frac{(j + 5)}{2(i + j + 30)}$	$\frac{(20 - i - j)}{2(i + j + 30)}$

- а) Побудувати безумовні закони розподілу складових системи.
- б) Обчислити всі числові характеристики системи: математичні сподівання і дисперсії складових, кореляційний момент системи, коефіцієнт кореляції.
- в) Побудувати всі умовні закони розподілення складових та вилічити їх математичні сподівання.
- г) Побудувати рівняння середньоквадратичної лінійної регресії.
- д) Зробити рисунок.

ДОДАТКИ

Додаток 1 – Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

щільності стандартного нормального розподілу $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$
0,00	0,00000	0,39894	0,46	0,17724	0,35889	0,92	0,32121	0,26129
0,01	0,00399	0,39892	0,47	0,18082	0,35723	0,93	0,32381	0,25888
0,02	0,00798	0,39886	0,48	0,18439	0,35553	0,94	0,32639	0,25647
0,03	0,01197	0,39876	0,49	0,18793	0,35381	0,95	0,32894	0,25406
0,04	0,01595	0,39862	0,50	0,19146	0,35207	0,96	0,33147	0,25164
0,05	0,01994	0,39844	0,51	0,19497	0,35029	0,97	0,33398	0,24923
0,06	0,02392	0,39822	0,52	0,19847	0,34849	0,98	0,33646	0,24681
0,07	0,02790	0,39797	0,53	0,20194	0,34667	0,99	0,33891	0,24439
0,08	0,03188	0,39767	0,54	0,20540	0,34482	1,00	0,34134	0,24197
0,09	0,03586	0,39733	0,55	0,20884	0,34294	1,01	0,34375	0,23955
0,10	0,03983	0,39695	0,56	0,21226	0,34105	1,02	0,34614	0,23713
0,11	0,04380	0,39654	0,57	0,21566	0,33912	1,03	0,34849	0,23471
0,12	0,04776	0,39608	0,58	0,21904	0,33718	1,04	0,35083	0,23230
0,13	0,05172	0,39559	0,59	0,22240	0,33521	1,05	0,35314	0,22988
0,14	0,05567	0,39505	0,60	0,22575	0,33322	1,06	0,35543	0,22747
0,15	0,05962	0,39448	0,61	0,22907	0,33121	1,07	0,35769	0,22506
0,16	0,06356	0,39387	0,62	0,23237	0,32918	1,08	0,35993	0,22265
0,17	0,06749	0,39322	0,63	0,23565	0,32713	1,09	0,36214	0,22025
0,18	0,07142	0,39253	0,64	0,23891	0,32506	1,10	0,36433	0,21785
0,19	0,07535	0,39181	0,65	0,24215	0,32297	1,11	0,36650	0,21546
0,20	0,07926	0,39104	0,66	0,24537	0,32086	1,12	0,36864	0,21307
0,21	0,08317	0,39024	0,67	0,24857	0,31874	1,13	0,37076	0,21069
0,22	0,08706	0,38940	0,68	0,25175	0,31659	1,14	0,37286	0,20831
0,23	0,09095	0,38853	0,69	0,25490	0,31443	1,15	0,37493	0,20594
0,24	0,09483	0,38762	0,70	0,25804	0,31225	1,16	0,37698	0,20357
0,25	0,09871	0,38667	0,71	0,26115	0,31006	1,17	0,37900	0,20121
0,26	0,10257	0,38568	0,72	0,26424	0,30785	1,18	0,38100	0,19886
0,27	0,10642	0,38466	0,73	0,26730	0,30563	1,19	0,38298	0,19652
0,28	0,11026	0,38361	0,74	0,27035	0,30339	1,20	0,38493	0,19419
0,29	0,11409	0,38251	0,75	0,27337	0,30114	1,21	0,38686	0,19186
0,30	0,11791	0,38139	0,76	0,27637	0,29887	1,22	0,38877	0,18954
0,31	0,12172	0,38023	0,77	0,27935	0,29659	1,23	0,39065	0,18724
0,32	0,12552	0,37903	0,78	0,28230	0,29431	1,24	0,39251	0,18494
0,33	0,12930	0,37780	0,79	0,28524	0,29200	1,25	0,39435	0,18265
0,34	0,13307	0,37654	0,80	0,28814	0,28969	1,26	0,39617	0,18037
0,35	0,13683	0,37524	0,81	0,29103	0,28737	1,27	0,39796	0,17810
0,36	0,14058	0,37391	0,82	0,29389	0,28504	1,28	0,39973	0,17585
0,37	0,14431	0,37255	0,83	0,29673	0,28269	1,29	0,40147	0,17360
0,38	0,14803	0,37115	0,84	0,29955	0,28034	1,30	0,40320	0,17137
0,39	0,15173	0,36973	0,85	0,30234	0,27798	1,31	0,40490	0,16915
0,40	0,15542	0,36827	0,86	0,30511	0,27562	1,32	0,40658	0,16694
0,41	0,15910	0,36678	0,87	0,30785	0,27324	1,33	0,40824	0,16474
0,42	0,16276	0,36526	0,88	0,31057	0,27086	1,34	0,40988	0,16256
0,43	0,16640	0,36371	0,89	0,31327	0,26848	1,35	0,41149	0,16038
0,44	0,17003	0,36213	0,90	0,31594	0,26609	1,36	0,41309	0,15822
0,45	0,17364	0,36053	0,91	0,31859	0,26369	1,37	0,41466	0,15608

x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$
1,38	0,41621	0,15395	1,90	0,47128	0,06562	2,42	0,49224	0,02134
1,39	0,41774	0,15183	1,91	0,47193	0,06438	2,43	0,49245	0,02083
1,40	0,41924	0,14973	1,92	0,47257	0,06316	2,44	0,49266	0,02033
1,41	0,42073	0,14764	1,93	0,47320	0,06195	2,45	0,49286	0,01984
1,42	0,42220	0,14556	1,94	0,47381	0,06077	2,46	0,49305	0,01936
1,43	0,42364	0,14350	1,95	0,47441	0,05959	2,47	0,49324	0,01888
1,44	0,42507	0,14146	1,96	0,47500	0,05844	2,48	0,49343	0,01842
1,45	0,42647	0,13943	1,97	0,47558	0,05730	2,49	0,49361	0,01797
1,46	0,42785	0,13742	1,98	0,47615	0,05618	2,50	0,49379	0,01753
1,47	0,42922	0,13542	1,99	0,47670	0,05508	2,51	0,49396	0,01709
1,48	0,43056	0,13344	2,00	0,47725	0,05399	2,52	0,49413	0,01667
1,49	0,43189	0,13147	2,01	0,47778	0,05292	2,53	0,49430	0,01625
1,50	0,43319	0,12952	2,02	0,47831	0,05186	2,54	0,49446	0,01585
1,51	0,43448	0,12758	2,03	0,47882	0,05082	2,55	0,49461	0,01545
1,52	0,43574	0,12566	2,04	0,47932	0,04980	2,56	0,49477	0,01506
1,53	0,43699	0,12376	2,05	0,47982	0,04879	2,57	0,49492	0,01468
1,54	0,43822	0,12188	2,06	0,48030	0,04780	2,58	0,49506	0,01431
1,55	0,43943	0,12001	2,07	0,48077	0,04682	2,59	0,49520	0,01394
1,56	0,44062	0,11816	2,08	0,48124	0,04586	2,60	0,49534	0,01358
1,57	0,44179	0,11632	2,09	0,48169	0,04491	2,61	0,49547	0,01323
1,58	0,44295	0,11450	2,10	0,48214	0,04398	2,62	0,49560	0,01289
1,59	0,44408	0,11270	2,11	0,48257	0,04307	2,63	0,49573	0,01256
1,60	0,44520	0,11092	2,12	0,48300	0,04217	2,64	0,49585	0,01223
1,61	0,44630	0,10915	2,13	0,48341	0,04128	2,65	0,49598	0,01191
1,62	0,44738	0,10741	2,14	0,48382	0,04041	2,66	0,49609	0,01160
1,63	0,44845	0,10567	2,15	0,48422	0,03955	2,67	0,49621	0,01130
1,64	0,44950	0,10396	2,16	0,48461	0,03871	2,68	0,49632	0,01100
1,65	0,45053	0,10226	2,17	0,48500	0,03788	2,69	0,49643	0,01071
1,66	0,45154	0,10059	2,18	0,48537	0,03706	2,70	0,49653	0,01042
1,67	0,45254	0,09893	2,19	0,48574	0,03626	2,71	0,49664	0,01014
1,68	0,45352	0,09728	2,20	0,48610	0,03547	2,72	0,49674	0,00987
1,69	0,45449	0,09566	2,21	0,48645	0,03470	2,73	0,49683	0,00961
1,70	0,45543	0,09405	2,22	0,48679	0,03394	2,74	0,49693	0,00935
1,71	0,45637	0,09246	2,23	0,48713	0,03319	2,75	0,49702	0,00909
1,72	0,45728	0,09089	2,24	0,48745	0,03246	2,76	0,49711	0,00885
1,73	0,45818	0,08933	2,25	0,48778	0,03174	2,77	0,49720	0,00861
1,74	0,45907	0,08780	2,26	0,48809	0,03103	2,78	0,49728	0,00837
1,75	0,45994	0,08628	2,27	0,48840	0,03034	2,79	0,49736	0,00814
1,76	0,46080	0,08478	2,28	0,48870	0,02965	2,80	0,49744	0,00792
1,77	0,46164	0,08329	2,29	0,48899	0,02898	2,85	0,49781	0,00687
1,78	0,46246	0,08183	2,30	0,48928	0,02833	2,90	0,49813	0,00595
1,79	0,46327	0,08038	2,31	0,48956	0,02768	2,95	0,49841	0,00514
1,80	0,46407	0,07895	2,32	0,48983	0,02705	3,00	0,49865	0,00443
1,81	0,46485	0,07754	2,33	0,49010	0,02643	3,10	0,49903	0,00327
1,82	0,46562	0,07614	2,34	0,49036	0,02582	3,20	0,49931	0,00238
1,83	0,46638	0,07477	2,35	0,49061	0,02522	3,30	0,49952	0,00172
1,84	0,46712	0,07341	2,36	0,49086	0,02463	3,40	0,49966	0,00123
1,85	0,46784	0,07206	2,37	0,49111	0,02406	3,50	0,49977	0,00087
1,86	0,46856	0,07074	2,38	0,49134	0,02349	3,60	0,49984	0,00061
1,87	0,46926	0,06943	2,39	0,49158	0,02294	3,80	0,49993	0,00029
1,88	0,46995	0,06814	2,40	0,49180	0,02239	4,00	0,49997	0,00013
1,89	0,47062	0,06687	2,41	0,49202	0,02186	4,50	0,50000	0,00002

ВКАЗІВКА. При $x > 5$ $\varphi(x) \approx 0$, $\Phi(x) \approx 0,5$.

Додаток 2 – Квантили t -розподілу Стюдента $t_p(f)$

$f \backslash p$	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9975	0,999	0,9995
1	3,07768	6,31375	12,70620	31,82052	63,65674	127,3213	318,3088	636,6193
2	1,88562	2,91999	4,30265	6,96456	9,92484	14,08905	22,32712	31,59905
3	1,63775	2,35338	3,18245	4,54070	5,84091	7,45332	10,21453	12,92398
4	1,53321	2,13185	2,77645	3,74695	4,60410	5,59757	7,17318	8,61030
5	1,47588	2,01505	2,57058	3,36493	4,03216	4,77335	5,89343	6,86883
6	1,43976	1,94318	2,44691	3,14267	3,70743	4,31683	5,20763	5,95882
7	1,41492	1,89458	2,36462	2,99795	3,49948	4,02934	4,78529	5,40790
8	1,39682	1,85955	2,30600	2,89646	3,35539	3,83252	4,50079	5,04131
9	1,38303	1,83311	2,26216	2,82144	3,24984	3,68966	4,29681	4,78091
10	1,37218	1,81246	2,22814	2,76377	3,16927	3,58141	4,14370	4,58689
11	1,36343	1,79588	2,20099	2,71808	3,10581	3,49661	4,02470	4,43698
12	1,35622	1,78229	2,17881	2,68100	3,05454	3,42844	3,92963	4,31779
13	1,35017	1,77093	2,16037	2,65031	3,01228	3,37247	3,85198	4,22083
14	1,34503	1,76131	2,14479	2,62449	2,97684	3,32570	3,78739	4,14045
15	1,34061	1,75305	2,13145	2,60248	2,94671	3,28604	3,73283	4,07277
16	1,33676	1,74588	2,11991	2,58349	2,92078	3,25199	3,68615	4,01500
17	1,33338	1,73961	2,10982	2,56693	2,89823	3,22245	3,64577	3,96513
18	1,33039	1,73406	2,10092	2,55238	2,87844	3,19657	3,61048	3,92165
19	1,32773	1,72913	2,09302	2,53948	2,86093	3,17372	3,57940	3,88341
20	1,32534	1,72472	2,08596	2,52798	2,84534	3,15340	3,55181	3,84952
21	1,32319	1,72074	2,07961	2,51765	2,83136	3,13521	3,52715	3,81928
22	1,32124	1,71714	2,07387	2,50832	2,81876	3,11882	3,50499	3,79213
23	1,31946	1,71387	2,06866	2,49987	2,80734	3,10400	3,48496	3,76763
24	1,31784	1,71088	2,06390	2,49216	2,79694	3,09051	3,46678	3,74540
25	1,31635	1,70814	2,05954	2,48511	2,78744	3,07820	3,45019	3,72514
26	1,31497	1,70562	2,05553	2,47863	2,77871	3,06691	3,43500	3,70661
27	1,31370	1,70329	2,05183	2,47266	2,77068	3,05652	3,42103	3,68959
28	1,31253	1,70113	2,04841	2,46714	2,76326	3,04693	3,40816	3,67391
29	1,31143	1,69913	2,04523	2,46202	2,75639	3,03805	3,39624	3,65941
30	1,31042	1,69726	2,04227	2,45726	2,75000	3,02980	3,38518	3,64596
40	1,30308	1,68385	2,02108	2,42326	2,70446	2,97117	3,30688	3,55097
50	1,29871	1,67591	2,00856	2,40327	2,67779	2,93696	3,26141	3,49601
60	1,29582	1,67065	2,00030	2,39012	2,66028	2,91455	3,23171	3,46020
90	1,29103	1,66196	1,98667	2,36850	2,63157	2,87788	3,18327	3,40194
120	1,28865	1,65765	1,97993	2,35782	2,61742	2,85986	3,15954	3,37345
240	1,28509	1,65123	1,96990	2,34199	2,59647	2,83322	3,12454	3,33152
∞	1,28155	1,64485	1,95996	2,32635	2,57583	2,80703	3,09023	3,29053

Додаток 3 – Квантили χ^2 – розподілу Пірсона $\chi_p^2(f)$

$f \backslash p$	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9975	0,999	0,9995
1	2,70554	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944	9,14059	10,82757	12,11567
2	4,60517	5,99146	7,37776	9,21034	10,59663	11,98293	13,81551	15,20180
3	6,25139	7,81473	9,34840	11,34487	12,83816	14,32035	16,26624	17,73000
4	7,77944	9,48773	11,14329	13,27670	14,86026	16,42394	18,46683	19,99735
5	9,23636	11,07050	12,83250	15,08627	16,74960	18,38561	20,51501	22,10533
6	10,64464	12,59159	14,44938	16,81189	18,54758	20,24940	22,45774	24,10280
7	12,01704	14,06714	16,01276	18,47531	20,27774	22,04039	24,32189	26,01783
8	13,36157	15,50731	17,53455	20,09024	21,95495	23,77447	26,12448	27,86805
9	14,68366	16,91898	19,02277	21,66599	23,58935	25,46248	27,87718	29,66582
10	15,98718	18,30704	20,48318	23,20925	25,18818	27,11217	29,58830	31,41981
11	17,27501	19,67514	21,92005	24,72497	26,75685	28,72935	31,26414	33,13662
12	18,54935	21,02607	23,33666	26,21697	28,29952	30,31848	32,90949	34,82127
13	19,81193	22,36203	24,73560	27,68825	29,81947	31,88309	34,52818	36,47779
14	21,06414	23,68479	26,11895	29,14124	31,31935	33,42601	36,12327	38,10940
15	22,30713	24,99579	27,48839	30,57791	32,80132	34,94959	37,69730	39,71876
16	23,54183	26,29623	28,84535	31,99993	34,26719	36,45575	39,25235	41,30807
17	24,76904	27,58711	30,19101	33,40866	35,71847	37,94614	40,79022	42,87921
18	25,98942	28,86930	31,52638	34,80531	37,15645	39,42215	42,31240	44,43377
19	27,20357	30,14353	32,85233	36,19087	38,58226	40,88497	43,82020	45,97312
20	28,41198	31,41043	34,16961	37,56623	39,99685	42,33566	45,31475	47,49845
21	29,61509	32,67057	35,47888	38,93217	41,40106	43,77512	46,79704	49,01081
22	30,81328	33,92444	36,78071	40,28936	42,79565	45,20415	48,26794	50,51112
23	32,00690	35,17246	38,07563	41,63840	44,18128	46,62346	49,72823	52,00019
24	33,19624	36,41503	39,36408	42,97982	45,55851	48,03369	51,17860	53,47875
25	34,38159	37,65248	40,64647	44,31410	46,92789	49,43540	52,61966	54,94746
26	35,56317	38,88514	41,92317	45,64168	48,28988	50,82911	54,05196	56,40689
27	36,74122	40,11327	43,19451	46,96294	49,64492	52,21527	55,47602	57,85759
28	37,91592	41,33714	44,46079	48,27824	50,99338	53,59431	56,89229	59,30003
29	39,08747	42,55697	45,72229	49,58788	52,33562	54,96660	58,30117	60,73465
30	40,25602	43,77297	46,97924	50,89218	53,67196	56,33250	59,70306	62,16185
40	51,80506	55,75848	59,34171	63,69074	66,76596	69,69911	73,40196	76,09460
50	63,16712	67,50481	71,42020	76,15389	79,48998	82,66405	86,66082	89,56052
60	74,39701	79,08194	83,29767	88,37942	91,95170	95,34402	99,60723	102,6948
90	107,5595	113,1425	118,1388	124,1303	128,3240	132,2938	137,2668	140,8583
120	140,2278	146,5652	152,2141	158,9625	163,6700	168,1148	173,6679	177,6683
240	268,4675	277,1363	284,8046	293,8971	300,1978	306,1168	313,4722	318,7450
$f \backslash p$	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
1	0,01579	0,00393	0,00098	0,00016	0,00004	0,00001	0,00000	0,00000
2	0,21072	0,10259	0,05064	0,02010	0,01003	0,00501	0,00200	0,00100
3	0,58437	0,35185	0,21580	0,11483	0,07172	0,04494	0,02430	0,01528
4	1,06362	0,71072	0,48442	0,29711	0,20699	0,14487	0,09080	0,06392
5	1,61031	1,14548	0,83121	0,55430	0,41174	0,30748	0,21021	0,15814
6	2,20413	1,63538	1,23734	0,87209	0,67573	0,52657	0,38107	0,29941

$f \backslash p$	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
7	2,83311	2,16735	1,68987	1,23904	0,98926	0,79447	0,59849	0,48487
8	3,48954	2,73264	2,17973	1,64650	1,34441	1,10426	0,85710	0,71038
9	4,16816	3,32511	2,70039	2,08790	1,73493	1,45014	1,15195	0,97170
10	4,86518	3,94030	3,24697	2,55821	2,15586	1,82740	1,47874	1,26498
11	5,57778	4,57481	3,81575	3,05348	2,60322	2,23214	1,83385	1,58685
12	6,30380	5,22603	4,40379	3,57057	3,07382	2,66118	2,21421	1,93438
13	7,04150	5,89186	5,00875	4,10692	3,56503	3,11188	2,61722	2,30506
14	7,78953	6,57063	5,62873	4,66043	4,07467	3,58202	3,04067	2,69673
15	8,54676	7,26094	6,26214	5,22935	4,60092	4,06973	3,48268	3,10752
16	9,31224	7,96165	6,90766	5,81221	5,14221	4,57341	3,94163	3,53581
17	10,08519	8,67176	7,56419	6,40776	5,69722	5,09167	4,41609	3,98018
18	10,86494	9,39046	8,23075	7,01491	6,26480	5,62334	4,90485	4,43939
19	11,65091	10,11701	8,90652	7,63273	6,84397	6,16736	5,40682	4,91234
20	12,44261	10,85081	9,59078	8,26040	7,43384	6,72282	5,92104	5,39807
21	13,23960	11,59131	10,28290	8,89720	8,03365	7,28892	6,44668	5,89570
22	14,04149	12,33801	10,98232	9,54249	8,64272	7,86493	6,98297	6,40447
23	14,84796	13,09051	11,68855	10,19572	9,26042	8,45021	7,52924	6,92368
24	15,65868	13,84843	12,40115	10,85636	9,88623	9,04418	8,08488	7,45269
25	16,47341	14,61141	13,11972	11,52398	10,51965	9,64633	8,64934	7,99096
26	17,29188	15,37916	13,84390	12,19815	11,16024	10,25618	9,22213	8,53795
27	18,11390	16,15140	14,57338	12,87850	11,80759	10,87331	9,80278	9,09320
28	18,93924	16,92788	15,30786	13,56471	12,46134	11,49732	10,39088	9,65627
29	19,76774	17,70837	16,04707	14,25645	13,12115	12,12787	10,98605	10,22678
30	20,59923	18,49266	16,79077	14,95346	13,78672	12,76462	11,58795	10,80436
40	29,05052	26,50930	24,43304	22,16426	20,70654	19,41710	17,91643	16,90622
50	37,68865	34,76425	32,35736	29,70668	27,99075	26,46355	24,67391	23,46097
60	46,45889	43,18796	40,48175	37,48485	35,53449	33,79114	31,73834	30,34048
90	73,29493	69,12590	65,64051	61,73768	59,17068	56,85617	54,10442	52,21280
120	100,6271	95,70469	91,56752	86,90915	83,82929	81,04082	77,71040	75,41087
240	212,3882	205,1357	198,9805	191,9800	187,3084	183,0473	177,9166	174,3463

Для великих f : $\chi_p^2 = 0,5 \cdot (\sqrt{2f-1} + u_p)^2$, де u_p – квантиль стандартного нормального розподілу (див. останню строку додатка 2).

Додаток 4 – Квантили распределения Колмогорова λ_{1-p}

p	λ_{1-p}	p	λ_{1-p}	p	λ_{1-p}
0,99	0,44	0,50	0,83	0,15	1,14
0,90	0,57	0,40	0,89	0,10	1,22
0,80	0,64	0,30	0,97	0,05	1,36
0,70	0,71	0,25	1,02	0,02	1,52
0,60	0,77	0,20	1,07	0,01	1,63

Список літератури

1. Агапов Г.І. Задачник з теорії ймовірностей / Г.І. Агапов. – М. : Вища шк., 1986.
2. Вентцель Е.С. Завдання і вправи з теорії ймовірностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Вища шк., 2000.
3. Гмурман В.Є. Керівництво вирішення задач з теорії ймовірностей та математичної статистики / В.Є. Гмурман. – М. : Вища шк., 1998.
4. Гнеденко В.В. Елементарне введення в теорію ймовірностей / В.В. Гнеденко, А.Я. Хінчин. – М. : Наука, 1988.
5. Ємельянов Г.В. Задачник з теорії ймовірностей і математичній статистиці. / Г.В. Ємельянов, В.П. Скитовіч. Л. : Вид-во Ленінград. ун-ту, 1967.
6. Свешніков А.А. Збірник завдань з теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових функцій / А.А. Свешніков. – М. : Наука, 1970.
7. Зубков А.М. Збірник задач з теорії ймовірностей / А.М. Зубков, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков. – М. : Наука, 1989.
8. Лозінський Н.С. Збірник задач з теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посіб. для студентів економічних спеціальностей вузів / Н.С. Лозінський. – М. : Статистика, 1975.
9. Розанов Ю.А. Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процеси / Ю.А. Розанов. – М. : Наука, 1989.
10. Теорія ймовірностей: Збірник завдань / А.Я. Дороговцев, Д.С. Сильвестров, А.В. Скороход, М.І. Ядренка. – К. : Вища школа, 1980.
11. Ширяєв А.Н. Ймовірність / А.Н. Ширяєв. – М. : Наука, 1989.

Зміст

Вступ	3
Завдання 1. Формули комбінаторики	4
Варіанти завдання 1	11
Завдання 2. Класичне означення ймовірності випадкової події	19
Варіанти Завдання 2	23
Завдання 3. Класичне означення ймовірності випадкової події. Задача про вибірку	32
Варіанти завдання 3	33
Завдання 4. Геометричне означення ймовірності.....	36
Варіанти завдання 4	38
Завдання 5. Теореми множення та додавання ймовірностей. Ймовірність настання принаймні однієї події	43
Варіанти завдання 5	48
Завдання 6. Формула повної ймовірності. Формула гіпотез	58
Варіанти завдання 6	61
Завдання 7. Незалежні повторні випробування. Формула БЕРНУЛЛІ і асимптотичні формули обчислення ймовірностей	67
Варіанти завдання 7	71
Завдання 8. Випадкові величини (ВВ). Числові характеристики випадкових величин	78
Варіанти завдання 8	87
Завдання 9. Випадкові величини. Основні закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин	88
Варіанти завдання 9	97
Завдання 10. Системи дискретних випадкових величин (СДВВ). Числові характеристики СДВВ	106
Варіанти завдання 10	116
Додатки.	117
Список літератури	122

Навчальне видання

КОРНІЛЬ Тетяна Леонівна
ТИМЧЕНКО Ліля Сергіївна
ГОЛОТАЙСТРОВА Галина Олександрівна

Теорія ймовірностей у прикладах і задачах

Навчально-методичний посібник
для студентів економічних спеціальностей

Роботу до видання рекомендувала проф. *Курпа Л.В.*
Редактор *М.П. Єфремова*

План 2016 р., поз. 56

Підп. до друку 11.11.2016 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 7,2. Наклад 50 пр.
Зам. № 29 Ціна договірна

Виготовлювач Видавничий центр НТУ "ХПІ",
вул. Кирпичова, 2, м. Харків-2, 61002

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.