МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання самостійних занять

з дисципліни «Системи автоматичного керування об'єктами та процесами галузевого машинобудування» для студентів денної та заочної форм навчання за спеціальностями «Галузеве машинобудування» освітня програма «Машини та обладнання для технологічних процесів», «Відновлювані джерела енергії та гідроенергетика» освітня програма «Гідроенергетика»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 13.02.2025 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

Методичні вказівки до виконання самостійних занять з дисципліни «Системи автоматичного керування об'єктами та процесами галузевого машинобудування» для студентів денної та заочної форм навчання за спеціальностями «Галузеве машинобудування» освітня програма «Машини та обладнання для технологічних процесів», «Відновлювані джерела енергії та гідроенергетика» освітня програма «Гідроенергетика» / уклад.: А. С. Роговий, О. М. Фатєєв, Н. М. Фатєєва – Харків: НТУ «ХПІ», 2025. – 31 с.

Укладачі: А. С. Роговий
О. М. Фатєєв
Н. М. Фатєєва

Рецензент І. І. Тиньянова

Кафедра гідравлічних машин ім. Г. Ф. Проскури

ЗМІСТ

Стор.

1 Складання різних функціональних схем і математичний опис перехідних процесів у системах управління..... 4

2 Визначення перехідних процесів найпростіших ланцюгів і інших типових динамічних ланок……..... 5

3 Визначення перехідної й вагової характеристик…….. 6

4 Визначення передатних функцій різних ланок, їхніх з'єднань і систем…… 9

5 Побудова амплітудно-фазових, амплітудно-частотних, фазочастотних, дійсних і уявних частотних характеристик……... 12

6 Дослідження перехідних процесів і частотних характеристик типових динамічних ланок на ПЕОМ……..... 15

7 Приклад вирішення завдання з контрольної роботи..……..... 22

Варіанти контрольних завдань..... 27

1 Складання різних функціональних схем і математичний опис перехідних процесів у системах управління

Системи регулювання є складними комплексами взаємодіючих технічних пристроїв і елементів, що працюють на різних фізичних і організаційних принципах (механічних, електричних і ін.).

Графічне зображення системи управління дозволяє відволіктися від конкретної фізичної природи елементів реальної системи й дає наочне подання про досліджувану систему.

Функціональною схемою називається схема, що відбиває взаємодію елементів і пристроїв автоматики в процесі роботи системи управління. При цьому під елементом, як правило, мається на увазі конструктивно відособлена частина системи управління, що виконує одну певну функцію. На функціональній схемі елементи зображуються у вигляді прямокутників, а вхідні й вихідні величини (сигнали) – у вигляді прямих ліній зі стрілками, що вказують напрямок передачі впливів (сигналів).

Фізичні величини, що визначають хід процесу, називаються *параметрами процесу*. Наприклад, параметрами процесу можуть бути: температура, тиск, витрата, напруга й т.д.

Параметр технологічного процесу, який необхідно підтримувати постійним або змінювати за певним законом, називається *регульованою величиною* або *регульованим параметром*.

Значення регульованої величини в розглянутий момент часу називається *миттєвим значенням*.

Значення регульованої величини, отримане в розглянутий момент часу на підставі даних деякого вимірювального приладу називається її *вимірюваним значенням*.

Виходячи з описаних прикладів, можна визначити типову структурну схему одноконтурної системи (див. рис. 1.1). Прийняті позначення: x – вплив, що задає (завдання), $e = x - y$ – помилка регулювання, u – керуючий вплив, f – вплив, що збурює (збурювання).

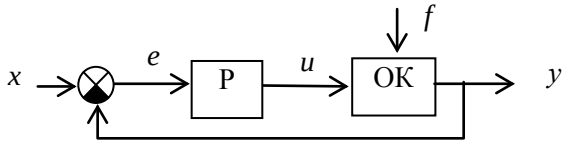


Рис. 1.1 – Типова структурна схема одноконтурної системи управління

2 Визначення перехідних процесів найпростіших ланцюгів і інших типових динамічних ланок

Дослідження систем управління істотно спрощується при використанні прикладних математичних методів операційного числення. Наприклад, функціонування деякої системи описується диференційним рівнянням вигляду

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \qquad (2.1)$$

де x і y – вхідна й вихідна величини. Якщо в дане рівняння замість $x(t)$ і $y(t)$ підставити функції $X(p)$ *і* $Y(p)$ комплексного змінного p такі, що

$$X(p) = \int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt \qquad \text{і} \qquad Y(p) = \int_0^\infty y(t) e^{-pt} dt, \qquad (2.2)$$

де вихідне диференційне рівняння при нульових початкових умовах рівносильне лінійному алгебраїчному рівнянню

$$a_2 p^2 Y(p) + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = b_1 X(p) + b_0 X(p). \qquad (2.3)$$

Такий перехід від диференційного рівняння до алгебраїчного рівняння називається *перетворенням Лапласа*, формули (2.2) відповідно *формулами перетворення Лапласа*, а отримане рівняння (2.3) – *операторним рівнянням*.

Нові функції $X(p)$ і $Y(p)$ називаються *зображеннями* $x(t)$ і $y(t)$ по Лапласу, тоді як $x(t)$ і $y(t)$ є *оригіналами* стосовно $X(p)$ і $Y(p)$.

Перехід від однієї моделі до іншої досить простий і полягає в заміні знаків диференціалів $\frac{d^n}{dt^n}$ на оператори p^n, знаків інтегралів $\int ...dt$ на множники $\frac{1}{p}$, а самих $x(t)$ і $y(t)$ – зображеннями $X(p)$ і $Y(p)$.

Для зворотного переходу від операторного рівняння до функцій від часу використається метод *зворотного перетворення Лапласа*. Загальна формула зворотного перетворення Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \qquad (2.4)$$

де $f(t)$ – оригінал, $F(j)$ – зображення при p = jω, j – уявна одиниця, ω – частота.

Ця формула досить складна, тому були розроблені спеціальні таблиці (див. табл. 2.1), у які зведені функції $F(p)$, що найбільш часто зустрічаються, та їх оригінали $f(t)$. Вони дозволяють відмовитися від прямого використання формули (2.4).

Таблиця 2.1

Перетворення Лапласа

Оригінал $x(t)$	Зображення $X(p)$	Оригінал $x(t)$	Зображення $X(p)$
δ-функція	1	$\alpha \cdot x(t)$	$\alpha \cdot X(p)$
1	$\frac{1}{p}$	$\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} X_i(p)$
t	$\frac{1}{p^2}$	$x(t-\alpha)$	$X(p) \cdot e^{-\alpha p}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$p^n \cdot X(p)$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X(p)}{p}$

Закон зміни вихідного сигналу звичайно є функцією, яку необхідно знайти, а вхідний сигнал, як правило, відомий.

3 Визначення перехідної й вагової характеристик

Перехідна характеристика $h(t)$ являє собою реакцію системи (зміна вихідного сигналу в часі) на вхідний вплив у вигляді одиничного сигналу.

Вагова характеристика $\omega(t)$ – це реакція системи на вплив у вигляді одиничного імпульсу. Вагову функцію можна розглядати також як зміну швидкості вихідного сигналу системи при подачі на вхід одиничного стрибка.

Перехідна функція може бути знайдена як рішення диференціального рівняння руху розглянутої системи при підстановці вхідного сигналу у вигляді одиничного сигналу

$$X = 1(t).$$

Вагова функція являє собою похідну перехідної функції за часом

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} h(t).$$

Лінійне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами, записане у відхиленнях у нормованому виді

$$T_1 \frac{d^n y}{dt^n} + T_2 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + T_n \frac{dy}{dt} + y = kx$$

після підстановки $X = 1(t)$ має вигляд

$$T_1 \frac{d^n y}{dt^n} + T_2 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + T_n \frac{dy}{dt} + y = k\ . \qquad (3.1)$$

Його рішення

$$y(t) = k + \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i t}\ , \qquad (3.2)$$

де k – окреме рішення рівняння із правою частиною;

$\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i t}$ – загальне рішення однорідного рівняння;

c_i – постійні інтегрування;

α_i – корінь характеристичного рівняння.

Постійні інтегрування знаходять із початкових умов, які звичайно для рівнянь виду (3.1) є нульовими.

У таблиці 3.1 наведені функції перехідного процесу в різних системах при нульових початкових умовах.

Наявність у чисельнику передатної функції суми різних ступенів оператора p відповідає подачі на вихід у САР декількох вхідних сигналів

$$b_m \cdot x + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_{m-2} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \cdots,$$

або якщо $x = 1(t)$, то $b_m \cdot 1(t) + b_{m-1}\,\delta(t) + b_{m-2}\ \varepsilon(t) + \cdots,$

де $\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t);\ \varepsilon(t) = \frac{d}{dt}\ \delta(t) = \frac{d^2}{dt^2}\ 1(t)$.

Таблиця 3.1

Функції перехідного процесу

№п/п	Передатна функція	Перехідна функція
1	$\frac{\text{к}}{\text{Tp}+1}$	$h(t)=\kappa(1-e^{-\frac{t}{T}})$
2	$\frac{\kappa}{T^2p^2+2T\zeta p+1}$ $\zeta>1;$	$h(t)=k(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}e^{\alpha_1 t}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}e^{\alpha_2 t})$ $\partial e:\alpha_{1,2}=-\frac{\zeta}{T}\pm\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{T}$
3	$\frac{\kappa}{T_2p_2+2T\zeta p+1}$ $\zeta<1$	$h(t)=k(1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot e^{-\frac{\zeta}{T}t}\sin\beta)$ $\beta=(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}t+arctg\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$
4	$\frac{\kappa}{T_2p_2+2T\zeta p+1}$ $\zeta=1$	$h(t)=k(1+e^{-\frac{1}{T}t}(\frac{t}{T}-1))$
5	$\frac{\kappa}{T^2p^2+1}$	$h(t)=k(1-\cos(\frac{t}{T}))$
6	$\frac{\kappa}{T_1p^3+T_2p^2+T_3p+1}$, де α -дійсний і $\gamma\pm\lambda i$ – комплексний корінь характеристичного рівняння.	$h(t)=k(1-\frac{((\alpha-\gamma)^2-2\gamma\alpha+\alpha^2+\lambda^2)}{2\gamma\alpha-\lambda^2-\alpha^2-\gamma^2}e^{\alpha t}+$ $+e^{\gamma t}(\frac{2\alpha^3+\lambda^2\alpha+3\gamma^2\alpha-5\alpha^2\gamma}{(2\gamma\alpha-\lambda^2-\alpha^2-\gamma^2)\lambda}\cdot\sin\lambda t+$ $+\frac{\alpha^2-2\gamma\alpha}{2\gamma\alpha-\gamma^2-\alpha^2-\lambda^2}\cdot\cos\lambda t))$
7	$\frac{\kappa}{T_1p^3+T_2p^2+T_3p+1}$, де $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ – дійсні корні характеристичного рівняння.	$h(t)=\kappa(1-\frac{\alpha_2\alpha_3}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}e^{\alpha_1 t}-$ $-\frac{\alpha_1\alpha_3}{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_1)}e^{\alpha_2 t}-$ $-\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}e^{\alpha_3 t})$

Відповідно до принципу суперпозиції реакція лінійної САР на суму вхідних впливів дорівнює сумі реакцій на кожний із впливів окремо, а реакція на $\frac{dx}{dt}$ дорівнює похідній від реакції на $x(t)$. З огляду на зазначені властивості лінійних систем перехідний процес буде

$$h(t) = b_m \cdot y(t) + b_{m-1}\frac{dy(t)}{dt} + b_{m-2}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \cdots$$

де $y(t)$ – перехідна функція в системі

$$W(P) = \frac{1}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n}.$$

4 Визначення передатних функцій різних ланок, їхніх з'єднань і систем

Перетворення диференційного рівняння по Лапласу дає можливість увести зручне поняття передатної функції, що характеризує динамічні властивості системи.

Наприклад, операторне рівняння

$$3p^2Y(p) + 4p(p) + Y(p) = 2p(p) + 4X(p)$$

можна перетворити, якщо винести $X(p)$ і $Y(p)$ за дужки й поділивши один на одного:

$$Y(p)\cdot(3p^2 + 4p + 1) = X(p)\cdot(2p + 4),$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{2p+4}{3p^2+4p+1}.$$

Отриманий вираз називається ***передатною функцією***.

Передатною функцією називається відношення зображення вихідного впливу $Y(p)$ до зображення вхідного $X(p)$ при нульових початкових умовах.

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \qquad (4.1)$$

Передатна функція є дрібно-раціональною функцією комплексної змінної:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + ... + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_n p^n},$$

де $B(p) = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_m p^m$ – поліном чисельника,
$A(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n$ – поліном знаменника.

Передатна функція має порядок, що визначається порядком полінома знаменника (n).

З (4.1) виходить, що зображення вихідного сигналу можна знайти як

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p).$$

Передатна функція системи повністю визначає її динамічні властивості, тобто первісне завдання розрахунку АСР зводяться до визначення її передатної функції.

Структурні перетворення (СП)

СП проводяться з метою одержання загальної передатної функції САР шляхом зведення заданої багатоконтурної системи до одноконтурної. СП засновані на прийомах еквівалентної заміни окремих ділянок структурної схеми однією ланкою й на правилах структурних перетворень. Еквівалентні заміни показані на рис. 4.1–4.3.

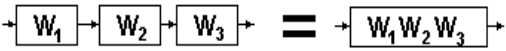


Рис. 4.1 – Еквівалентні перетворення послідовного з'єднання

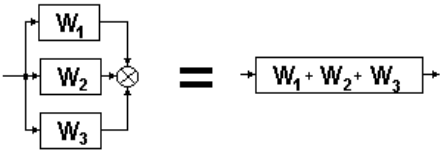


Рис. 4.2 – Еквівалентні перетворення паралельного з'єднання ланок

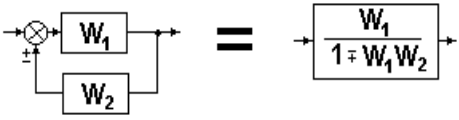


Рис. 4.3 – Еквівалентні перетворення ланки, охопленої зворотним зв'язком

Еквівалентні структурні перетворення, пов'язані з усуненням перетинання прямих і зворотних зв'язків шляхом переносу суматорів і вузлів через ланки вперед та назад, а також друг через друга показані на рис. 4.4–4.7.

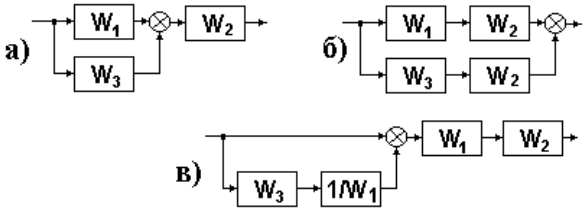


Рис. 4.4 – Перенос суматора в схемі а) через ланку W_2 уперед (б)) і назад через ланку W_1 (в))

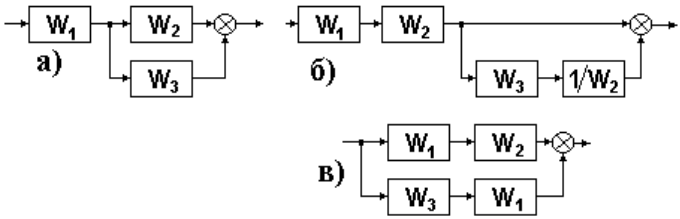


Рис. 4.5 – Перенос вузла розгалуження в схемі (а) через ланку W_2 уперед (б) і назад через ланку W_1 (в)

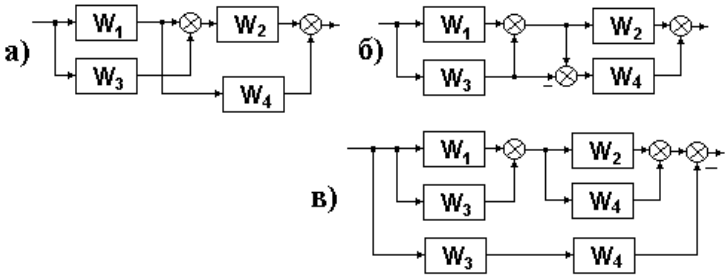


Рис. 4.6 – Перенос суматора назад через вузол розгалуження або перенос вузла розгалуження вперед через суматор

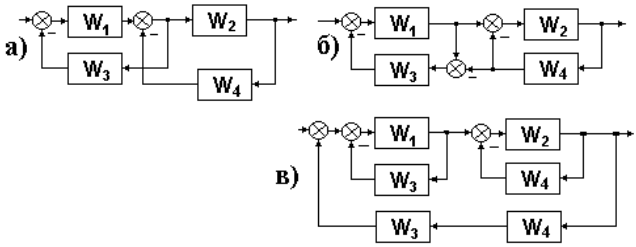


Рис. 4.7 – Перенос суматора вперед через вузол розгалуження або перенос вузла розгалуження назад через суматор

5 Побудова амплітудно-фазових, амплітудно-частотних, фазочастотних, дійсних і уявних частотних характеристик

До частотних характеристик належать амплітудно-фазова характеристика (АФХ), амплітудно-частотна (АЧХ), фазочастотна (ФЧХ) і логарифмічна амплітудно-частотна характеристики (ЛАЧХ). Частотні характеристики відбивають закономірності проходження через систему гармонійного сигналу. АЧХ показує співвідношення між амплітудами вихідного й вхідного сигналів, ФЧХ – дає величину фазового зсуву вихідного сигналу від вхідного залежно від кругової частоти процесу. АФХ являє собою сполучену (АЧХ і ФЧХ) характеристику, модуль якої дорівнює співвідношенню амплітуд, а аргумент – фазовому зсуву.

Комплексна амплітудно-фазова функція виходить при заміні в передатній функції p на $i\omega$

$$W(i\omega) = U(\omega) + V(\omega)i\,,$$

тут $U(\omega)$ – дійсна частотна характеристика; $V(\omega)$ – уявна частотна характеристика.

АФХ будується в координатній площині $U(\omega)$ й $V(\omega)$, на кривій відзначаються точки й чисельні значення ω для них.

АЧХ і ФЧХ визначається за формулами

$$A(w) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}\,,\ \varphi(\omega) = arctg\frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

Ці характеристики зображуються разом на одному графіку.

ЛАЧХ виміряється в децибелах й обчислюється за виразом

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega)\text{, дБ}$$

Приклад.

Визначити частотні характеристики системи управління

$$W(P) = \frac{5p+3}{p^2+3p+2}.$$

Підставимо $p = i\omega$, $W(P) = \dfrac{5i\omega+3}{(2-i\omega^2)+3i\omega}$.

Виділимо дійсну й уявну складові $U(\omega)$ й $V(\omega)$. Для цього позбудемося від удаваності в знаменнику, помноживши чисельник і знаменник на сполучене комплексне число.

$$W(i\omega) = \frac{(3+5i\omega)((2-\omega^2)-3i\omega)}{(2-\omega^2)^2+(3i\omega)^2} = \frac{6+12\omega^2}{4+5\omega^2+\omega^4} + i\frac{\omega-5\omega^3}{4+5\omega^2+\omega^4}.$$

$$U(\omega) = \frac{6+12\omega^2}{4+5\omega^2+\omega^4},\ V(\omega) = \frac{\omega-5\omega^3}{4+5\omega^2+\omega^4},\ \varphi(\omega) = arctg\frac{\omega-5\omega^3}{6+12\omega^2}.$$

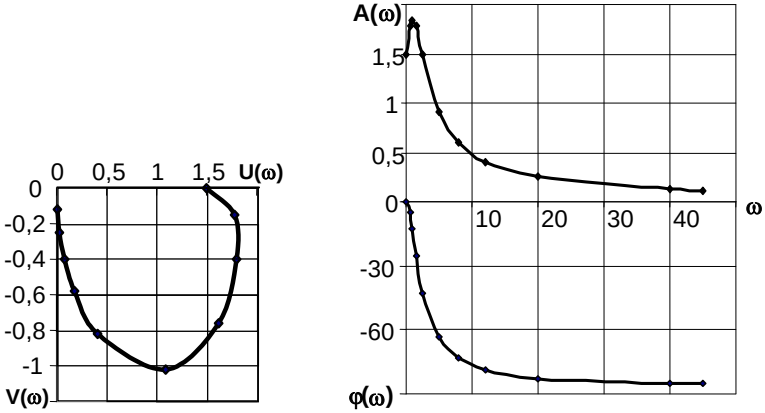
Для побудови графіків виконаємо обчислення $U(\omega); V(\omega); A(\omega)$ й $\varphi(\omega)$ при різних значеннях ω, дані зведемо в таблицю 5.1.

Таблиця 5.1

Значення обчислених величин

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$	$L(\omega)$	$\log(\omega)$
0	1,5	0	1,5	0	3,52	–4
0,7	1,78	–0,15	1,786	–4,8	5,04	–0,15
1	1,8	–0,4	1,844	–12,5	5,32	0
1,5	1,62	–0,76	1,789	–25,2	5,05	0,18
2,5	1,09	–1,02	1,493	–43,1	3,48	0,4
5	0,41	–0,82	0,917	–63,5	–0,75	0,7
8,00	0,18	–0,58	0,607	–72,8	–4,34	0,9
12	0,08	–0,4	0,408	–78,8	–7,79	1,08
20	0,03	–0,25	0,252	–83,2	–11,97	1,3
40	0,01	–0,12	0,12	–85,3	–18,42	1,6
45	0,01	–0,11	0,11	–84,9	–19,17	1,65

Побудовані за результатами розрахунків графіки наведені на рис. 5.1.



а) б)

Рис. 5.1 – Амплітудно-фазова характеристика (а) і амплітудно-частотна й фазочастотна характеристики (б) для прикладу

Примітка. При обчисленні $\varphi(\omega)$ величина кута повинна відповідати знакам $U(\omega)$ й $V(\omega)$, тобто квадранту в якому розташовується АФХ при даній частоті ω. Слід зазначити, що якщо в чисельнику передатної функції є тільки вільний коефіцієнт, то ФЧХ починається з нуля (при $\omega = 0$) і прагне (при $\omega \to \infty$) до величини рівної $-n\frac{\pi}{2}$, де n – порядок характеристичного рівняння. Якщо в чисельнику передатної функції вдається винести за дужки P^m, то ФЧХ починається з величини рівної $m\frac{\pi}{2}$, якщо те же саме можна зробити в знаменнику, то АФХ починається в нескінченності з фазовим зсувом (при $\omega \to 0$) рівним $-m\frac{\pi}{2}$. У загальному випадку при порядку чисельника рівному m і порядку знаменника n граничний фазовий зсув (при $\omega \to \infty$) прагне до $-(n-m)\frac{\pi}{2}$

При побудові ЛАЧХ рекомендується представити задану передатну функцію у вигляді добутку типових передатних функцій.

Для розглянутого приклада

$$W(p)=\frac{5p+3}{p^2+3p+2}=1{,}5\cdot(\frac{5}{3}p+1)\cdot\frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{0{,}5p+1}.$$

Знаходження ЛАЧХ зводиться до побудови характеристик типових ланок і наступного їхнього підсумовування Наближені ЛАЧХ виділених ланок являють собою ламані лінії. Сполучені частоти, у яких відбувається злам характеристики, дорівнюють зворотним величинам постійних часу відповідних ланок, у нашому випадку:

$$\omega_1=\frac{3}{5}=0{,}6\,{}^{1}\!/_{c};\omega_2=\frac{1}{1}=1{,}0\,{}^{1}\!/_{c};\omega_3=\frac{1}{0{,}5}=2\,{}^{1}\!/_{c}.$$

Обчислимо величини, необхідні для побудови логарифмічних характеристик.

$$\log(\omega_1)\Rightarrow -0{,}22;\log(\omega_2)\Rightarrow 0;\log(\omega_3)\Rightarrow 0{,}301;20\log(1{,}5)\Rightarrow 3{,}52.$$

Побудова ЛАЧХ наведена на рис. 5.2.

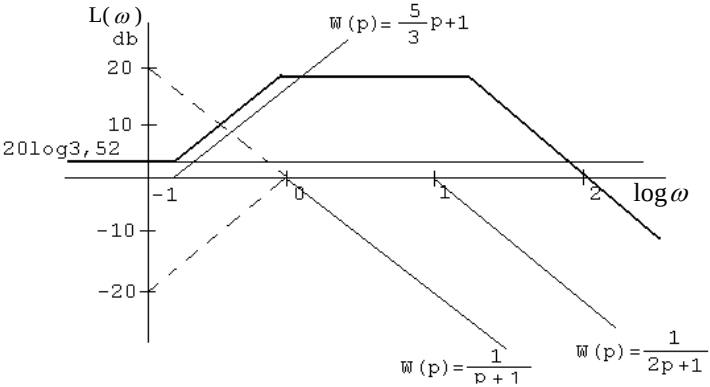


Рис.5.2 – Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика.

6 Дослідження перехідних процесів і частотних характеристик типових динамічних ланок на ПЕОМ

Ланки, передатні функції яких мають вигляд простих множників або простих дробів, називають типовими або елементарними ланками.

Пропорційна ланка.

Пропорційною називають ланку описувану рівнянням $y(t) = ku(t)$ або передатною функцією $W(s) = k$.

Частотні й часові функції цієї типової ланки мають такий вигляд:

$W(j\omega) = k$; $U(\omega) = k$; $V(\omega) = 0$;

$A(\omega) = k$; $\varphi(\omega) = 0$; $L(\omega) = 20 \lg k$; $h(t) = k1(t)$.

Побудуємо логарифмічну амплітудно-фазову й перехідну характеристики пропорційної ланки (рис. 6.1), використовуючи можливості програми Mathcad Professional.

$\omega := 0.1..100 \quad t := 0..10 \quad k := 10 \quad L(\omega) := 20 \cdot \log(k) \quad h(t) := k$

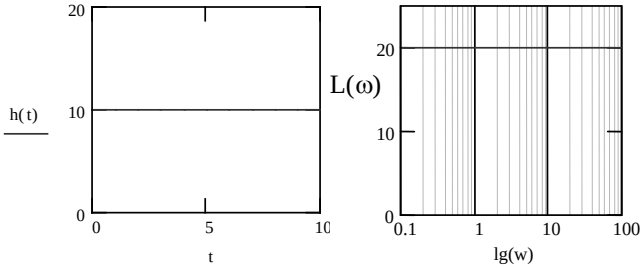


Рис. 6.1 – Перехідна характеристика і ЛАЧХ пропорційної ланки

Інтегруюча ланка.

Інтегруючою називають ланку описувану рівнянням $dy/dt = kx$ або передатною функцією:

$$W(p) = k/p.$$

Частотна передатна функція $W(j\omega) = k/j\omega = -jk/\omega$. Інші частотні й часові функції мають такий вигляд:

$U(\omega) = 0$; $V(\omega) = -k/\omega$;

$A(\omega) = k/\omega$; $\varphi(\omega) = -\pi/2$; $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg\omega$; $h(t) = kt$.

Амплітудно-частотна характеристика збігається з негативною уявною піввіссю. ЛАЧХ – похила пряма, що проходить через точку з координатами $\omega = 1$ і $L(\omega) = 20\lg k$. Як видно з рівняння, $L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\omega$ при збільшенні частоти на одну декаду $L(\omega)$ змінюється на 20 дб. Тому нахил ЛАЧХ дорівнює –20дб/град. Перехідна характеристика являє собою пряму, що проходить через початок координат з кутовим коефіцієнтом нахилу, рівним k.

Побудуємо логарифмічні амплітудно-частотну й фазочастотну характеристики (рис. 6.2):

- задамо інтервали зміни частоти ω і часу t: $\omega := 0.1, 0.2 .. 100$ $t := 0 .. 10$;

- задамо значення параметра ланки: $k := 5$;

- уведемо формули характеристик: $L(\omega) := 20 \cdot \log(k) - 20 \cdot \log(\omega)$ $h(t) := k \cdot t$ $\phi(\omega) := -\frac{\pi}{2}$.

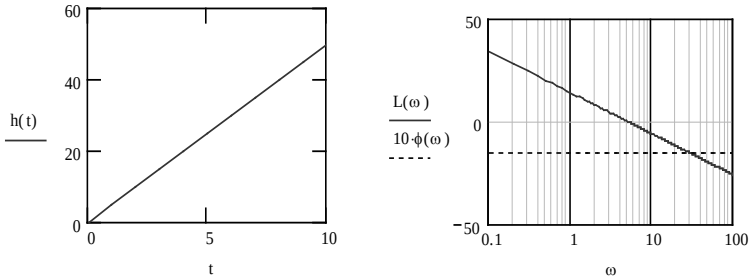


Рис. 6.2 – Перехідна характеристика, ЛАЧХ і ЛФЧХ інтегруючої ланки

Ланка, що диференціює.

Ланка, що диференціює описується рівнянням $y(t) = kdx/dt$ або передатною функцією $W(p) = kp$. Частотні й часові функції цієї ланки мають вигляд: $W(j\omega) = jk\omega$; $U(\omega) = 0$; $V(\omega) = k\omega$; $A(\omega) = k\omega$; $\varphi(\omega) = \pi/2$; $L(\omega) = 20\lg k + 20\lg\omega$; $h(t) = \delta(t)$.

АФЧХ збігається з позитивною уявною піввіссю. ЛФЧХ і ЛАЧХ побудуємо, використовуючи Mathcad Professional (рис. 6.3).

$\omega := 0.1 .. 100$ $k := 10$ $L(\omega) := 20 \cdot \log(k) + 20 \cdot \log(\omega)$ $\phi(\omega) := \frac{\pi}{2}$.

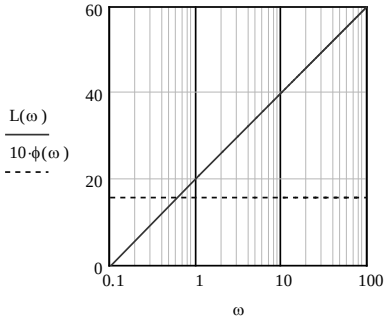


Рис. 6.3 – ЛАЧХ і ЛФЧХ ланки, що диференціює

Аперіодична ланка.

Аперіодичною ланкою першого порядку називають ланку описувану рівнянням $(Tp+1)y = ku$ або передатною функцією $W(s) = k/(Ts+1)$.

Цю ланку називають також інерційною ланкою або інерційною ланкою першого порядку. Аперіодична ланка характеризується двома параметрами: постійною часу T і коефіцієнтом передачі k.

Частотна передатна функція:

$$W(j\omega) = \frac{k}{(Tj\omega + 1)}.$$

Помноживши чисельник і знаменник на комплексно-сполучене знаменнику вираження, одержимо

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - Tj\omega)}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Розділимо його на дійсну й уявну частини:

$$U(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}; V(\omega) = -\frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Амплітудні й фазову частотні функції можна визначити, використовуючи правило модулів і аргументів:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}.$$

Аргумент чисельника W (jω) дорівнює нулю, а аргумент знаменника - arctg(ωT), тому φ(ω) = arg(ω) = - arctg (ωT). Із цього виходить, що

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1}.$$

Більш просто частотні характеристики можна одержати, використовуючи програму Mathcad Professional (рис. 6.4 і рис. 6.5).

$$\omega := 0, .1 .. 400 \quad k := 10 \quad T := 0.5 \quad W(\omega) := \frac{k}{T \cdot j \cdot \omega + 1}$$

$$A(\omega) := |W(\omega)| .$$

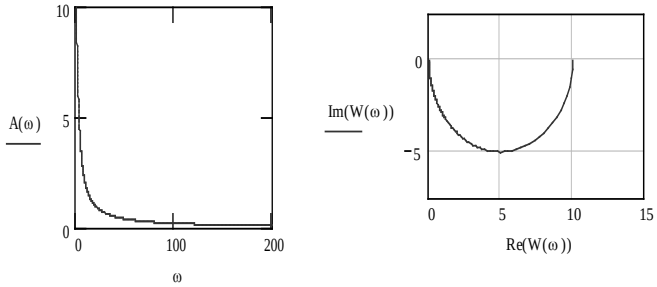


Рис. 6.4 – АЧХ і АФЧХ аперіодичної ланки

$$\phi(\omega) := \arg(W(\omega)) \quad L(\omega) := 20 \cdot \log(A(\omega)) .$$

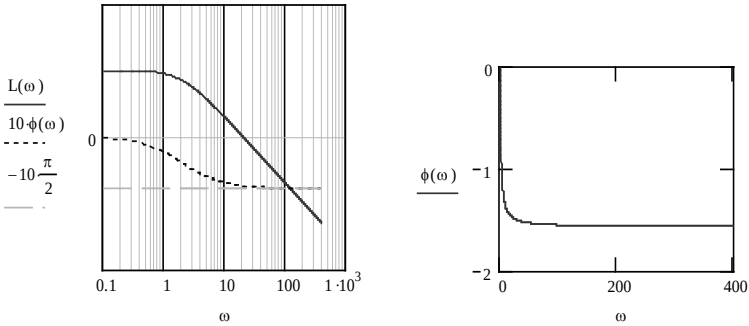


Рис. 6.5 – ЛАЧХ і ЛФЧХ аперіодичної ланки

Побудуємо перехідну характеристику інерційної ланки. Для цього компенсуємо раніше уведені значення коефіцієнта передачі *k* і постійної часу *T*, помножимо передатну функцію на зображення по Лапласу одиничного стрибкоподібного збурювання і використаємо зворотне перетворення Лапласа:

$$\frac{k}{s \cdot (T \cdot s + 1)} \text{ invlaplace}, s \rightarrow k \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{T}\right)\right).$$

Задамо діапазон зміни часу рішення, величину коефіцієнта передачі й вираження для перехідної характеристики, одержимо її графік (рис. 6.6):

$$t := 0, .1 .. 10 \quad k := 10 \quad T := 0.8 \quad h(t) := k \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{T}}\right).$$

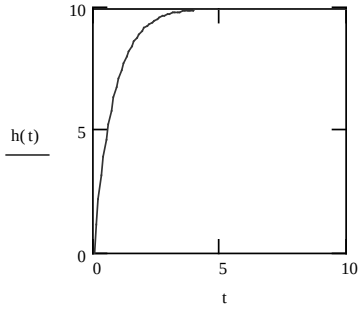


Рис. 6.6 – Перехідна характеристика

Оцінка якості систем управління

До прямих оцінок якості систем управління, що визначаються безпосередньо по кривій перехідного процесу належать наступні показники (див. рис. 6.7):

Тривалість перехідного процесу (час регулювання) t_n – мінімальний час, після закінчення якого вихідний сигнал наближається до свого сталого значення $h_{уст}$ із заданою точністю Δ. Величина Δ приймається рівною $1 \div 5\,\%$ від $h_{уст}$.

Перерегулювання σ – максимальне відхилення вихідного сигналу від $h_{уст}$ у відносних одиницях або у відсотках.

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\ \%$$

Звичайно припустиме перерегулювання становить $10 \div 30\,\%$.

Коливальність системи управління, що виражається:

- *частотою власних коливань* величини вихідного сигналу $\omega_0 = 2\pi / T$, де T – період коливань;

- *числом коливань* N за час перехідного процесу;
- *декрементом загасання* $\lambda = h_2 / h_1$, рівним відношенню двох сусідніх амплітуд коливання вихідного сигналу.

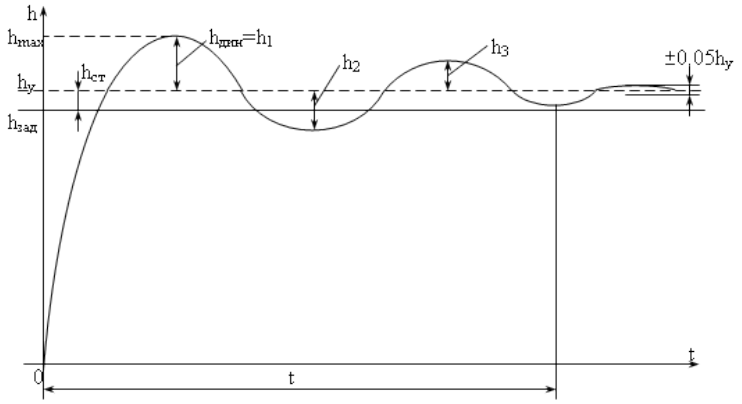


Рис. 6.7 – До визначення показників якості перехідного процесу

Час наростання вихідного сигналу t_H – час першої точки перетинання кривої перехідного процесу з рівнем $h_{уст}$.

Статизм δ – величина статичного відхилення вихідного сигналу, що приходить на одиницю вхідного сигналу. По кривій перехідного процесу $\delta = h_{уст}$.

Система управління, у якої $\delta = 0$, називається *статичною*.

До непрямих оцінок якості систем управління, що визначаються по частотних характеристиках належать наступні показники (див. рис. 6.7):

Коливальність M – відношення максимального значення АЧХ до її значення при $\omega = 0$: $M = A_{\max}(\omega_p) / A(0)$.

Резонансна частота ω_p – частота, при якій АЧХ має максимум.

Смуга пропущення ω_0 – інтервал частот від 0 до ω_0, при якій $A(\omega_0) = 0{,}707 A(0)$.

Частота зрізу $\omega_{зр}$ – частота, при якій $A(\omega_{ср}) = A(0)$.

Запас стійкості по фазі $\Delta\varphi_y$ – нестача фазового зсуву до $-\pi$ при $A(\omega) = 1$.

Запас стійкості по амплітуді ΔAy – нестача $A(\omega)$ до 1 або модулю ЛАЧХ при фазовому зсуві, рівному $-\pi$.

Останні два показники визначається по характеристиках розімкнутої системи.

7 Приклад вирішення завдання з контрольної роботи

Вихідні дані: Система автоматичного регулювання (рис. 7.1) складається з об'єкта регулювання із передатною функцією $W_{op}(p) = \frac{K_1}{T_2 p + 1}$; регулятора з передатною функцією $W_p(p) = \frac{1}{T_1 p}$ й ланки зворотного зв'язку $W_{oc}(p) = 1$.

Побудувати за допомогою речовинних частотних характеристик графік перехідного процесу САР $y(t)$ при одиничному керуючому впливі $x(t) = 1$.

$K_1 = 10;\ T_1 = 0,5$ с; $T_2 = 1$ с.

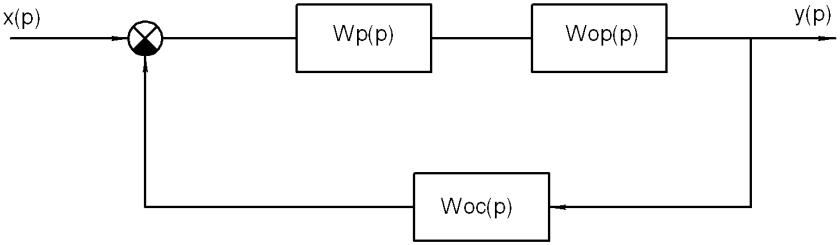


Рис. 7.1 – Структурна схема САР

Визначимо передатну функцію замкнутої САР $W(p)$:

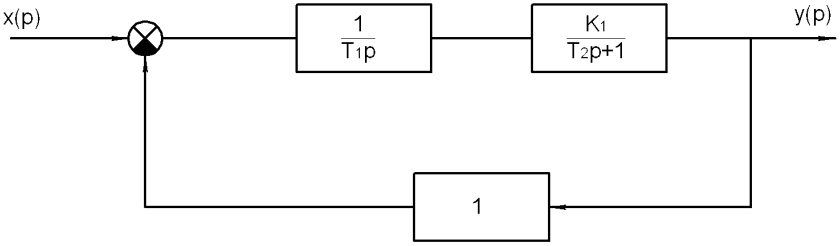


Рис. 7.2 – Структурна схема САР

$$\Phi(p)=\frac{W_p(p)W_{op}(p)}{1+W_{op}(p)W_p(p)W_{oc}(p)}=\frac{\left(\frac{1}{T_1p}\frac{K_1}{T_2p}\right)}{1+1\cdot\frac{1}{T_1p}\frac{K_1}{T_2p}}=\frac{\left(\frac{1}{T_1p}\frac{K_1}{T_2p}\right)}{\frac{T_1T_2p^2+T_1p+K_1}{T_1p\cdot T_2p}}=$$

$$=\frac{K_1}{T_1T_2p^2+T_1p+K_1}.$$

Визначимо рівняння амплітудно-фазової характеристики (АФХ) САР:

$$W(j\omega)=\frac{K_1}{T_1T_2(j\omega)^2+T_1j\omega+K_1}=\frac{K_1}{-T_1T_2\omega^2+T_1j\omega+K_1}=\frac{K_1}{(K_1-T_1T_2\omega^2)+T_1j\omega}=$$

$$=\frac{K_1((K_1-T_1T_2\omega^2)-T_1j\omega)}{((K_1-T_1T_2\omega^2)+T_1j\omega)((K_1-T_1T_2\omega^2)-T_1j\omega)}=\frac{K_1^2-K_1T_1T_2\omega^2-jK_1T_1\omega}{(K_1-T_1T_2\omega^2)^2+T_1^2\omega^2}=$$

$$=U(\omega)+jV(\omega)=\frac{K_1^2-K_1T_1T_2\omega^2}{(K_1-T_1T_2\omega^2)^2+T_1^2\omega^2}-j\frac{K_1T_1\omega}{(K_1-T_1T_2\omega^2)^2+T_1^2\omega^2}.$$

Однією з причин, що обумовили широке використання передатних функцій, є їх зв'язок із частотними характеристиками.

Передатна функція є множником (у загальному випадку – комплексним), що зв'язує змушену складову вихідного процесу системи із вхідним сигналом експонентного виду. Ця властивість дозволяє знайти й реакцію системи на гармонійний вхідний сигнал, тобто частотні характеристики системи.

Комплексну передатну функцію $w(j\omega)$ при ω_i можна зобразити вектором у полярній системі координат. Довжина цього вектора визначається модулем $A(\omega)$, а кут його повороту щодо полярної осі – аргументом $\varphi(\omega)$. Звичайно полярну систему координат сполучають із декартовою. За полюс приймається початок декартових координат, а за полярну вісь – позитивна речовинна вісь. Оскільки $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ є функціями частоти, довжина вектора $A(\omega)$ й кут його повороту змінюються зі зміною ω.

Крива, описувана кінцем вектора комплексної передатної функції $w(j\omega)$ ланки (системи) при зміні частоти ω від нуля до нескінченності, називається амплітудно-фазовою частотною характеристикою системи.

Виділимо рівняння РЧХ САР $U(\omega)$:

$$U(\omega)=\frac{K_1^2-K_1T_1T_2\omega^2}{(K_1-T_1T_2\omega^2)^2+T_1^2\omega^2}=\frac{100-5\omega^2}{(10-0,5\omega^2)^2+0,25\omega^2}.$$

Побудова речовинної частотної характеристики (РЧХ) $U(\omega)$ і графіка перехідного процесу САР $y(t)$ по РЧХ (рис. 7.3). Розрахунки проведені в математичному пакеті Mathcad:

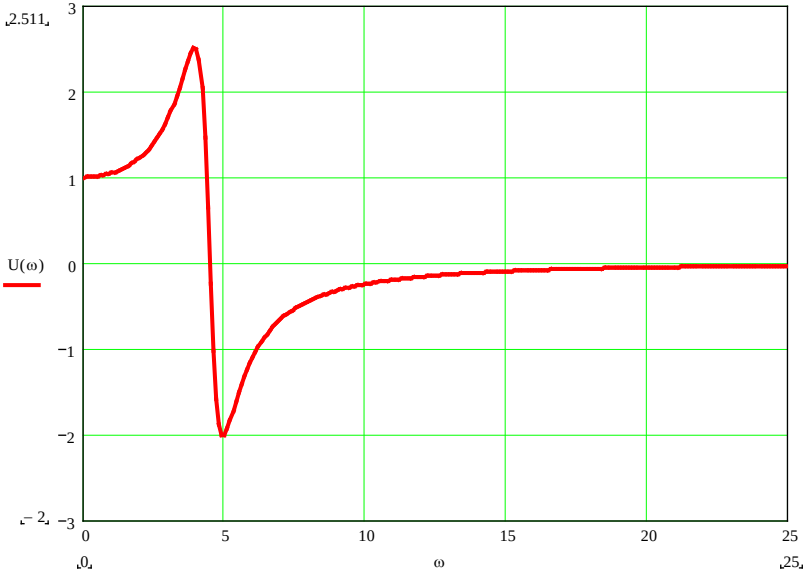


Рис. 7.3 – Побудова речовинної частотної характеристик

Задаючись різними значеннями частоти ω будуємо $U(\omega)$. Фізичний зміст мають тільки частоти від нуля до нескінченності, тому звичайно зображують тільки цю частину характеристик.

За допомогою частотної характеристики замкнутої системи можна не тільки визначити вихідну величину системи в сталому режимі при гармонійному вхідному впливі, але й знайти реакцію системи в перехідному процесі на довільний вплив.

Дійсно, представляючи цей вплив залежно від того, є він періодичною або неперіодичною функцією, у вигляді ряду або інтеграла Фур'є, тобто у вигляді нескінченної суми гармонійних коливань, можна по частотній характеристиці визначити реакцію системи на кожне із цих

елементарних коливань, а потім, просумувати всі реакції, знайти результуючу реакцію у вигляді суми або інтеграла.

Формула для перехідної функції при реакції системи на одиничну східчасту функцію, використаючи частотну характеристику системи:

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0,01}^{20} U(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega .$$

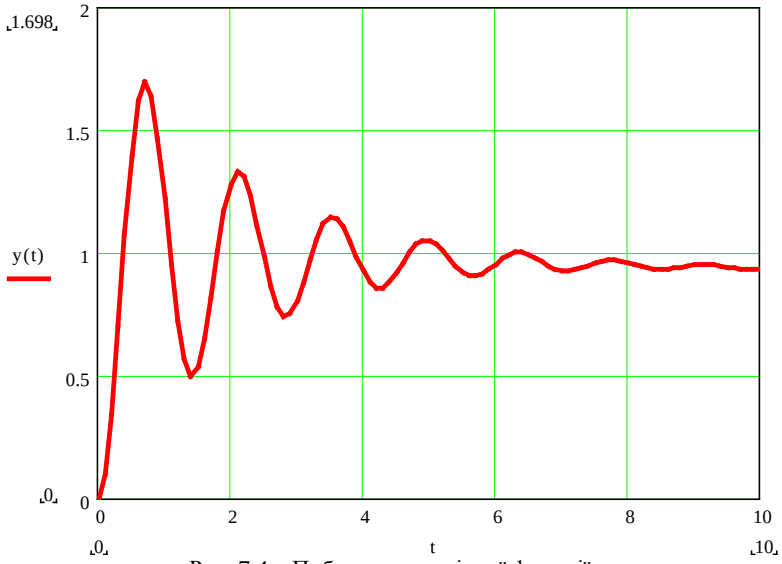


Рис. 7.4 – Побудова перехідної функції

При одиничному східчастому впливі САР, будучи виведеною зі стану рівноваги, повертається до нього з певною точністю після закінчення перехідного процесу. Якість процесу регулювання визначається рядом показників:

- статична точність системи визначається сталим значенням вихідної величини, тобто задовольняє умові наближеності сталого значення виходу заданому значенню регульованої величини;
- швидкодія системи характеризується часом регулювання, що склав $t_{рег}$ = 9 с;
- плавність протікання перехідного процесу (демпфірування системи) характеризується наступними показниками:
  - максимальне перерегулювання Δy_{max} = 1,75;

- час максимального перерегулювання $t(y_{max}) = 0{,}5$ с;
- число коливань регульованої величини за час регулювання $n = 6$.

У такий спосіб можна зробити висновок, що система стійка й має достатню якість процесу регулювання.

На рис. 7.5 та 7.6 наведено як за допомогою пакету Mathcad можливо виконати завдання контрольної роботи.

$$U(\omega) = \frac{K_1^2 - K_1 T_1 T_2 \omega^2}{(K_1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + T_1 \omega^2} = \frac{100 - 5\omega^2}{(10 - 0{,}5\omega^2)^2 + 0{,}5\omega^2}$$

$\omega := 0, 0.1 .. 25$

$$U(\omega) := \frac{100 - 5 \cdot \omega^2}{\left(10 - 0.5 \cdot \omega^2\right)^2 + 0.25 \cdot \omega^2}$$

ω =
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
1.4
…

U(ω) =
1
1
1.002
1.004
1.008
1.012
1.017
1.024
1.031
1.04
1.05
1.061
1.073
1.087
1.102
…

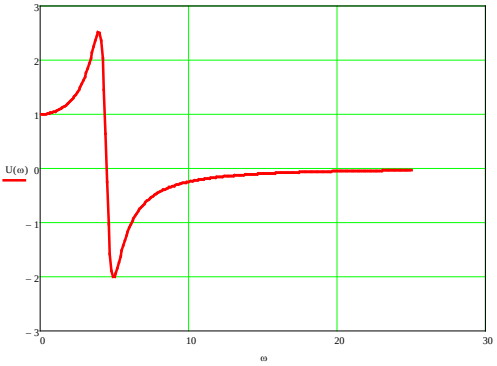


Рис. 7.5 – Побудова речовинної частотної характеристики із допомогою пакету Mathcad

$t_k := 20$ $t := 0, 0.1 .. t_k$

$$y(t) := \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0.01}^{20} U(\omega) \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\omega} \, d\omega$$

$y(t_k) := 0{,}944$

t =
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
1.4
…

y(t) =
0
0.098
0.343
0.705
1.076
1.396
1.619
1.698
1.637
1.466
1.221
0.954
0.724
0.564
0.498
…

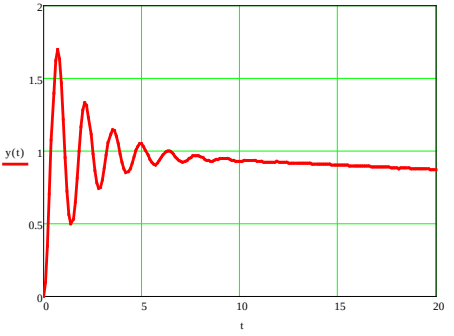
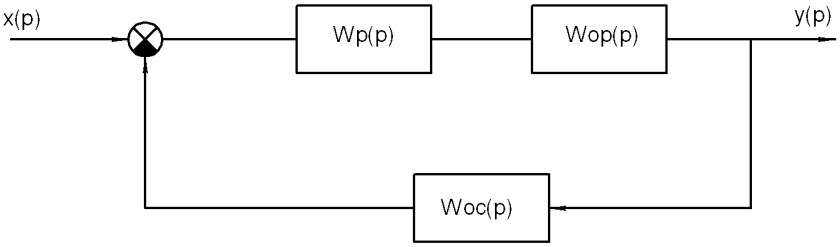


Рис. 7.6 – Побудова перехідної функції з допомогою пакету Mathcad

ВАРІАНТИ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Вихідні дані: Система автоматичного регулювання (рис. 7.1) складається з об'єкта регулювання із передатною функцією $W_{op}(p)$; регулятора з передатною функцією $W_p(p)$ й ланки зворотного зв'язку $W_{oc}(p)$.

Побудувати за допомогою речовинних частотних характеристик графік перехідного процесу САР $y(t)$ при одиничному керуючому впливі $x(t)=1$.



Варіанти передатних функцій:

1. $W(p)=\dfrac{K_1}{T_1 p}e^{-p\tau}$; 2. $W(p)=K_2$;

3. $W(p)=\dfrac{e^{-p\tau}}{T_1 p^2+T_2 p+1}$; 4. $W(p)=-\left(K_1+\dfrac{K_2}{p}\right)$;

5. $W(p)=\dfrac{K_1}{T_2 p+1}$; 6. $W(p)=K_2$;

7. $W(p)=\dfrac{K_1}{T_1 p}$; 8. $W(p)=\dfrac{K_2}{T_1 p+1}$;

9. $W(p)=\dfrac{K_1}{T_1 p^2+1}$; 10. $W(p)=\dfrac{K_1}{T_1 p^2+T_2 p+1}$;

11. $W(p)=K_1(T_1 p+1)$; 12. $W(p)=1$.

Таблиця – Вихідні дані для різних варіантів завдань

№ вар.	$W_р(p)$	$W_{ор}(p)$	$W_{ос}(p)$	K_1	K_2	T_1, с	T_2, с	τ, с
1	-	1	2	1	1	2	-	0,5
2	-	1	2	2	1	100	-	50
3	-	1	2	1	2	50	-	100
4	-	1	2	0,5	0,5	1	-	100
5	-	1	2	1	1	1	-	1
6	-	1	2	0,5	1	50	-	50
7	-	1	2	20	1	100	-	5
8	-	1	2	10	2	50	-	100
9	-	1	2	20	1	100	-	5
10	-	3	4	0,819	0,013	200	50	50
11	-	3	4	0,8	0,01	200	50	100
12	-	3	4	0,8	0,015	200	25	50
13	-	3	4	0,8	0,01	100	50	25
14	-	3	4	0,6	0,01	100	25	50
15	-	3	4	0,8	0,02	150	50	50
16	-	3	4	0,8	0,01	200	50	100
17	-	3	4	0,8	0,015	200	25	50
18	6	5	13	10	-	0,5	1	-
19	6	5	13	50	-	1	0,5	-
20	6	5	13	2	-	0,5	1	-
21	6	5	13	10	-	2	1	-
22	6	5	13	5	-	0,5	0,5	-
23	6	5	13	5	-	2	1	-
24	6	5	13	20	-	2	1	-
25	6	5	13	10	-	2	1	-
26	6	5	13	20	-	0,5	0,5	-
27	6	5	13	50	-	0,5	1	-
28	6	5	7	10	10	50	10	-
29	6	5	7	10	1	60	25	-
30	6	5	7	1	5	10	10	-
31	6	5	7	5	10	50	10	-
32	6	5	7	5	10	1	0,25	-
33	6	5	7	10	1	2	1	-
34	8	9	13	1	1	0,5	-	-
35	8	10	13	1	10	10	-	-
36	9	10	13	10	1	10	-	-

37	8	11	13	1	10	1	10	-
38	8	5	13	1	1	0,5	0,5	-
39	9	2	13	1	1	1	-	-
40	11	8	2	1,1	1	50	1	-
41	8	13	9	1	10	1	-	-
42	8	9	13	1	2	0,5	-	-
43	8	10	13	10	-	10	-	-
44	9	10	13	2	3	5	-	-
45	8	11	13	10	-	10	5	-
46	9	8	13	20	0,5	1	-	-
47	5	2	13	10	1	-	1	-
48	11	8	2	1	10	1	1	-
49	8	13	9	1	100	1	-	-
50	8	9	13	5	1	1		-

Значення, що рекомендуються, для рішення за допомогою пакета прикладних програм

№ вар.	Межі інтегр.	ω, $с^{-1}$	t, с	$U(0)$	$t_к$, с	$y(t_к)$
1	0,01–20	0;0,1..20	0;0,1..$t_к$	1	8	0,944
4	0,01–20	0;0,01..10	0;0,01..$t_к$	2	15	1,699
5	0,01–30	0;0,01..10	0;0,01..$t_к$	1	15	0,893
18	0,001–10	0;0,1..20	0;0,1..$t_к$	1	15	0,992
19	0,001–10	0;0,1..30	0;0,1..$t_к$	1	10	0,996
20	0,001–10	0;0,1..15	0;0,1..$t_к$	1	15	0,991
21	0,001–10	0;0,1..20	0;0,1..$t_к$	1	15	0,99
23	0,001–10	0;0,1..15	0;0,1..$t_к$	1	15	0,991
26	0,001–15	0;0,1..40	0;0,01..$t_к$	1	8	0,997
28	0,001–1	0;0,1..36	0;0,1..$t_к$	0,1	80	0,095
29	0,001–10	0;0,1..10	0;0,1..$t_к$	10	15	9,903
30	0,001–10	0;0,1..10	0;0,1..$t_к$	5	10	4,969
31	0,001–1	0;0,1..24	0;0,1..$t_к$	0,1	80	0,019
33	0,001–5	0;0,1..10	0;0,1..$t_к$	5	15	4,951
34	0,001–10	0;0,1..15	0;0,1..$t_к$	1	6	0,998
36	0,001–5	0;0,01..1	0;1..$t_к$	0,909	40	0,885
42	0,001–20	0;0,1..15	0;0,1..$t_к$	1	6	0,998
44	0,001–5	0;0,01..0,8	0;1..$t_к$	0,5	150	0,452
50	0,001–10	0;0,1..15	0;0,1..$t_к$	1	10	1

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гаврилов Е. В., Дмитриченко М. Ф., Доля В. К., Лановий О. Т., Линник І. Е., Поліщук В. П. Системологія на транспорті: підручник у 5 кн. Кн. І: Основи теорії систем і управління. Київ: Знання України, 2005. 344 с.

2. Іванов А. О. Теорія автоматичного керування: підручник. Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2003. 250 с.

3. Александров Є. Є., Козлов Є. П., Кузнєцов Б. І. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. Том 1. Теорія автоматичного керування. Харків: НТУ «ХПІ», 2002. 496 с.

4. Штіфзон О.Й., Новіков П. В., Бунь В. П. Теорія автоматичного управління: навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 144 с.

5. Методичні вказівки для розрахункової роботи № 1. Характеристики типових елементарних ланок з курсу «Теорія автоматичного управління» / уклад. Пісьціо В. П., Рогатинська О. Р. Тернопіль: ТНТУ, 2015. 44 с.

6. Методичні вказівки для розрахункової роботи № 2. З'єднання ланок та стійкість систем з курсу «Теорія автоматичного управління» / уклад. Пісьціо В. П., Рогатинська О. Р. Тернопіль: ТНТУ, 2015. 42 с.

7. Черкашенко М. В., Сєріков А. Д., Салига Т. С., Фатєєв О. М., Фатєєва Н. М., Радченко Л. Р. Позиційні гідропневмоагрегати. Харків: НТУ «ХПІ», 2015. 115 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки
до виконання самостійних занять з дисципліни «Системи автоматичного керування об'єктами та процесами галузевого машинобудування» для студентів денної та заочної форм навчання за спеціальностями «Галузеве машинобудування» освітня програма «Машини та обладнання для технологічних процесів», «Відновлювані джерела енергії та гідроенергетика» освітня програма «Гідроенергетика»

Укладачі:
РОГОВИЙ Андрій Сергійович
ФАТЄЄВ Олександр Миколайович
ФАТЄЄВА Надія Миколаївна

Відповідальний за випуск проф. Роговий А. С.

Роботу до видання рекомендував проф. Крутіков Г. А.

В авторській редакції

План 2025 р., поз. 257

Підп. до друку 13.02.2025 р. Гарнітура Times New Roman

Видавничий центр НТУ «ХПІ»,
вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Електронна версія