

УДК 621.646.45: 621.05: 621.454.2

С.А. ШЕВЧЕНКО, А.Л. ГРИГОРЬЕВ, М.С. СТЕПАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛЯТОРА ДАВЛЕНИЯ С ПНЕВМАТИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ ПРИ УЧЕТЕ КОЛЕБАНИЙ СТОЛБОВ ГАЗА В ТРУБОПРОВОДАХ

Составлена дискретно-континуальная нелинейная модель и выведено трансцендентное характеристическое уравнение для исследования свободных колебаний регулятора пневмосистемы запуска ракетного двигателя. Разработан метод нахождения границы динамической устойчивости системы и критерий устойчивости ее предельного цикла. Описан порядок настройки системы на автоколебания малой амплитуды.

Ключевые слова: пневмосистема, дискретно-континуальная модель, гармоническая линеаризация, механический импеданс, динамическая устойчивость, автоколебания.

Введение и постановка задачи. Исследуемый регулятор давления устанавливается в пневмосистеме запуска ЖРД третьей ступени ракеты-носителя (РН) и предназначен для стабилизации параметров рабочего тела (сжатого гелия), посредством которого осуществляется раскрутка турбонасосного агрегата при включении двигателя. Подробное описание особенностей работы пневмосистемы и ее математических моделей приведены в статьях [1-4]. Расчетная схема пневмосистемы показана на рис. 1; в ней трубопроводы и пружины рассматриваются как континуальные подсистемы с распределенными параметрами, а полости, клапаны и поршни – как подсистемы с сосредоточенными параметрами. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных, полученных при стендовых и огневых испытаниях опытного образца такой системы на двигателе РД861К, подтвердило правильность основных принципов, использованных при моделировании, и открыло дорогу для использования разработанного программного комплекса при решении задач проектирования новых устройств подобного назначения.

мы с распределенными параметрами, а полости, клапаны и поршни – как подсистемы с сосредоточенными параметрами. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных, полученных при стендовых и огневых испытаниях опытного образца такой системы на двигателе РД861К, подтвердило правильность основных принципов, использованных при моделировании, и открыло дорогу для использования разработанного программного комплекса при решении задач проектирования новых устройств подобного назначения.

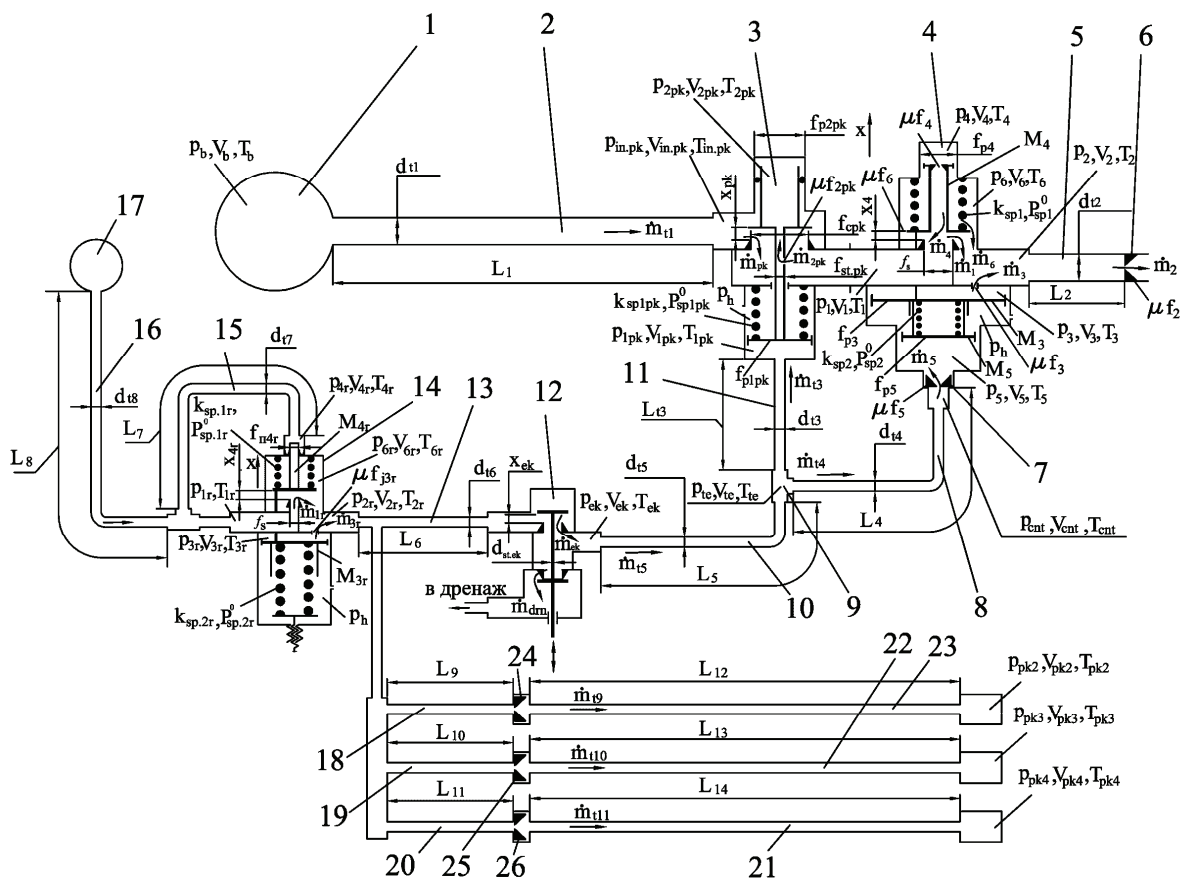


Рисунок 1 – Расчетная схема пневмосистемы запуска ЖРД: 1, 17 – шаробаллоны; 2, 5 – входной и выходной трубопроводы; 3 – пневмоклапан; 4, 14 – регуляторы давления; 6, 7, 24–26 – жиклер; 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 18–23 – трубопроводы линии управления; 19 – тройник; 12 – электропневмоклапан.

Одной из важнейших задач, которую приходится решать при создании новой пневмосистемы, является обеспечение динамической устойчивости регулятора давления газа. Решению этой проблемы посвящено множество работ (напр., [5-7]), но в них не учитываются связанные колебания столбов газа во входном и выходном трубопроводах, а также в многочисленных трубопроводах системы управления. В то же время, как свидетельствуют результаты расчетного исследования (рис.2), а также опыт длительной доводки опытного образца,

– эта пневмосистема работает на пределе дина-

мической устойчивости;

– изменение длин трубопроводов влияет на устойчивость ее работы.

Использование программного комплекса [1-4] позволяет в десятки раз сократить затраты на разработку новой пневмосистемы; в том числе, с его помощью можно проверить спроектированный образец на динамическую устойчивость. Но, к сожалению, решаемые дифференциальные уравнения являются нелинейными и сложными, что препятствует использованию стандартных для теории регулирования методов проверки линейной системы на устойчивость.

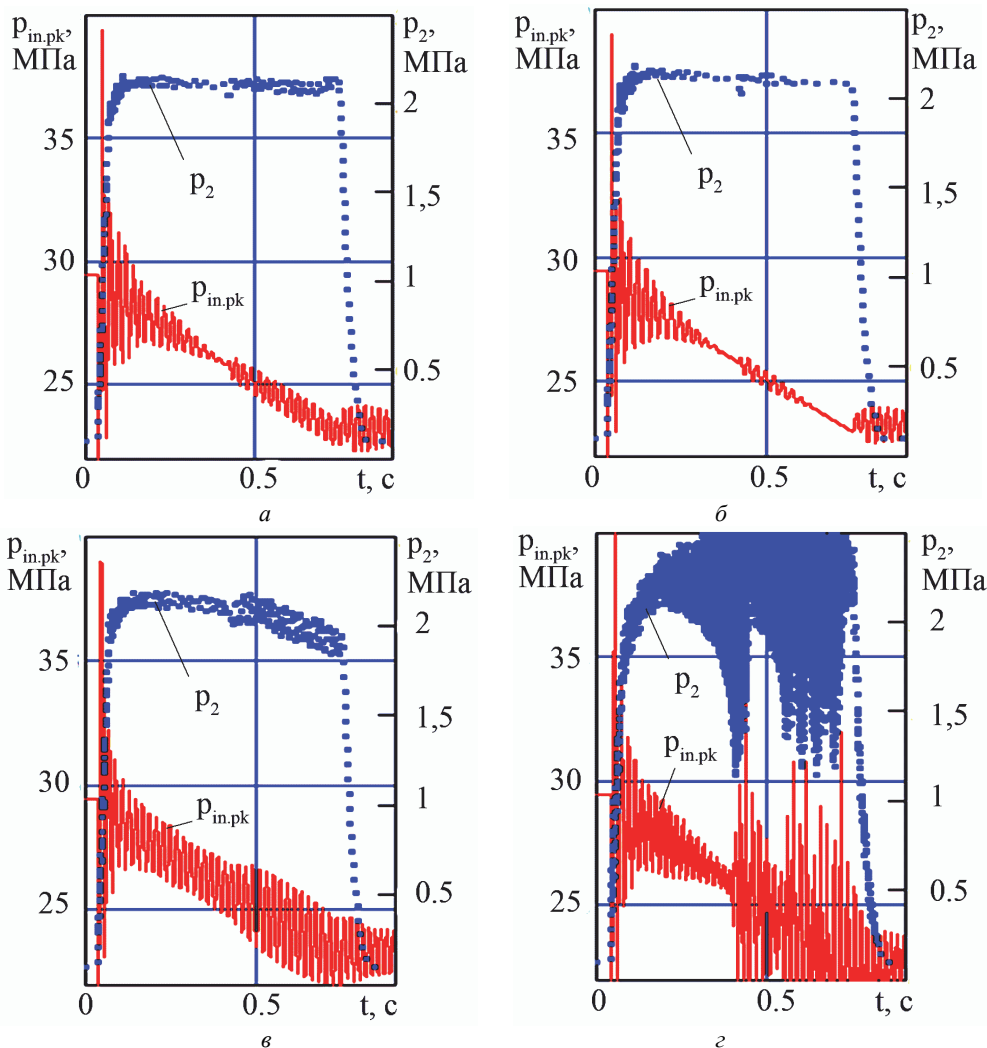


Рисунок 2 – Влияние длин трубопроводов на колебания давления газа до и после регулятора:
 а – $L_1 = 4,3$ м; $L_2 = 1,9$ м; $L_5 = 1,7$ м; б – изменено $L_1 = 5,3$ м; в – $L_2 = 2,4$ м; г – $L_5 = 2,7$ м

Для устранения этого препятствия нелинейную систему уравнений линеаризуют [8,9]; при этом получают условие устойчивости для колебаний малой амплитуды, где, напр., размах колебаний клапана не превышает 10% от его подъема. Заметим, что такие колебания, даже если они не затухают со временем, здесь не опасны; более того, они желательны, поскольку устраняют трение покоя в уплотнительных манжетах [10]. Поэтому вывод критерия устойчивости для малых колебаний не актуален.

Однако, как следует из экспериментальных дан-

ных, после своего открытия клапан регулятора этой пневмосистемы имеет значительную амплитуду колебаний, составляющую 15-20% от его подъема. Кроме того, далее будет показано, что устойчивость регулятора зависит от амплитуды колебаний клапана. Поэтому линеаризацию следует проводить с учетом амплитуды колебаний как дополнительного нелинейного фактора.

Целью работы является получение аналитических и графоаналитических зависимостей между параметрами пневмосистемы, обеспечивающих ее ус-

тойчивость при больших амплитудах колебаний. Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

– линеаризовать формулы Сен-Венана с учетом установившихся колебаний клапана, имеющих большую амплитуду, и вывести формулы для колебаний расхода газа через дроссели и клапанную щель регулятора;

– получить аналитические зависимости амплитуды колебаний давлений газа во входной, выходной и управляющей полостях регулятора от амплитуды и частоты колебаний скорости клапана (то есть найти *удельный механический импеданс* для входного, выходного и управляющего трубопроводов);

– вывести уравнение для частот свободных колебаний пневмосистемы, имеющих известную амплитуду, и сформулировать достаточные условия для обеспечения устойчивости при больших амплитудах,

– указать условия выбора параметров, приводящие к автоколебаниям малой амплитуды.

Подобные задачи рассматривались в научной литературе, в частности, в трудах *В.А. Бесекерского* и *Е.П. Попова* [8], *Б.Ф. Гликмана* [9], *Б.В. Булгакова* [11], ставших классическими. Метод гармонической линеаризации, описанный в давней работе *Л.С. Гольдфарба* [12], в дальнейшем получил широкую известность и часто используется для исследования колебаний при нелинейном трении. Механический импеданс для исследования трубопроводных систем был введен в науку *Б.Ф. Гликманом, проф. В.А. Бесекерским* разрабатывались методы динамического исследования континуальных систем, для которых выводилось трансцендентное характеристическое уравнение. Однако для исследования сложной пневмосистемы, показанной на рис.1, при применении известных результатов потребовалась, как показала практика, их существенная доработка.

Уравнение движения клапана и его аналог для комплексных амплитуд колебаний. В конструкции регулятора 4 (рис. 1) площадь тарелки по запорному контуру близка к площади штока f_4 и отличается от нее на малую величину Δf_4 дифференциальной площадки клапана, посредством которой частично компенсируется влияние отрывающей газодинамической силы. Поэтому в отношении основного перепада давления $p_1 - p_2$, изменяющегося за время многократных включений пневмосистемы в широких пределах от 35 МПа до 6 МПа, этот клапан практически разгружен. Уравнение движения клапана регулятора 4 (см. рис.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} m_{\text{кл}} \ddot{h} = & f_5 \cdot (p_5 - p_0) - f_3 \cdot (p_3 - p_0) - \\ & -(f_4 - \Delta f_4) \cdot (p_4 - p_1) - \Delta f_4 \cdot (p_4 - p_6) - \\ & - f_6 \cdot (p_6 - p_2) - K_{\text{г.д}} \mu f_{\text{кл}}(h) \cdot (p_1 - p_2) - \\ & - F_{\text{тр.м}}(\dot{h}) - z_{\text{кл}}(h + h_{\text{кл.0}}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $m_{\text{кл}} = m_4 + (1/3)m_{\text{пр.кл}}$ – приведенная масса клапана и движущихся витков его пружины; $z_{\text{кл}}$, $h_{\text{кл.0}}$ – коэффициент жесткости и предварительная деформация этой пружины; h – совместное перемещение h_4

клапана и его поршней; f_3 , f_5 – площади поршней регулирования и управления; f_6 – площадь поперечного сечения полости пружины; $K_{\text{г.д}}$, $\mu f_{\text{кл}}$ – коэффициент газодинамической силы [1] и эффективное проходное сечение клапана; $F_{\text{тр.м}}$ – суммарное трение в трех манжетах регулятора, определяемое формулами работы [10],

$$F_{\text{тр.м}} = 0,3N_{\text{пр.с}} \chi(v) \text{sign}(\dot{h}), \quad v = |\dot{h}|, \quad (2)$$

$N_{\text{пр.с}}$ – прижимающая сила; $\chi = \chi(v)$ – коэффициент трения, зависящий от скорости скольжения (рис. 3, а); p_0 – давление газа за поршнями (в двигательном отсеке РН или в лабораторном боксе).

Если в дифференциальных уравнениях [1], описывающих работу пневмосистемы, обнулить производные по времени, то получим параметры установившегося режима подачи газа – подъем клапана h^* , давления p_j^* , силу трения $F_{\text{тр.м}}^*$ и др. Будем искать перемещение клапана и изменения давлений и сил в форме незатухающих гармонических колебаний с комплексной частотой λ :

$$h = h^* + \hat{h} \exp(\lambda t); \quad p_j = p_j^* + \hat{p}_j \exp(\lambda t);$$

$$F_{\text{тр.м}} = F_{\text{тр.м}}^* + \hat{F}_{\text{тр.м}} \exp(\lambda t),$$

где $\lambda = i \cdot \omega$; i – это мнимая единица; ω – круговая частота колебаний; \hat{h} , \hat{p}_j , $\hat{F}_{\text{тр.м}}$ – вообще говоря, комплексные числа. Тогда подобно (1) получим аналогичное уравнение для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} m_{\text{кл}} \lambda^2 \hat{h} = & f_5 \hat{p}_5 - f_3 \hat{p}_3 - (f_4 - \Delta f_4) (\hat{p}_4 - \hat{p}_1) - \\ & - \Delta f_4 (\hat{p}_4 - \hat{p}_6) - f_6 (\hat{p}_6 - \hat{p}_2) - \\ & - K_{\text{г.д}} \mu f_{\text{кл}}(h^*) (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - \\ & - K_{\text{г.д}} \mu f'_{\text{кл}}(h^*) (p_1^* - p_2^*) \hat{h} - \hat{F}_{\text{тр.м}} - z_{\text{кл}} \hat{h}, \end{aligned} \quad (3)$$

где штрихом обозначена производная $\mu f_{\text{кл}}(h)/dh$.

Заметим, что уравнение (3), так же как и (1), содержит много неизвестных и не является замкнутым, но это положение можно исправить, если указать формулы, связывающие амплитуды колебания давлений с комплексной амплитудой \hat{v} и комплексной частотой λ колебаний скорости клапана; такие зависимости называют *удельными механическими импедансами* [9]. Мы получим эти зависимости далее, но начнем с анализа колебаний сухого трения в манжетах.

Гармоническая линеаризация сухого трения в манжетах. В работе [13] описан метод гармонической линеаризации для анализа колебаний расхода газа через дроссель при малых перепадах давления

$$\Delta p(\varphi) = \Delta \bar{p} \sin \varphi, \quad \varphi = \omega \cdot t.$$

Используется нелинейная расходная характеристика Бернулли вида

$$G(\varphi) = \mu f \sqrt{2\rho \Delta \bar{p}} |\sin \varphi| \text{sign}(\sin \varphi),$$

где ρ – это плотность газа; характеристика преобразуется к виду:

$$G(\varphi) = [\mu f \sqrt{2\rho \Delta \bar{p}}] K(\varphi),$$

после чего переменный множитель $K(\varphi)$ заменяется его коэффициентом Фурье

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi K(\varphi) \cdot \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \sin^{3/2} \varphi \, d\varphi \approx 10/9.$$

В результате получили зависимость для ампли-

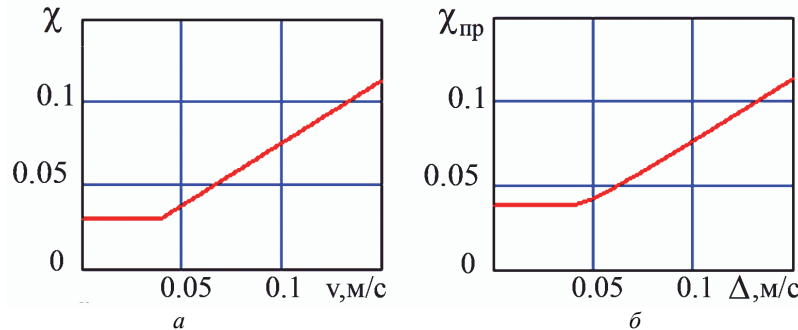


Рисунок 3 – Зависимость коэффициентов трения χ и $\chi_{пр}$:
 а – от скорости скольжения v фторопласта-4, б – от амплитуды колебаний Δ скорости клапана

Аналогичную процедуру применим к формуле (2), в которой зависимость коэффициента трения от скорости скольжения аппроксимируем формулой

$$\chi(v) = \begin{cases} \chi_0, & v \leq v_*; \\ \chi_0 \cdot v / v_*, & v > v_*, \end{cases}$$

где $v_* \approx 0,04$ м/с; коэффициент $\chi_0 \approx 0,03$ (см. рис. 3, а).

Если амплитуда Δ колебаний скорости мала, то есть $\Delta \leq v_*$, то трение в манжетах является сухим, и коэффициент Фурье

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \chi_0 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{4}{\pi} \cdot \chi_0,$$

откуда коэффициент приведения

$$k_{пр,м}(\Delta) = 4 / \pi \approx 1,27.$$

Для больших амплитуд трение в манжете является смешанным – при малых скоростях скольжения сухим, а при больших – сухим и вязким одновременно. При нахождении коэффициента Фурье воспользуемся симметрией графика функции $y(\varphi) = \chi(v \cdot \sin \varphi)$ относительно вертикальной оси $\varphi = \pi/2$ и получим:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \chi(v \sin \varphi) \sin \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{4}{\pi} \chi_0 + \frac{4}{\pi} \int_{\psi}^{\pi/2} \chi_0 (v / v_*) \sin^2 \varphi \, d\varphi, \\ &\quad \sin \psi = v_* / v. \end{aligned}$$

Вычисляя этот интеграл, находим искомый коэффициент приведения

$$k_{пр,м}(\Delta) = 4 / \pi + (2 / \pi) \times$$

$$\times [(\Delta / v_*) \arccos(v_* / \Delta) - \sqrt{1 - (v_* / \Delta)^2}].$$

Характер изменения приведенного коэффициента трения $\chi_{пр} = k_{пр,м} \chi_0$ в рабочем диапазоне скоростей клапана $\Delta < v_M = 0,15$ м/с показан на рис. 3, б.

Следовательно,

$$\hat{F}_{тр,м} = 0.3 N_{пр,с} \chi_0 k_{пр,м}(\Delta). \quad (4)$$

туд колебаний

$$\hat{G} = k_{пр,др} \mu f \sqrt{2\rho \Delta \dot{p}},$$

где коэффициент приведения $k_{пр,др} = 1,11$.

Линеаризация пульсирующего расхода при критических перепадах давления. В клапанной щели регулятора, а также в выходном дросселе исследуемой пневмосистемы наблюдается критический режим течения сжатого гелия. Расход газа вычисляется по уточненной формуле Сен-Венана [4], в которой учтен эффект Джоуля-Томсона:

$$G = \frac{\mu f p_j}{\sqrt{RT_j}} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} (1 - 0,24 b_2 p_j / T_j),$$

где p_j, T_j – давление и температура газа перед дросселем; R – газовая постоянная; $b_2 = 1,378$ [К/МПа] – вириальный коэффициент в уравнении состояния реального газа Абеля.

Для анализа колебаний используется адиабатическая модель, поэтому колебания давления и температуры имеют связанные амплитуды:

$$p_j = p_j^* + \hat{p}_j \sin(\omega t);$$

$$T_j = T_j^* (p_j / p_j^*)^{1/k} \approx T_j^* (1 + (1/k)(\hat{p}_j / p_j^*) \sin(\omega t)),$$

где k – это показатель адиабаты; звездочка здесь и далее обозначает параметры установившегося режима течения газа.

Следовательно,

$$\frac{p_j}{\sqrt{T_j}} \approx \frac{p_j^*}{\sqrt{T_j^*}} \cdot (1 + \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{\hat{p}_j}{p_j^*} \cdot \sin(\omega t));$$

$$\frac{p_j^2}{(T_j)^{3/2}} \approx \frac{(p_j^*)^2}{(T_j^*)^{3/2}} \cdot (1 + \frac{k+3}{2k} \cdot \frac{\hat{p}_j}{p_j^*} \cdot \sin(\omega t)).$$

Подставим эти значения в формулу для расхода и получим:

$$G \approx G^* [1 + (k+1)/(2k) \cdot (\hat{p}_j / p_j^*) \cdot \sin(\omega t)] -$$

$$- \frac{0,24 b_2}{k} \cdot \frac{\hat{p}_j}{T_j^*} \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{\mu f p_j^*}{\sqrt{RT_j^*}} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

Второе слагаемое мало, и им можно пренебречь. Нашли искомую формулу для амплитуды пульсации

расхода

$$\hat{G} = k_{kr} (\hat{p}_j / p_j^*) G^*,$$

где $k_{kr} = (k + 1) / (2k) \approx 0,8$.

Полученный результат был проверен при использовании метода гармонической линеаризации; при условии $\hat{p}_j / p_j^* \leq 0,2$ коэффициент приведения k_{kr} отклоняется от указанного выше значения не более чем на 1,5%. То есть этим результатом можно пользоваться и для анализа больших амплитуд колебаний.

Заметим, что при исследовании колебаний параметров газа в трубопроводах и полостях пневмосистемы используем акустическое приближение [14], в рамках которого плотность ρ и скорость звука a считаются постоянными величинами: $\rho_j = \rho_j^*$ и $a_j = a_j^*$.

Поэтому для амплитуд колебаний \hat{Q} объемной скорости газа, прошедшего через дроссель, получаем формулы, аналогичные формулам для расхода массы:

$$\hat{Q} = \kappa_{пр,др} \mu f \sqrt{2 / \rho^*} \Delta \hat{p}; \quad \hat{Q} = k_{kr} (\hat{p}_j / p_j^*) Q^*. \quad (5)$$

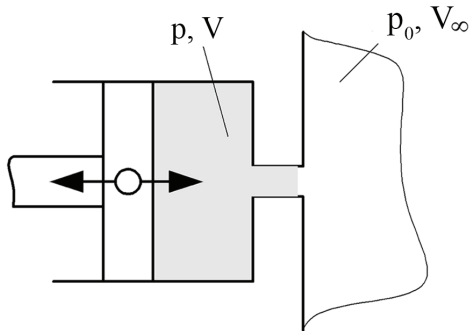


Рисунок 4 – Схема полости с жиклером

Механический импеданс при колебаниях поршня в полости с жиклером. Схема исследуемой подсистемы показана на рис. 4, на рис.1 ей соответствуют камера над штоком клапана, полость пружины, камеры регулирования и управления регулятора 4.

Случай, когда сжимаемостью газа в полости можно пренебречь, изучен в [13]; здесь исследуется общий случай. Как и в [13], изменением плотности газа ρ при дросселировании пренебрежем, а для расчета мгновенной объемной скорости Q пульсирующего течения газа через дроссель используем результат гармонической линеаризации формулы Бернулли

$$Q = \kappa_{пр,др} \mu f \sqrt{2 / (\rho |\Delta \hat{p}|)} \Delta p,$$

где $\kappa_{пр,др} = 1,11$; $\Delta \hat{p}$ – амплитуда изменения перепада давления Δp .

В начале этой части исследования будем считать, что полость за дросселем имеет большой объем и постоянное давление газа p_0 , тогда $\Delta p = p - p_0$.

Запишем уравнение сжимаемости газа в полости, предполагая этот процесс адиабатическим:

$$\frac{V}{a^2 \rho} \cdot \frac{dp}{dt} = f_n C_n - Q,$$

то есть

$$\frac{V}{a^2 \rho} \cdot \frac{d\Delta p}{dt} = f_n C_n - Z \cdot \Delta p,$$

где a – это скорость звука в газе, V – объем полости; f_n – площадь поршня,

$$Z = \mu f_{пр} \sqrt{2 / (\rho |\Delta \hat{p}|)}, \quad \mu f_{пр} = \kappa_{пр,др} \mu f,$$

и для нахождения гармонического решения этого уравнения воспользуемся методом комплексных амплитуд:

$$C_n = \Delta \exp(\lambda t); \quad \Delta p = \Delta \hat{p} \exp(\lambda t); \quad \lambda = i \omega,$$

причем будем считать, что амплитуда $\Delta > 0$, а $\Delta \hat{p}$ – это комплексное число.

Подстановка и сокращение экспонент дает равенство

$$(\lambda V / (a^2 \rho) + Z) \Delta \hat{p} = f_n \Delta, \quad (6)$$

откуда

$$((\omega \cdot V / (a^2 \rho))^2 + Z^2) \cdot |\Delta \hat{p}|^2 = f_n^2 \Delta^2.$$

Учтем формулу для коэффициента Z и получим квадратное уравнение для амплитуды колебаний давления:

$$(\omega \cdot V / (a^2 \rho))^2 |\Delta \hat{p}|^2 + (\mu f_{пр})^2 (2 / \rho) |\Delta \hat{p}| = f_n^2 \Delta^2.$$

Его решение имеет вид:

$$|\Delta \hat{p}| = \rho (f_n / \mu f_{пр})^2 \Delta^2 / (1 + \sqrt{1 + \beta^2}),$$

где β – это коэффициент сдвига фазы,

$$\beta = f_n \Delta \omega V / (a^2 \mu f_{пр}^2).$$

Если коэффициент $\beta = 0$, то есть $V = 0$, то колебания давления будут иметь ту же фазу, что и колебания скорости, здесь импеданс Z положительный, пропорциональный амплитуде колебаний скорости и не зависящий от частоты:

$$Z = \rho (f_n / \mu f_{пр})^2 \Delta.$$

Это характеристика *квадратичного трения*. В исследуемой пневмосистеме характерные значения коэффициентов сдвига фазы, вычисленные при частотах $\omega = 600$ 1/с и скоростях $\Delta = 0,05$ м/с, составляют:

- для жиклера $\mu f_{4,пр}$ верхней камеры – $\beta = 0,0001$;
- для жиклера $\mu f_{3,пр}$ камеры регулирования – $\beta = 0,038$;
- для жиклера $\mu f_{5,пр}$ камеры управления – $\beta = 1,419$;
- для дросселирующих пазов в тарели клапана $\mu f_{6,пр}$ полости пружины – $\beta = 0,002$.

Как видим, в трех случаях перепад давления между полостями определяется квадратичным трением, и в уравнении (3) можно принять, что

$$\hat{p}_4 = \hat{p}_1 + \rho_1^* \left(\frac{f_4}{\mu f_{4,пр}} \right)^2 \Delta^2; \quad \hat{p}_3 = \hat{p}_2 + \rho_2^* \left(\frac{f_3}{\mu f_{3,пр}} \right)^2 \Delta^2;$$

$$\hat{p}_6 = \hat{p}_2 + \rho_2^* \left(\frac{f_6}{\mu f_{6,пр}} \right)^2 \Delta^2.$$

После чего это уравнение упростится и с учетом полученных выше результатов примет вид:

$$m_{\text{кл}} \lambda^2 \ddot{h} + (\chi_{\text{кв}} \Delta + \chi_{\text{м}} / \Delta) \lambda \dot{h} + (z_{\text{кл}} + z_{\text{г.д}}) \ddot{h} = f_5 \ddot{p}_5 - \Delta f_1 \ddot{p}_1 - (f_3 - \Delta f_1) \ddot{p}_2, \quad (7)$$

где $\chi_{\text{кв}}$, $\chi_{\text{м}}$ – коэффициенты трения в дросселях и в манжетах,

$$\chi_{\text{кв}} = \rho_1^* f_4^3 / \mu f_{4,\text{пр}}^2 + \rho_2^* f_3^3 / \mu f_{3,\text{пр}}^2 + \rho_2^* f_6^3 / \mu f_{6,\text{пр}}^2; \quad (8)$$

$$\chi_{\text{м}} = 0,3 N_{\text{пр.с}} \chi_0 k_{\text{пр.м}}(\Delta),$$

$z_{\text{г.д}}$ – коэффициент жесткости для газодинамической силы,

$$z_{\text{г.д}} = K_{\text{г.д}} \mu f'_{\text{кл}}(h^*) (p_1^* - p_2^*);$$

площадь $\Delta f_1 = \Delta f_4 - K_{\text{г.д}} \mu f_{\text{кл}}(h^*)$.

В камере управления сдвиг фаз является существенным, и вместе с силой квадратичного трения возникает заметная сила упругости. Из равенства (6) найдем комплексную амплитуду колебаний давления

$$\Delta \hat{p} = \frac{f_{\text{п}} \Delta}{(\omega V / (a^2 \rho))^2 + Z^2} \cdot \left(-\frac{\lambda V}{a^2 \rho} + Z \right) = \frac{|\Delta \hat{p}|^2 Z}{f_{\text{п}} \Delta} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{|\Delta \hat{p}|^2 (\omega^2 V / (a^2 \rho))}{f_{\text{п}} \Delta}.$$

Первое слагаемое правой части отвечает квадратичному трению, а соответствующая компонента давления изменяется в фазе со скоростью поршня:

$$\Delta \hat{p}_{\text{кв}} = \frac{|\Delta \hat{p}|^2 Z}{f_{\text{п}} \Delta} = \frac{\left[\frac{\rho (f_{\text{п}} / \mu f_{\text{пр}})^2 \Delta^2}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right]^{3/2} \mu f_{\text{пр}} \sqrt{2 / \rho}}{f_{\text{п}} \Delta} = \frac{\rho (f_{\text{п}} / \mu f_{\text{пр}})^2 \sqrt{2} \Delta^2}{(1 + \sqrt{1 + \beta^2})^{3/2}}. \quad (9)$$

Второе слагаемое отвечает силе упругости газовой пружины, образующейся между поршнем и жиклером; соответствующая компонента давления изменяется в одной фазе с перемещением поршня:

$$\Delta \hat{p}_{\text{упр}} = \frac{|\Delta \hat{p}|^2 (\omega^2 V / (a^2 \rho))}{\lambda f_{\text{п}} \Delta} = \frac{\rho (f_{\text{п}} / \mu f_{\text{пр}})^2 \Delta \omega \beta}{(1 + \sqrt{1 + \beta^2})^2} \cdot \frac{\Delta}{\lambda}. \quad (10)$$

В результате пульсации давления представляются в виде суммы

$$\Delta p = \Delta \hat{p}_{\text{кв}} \cos \omega t + \Delta \hat{p}_{\text{упр}} \sin \omega t,$$

где перемещения $h_{\text{п}}$ и скорости $C_{\text{п}}$ поршня изменяются по закону

$$h_{\text{п}} = \Delta \sin \omega t / \omega; \quad C_{\text{п}} = \Delta \cos \omega t.$$

Оптимизация квадратичного трения. Один из постулатов теории динамической устойчивости гласит, что увеличение трения повышает устойчивость. Далее мы покажем, что этот закон справедлив и для исследуемой системы. Увеличение силы сухого трения в манжетах возможно при их удлинении, что вступает в противоречие с требованием обеспечить минимальную массу и габариты. Вязкое трение, возникающее в тех же манжетах при больших скоростях скольжения, а также в трубопроводах, является следствием соответствующих физических эффектов, и повлиять на величину этой силы непросто. Другое дело – квадратичное трение, которое

возникает при течении газа через дроссели и сильно зависит от диаметра дросселя. Но и здесь при проектировании пневмосистемы многоразового запуска ЖРД возникают ограничения:

- уменьшение площади проходного сечения μf_4 и/или μf_6 препятствует своевременному заполнению соответствующих полостей сжатым гелием, что увеличивает начальный заброс клапана регулятора и приводит к недопустимо высокой колебательности переходного процесса [15];

- уменьшение площади проходного сечения μf_3 замедляет и ослабляет действие отрицательной обратной связи, что снижает устойчивость;

- при выборе площади проходного сечения μf_5 необходимо, с одной стороны, отсрочить начало подъема клапана регулятора до начала открытия пневмоклапана, а с другой – не допустить заметного уменьшения крутизны заднего фронта у импульса подачи газа.

Последнее условие предоставляет конструктору некоторую свободу в выборе диаметра d_5 управляющего жиклера. В этом пункте мы найдем значение этого диаметра, обеспечивающее максимум квадратичного трения.

В формулу (9) площадь $\mu f_{\text{пр}}$ входит непосредственно, а также через коэффициент сдвига фазы β . Приведем формулу (9) к виду:

$$\Delta \hat{p}_{\text{кв}} = \frac{\rho a^2}{2 V \omega} \cdot \beta \cdot [2 / (1 + \sqrt{1 + \beta^2})]^{3/2}.$$

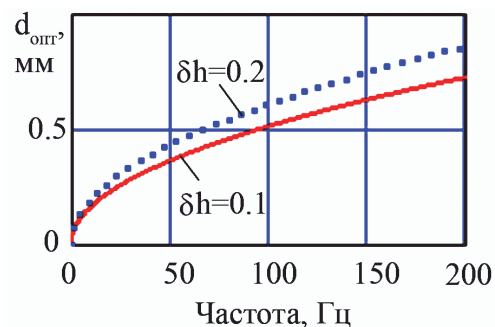


Рисунок 5 – Зависимость оптимального диаметра дросселя $d_{\text{опт}}$ от частоты и амплитуды колебаний δh

Используемая здесь функция

$$\chi_d(\beta) = \beta \cdot [2 / (1 + \sqrt{1 + \beta^2})]^{3/2}$$

имеет максимум при $\beta = 2\sqrt{2} \approx 2,82$, что нетрудно установить путем дифференцирования. Учтем, что

$$\beta = f_{\text{п}} \Delta \omega V / (a^2 \mu f_{\text{пр}}^2) \quad \text{и} \quad V = f_{\text{п}} \cdot (h_0 + h_*),$$

где ход клапана h_0 отвечает начальному значению объема полости.

Следовательно,

$$\frac{\mu f_{\text{пр}}^2}{f_{\text{п}}^2} = \frac{\omega \sqrt{(h_0 + h_*) \Delta h}}{2\sqrt{2} a} \quad \text{или}$$

$$\frac{d}{D} = \sqrt{\frac{\omega \sqrt{(h_0 + h_*) \Delta h}}{\mu k_{\text{пр.др}} 2\sqrt{2} a}}, \quad (11)$$

где d, D – диаметры дросселя и поршня; $\Delta h = \Delta/\omega$ – амплитуда колебаний для перемещений клапана.

Как видим, оптимальное значение диаметра дросселя $d_{\text{опт}}$ зависит от частоты и относительной амплитуды

$$\delta h = \Delta h / (h_0 + h^*)$$

колебаний (рис. 5), но эта зависимость слабая; кроме того, вблизи максимума сила трения изменяется медленно (рис. 6). Для значений

$$\omega = 600 \text{ 1/c}; \Delta h = 0,15 \text{ мм}; h_0 + h^* = 1,5 \text{ мм}; \mu = 0,7$$

формула (11) приводит к соотношению $d/D = 1/60$, а диапазон оптимального выбора составляет

$$1/80 < d/D < 1/40.$$

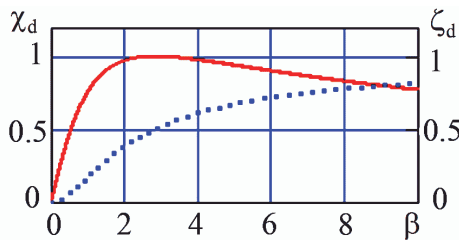


Рисунок 6 – Характеры зависимости сил трения χ_d и упругости ζ_d в полости управления от коэффициента β

Для управляющей полости пневмосистемы имеем $d_5/D_5 = 1/45$, то есть это соотношение обеспечивает предельно большое квадратичное трение. Для верхней камеры $d_4/D_4 = 1/4$, для полости регулирования $d_3/D_3 = 1/20$, и эти соотношения, по указанной выше причине, далеки от оптимальных значений.

Что касается упругого давления $\Delta \bar{p}_{\text{упр}}$, формула (10), то по мере уменьшения диаметра жиклера оно монотонно возрастает вместе с функцией

$$\zeta_d(\beta) = (\beta / (1 + \sqrt{1 + \beta^2}))^2,$$

но имеет очевидный предел, который отвечает модулю сжимаемости газа в полости и составляет

$$\Delta \bar{p}_{\text{упр,м}} = f_{\text{п}} a^2 \rho \Delta h / V;$$

с практической точки зрения предел достигается при значениях $\beta > 4$ (рис. 6).

Импеданс полости управления. Компоненты (9) и (10) комплексного импеданса

$$\Psi_5(\lambda, \Delta) = \Delta \bar{p}_{\text{кв}} + \Delta \bar{p}_{\text{упр}} / \lambda$$

камеры управления пропорциональны функциям $\chi_d(\beta)$, $\zeta_d(\beta)$ и зависят от частоты и амплитуды колебаний, как это показано выше. Но ограничиться использованием этих зависимостей в уравнении (7) не удастся, поскольку давление за управляющим жиклером является переменным; кроме того, сжимаемость газа в этой камере влияет на амплитуду пульсации расхода в жиклере, что необходимо учесть при расчете импеданса трубопровода управления.

Поэтому мы усложним расчетную схему (рис. 7), объем V_0 будем здесь считать небольшим, а давление p_0 – переменным. Кроме того, учтем, что комплексные амплитуды пульсации давления \hat{p}_0 и скорости \hat{u}_0

газа в конечном сечении трубопровода связаны зависимостью

$$\hat{p}_0 = \Psi_{\text{cnt}}(\lambda) \hat{u}_0, \tag{12}$$

где $\Psi_{\text{cnt}}(\lambda)$ – импеданс трубопровода, который в этой задаче считается известной функцией (он получен далее).

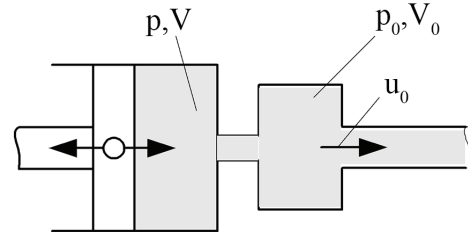


Рисунок 7 – Схема управляющей полости

Запишем уравнения сжимаемости для полостей рассматриваемой системы

$$\frac{V}{a^2 \rho} \cdot \frac{dp}{dt} = f_{\text{п}} C_{\text{п}} - Q(p - p_0);$$

$$\frac{V_0}{a^2 \rho} \cdot \frac{dp_0}{dt} = Q \cdot (p - p_0) - f_{\text{тр}} u_0,$$

а также их очевидное следствие

$$\frac{V}{a^2 \rho} \cdot \frac{d(p - p_0)}{dt} = f_{\text{п}} C_{\text{п}} - \frac{V}{a^2 \rho} \cdot \frac{dp_0}{dt} - Q(p - p_0), \tag{13}$$

где $f_{\text{тр}}$ – это площадь поперечного сечения трубопровода.

Уравнение вида (13) мы решали выше, поэтому сразу можем записать равенство для комплексных амплитуд гармонических колебаний

$$\hat{p} - \hat{p}_0 = \Psi_5(\lambda, \Delta) (\Delta - [(\lambda V) / (f_{\text{п}} a^2 \rho)]) \hat{p}_0. \tag{14}$$

Перейдем в уравнениях сжимаемости к комплексным амплитудам:

$$\frac{\lambda V}{a^2 \rho} \cdot \hat{p} = f_{\text{п}} \Delta - \hat{Q}; \quad \frac{\lambda V_0}{a^2 \rho} \cdot \hat{p}_0 = \hat{Q} - f_{\text{тр}} \hat{u}_0, \tag{15}$$

и дополним соотношения (14) и (15) равенством (12).

Пришли к системе 4-ех линейных уравнений для 4-ех неизвестных \hat{p} , \hat{p}_0 , \hat{u}_0 и \hat{Q} . Решая эту систему, получаем искомую зависимость

$$\frac{\hat{p}}{\Delta} = \frac{\Psi_5(\lambda, \Delta) \left(\frac{f_{\text{тр}}}{\Psi_{\text{cnt}}(\lambda)} + \frac{\lambda \cdot V_0}{a^2 \rho} \right) - f_{\text{п}} \left(\frac{\lambda V}{a^2 \rho f_{\text{п}}} \Psi_5(\lambda, \Delta) - 1 \right)}{\frac{f_{\text{тр}}}{\Psi_{\text{cnt}}(\lambda)} + \frac{\lambda V_0}{a^2 \rho} - \left(\frac{\lambda V}{a^2 \rho} \Psi_5(\lambda, \Delta) - 1 \right) \cdot \frac{\lambda V}{a^2 \rho}},$$

или

$$\hat{p} = \Psi_5(\lambda, \Delta) \Delta + \frac{\frac{f_{\text{п}}}{f_{\text{тр}}} \cdot \left(1 - \frac{\lambda V}{f_{\text{п}} a^2 \rho} \Psi_5(\lambda, \Delta) \right)^2 \Psi_{\text{cnt}}(\lambda) \Delta}{1 + \left[V_0 + V \left(1 - \frac{\lambda V}{f_{\text{п}} a^2 \rho} \Psi_5(\lambda, \Delta) \right) \right] \cdot \frac{\lambda \Psi_{\text{cnt}}(\lambda)}{f_{\text{тр}} a^2 \rho}}. \tag{16}$$

Таким образом, механический импеданс полости управления включает в себя импеданс управляющего дросселя $\Psi_5(\lambda, \Delta)$ как отдельное слагаемое; поэтому аналитические зависимости, полученные в предыдущем пункте, остаются актуальными и для общего случая. Что касается второго слагаемого равенства (16), то выделение его компонент аналитическим методом затруднительно, но легко осуществимо при помощи компьютерной программы.

Пусть соответствующий импеданс имеет описание вида $Z(\lambda, \Delta)$. Тогда суммы

$$\Psi_{u.kv}(\lambda, \Delta) = 0,5(Z(\lambda, \Delta) + Z(-\lambda, \Delta)) \text{ и}$$

$$\Psi_{u.upr}(\lambda, \Delta) = 0,5(Z(\lambda, \Delta) - Z(-\lambda, \Delta)) / \lambda$$

являются аналитическими функциями от величины λ^2 (то есть, четными по круговой частоте ω) и представляют трение и упругое сопротивление газовой пружины, расположенной за дросселем управления и вибрирующей с указанной частотой и амплитудой.

Импеданс имеет такую же физическую размерность, как волновое сопротивление $a\rho$, и этот множитель присутствует в формулах для импеданса трубопроводов. Поэтому на него можно разделить все импедансы и перейти к безразмерным величинам. Тогда равенство (16) примет вид

$$\frac{\hat{p}}{a\rho} = \Psi_5(\lambda, \Delta) \Delta +$$

$$\frac{f_{пн}}{f_{тп}} \cdot \left(1 - \frac{\lambda V}{f_{пн} a} \Psi_5(\lambda, \Delta)\right)^2 \Psi_{cnt}(\lambda) \Delta \quad (17)$$

$$+ \frac{1}{1 + \left[V_0 + V \left(1 - \frac{\lambda V}{f_{пн} a} \Psi_5(\lambda, \Delta)\right) \right]} \cdot \frac{\lambda \Psi_{cnt}(\lambda)}{f_{тп} a}$$

Импеданс газовой пружины. Простейшая расчетная схема блока управления пневмосистемы показана на рис. 8, а. Если для этой схемы дополнительно принять допущение, что объем тупиковой полости $V_T = 0$, то мы получим классическую газовую пружину, которую в акустическом приближении рассчитывают по тем же формулам [14], что и цилиндрическую пружину сжатия [16]. В частности, давления в концевых сечениях столба газа представляются в виде следующих бесконечных сумм:

$$p_0(t) = a\rho \left[u_0(t) + 2K^2 u_0(t-2\tau) + 2K^4 u_0(t-4\tau) + \dots \right];$$

$$p_T(t) = a\rho \left[2K u_0(t-\tau) + 2K^3 u_0(t-3\tau) + 2K^5 u_0(t-5\tau) + \dots \right],$$

где $\tau = L/a$ – запаздывание волны на длине трубопровода L ; $K = \exp(-\xi\tau)$ – коэффициент ее затухания.

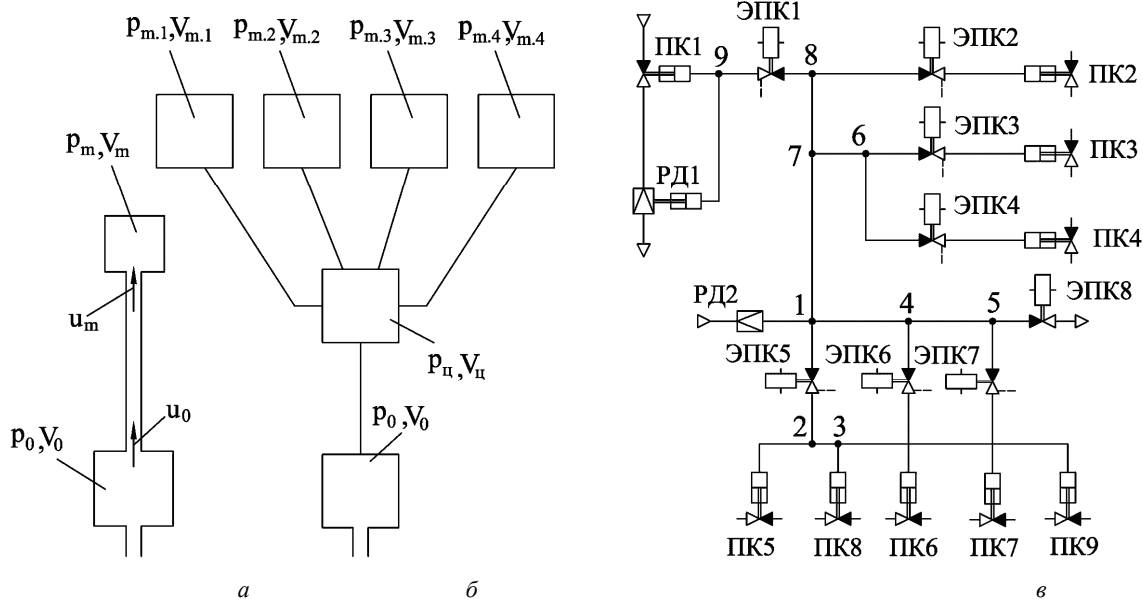


Рисунок 8 – Расчетные схемы пневмоблока управления: а – простейшая; б – разветвленная; в – реальная. На схеме приняты сокращения: ПК – пневмоклапан; ЭПК – электропневмоклапан; РД – регулятор давления

Фактор затухания ξ для трубопроводов блока управления вычисляется при использовании закономерностей неустановившегося ламинарного режима течения по формуле из работы [17]

$$\xi_{л} = 6\nu_r / d^2 + (8/d)\sqrt{\nu_r / (\pi\tau)},$$

где ν_r – кинематическая вязкость газа; d – диаметр трубопровода.

Фактор $\xi_{л}$ значительно (на порядок) превосходит аналогичный результат, получающийся по теории

Пуазейля для стационарного течения.

Учтем равенство

$$u_0(t) = \hat{u}_0 \exp(\lambda t)$$

и используем формулу для суммы геометрической прогрессии; тогда эти формулы примут вид:

$$\hat{p}_0 = a\rho \hat{u}_0 \left[(1 + K^2 \exp(-2\lambda\tau)) / (1 - K^2 \exp(-2\lambda\tau)) \right]; \quad (18)$$

$$\hat{p}_T = a\rho \hat{u}_0 \left[2K \exp(-\lambda\tau) / (1 - K^2 \exp(-2\lambda\tau)) \right]. \quad (19)$$

В результате несложных преобразований равен-

ства (18) и (19) сворачиваются:

$$\begin{aligned}\hat{p}_0 &= a \rho c \operatorname{th}((\lambda + \xi_{\text{л}}) \tau) \hat{u}_0; \\ \hat{p}_{\text{T}} &= a \rho [1 / \operatorname{sh}((\lambda + \xi_{\text{л}}) \tau)] \hat{u}_0,\end{aligned}\quad (20)$$

но для (18) нам понадобится еще одна форма. Воспользуемся равенством

$$\exp(-2\lambda\tau) = (1 - \operatorname{th}(\lambda\tau)) / (1 + \operatorname{th}(\lambda\tau))$$

и получим:

$$\hat{p}_0 = a \rho [(1 + \delta \operatorname{th}(\lambda\tau)) / (\delta + \operatorname{th}(\lambda\tau))] \hat{u}_0, \quad (21)$$

где

$$\delta = (1 - K^2) / (1 + K^2).$$

Таким образом, для простейшей схемы управления импеданс имеет вид

$$\Psi_{\text{cnt}}(\lambda) = a \rho [(1 + \delta \operatorname{th}(\lambda\tau)) / (\delta + \operatorname{th}(\lambda\tau))],$$

но, чтобы правильно моделировать нижние частоты колебаний пружины [16], этот результат нужно уточнить и дополнить слагаемым $(\xi / \lambda) \Psi_{\text{cnt}}(\lambda)$:

$$\Psi_{\text{cnt}}(\lambda) = a \rho [(1 + \delta \operatorname{th}(\lambda\tau)) / (\delta + \operatorname{th}(\lambda\tau))] (1 + \xi / \lambda). \quad (22)$$

Формулы (20) - (21) уточняют теорию работы [8] о передаточной функции и импедансе механического четырехполюсника с распределенными параметрами: в них газодинамическое сопротивление трубопровода учтено как распределенное, а не местное.

Теперь учтем сжимаемость газа в тупиковой полости, имеющей объем $V_{\text{T}} > 0$, для чего запишем

уравнение сжимаемости:

$$\frac{V_{\text{T}}}{a^2 \rho} \cdot \frac{d}{dt} (F + W) = \frac{f_{\text{тр}}}{a \rho} \cdot (F - W), \quad \text{или}$$

$$\frac{V_{\text{T}}}{f_{\text{тр}} a} \cdot \frac{d}{dt} (F + W) = F - W,$$

где F, W – прямая и отраженная волны давления,

$$F + W = p_{\text{T}}, \quad (F - W) / (a \rho) = u_{\text{T}},$$

и перейдем в этом дифференциальном соотношении к комплексным амплитудам гармонических колебаний:

$$[\lambda V_{\text{T}} / (f_{\text{тр}} a)] \cdot (F + W) = F - W,$$

откуда $W = K_{\text{V}} \cdot F$;

здесь коэффициент отражения

$$K_{\text{V}} = (1 - \lambda V_{\text{T}} / (f_{\text{тр}} a)) / (1 + \lambda V_{\text{T}} / (f_{\text{тр}} a)).$$

В результате равенство (18) принимает вид

$$\hat{p}_0 = a \rho \hat{u}_0 [(1 + K_{\text{V}} \exp(-2(\lambda + \xi_{\text{л}}) \tau)) / (1 - K_{\text{V}} \exp(-2(\lambda + \xi_{\text{л}}) \tau))],$$

или

$$\hat{p}_0 = a \rho [(1 + \delta \operatorname{th}((\lambda + \xi_{\text{л}}) \tau)) / (\delta + \operatorname{th}((\lambda + \xi_{\text{л}}) \tau))] \hat{u}_0, \quad (23)$$

где

$$\delta = (1 - K_{\text{V}}) / (1 + K_{\text{V}}) = (\lambda V_{\text{T}}) / (f_{\text{тр}} a).$$

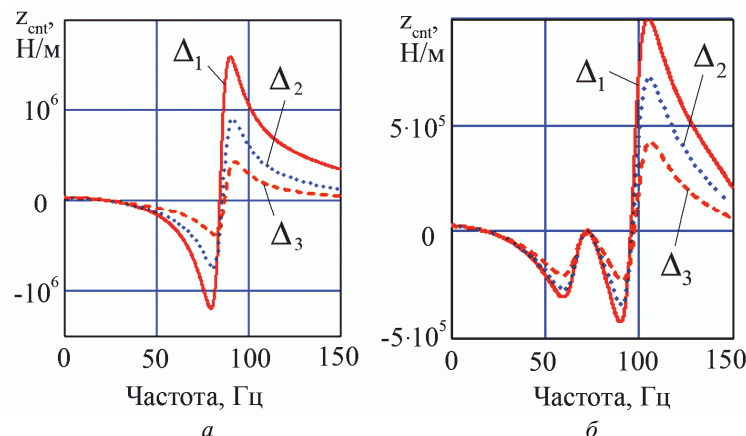


Рисунок 9 – Зависимости коэффициента жесткости от частоты и амплитуды колебаний клапана ($\Delta_1 = 0$ м/с, $\Delta_2 = 0,05$ м/с, $\Delta_3 = 0,1$ м/с): a – простейшая схема; b – разветвленная схема блока управления

Значения коэффициента жесткости z_{cnt} газовой пружины, полученные как реактивная составляющая импеданса по формулам (16), (22) и (23) для разных частот и амплитуд колебаний клапана, показаны на графиках рис. 9, a . Начальный участок соответствует зависимости

$$\begin{aligned}z_{\text{cnt}} &= a^2 \rho (f_5^2 / (V_{\text{T}} + V_{\text{cnt}})) + m_{\text{cnt}} \lambda^2; \\ m_{\text{cnt}} &= \rho (f_5 / f_{\text{cnt}})^2 V_{\text{cnt}},\end{aligned}\quad (24)$$

где первое слагаемое описывает сжимаемость газа в суммарном объеме трубопровода V_{cnt} и тупиковой полости V_{T} , а второе – инерцию газа в трубопроводе.

Метод расчета механического импеданса для пневмоблока управления. К сожалению, простейшая

схема, показанная на рис. 8, a , плохо соответствует реальной схеме блока управления. Причиной является то, что к началу работы пневмосистемы запуска ЖРД уже открыты длинные линии управления, ведущие к другим потребителям. Более реалистичной является расчетная схема, показанная на рис. 8, b , и именно она использована в программном комплексе [1-4]. Здесь выделена центральная полость объемом $V_{\text{ц}}$, от которой идут трубопроводы к тупиковым полостям, а также к полости управления регулятора.

Заметим, что сеть трубопроводов управления является непроточной и не имеет параллельных цепей и активных элементов, возбуждающих колебания. Это позволило отказаться от сложных методов [9], использующих передаточные матрицы или графы, и предложить *прямой метод расчета импеданса*, который

опирается на разработанные правила пересчета этой величины при последовательном соединении труб.

Напомним, что величина, обратная импедансу, называется адмиттансом [12]. Будем считать, что адмиттанс с входит в соотношение

$$\hat{u} = c\hat{p}/(a\rho),$$

то есть с точки зрения физики это безразмерная величина. Сформулируем и докажем две теоремы.

Теорема 1. Пусть в полость объемом V приходит один трубопровод с площадью сечения f_0 , а уходят n трубопроводов, имеющих площади f_1, \dots, f_n и адмиттансы c_1, \dots, c_n . Тогда входной трубопровод на стыке с полостью имеет адмиттанс

$$c_0 = (f_1/f_0)c_1 + \dots + (f_n/f_0)c_n + (V/f_0)\lambda/a. \quad (25)$$

Доказательство. Запишем уравнение сжимаемости для полости и перейдем в нем к комплексным амплитудам колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{V}{a^2\rho} \cdot \frac{dp}{dt} &= f_0 u_0 - \sum_{j=1, \dots, n} f_j u_j \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\lambda V}{a^2\rho} \cdot \hat{p} &= f_0 \hat{u}_0 - \sum_{j=1, \dots, n} f_j \hat{u}_j. \end{aligned}$$

Воспользуемся определением $\hat{u}_j = c_j \hat{p}/(a\rho)$,

$j = 0, 1, \dots, n$ и получим

$$\frac{\lambda V}{a^2\rho} \cdot \hat{p} = \frac{f_0 c_0 \hat{p}}{a\rho} - \sum_{j=1, \dots, n} \frac{f_j c_j \hat{p}}{a\rho},$$

откуда

$$\frac{\lambda V}{a} = f_0 c_0 - \sum_{j=1, \dots, n} f_j c_j.$$

Утверждение доказано.

Теорема 2. Пусть у трубопровода с газом длина равна L, а в его выходном сечении адмиттанс равен $c_{кон}$. Тогда адмиттанс во входном сечении вычисляется по формуле

$$c_{нач} = (c_{кон} + c_{тр})/(1 + c_{кон} c_{тр}), \quad (26)$$

где $c_{тр}$ – это адмиттанс трубопровода при закрытом выходе,

$$c_{тр}(\lambda) = [(\delta + th(\lambda\tau))/(1 + \delta th(\lambda\tau))];$$

$$\delta = (1 - K^2)/(1 + K^2); \quad \tau = L/a.$$

Доказательство. Воспользуемся равенствами (20), а также симметрией столба газа в отношении выбора конечных сечений и линейностью его уравнений, откуда вытекают следующие формулы для комплексных амплитуд:

$$\hat{p}_{нач}/(a\rho) = \Psi_1 \hat{u}_{нач} - \Psi_2 \hat{u}_{кон};$$

$$\hat{p}_{кон}/(a\rho) = \Psi_2 \hat{u}_{нач} - \Psi_1 \hat{u}_{кон},$$

где $\Psi_1 = cth((\lambda - \xi)\tau)$; $\Psi_2 = 1/sh((\lambda - \xi)\tau)$.

Учтем, что по условию теоремы

$$\hat{u}_{кон} = c_{кон} \hat{p}_{кон}/(a\rho),$$

следовательно

$$\hat{p}_{кон} = \Psi_2 \hat{u}_{нач}/(1 + \Psi_1 c_{кон}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{p}_{нач} = (\Psi_1 - \Psi_2^2 c_{кон}/(1 + \Psi_1 c_{кон})) \hat{u}_{нач},$$

то есть

$$\begin{aligned} c_{нач} &= \frac{1 + \Psi_1 c_{кон}}{\Psi_1 + (\Psi_1^2 - \Psi_2^2) c_{кон}} = \|\Psi_1^2 - \Psi_2^2 = 1, \Psi_1 = c_{тр}^{-1}\| = \\ &= \frac{c_{тр} + c_{кон}}{1 + c_{тр} c_{кон}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что в блоке управления большинство трубопроводов имеет одинаковую площадь, а адмиттансом трубопровода является гиперболический тангенс и формула (25) соответствует правилу вычисления гиперболического тангенса суммы. Поэтому смысл доказанных теорем можно передать следующей фразой: при параллельном соединении трубопроводов суммируются значения адмиттансов – гиперболических тангенсов, а при последовательном соединении – суммируются значения их аргументов (то есть арктангенсы от адмиттансов).

Результат применения теорем 1 и 2 к расчетной схеме, показанной на рис. 8, б, проиллюстрирован на рис. 9, б, где показаны графики реактивной составляющей удельного механического импеданса. Сравнивая с рис. 9, а, замечаем существенные отличия по расположению резонансных частот; кроме того, при одинаковом объеме газа уточненная схема обладает вдвое большей приведенной массой. Поэтому для решения задач этого исследования представляется целесообразным не заниматься упрощениями, а перейти к реальной схеме блока управления, показанной на рис. 8, в. При использовании формул (25) и (26) анализ схемы, содержащей около 20-ти трубопроводов, не представляет больших трудностей.

Метод расчета импеданса блока управления использует обычный алгоритм обработки графа, в котором от мелких ветвей переходят к более крупным ветвям, а затем по стволу дерева спускаются к корню, который в этой модели располагается в полости за управляющим дросселем. Адмиттанс крайней ветви вычисляем по формуле

$$c_j = (\delta_j + th((\lambda + \xi_j)\tau_j))/(1 + \delta_j th((\lambda + \xi_j)\tau_j));$$

$$\delta_j = V_j \lambda / (f_j a),$$

а адмиттанс тройника – по формуле

$$c_l = (\delta_l + c_m + c_n + th((\lambda + \xi_l)\tau_l))/(1 + (\delta_l + c_m + c_n) \times th((\lambda + \xi_l)\tau_l)),$$

где индексы m и n отвечают мелким ветвям, которые объединяются в более крупную ветвь с индексом l.

Тройники на схеме рис. 8, в, обозначены цифрами 1, 2, ..., 9. Результат реализации этого метода расчета близок к графикам рис. 9, б.

После расчета реактивной z_{cnt} и активной f_{cnt} составляющей импеданса блока управления уравнение (7) принимает вид:

$$\begin{aligned} m_{кл} \lambda^2 \hat{h} + (\chi_{kv,c} \Delta + \chi_{cnt} + \chi_m / \Delta) \lambda \hat{h} + \\ + (z_{кл} + z_{г.д} + z_{др.5} + z_{cnt}) \hat{h} = -\Delta f_1 \hat{p}_1 - (f_3 - \Delta f_1) \hat{p}_2, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\chi_{kv,c} = \chi_{kv} + \chi_{др.5}$; $\chi_{др.5}$, $z_{др.5}$ – коэффициенты трения и упругой силы в управляющем дросселе,

$$\begin{aligned} \chi_{др.5}(\omega, \Delta) &= 0.5 \rho_5^* (f_5^3 / \mu f_{5,пр}^2) \Delta^2 [2 / (1 + \sqrt{1 + \beta^2})]^{3/2}; \\ z_{др.5}(\omega, \Delta) &= \rho_5^* f_5^3 / \mu f_{5,пр}^2 \Delta \omega \beta / (1 + \sqrt{1 + \beta^2})^2; \\ \beta &= f_5 \Delta \omega V_5 / (a_5^2 \mu f_{5,пр}^2). \end{aligned}$$

Таким образом, для выполнения поставленных задач осталось найти связь между амплитудами \hat{p}_1, \hat{p}_2 и \hat{h} колебаний давления газа и подъема клапана.

Импеданс входного и выходного трубопроводов. В отличие от блока управления, по этим трубопроводам течет турбулентный поток газа, имеющий постоянную среднюю скорость $u_{1,2}^*$ и пульсирующую составляющую скорости $u_{1,2}$. Поэтому фактор затухания волны вычисляется по формуле Прандтля

$$\xi_{1,2} = 0,079 u_{1,2}^{*3/4} \nu_r^{1/4} / d_{1,2}^{5/4}.$$

Суммарный коэффициент потерь давления заменяется эквивалентным распределенным сопротивлением, которое увеличивает значение фактора ξ .

Объем баллона принимается бесконечно большим, поэтому предельный переход в (18) при условии $\Delta \rightarrow \infty$ приводит к равенству

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= -a_1 \rho_1 \text{th}((\lambda + \xi_1) \tau_1) \hat{u}_1 = \\ &= -a_1 \rho_1 \frac{\text{th}(\lambda \tau_1) + \text{th}(\xi_1 \tau_1)}{1 + \text{th}(\lambda \tau_1) \text{th}(\xi_1 \tau_1)} \hat{u}_1, \end{aligned} \quad (28)$$

где a_1, ρ_1, τ_1 – скорость звука, плотность газа и запаздывание волны на длине входного трубопровода.

Свяжем пульсацию давления с пульсацией скорости клапана. Сжимаемостью газа в полости перед клапаном пренебрегаем. Тогда вместо уравнения сжимаемости имеем равенство объемных скоростей:

$$f_1 u_1 = Q_1 + \Delta f_1 \dot{h},$$

откуда, с учетом (5), получаем

$$f_1 \hat{u}_1 = k_{кр} (\hat{p}_1 / p_1^*) Q_1^* + K_\mu (\hat{h} / h^*) Q_1^* + \Delta f_1 \lambda \hat{h},$$

или

$$\hat{u}_1 / u_1^* = k_{кр} \hat{p}_1 / p_1^* + K_\mu \hat{h} / h^* + (\Delta f_1 / f_1) (\lambda \hat{h} / u_1^*), \quad (29)$$

где множитель $K_\mu \in [0, 9; 1, 2]$; его величина зависит от характера изменения коэффициента расхода:

$$K_\mu(h^*) = 1 + h_4^* (\mu_{кл}(h^*))' / \mu_{кл}(h^*).$$

Учтем, что $\Delta f_1 / f_1 < 0,005$ и $\Delta / u_1^* < 0,01$, поэтому последнее слагаемое в (29) можно отбросить. Из системы равенств (28) и (29) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_1}{u_1^*} &= \frac{K_\mu}{1 + A_T \Psi_1} \cdot \frac{\hat{h}}{h^*} = \\ &= \frac{K_\mu (1 + \text{th}(\lambda \tau_1) \text{th}(\xi_1 \tau_1))}{1 + A_T \text{th}(\xi_1 \tau_1) + \text{th}(\lambda \tau_1) (\text{th}(\xi_1 \tau_1) + A_T)} \cdot \frac{\hat{h}}{h^*}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{-\hat{p}_1}{a_1 \rho_1 u_1^*} &= \frac{K_\mu \Psi_1}{1 + A_T \Psi_1} \cdot \frac{\hat{h}}{h^*} = \\ &= \frac{K_\mu (\text{th}(\xi_1 \tau_1) + \text{th}(\lambda \tau_1))}{1 + A_T \text{th}(\xi_1 \tau_1) + \text{th}(\lambda \tau_1) (\text{th}(\xi_1 \tau_1) + A_T)} \cdot \frac{\hat{h}}{h^*}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} A_T &= k_{кр} u_1^* a_1 \rho_1 / p_1^* = k_{кр} (u_1^* / a_1) z_1; \\ \Psi_1 &= \text{th}((\lambda + \xi_1) \tau_1), \end{aligned}$$

z_1 – фактор сжимаемости гелия во входном трубопроводе

Воспользуемся равенством

$$(a + b) / (c + d) = (ac - bd) / (c^2 - d^2) + (ad - bc) / (c^2 - d^2)$$

и после несложных преобразований приведем формулу (31) к следующему каноническому виду:

$$-\hat{p}_1 / (a_1 \rho_1) = \Psi_{p1,a}(\lambda^2) \lambda \hat{h} + \Psi_{p1,r}(\lambda^2) \hat{h}, \quad (32)$$

где $\Psi_{p1,a}, \Psi_{p1,r}$ – это активная и реактивная составляющие импеданса входного трубопровода, которые являются четными функциями от частоты колебаний.

К аналогичному виду приводится формула (30):

$$\hat{u}_1 / u_1^* = \Psi_{a1}(\lambda^2) \lambda \hat{h} + \Psi_{r1}(\lambda^2) \hat{h}; \quad (33)$$

графики используемых функций приведены на рис. 10, а.

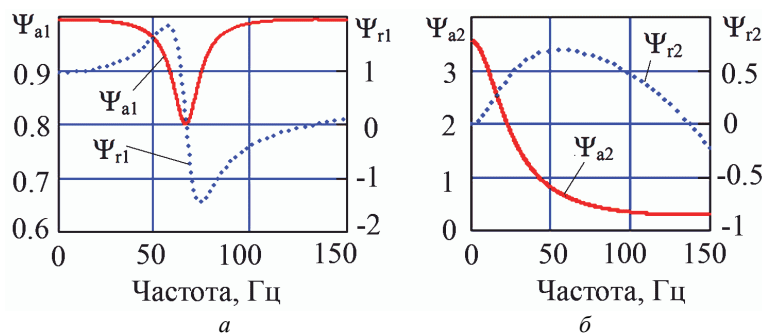


Рисунок 10 – Зависимость активной Ψ_a и реактивной Ψ_r компоненты импеданса от частоты: а – входной трубопровод; б – выходной трубопровод

Для анализа выходного трубопровода запишем условие отражения волн у выходного дросселя:

$$k_{кр} [(F + W) / p_2^*] u_2^* = (F - W) / (a_2 \rho_2),$$

откуда получаем

$$W = K_{отр} F,$$

где

$$p_2^* = a_2^2 \rho_2 / (k z_2);$$

$$K_{отр} = (1 - 0.5(k + 1) z_2 u_2^* / a_2) / (1 + 0.5(k + 1) z_2 u_2^* / a_2),$$

F, W – прямая и отраженная волны давления; a_2, ρ_2, z_2 – скорость звука, плотность и фактор сжимаемости

сти гелия в выходном трубопроводе; K_2 – искомый коэффициент отражения, который, как оказалось, в основном зависит от числа Маха u_2^*/a_2 и показателя адиабаты k ; $k_{кр} = (k+1)/(2k)$ – коэффициент линеаризации критического расхода (формула (5)).

Равенство (18) для выходного трубопровода получает вид

$$\hat{p}_2 = a_2 \rho_2 \hat{u}_2 \frac{1 + K^2 K_{отр} \exp(-2\lambda\tau_2)}{1 - K^2 K_{отр} \exp(-2\lambda\tau_2)},$$

или

$$\hat{p}_2 = a_2 \rho_2 [(1 + \delta_2 \operatorname{th}(\lambda\tau_2))/(\delta_2 + \operatorname{th}(\lambda\tau_2))] \hat{u}_2, \quad (34)$$

где

$$\delta_2 = (1 - K^2 K_{отр})/(1 + K^2 K_{отр}) \approx 0,5(k+1)z_2 u_2^*/a_2.$$

У анализируемой системы $\delta_2 \in [0, 2; 0, 3]$, а если принять $\delta_2 = 0$, то при низких частотах

$$\hat{p}_2 \approx a_2 \rho_2 /(\lambda\tau_2) \hat{u}_2.$$

Поэтому, используя аналогичные выкладки, равенство (34) было приведено к своему каноническому виду:

$$\hat{p}_2 / (a_2 \rho_2) = (\lambda\tau_2)^{-1} [\Psi_{2,a}(\lambda^2)\lambda + \Psi_{2,r}(\lambda^2)] \hat{u}_2; \quad (35)$$

такая форма представления этой зависимости оказалась удобной для дальнейшего решения. Используемые здесь функции описываются формулами

$$\Psi_{a2} = \frac{\delta_2}{\delta_2^2 \cosh^2(\lambda\tau_2) - \sinh^2(\lambda\tau_2)};$$

$$\Psi_{r2} = \frac{(1 - \delta_2^2) \operatorname{th}(\lambda\tau_2) (\lambda\tau_2)}{\operatorname{th}^2(\lambda\tau_2) - \delta_2^2}, \quad (36)$$

а их графики показаны на рис. 10, б.

Теперь, пренебрегая сжимаемостью газа в полости после клапана, а также площадью Δf_1 , запишем равенство для объемных скоростей:

$$f_2 u_2 = (\rho_1 / \rho_2) f_1 u_1 + f_3 \hat{h},$$

откуда

$$\hat{u}_2 = (\rho_1 f_1 / \rho_2 f_2) \hat{u}_1 + (f_3 / f_2) \lambda \hat{h}, \quad \text{или}$$

$$\hat{u}_2 = [(\rho_1 f_1) / (\rho_2 f_2)] u_1^* [\Psi_{a1}(\lambda^2)\lambda + \Psi_{r1}(\lambda^2)] + \lambda f_3 / f_2 \hat{h}.$$

Учтем равенство (35) и получим искомую формулу для импеданса выходного трубопровода:

$$\hat{p}_2 = \frac{a_2 \rho_2}{\lambda\tau_2} \cdot [\Psi_{a2} \lambda + \Psi_{r2}] \times$$

$$\times \left[\frac{\rho_1 f_1}{\rho_2 f_2} \cdot u_1^* \cdot \left(\frac{\Psi_{r1}}{\lambda} + \Psi_{a1} \right) + \frac{f_3}{f_2} \right] \cdot \lambda \hat{h}.$$

Уравнение для частот и амплитуд свободных нелинейных колебаний пневмосистемы. В предыдущем пункте фактически пренебрегли величиной площади Δf_1 в уравнениях сжимаемости газа; следовательно, чтобы сохранить симметрию уравнений механики, должны пренебречь этой величиной в уравнении движения (27). Подставим в это уравнение формулу (37) и после сокращения на амплитуду \hat{h} и других очевидных преобразований получим *вековое уравнение* для частот λ (и амплитуд Δ) свободных нели-

нейных колебаний системы:

$$A_0 \lambda^3 + A_1(\lambda^2, \Delta) \lambda^2 + A_2(\lambda^2, \Delta) \lambda + A_3(\lambda^2, \Delta) = 0, \quad (37)$$

где

$$A_0 = m_{кл};$$

$$A_1 = \chi_{kv,c} \Delta + \chi_{cnt} + \chi_M / \Delta + \Psi_{a2} (M_V + M_T \Psi_{a1}) \tau_2^{-1};$$

$$A_2 = z_{кл} + z_{г,д} + z_{др,5} + z_{cnt} + K_T \Psi_{a2} \Psi_{r1} +$$

$$+ \Psi_{r2} (M_V + M_T \Psi_{a1}) \tau_2^{-2} + \chi_{cnt} \xi_l;$$

$$A_3 = K_T \Psi_{r2} \Psi_{r1} + z_{cnt} \xi_l;$$

$$K_T = K_\mu (f_3 / f_2) a_2^* G^* / h_4^*; M_T = A_T K_T \tau_2^2 k (L_1 / L_2);$$

$$M_V = (f_3 / f_2)^2 \rho_2^* f_2 L_2.$$

Напомним, что в этих формулах от амплитуды Δ колебаний скорости клапана зависят также коэффициенты $\chi_{kv,c}$, χ_M , χ_{cnt} , $z_{др,5}$, z_{cnt} .

Величины M_T и M_V имеют физическую размерность массы, причем M_V – это приведенная (к регулирующему поршню клапана) масса газа в выпускном трубопроводе, а M_T – общая приведенная масса газа во впускном и выпускном трубопроводах. Величина K_T имеет размерность Н/м, это *коэффициент жесткости обратной связи регулятора*.

Формально уравнение (37) записано как кубическое для частоты λ , что дает один из ключей к его решению, но оно является не алгебраическим, а трансцендентным, и это существенно усложняет анализ.

Простейший метод решения (37) описывается итерационной схемой

$$A_0 \lambda_{j+1}^3 + A_1(\lambda_j^2, \Delta) \lambda_{j+1}^2 + A_2(\lambda_j^2, \Delta) \lambda_{j+1} + A_3(\lambda_j^2, \Delta) = 0,$$

$$j = 0, 1, 2, \dots,$$

где для некоторой фиксированной амплитуды Δ выбирается начальное значение искомой частоты λ_0 из диапазона $100i \dots 500i$, а затем это значение уточняется путем последовательного решения кубических уравнений. После каждой итерации из трех частот выбирается минимальное по модулю число $\lambda_{j,1}$.

Результат такого решения проиллюстрирован на рис. 11, а. Величина

$$K_z = \exp(2\pi \alpha / \omega), \quad \alpha + i \cdot \omega = \lambda, \quad \omega > 0$$

определяет коэффициент затухания (или, в других случаях, возрастания) колебаний. Для амплитуды $\Delta = 0,008 \dots 0,035$ м/с алгоритм сходится к решению, которое является комплексным числом, а на других участках не сходится. Полученные решения отвечают затухающим колебаниям.

Для малых амплитуд, как показано далее, зависимость коэффициентов A_k от частоты λ ослабевает, и в алгоритме допустимо использовать среднее значение $\lambda_{ср,j}$, вычисляемое по двум минимальным (по модулю) корням кубического уравнения $\lambda_{j,1,2}$:

$$\lambda_{ср,j} = 0,5 \cdot \operatorname{Re}(\lambda_{j,1} + \lambda_{j,2}) + 0,5 \cdot \operatorname{Im}(\lambda_{j,1} - \lambda_{j,2}).$$

В результате достигается сходимость метода (рис. 11, б), но полученные зависимости являются приближенными.

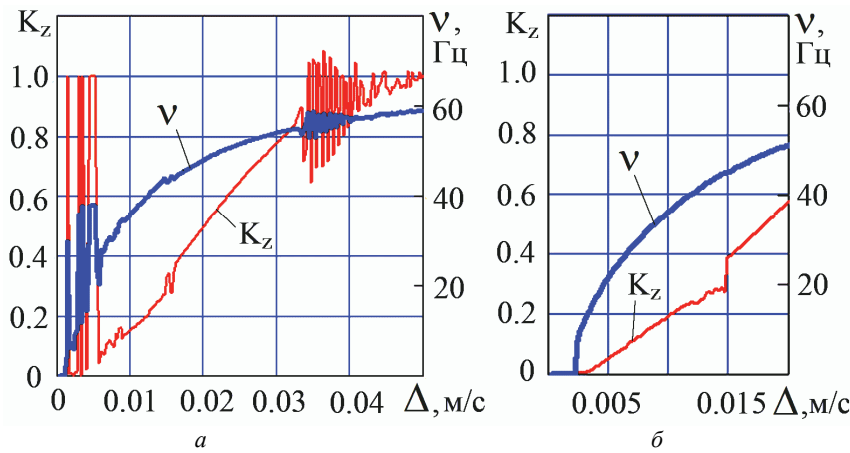


Рисунок 11 – Зависимости частоты ν и коэффициента затухания колебаний K_z от их амплитуды Δ :
 а – метод простых итераций; б – итерации с усреднением частот

Заметим, что вековое уравнение (37) полезно представить в виде:

$$\lambda^2 + B_1(\lambda^2, \Delta)\lambda + B_2(\lambda^2, \Delta) = 0. \quad (38)$$

где $B_1 = (A_1 + A_3/\lambda^2)/A_0$; $B_2 = A_2/A_0$.

Если в (38) значения B_1, B_2 зафиксировать, получим квадратное уравнение, описывающее частоты колебаний одномассовой системы.

Случай малых амплитуд колебаний. Коэффициент жесткости обратной связи и статическая устойчивость. Из формулы для коэффициента A_1 следует, что при условии $\Delta \rightarrow 0$ и частота $\lambda \rightarrow 0$. Если частоты колебаний малы, то в коэффициентах уравнения (38) допустимы замены

$$\text{th}(\lambda \tau_j) \approx \lambda \tau_j (1 - (\lambda \tau_j)^2 / 3), \quad (39)$$

которые означают, что трубопроводы с газом моделируются как равномерно сжимаемые цилиндрические пружины, где учитывается жесткость и приведенная масса витков. Поскольку малы и амплитуды колебаний, можно пренебречь квадратичным трением. В результате вековое уравнение (38) из трансцендентного превращается в квадратное уравнение

$$M_{\text{пр}}\lambda^2 + (\chi_M/\Delta - M_{\text{пр}}\delta_2\tau_2^{-1})\lambda + Z_{\text{пр}} = 0, \quad (40)$$

где

$$M_{\text{пр}} = K_T(1/\delta_2^2 - 1)\tau_2^2/\delta_2 + m_{\text{снт}} + m_{\text{кл}} \approx K_T\tau_2^2/\delta_2^3;$$

$$Z_{\text{пр}} = K_T/\delta_2 + z_{\text{г.д}} + z_{\text{снт}} + \dots \approx K_T/\delta_2$$

– масса и коэффициент жесткости, для которых в этом уравнении оставлены главные (по величине) слагаемые.

Так,

$$Z_{\text{пр}}/(-z_{\text{г.д}}) > 10,$$

и это означает, что условие статической устойчивости для положения равновесия клапана, которое обеспечивается *восстанавливающей силой*, выполнено с большим запасом. Спонтанным отклонениям от равновесия (напр., при включении новых потребителей) препятствует большая сила инерции; величина приведенной к клапану массы газа $M_{\text{пр}}$ превышает 350 кг, а масса самого клапана $m_{\text{кл}} \approx 0,3$ кг. Заметим, что боль-

шие значения приведенной массы и жесткости характерны для низких частот, и при переходе к частотам $\nu \approx 60$ Гц они уменьшаются на два порядка.

Из уравнения (40) можно получить зависимость частоты от амплитуды:

$$\lambda = 0,5(1 - \Delta_0/\Delta)\delta_2\tau_2^{-1} + \sqrt{(0,5(1 - \Delta_0/\Delta)\delta_2\tau_2^{-1})^2 - \omega_0^2},$$

где $\Delta_0 = \chi_M\tau_2/(M_{\text{пр}}\delta_2) \approx 0,0017$ м/с;

$$\omega_0 = \sqrt{Z_{\text{пр}}/M_{\text{пр}}}; \quad \nu_0 = \omega_0/(2\pi) \approx 24,6 \text{ Гц}.$$

При $\Delta > 0,005$ м/с числа λ являются комплексными и описывают гармонические колебания, при $\Delta < 0,005$ м/с колебания аperiodические (рис. 12).

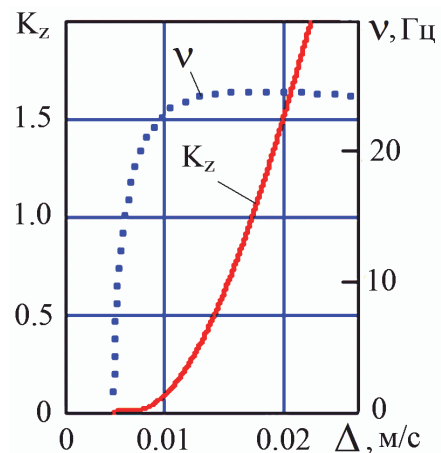


Рисунок 12 – Результаты упрощенного моделирования инерции газа в трубопроводах

Сопоставление рис. 11, б и рис. 12 показывает, что зависимости $\nu(\Delta)$ и $K_z(\Delta)$ близки при частотах $\nu < 10$ Гц, где аппроксимация (39) выполняется с высокой точностью. Но при частотах $\nu > 20$ Гц расхождение результатов носит качественный характер. Уравнение (40) предсказывает динамическую неустойчивость при частотах $\nu \approx 24$ Гц и амплитудах $\Delta > \Delta_0$, чего у этой пневмосистемы нет. Следовательно, при ее исследовании на динамическую устойчивость необходимо учитывать не инерционность, а колебания газа в трубопроводах.

Метод нахождения частот и амплитуд предельных циклов. В теории автоматического управления [8] уравнения вида (37) преобразуют к равенству для характеристического комплекса Михайлова

$$C(\lambda, \Delta) = C_0(\lambda^2, \Delta) + C_1(\lambda^2, \Delta)\lambda = 0, \quad (41)$$

где, для этого случая, можно использовать две конкурирующие факторизации:

$$A - C_0 = A_0 \lambda^2 + A_2; C_1 = A_1 + A_3 / \lambda^2 \text{ и}$$

$$B - C_0 = A_1 \lambda^2 + A_3; C_1 = A_0 \lambda^2 + A_2.$$

Колебательную границу области динамической устойчивости образуют мнимые числа $\lambda = i \cdot \omega$ и соответствующие им амплитуды колебаний скорости

$$\Delta \in [0, v_M]; v_M = 0,15 \text{ м/с},$$

которые являются решениями системы

$$\{ C_0(-\omega^2, \Delta) = 0; C_1(-\omega^2, \Delta) = 0. \quad (42)$$

Система (42) содержит два нелинейных уравнения для двух неизвестных, но может быть сведена к одному уравнению при использовании метода исключения неизвестной. Для исключения используют первое уравнение, которое решают численно.

Как это следует из приведенных выше формул, для факторизации **A** выполняется условие монотонности $\partial C_0 / \partial \Delta > 0$, и здесь решение единственно. Для факторизации **B** условие $\partial C_0 / \partial \Delta > 0$ выполняется при $\Delta \in [0, v_*]$, но при $\Delta \in [v_*, v_M]$ имеем неравенство $\partial C_0 / \partial \Delta < 0$; в этом случае задача исключения не-

известной может иметь одно или два решения.

Зафиксируем в первом уравнении круговую частоту ω и найдем отвечающую ему амплитуду Δ , для чего вычислим значения функции

$$C_0(-\omega^2, v_M \cdot j/100); j = 1...100,$$

после чего локализуем корень этого уравнения и уточним значение $\Delta(\omega)$, используя линейную интерполяцию. Подставим это значение во второе уравнение и получим *функцию невязки*, которую определим следующим образом:

$$\zeta(\omega) = -C_1(-\omega^2, \Delta(\omega)). \quad (43)$$

Для факторизаций **A** и **B** соответственно

$$\zeta_a = (A_0 A_3 - A_1 A_2) / A_2 \text{ и}$$

$$\zeta_b = (A_0 A_3 - A_1 A_2) / A_1,$$

то есть невязка содержит *минор Гурвица* из одноименного алгебраического критерия устойчивости [18].

Графики этой функции показаны на рис. 13. При визуализации невязка ζ_a умножается на величину Δ и получает смысл недостающей (избыточной) силы трения в манжете. Для факторизации **B** графики имеют две ветви, что объясняется немонотонной формой зависимости суммарной силы трения от амплитуды колебаний. Корни v_1, v_2 невязки (и соответствующие амплитуды Δ_1 и Δ_2), присутствующие на рис. 13, отвечают границе устойчивости, или соответствующему *предельному циклу колебаний*.

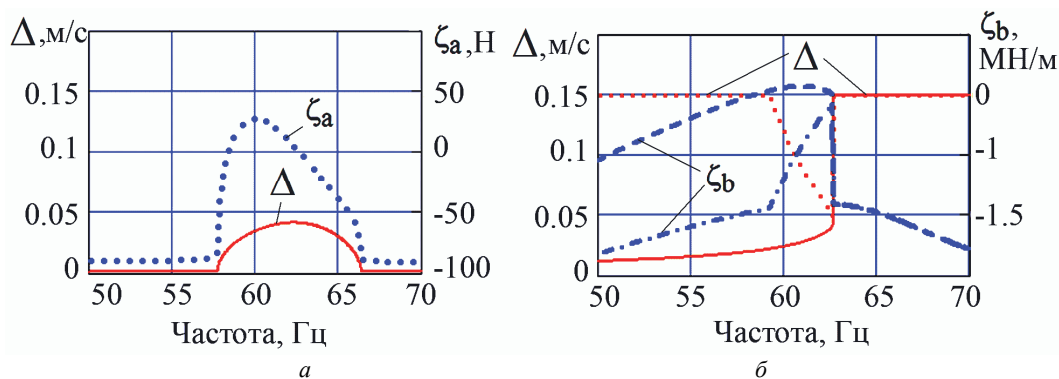


Рисунок 13 – Определение частот и амплитуд предельных циклов и проверка устойчивости: а – факторизация **A**; б – факторизация **B**

Графоаналитический критерий устойчивости предельного цикла. Известно, что устойчивый предельный цикл соответствует автоколебаниям. Предложенный в этом пункте и использованный в нашей работе критерий устойчивости является развитием известных методов, описанных в [8, гл.18].

Если известны частоты v_j всех предельных циклов,

$$0 < v_1 < v_2 < v_3 < \dots,$$

и циклы *простые* (невязка не имеет кратных корней), то частоты с четными номерами отвечают автоколебаниям, с нечетными – неустойчивым циклам, и

– при $v < v_1$ и в интервалах (v_{2j}, v_{2j+1}) , $j = 1, 2, \dots$

свободные колебания затухают,

– в интервалах (v_{2j-1}, v_{2j}) , $j = 1, 2, \dots$ свободные колебания растут.

Следовательно, если при частотах $v < 50$ Гц предельных циклов нет, то при $v_2 \approx 62$ Гц система имеет автоколебания, а при $v_1 \approx 58$ Гц начинается интервал частот, где амплитуды ее колебаний растут. Но, как оказалось, к этому выводу можно прийти без использования информации о других предельных циклах.

Критерий опирается на вспомогательные утверждения, которые имеют несложное доказательство, поэтому мы его опускаем. Числители приведенных ниже дробей можно найти в аналитическом методе исследования устойчивости из [8], которые

там также даны без доказательства. Но в такой форме, как указано ниже, утверждения сформулированы впервые.

Лемма 1. Пусть зависимость комплексной частоты $\lambda = \alpha + i \cdot \omega$, $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ от амплитуды Δ описывается неявным уравнением (41) $C(\lambda, \Delta) = 0$, и выполнено условие $C(\lambda_0, \Delta_0) = 0$, где $\lambda_0 = i \cdot \omega_0$; $\omega_0, \Delta_0 > 0$. Тогда в точке $\lambda = \lambda_0$, $\Delta = \Delta_0$ для зависимости $\alpha(\Delta)$ выполнено равенство

$$\frac{d\alpha}{d\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial C_0 / \partial \Delta \cdot \partial C_1 / \partial \lambda^2 - \partial C_1 / \partial \Delta \cdot \partial C_0 / \partial \lambda^2}{(\omega_0 \cdot \partial C_1 / \partial \lambda^2)^2 + (\partial C_1 / \partial \Delta)^2}. \quad (44)$$

Лемма 2. Для функции невязки (43) в каждой точке ее графика выполнено условие

$$\frac{d\zeta}{d\omega} = \frac{2\omega_0}{\partial C_0 / \partial \Delta} \cdot (\partial C_0 / \partial \Delta \cdot \partial C_1 / \partial \lambda^2 - \partial C_1 / \partial \Delta \cdot \partial C_0 / \partial \lambda^2). \quad (45)$$

Рассмотрим следствия из этих результатов. **Устойчивость предельного цикла эквивалентна условию** $d\alpha/d\Delta < 0$; тогда, напр., спонтанное увеличение амплитуды приводит к затухающим колебаниям, что уменьшает амплитуду. Сравнивая правые части (44) и (45), приходим к равенству

$$\text{sign}(d\alpha/d\Delta) = \text{sign}(d\zeta/d\omega) \cdot \text{sign}(\partial C_0 / \partial \Delta).$$

Таким образом, если производная $\partial C_0 / \partial \Delta > 0$, а в корне невязки производная $d\zeta/d\omega < 0$, то предельный цикл соответствует автоколебаниям; при положительных производных $\partial C_0 / \partial \Delta > 0$ и $d\zeta/d\omega > 0$ он неустойчивый. Кроме того, если при выполнении условия $\partial C_0 / \partial \Delta > 0$ имеем $\zeta(\omega) < 0$, то свободные колебания являются затухающими, а если $\zeta(\omega) > 0$ – то при этой частоте они растущие по амплитуде.

Заметим, что сформулированное и доказанное утверждение объединяет два равноправных критерия, связанные с двумя факторизациями, и на практике должен использоваться тот критерий, который удобен для данной задачи. При анализе пневмосистемы запуска ЖРД более удобной является факторизация A , поскольку здесь функция $C_0(-\omega^2, \Delta)$ монотонно зависит от амплитуды Δ .

Кроме того, как это следует из доказанного утверждения, увеличение силы трения повышает запас динамической устойчивости пневмосистемы.

Следует особо подчеркнуть, что графики рис. 13 описывают зависимость амплитуды от частоты только лишь для окрестностей предельных циклов; для остальных частот они столь же условны, как и известная кривая Михайлова.

Графоаналитический метод решения векового уравнения для затухающих или растущих колебаний. В основе метода использован следующий прием.

Вернемся к исходной точке исследования, а именно к уравнению (3), и к мнимому числу $\lambda = i\omega$ добавим вещественную часть α , то есть от числа λ перейдем к сумме $\alpha + \lambda = \alpha + i \cdot \omega$. Теперь при условии $\alpha < 0$ мы будем анализировать затухающие, а при условии $\alpha > 0$ – растущие гармонические колебания.

Такое изменение приведет к появлению дополнительного экспоненциального множителя рядом с коэффициентом затухания волны в формуле (18):

$$\hat{p}_0 = a \rho \hat{u}_0 \left[(1 + (K \exp(-\alpha\tau))^2 \exp(-2\lambda\tau)) / (1 - (K \exp(-\alpha\tau))^2 \exp(-2\lambda\tau)) \right],$$

и в других аналогичных формулах, то есть оно скорректирует значения этих коэффициентов. В результате уравнение (37) примет вид

$$A_0(\alpha + \lambda)^3 + A_1(\lambda^2, \Delta, \alpha)(\alpha + \lambda)^2 + A_2(\lambda^2, \Delta, \alpha)(\alpha + \lambda) + A_3(\lambda^2, \Delta, \alpha) = 0,$$

где A_j – это скорректированные указанным образом вещественные функции, зависящие от трех аргументов. Далее получаем уравнение

$$A_0 \lambda^3 + (A_1 + 3\alpha A_0) \lambda^2 + (A_2 + 3\alpha^2 A_0 + 2\alpha A_1) \lambda + (A_3 + \alpha^3 A_0 + \alpha^2 A_1 + \alpha A_2) = 0,$$

которое преобразуется к равенству вида (41):

$$C(\lambda, \Delta, \alpha) = C_0(\lambda^2, \Delta, \alpha) + C_1(\lambda^2, \Delta, \alpha) \lambda = 0. \quad (46)$$

В уравнении (46) вещественное число α (либо связанный с ним коэффициент затухания волны K_z , что удобней для интерпретации результатов исследования) играет роль параметра. Этот параметр фиксируем на некотором уровне, а полученное уравнение для двух переменных λ и Δ решаем описанным выше графоаналитическим методом.

Практическая реализация такого подхода для исследования колебаний низкой частоты показана на рис. 14, а. Для сканирования комплексной плоскости частот использовалось значение $K_z = 0,1$. Корни невязки отвечают парам близких частот, причем, в силу доказанного критерия, в каждой паре большая частота является стабильной, а меньшая – неустойчивой. Однако когда за период колебаний амплитуда уменьшается в 10 раз, стабильность имеет теоретическое значение. Для практики важно, что при частотах 20...30 Гц колебания быстро затухают, а их максимальная амплитуда не превосходит значения 0,004 м/с.

Этот же метод использован для исследования растущих колебаний при частотах $v \in (v_1, v_2)$. Коэффициент $K_z = 1,04$ обеспечил получение кратного корня v_{cp} невязки (см. рис. 14, б). Амплитуда колебаний Δ_{cp} больше Δ_1 на 35%. Следовательно, изменение частот $v_1 \rightarrow v_{cp}$ занимает 12 периодов колебаний, или 0,2 с. Это 30% длительности установившегося режима подачи газа. Участки медленного изменения амплитуды колебаний присутствуют на рис. 2, а – в.

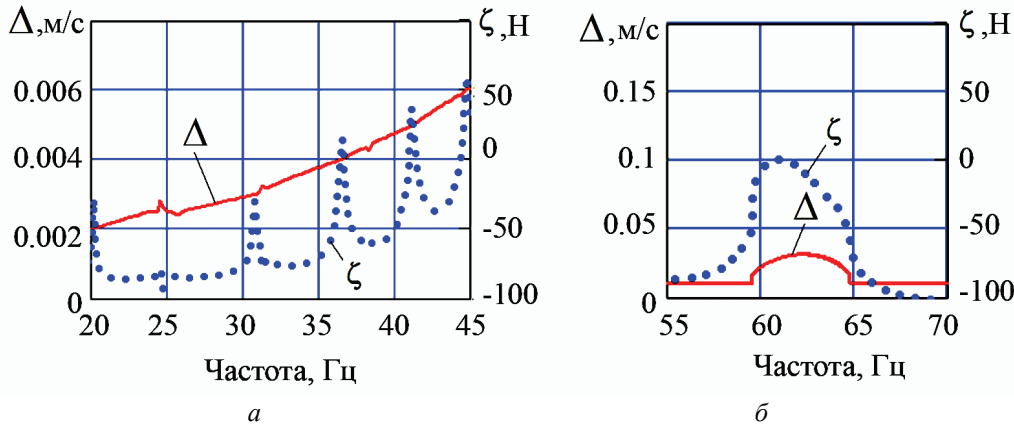


Рисунок 14 – Исследование затухающих колебаний низкой частоты и растущих колебаний в интервале частот между предельными циклами: а – $K_z = 0,1$; б – $K_z = 1,04$

Достаточное условие динамической устойчивости пневмосистемы. Получим простейшее условие указанного типа, которое накладывается на основные параметры системы. Из свойства монотонности

$$\partial A_2 / \partial \Delta = \partial C_0 / \partial \Delta > 0$$

следует, что система не имеет предельных циклов, если при всех частотах выполняется неравенство

$$-A_0 \omega^2 + A_2(-\omega^2, 0) > 0. \quad (47)$$

Учтем формулы для коэффициентов, но оставим в них только старшие по величине слагаемые:

$$A_0 = m_{кл}; \quad A_2 \approx K_T \Psi_{a2}(\omega) \Psi_{r1}(\omega) + z_{г.д} + z_{cnt}.$$

Величины $z_{г.д}$, а также z_{cnt} при средних частотах (см. рис. 9), отрицательны. После использования формулы (24) и отбрасывания второстепенных положительных чисел неравенство

$$K_T \Psi_{a2}(\omega) \Psi_{r1}(\omega) - (m_{cnt} + m_{кл}) \omega^2 > -z_{г.д}$$

оказывается более сильным, чем (47). Минимум его правой части достигается при частоте $\omega_m \approx 0.5\pi / \tau_2$ и составляет примерно $0,5 \delta_2$.

Причем, если принять условие $m_{cnt} = 0$, то поправочный коэффициент 0,5 нужно заменить на 0,8, что лишний раз подчеркивает сильное влияние колебаний газа в управляющих трубопроводах на динамическую устойчивость.

При поправочном коэффициенте 0,5 получаем следующее неравенство:

$$0,5 \delta_2 K_T > -z_{г.д},$$

или, после подстановок и сокращений,

$$\delta_2 (f_3 / f_2) > \Lambda_M, \quad (48)$$

где

$$\Lambda_M = -2K_{г.д} f_{кл} \cdot (p_1^* - p_2^*) / (G^* a_2^*) \approx -2K_{г.д} / \mu (h^*);$$

$f_{кл}$, μ – площадь проходного сечения по седлу клапана и соответствующий коэффициент расхода, зависящий от подъема клапана; коэффициент $K_{г.д}$ газодинамической силы для клапанов такого типа отрицательный и лежит в пределах $-0,5 \dots -0,3$ [1].

Получено простое и удобное для практики усло-

вие, а если его заменить равенством, то вплотную приблизимся к границе динамической устойчивости. Коэффициент δ_2 , в основном, определяется числом Маха, поэтому правая часть (48) изменяется примерно пропорционально изменению $(1/f_2)^2$, а динамическая устойчивость пневмосистемы сильно зависит от выбора диаметра выходного трубопровода. В анализируемой конструкции на первом включении пневмосистемы

$$\delta_2 (f_3 / f_2) \approx 0,8 \Lambda_M$$

и если, напр., уменьшить диаметр выходного трубопровода на 5 %, то устройство будет работать без автоколебаний. Однако корректировки диаметра выходного трубопровода для тонкой настройки на автоколебания малой амплитуды недостаточно; кроме того необходимо учесть изменение коэффициента расхода $\mu (h_j^*)$, $j \in \overline{1,5}$ для различных включений двигателя.

Настройка пневмосистемы на автоколебания малой амплитуды. Как следует из (48), выполнение неравенства

$$\delta_2 (f_3 / f_2) < \Lambda_M, \quad (49)$$

является *необходимым условием* возникновения автоколебаний. Но для получения автоколебаний малой амплитуды оно не является достаточным, поскольку его выполнение не зависит от выбора диаметра d_5 управляющего жиклера.

При большом диаметре жиклера основным фактором нелинейности становится сухое трение; значения коэффициента эквивалентного вязкого трения

$$\chi_c = \chi_{kv,c} \Delta + \chi_{cnt} + \chi_M / \Delta + \Psi_{a2} (M_V + M_T \Psi_{a1}) \tau_2^{-1}$$

для этого случая показаны на рис. 15, а. В уравнении $C_0(-\omega^2, \Delta) = 0$ зависимость левой части от Δ становится слабой, и частоты $\nu_{1,2}$ предельных циклов сближаются. Следовательно, в этом случае амплитуды $\Delta_{1,2}$ отвечают точкам пересечения одного из графиков, показанных на рис. 14, а, с горизонтальной линией

$$y = A_3(\omega^2) / \omega^2; \quad \omega = 2\pi i \nu_{1,2},$$

которая там не показана. При этом амплитуда Δ_2 устойчивого цикла размещается за точкой $\nu^* = 0,04$ м/с

минимума силы трения и, как следствие, оказывается недопустимо большой.

Если диаметр управляющего жиклера близок к своему оптимальному значению 0,7...0,9 мм, то у системы появляется значительный коэффициент жесткости $z_{др.5}(\Delta)$, благодаря чему между частотами $\nu_{1,2}$

предельных циклов образуется зазор. Теперь значения $\chi_c(\Delta, \nu_{1,2})$ располагаются на разных кривых (рис. 15, б), а амплитуды $\Delta_{1,2}$ (при благоприятных значениях других параметров) получают возможность сместиться от значения ν^* в одну сторону и удовлетворять условию $\Delta_{1,2} < 0,04$ м/с (табл. 1).

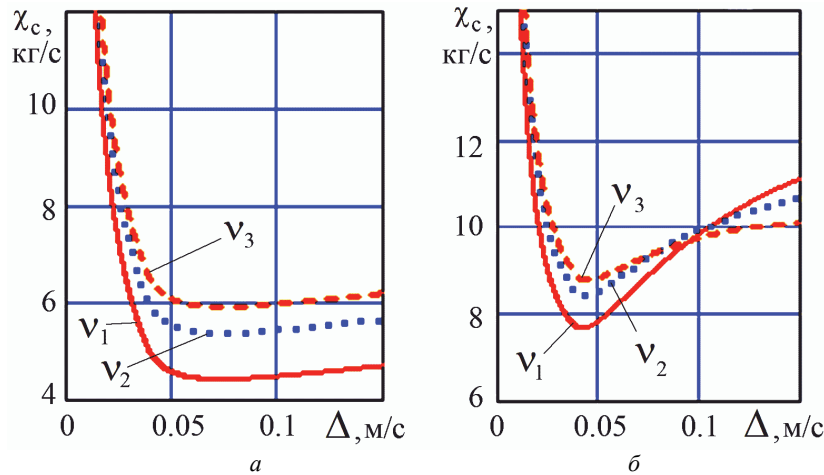


Рисунок 15 – Зависимости суммарного коэффициента трения χ_c от амплитуды Δ и частоты колебаний ν ($\nu_1 = 50$ Гц, $\nu_2 = 60$ Гц, $\nu_3 = 70$ Гц) при разных диаметрах управляющего дросселя: а – диаметр $d_5 = 2$ мм; б – диаметр $d_5 = 0,8$ мм

Таблица 1 – Частота и амплитуда автоколебаний при варьировании диаметра управляющего дросселя

d_5 , мм	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
Первое включение системы, $p_1^* = 30$ МПа; $T_1^* = 293$ К									
ν_2 , Гц	–	60,6	62,8	63,4	63,7	63,8	63,8	63,7	63,6
Δ_2 , м/с	–	0,029	0,041	0,051	0,062	0,076	0,093	0,114	0,138
Третье включение системы, $p_1^* = 22$ МПа; $T_1^* = 253$ К									
ν_2 , Гц	–	55,1	56,4	56,7	56,9	56,9	56,8	56,7	56,6
Δ_2 , м/с	–	0,032	0,044	0,056	0,071	0,088	0,108	0,130	0,156
Пятое включение системы, $p_1^* = 15$ МПа; $T_1^* = 213$ К									
ν_2 , Гц	–	48,2	49,4	49,7	49,8	49,8	49,7	49,7	49,5
Δ_2 , м/с	–	0,030	0,042	0,054	0,068	0,084	0,102	0,124	0,148

Таким образом, второе необходимое условие заключается в (приближенном) выполнении соотношения (11) по оптимальному выбору диаметра d_5 .

Частота и амплитуда автоколебаний зависят от многих факторов, в том числе и от длин трубопроводов (рис. 2). Но, как показывает табл. 1, если путем корректировки размеров трубопроводов выполнить условие (49), то поставленную задачу можно решить за счет выбора диаметра управляющего жиклера. Оказалось, что при изменении параметров газа в баллоне, происходящем по мере использования рабочего тела на включения двигателя, амплитуды автоколебаний сохраняются, а частоты смещаются вместе со снижением скорости звука в трубопроводах с газом.

Третье необходимое условие заключается в обеспечении высокой интенсивности возбуждения колебаний, имеющих частоты $\nu > \nu_1 \approx 58$ Гц, и его выполнение зависит от номера включения ЖРД.

При первом включении начальный уровень давления $p_1 \approx 1$ атм, поэтому после открытия пневмокла-

пана из входного трубопровода происходит заброс газа в практически пустую полость. Что приводит к интенсивным колебаниям давления газа и скорости клапана на переходном режиме работы устройства (рис.16, а) и автоколебаниям на установившемся режиме (рис. 17, а). Перестройка давлений на промежутке времени $t \in (2,15, 2,25)$, с объясняется подключением новых потребителей, что, кроме прочего, изменяет импеданс блока управления и влияет на амплитуды автоколебаний.

К началу последующих включений между пневмоклапаном и регулятором сохраняется остаточное давление $p_1 \approx 0,3...0,6$ рб. Поэтому интенсивность заброса газа в эту полость по сравнению с первым включением снижается: амплитуды высокочастотных колебаний уменьшаются в 2-3 раза (рис.16, б), а их суммарная энергия – в 5 раз и более. Вместо автоколебаний получаем динамическую устойчивость (рис. 17, б), причем эта же закономерность наблюдается и при других длинах трубопроводов (рис. 18).

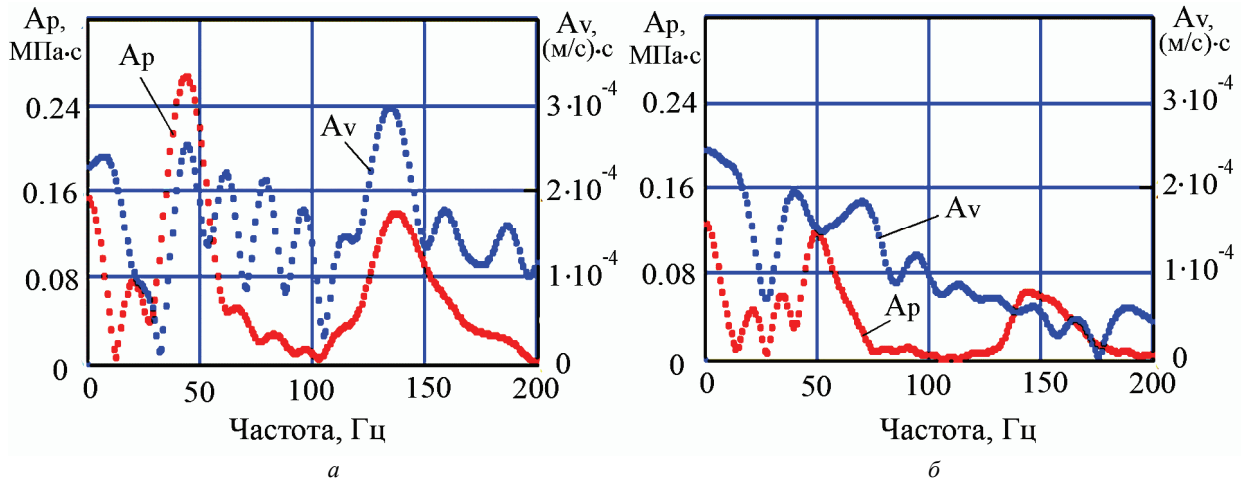


Рисунок 16 – Амплитуды преобразования Фурье для расчетных значений давления газа перед регулятором и скорости клапана регулятора на переходном режиме: *a* – первое включение; *б* – второе включение. Расчет переходного режима выполнен по методу, описанному в [1-4]

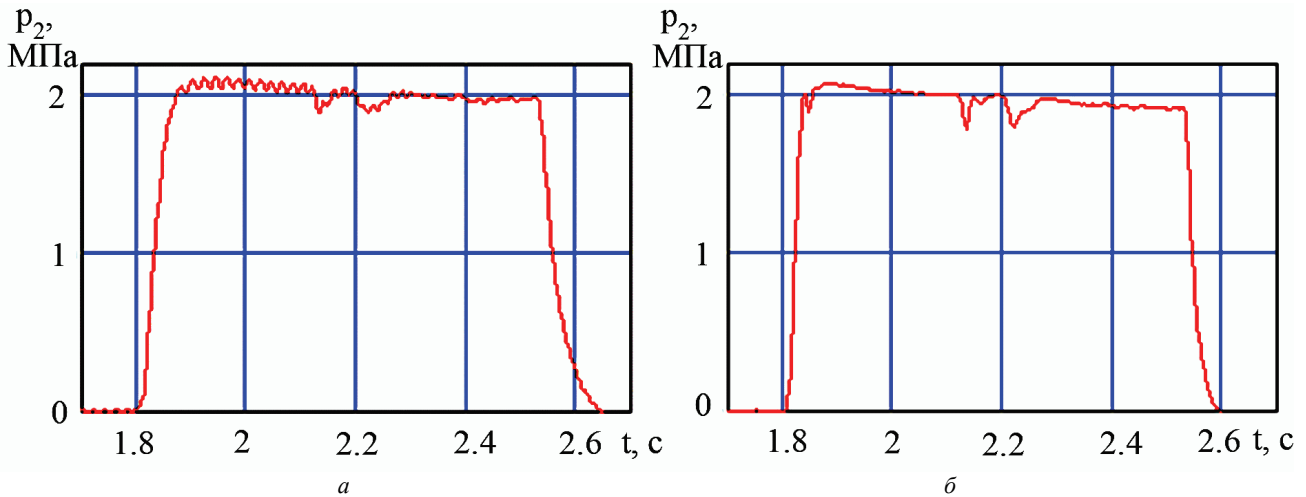


Рисунок 17 – Давление газа в выходном трубопроводе пневмосистемы запуска при огневых испытаниях двигателя: *a* – первое включение; *б* – второе включение ЖРД

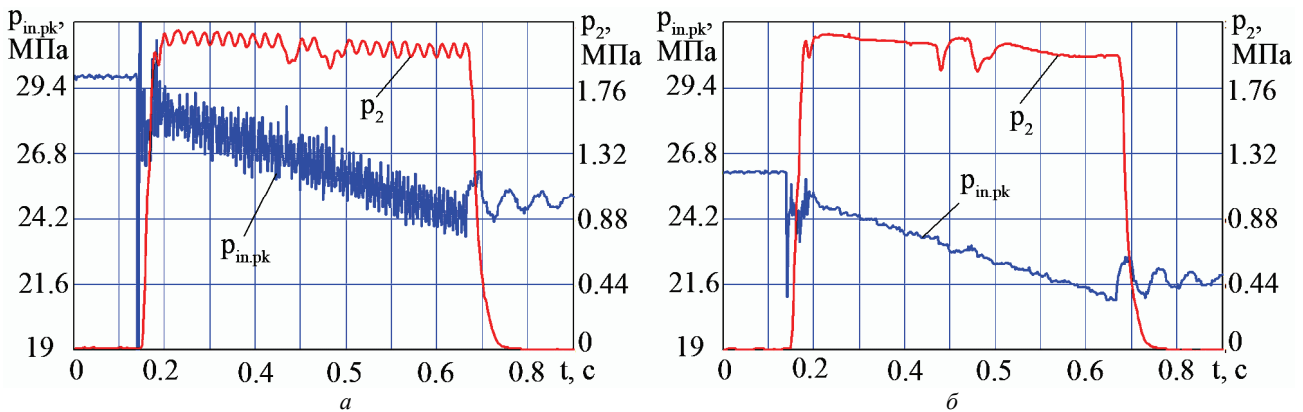


Рисунок 18 – Давление газа во входном $p_{in.pk}$ и в выходном p_2 трубопроводе пневмосистемы запуска при огневых испытаниях двигателя с увеличенной длиной входного трубопровода: *a* – первое включение; *б* – второе включение ЖРД

Но, если настроить систему на автоколебания малой амплитуды при первом включении двигателя, то такое решение сохраняет эффективность и для других включений, поскольку оно обеспечивает:

– минимально возможное затухание и максимальную продолжительность колебаний клапана на

установившемся режиме подачи газа;

– максимальный участок подъемов клапана $h < h_1^*$, отвечающих динамической неустойчивости, и предельно крутые фронты импульса подачи газа.

Динамическая неустойчивость пневмосистемы при малых подъемах клапана подтверждена в экспе-

риментах по нестационарной продувке металлорукава [19]. Для снижения расхода газа диаметр жиклера 6 уменьшали в 1,5...2 раза. Упругопластические деформации уплотнительного кольца изменяют геометрию клапанной щели, поэтому при малых подъемах клапана его коэффициент расхода также мал. Что нарушает условие (48) и приводит к неустойчивости, которая в экспериментах [19] проявлялась в форме пульсаций давления и расхода газа.

Возможности аналитического решения задачи на этом исчерпаны, и окончательную (тонкую) настройку на автоколебания малой амплитуды проводим при использовании разработанных программ расчета, а ее результат проверяем на испытательных стендах.

Выводы.

Для исследования динамической устойчивости составлена упрощенная дискретно-континуальная нелинейная динамическая модель пневмосистемы запуска ЖРД, описывающая подачу сжатого гелия из баллона по трубопроводам через регулятор с пневматическим управлением.

При использовании метода гармонической линеаризации выведены формулы для расчета амплитуд колебаний расхода газа через дроссель и клапанную щель, а также амплитуд пульсации силы трения в манжетах, при установившихся колебаниях клапана.

Разработан метод расчета удельного механического импеданса для процесса установившихся колебаний столбов газа в разветвленных системах трубопроводов и получены формулы для импеданса входного, выходного и управляющего трубопроводов исследуемой пневмосистемы.

Выведено трансцендентное характеристическое уравнение, связывающее частоты и амплитуды гармонических нелинейных свободных колебаний клапана регулятора пневмосистемы. Разработаны методы решения этого уравнения для случаев установившихся, затухающих и растущих колебаний.

Предложен и использован новый графоаналитический метод нахождения мнимых корней характеристического уравнения, определяющих колебательную границу динамической устойчивости системы, а также получен новый критерий устойчивости для соответствующих предельных циклов.

Показано, что устойчивость и колебательность пневмосистемы зависит от размеров трубопроводов и диаметра управляющего жиклера. Описан порядок настройки исследуемой системы на автоколебания малой амплитуды.

Список литературы: 1. Шевченко С.А. Моделирование пневмосистемы запуска ЖРД при учете теплообмена газа со стенками полостей и уточнении сил, действующих на клапаны регуляторов / С.А. Шевченко, А.Л. Григорьев, М.С. Степанов // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2015. – № 7 (124). – С. 100–110. 2. Шевченко С.А. Уточнение метода инвариантов для расчета динамических параметров газа в трубопроводах пневмосистемы запуска ракетного двигателя / С.А. Шевченко, А.Л. Григорьев, М.С. Степанов // *Вісник НТУ «ХП»*. – Х.: НТУ «ХП». – 2015. – № 6 (1115). – С. 156–181. 3. Шевченко С.А. Уточненный расчет дина-

ческих параметров газа в шаробаллоне / С.А. Шевченко, А.Л. Григорьев, М.С. Степанов // *Вісник НТУ «ХП»*. – Х.: НТУ «ХП». – 2015. – № 45 (1154). – С. 32–40. 4. Шевченко С.А. Особенности расчета агрегатов автоматики пневмосистем ракетной техники при учете фактора сжимаемости гелия / С.А. Шевченко, Ю.А. Митиков, А.Л. Григорьев // *Вестник двигателестроения*. – 2016. – № 2. – С. 148–159. 5. Стадник Д.М. Обеспечение устойчивости системы автоматического регулирования давления газа в топливных баках ракеты – носителя : дис. канд. техн. наук / Стадник Д.М. – Самара: 2015. – 195 с. 6. Дзитолев В.Л. Исследование устойчивости газового редуктора с трубопроводами / В.Л. Дзитолев, В.И. Есин, В.Ф. Кузнецова, Ю.Г. Прядко // *Вопросы оптимизации и автоматизации конструкторских работ*. – Тула: 1975. – Вып. 28. – С. 100–111. 7. Крутиков Г.А. Исследование на ЭЦВМ газовых редукционных клапанов с демпфирующей камерой / Г.А. Крутиков, А.П. Ефремов, В.Д. Пекчев // *Проблемы машиностроения*. – К.: 1977. – Вып. 5. – С. 94–98. 8. Бесекиерский В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекиерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1975. – 767 с. 9. Гликман Б.Ф. Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей / Б.Ф. Гликман. – М.: Машиностроение, 1989. – 296 с. 10. Шевченко С.А. Математическая модель манжетных уплотнений из фторопласта для агрегатов пневмоавтоматики ракетных двигателей / С.А. Шевченко, С.А. Валивахин, А.Л. Григорьев, М.С. Степанов // *Вісник НТУ «ХП»*. – Х.: НТУ «ХП». – 2016. – №6 (1178). – С. 124–143. 11. Булгаков Б.В. Колебания. – М.: Гостехиздат, 1954. – 890 с. 12. Гольдфарб Л.С. О некоторых нелинейностях в системах автоматического регулирования // *Автоматика и телемеханика*. – Т. VIII, №3. – С. 193–206. 13. Залманзон Л.А. Автоколебания в системах с пневматическими регуляторами, содержащими глухие камеры // *Труды 2-го всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования*. – М.-Л.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. – Т. 1. – С. 266–298. 14. Атанов Г.А. Основы одномерной нестационарной газодинамики. – К.: Вища школа, 1979. – 183 с. 15. Шевченко С.А. Экспериментальное исследование динамических характеристик регулятора давления газа в системе запуска ЖРД многократного включения // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр.* – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2015. – Вып. 4 (84). – С. 49–68. 16. Грунауэр А.А. О связи силы пружины с законом ее деформирования / А.А. Грунауэр, И.И. Тартаковский, А.Л. Григорьев // *Теория механизмов и машин*. – Х.: Вища школа, 1985. – Вып. 39. – С. 7–22. 17. Григорьев А.Л. Использование интегралов Дюамеля для расчета импульсов давления и скорости течения вязкой жидкости по трубопроводу // *Вісник НТУ «ХП»*. – Х.: 2013. – № 54 (1027). – С. 63–86. 18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967 – 575 с. 19. Шевченко, С.А. Газодинамическое сопротивление и скорость звука в канале с гофрированной стенкой / С.А. Шевченко, В.И. Конох, А.П. Макотер // *Вісник НТУ «ХП»*. – Х.: НТУ «ХП». – 2016. – № 20 (1192). – С. 94–101.

References (transliterated): 1. Shevchenko S. A., Grigor'ev A. L., Stepanov M. S. Modelirovanie pnevmosistemy zapuska ZhRD pri uchete teploobmena gaza so stenkami polostey i utochnenii sil, deystvuyushhikh na klapany regulatorov [Modelling of the LRE pneumatic starting system at taking into account the heat exchange between gas and cavity walls, as well as refinement of the forces acting on the regulator poppets]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya*, 2015, no. 7 (124), pp. 100–110. 2. Shevchenko S. A., Grigor'ev A. L., Stepanov M. S. Utochnenie metoda invariantov dlya raschyota dinamicheskikh parametrov gaza v truboprovodah pnevmosistemy zapuska raketnogo dvigatelya [Improvement of the invariant

method for calculating the dynamic parameters of gas in pipelines of rocket engine pneumatic starting system]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 6 (1115), pp. 156–181. **3.** Shevchenko S. A., Grigor'ev A. L., Stepanov M. S. Utochnennyi raschet dinamicheskikh parametrov gaza v sharoballone [Improved calculation of gas-dynamic parameters in spherical tank]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 45 (1154), pp. 32–40. **4.** Shevchenko S. A., Mitikov Yu. A., Grigor'ev A. L. Osobennosti rascheta agregatov avtomatiki pnevmosistem raketnoy tekhniki pri uchete faktora szhimaemosti geliya [Specificity of control units of rocketry pneumatic systems analysis with allowance for the helium compressibility factor]. *Visnyk dvigatelestroeniya*, 2016, no. 2, pp. 148–159. **5.** Stadnik D. M. Obespechenie ustoychivosti sistemy avtomaticheskogo regulirovaniya davleniya gaza v toplivnykh bakakh rakety-nositelya: dis. Kand. Tekhn. nauk [Assurance of sustainability of the system of automatic control of gas pressure in the launch vehicle tanks. Ph.D. thesis in Engineering Science]. Samara, 2015. 195 p. **6.** Dzitoev V. L., Esin V. I., Kuznecov V. F., Pryadko Yu. G. Issledovanie ustoychivosti gazovogo reduktora s truboprovodami [Research of stability of the gas pressure regulator with pipelines]. *Voprosy optimizatsii i avtomatizatsii konstruktorskikh rabot*. Tula, 1975, vol. 28, pp. 100–111. **7.** Krutikov G. A., Efremov A. P., Penchev V. D. Issledovanie na ECVM gazovykh reduksionnykh klapanov s dempfirovushhey kameroy [Research of gas reducing valves with damping cavities by using ECM]. *Problemy mashinostroeniya*. Kyiv, 1997, no. 5, pp. 94–98. **8.** Beserkskiy V. A., Popov E. P. Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya [Automatic control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 767 p. **9.** Glikman B. F. Avtomaticheskoe regulirovanie zhidkostnykh raketnykh dvigateley [Automatic control of liquid rocket engines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 296 p. **10.** Shevchenko S. A., Valivahin S. A., Grigor'ev A. L., Stepanov, M. S. Matematicheskaya model' manzhetnykh uplotneniy iz ftoroplasta dlya agregatov pnevmoavtomatiki raketnykh dvigateley [Mathematical model of PTFE seals for hydraulics units of rocket engines]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2016, no. 6 (1178), pp. 124–143. **11.** Bulgakov B. V. Kolebaniya [Oscillations]. *Gostekhizdat Publ.*, 1954. 890 p. **12.** Gol'dfarb L. S. O

nekotorykh nelineynostyakh v sistemakh avtomaticheskogo regulirovaniya [Some nonlinearities in automatic control systems]. *Avtomatika i telemekhanika*. Vol. VIII, no. 3, pp. 193–206. **13.** Zalmanzon L. A. Avtokolebaniya v sistemakh s pnevmaticheskimi regulyatorami, sodержashhimi glukhie kamery [Self-oscillations in systems with pneumatic regulators containing blind cavities]. *Trudy 2-ed vsesoyuznogo soveshchaniya po teorii avtomaticheskogo regulirovaniya* [Proceedings of the 2nd All-Union Conference on automatic control theory]. Moscow–Leningrad, Izd-vo Akademii nauk SSSR Publ., Vol. 1, 1955, pp. 266–298. **14.** Atanov G. A. Osnovy odnomer-noy nestacionarnoy gazodinamiki [Fundamentals of one-dimensional unsteady gas dynamics]. Kyiv, Vyshha shkola Publ., 1979. 183 p. **15.** Shevchenko S. A. Eksperimental'noe issledovanie dinamicheskikh kharakteristik regulyatora davleniya gaza v sisteme zapuska ZHRD mnogokratnogo vklucheniya [Experimental research and adjustment of dynamic characteristics of the gas pressure regulator for startup system of the multiple run LRE]. *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstruktivnykh apparatov* : sb. nauch. tr. [Questions of design and production of flying vehicles: collection of research papers]. Kharkiv, Nac. Aerokosm. Un-t «KhAI» Publ., 2015, no. 4 (84), pp. 49–68. **16.** Grunauer A. A., Tartakovskiy I. I., Grigor'ev A. L. O svyazi sily pruzhiny s zakonom ee deformirovaniya [Connection of the spring force with its deformation law]. *Teoriya mekhanizmov i mashin*. Kharkiv, Vyshha shkola Publ., 1985, no. 39, pp. 7–22. **17.** Grigor'ev A. L. Ispol'zovanie integralov Dyumelya dlya rascheta impul'sov davleniya i skorosti techeniya vyzkoy zhidkosti po truboprovodu [Use of Duhamel integrals for calculating pressure pulses and flow velocity of viscous liquids in a pipeline]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Kharkiv, 2013, no. 54 (1027), pp. 63–86. **18.** Gantmakher F. R. Teoriya matrits [Theory of matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 575 p. **19.** Shevchenko, S.A., Konoh, V.I, Makoter, A.P. Gazodinamicheskoe soprotivlenie i skorost' zvuka v kanale s gofirovannoy stenкой [Gas-dynamic resistance and velocity of sound in the channel with the corrugated wall]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Kharkiv, 2016, no. 20 (1192), pp. 94–101.

Поступила (received) 22.08.2016

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Шевченко Сергей Андреевич – ведущий инженер-конструктор отдела агрегатов автоматики ЖРД, Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля», г. Днепр, e-mail: info@yuzhnoe.com.

Shevchenko Sergey A. – Leading Engineer, Yuzhnoye State Design Office, Dnipro, e-mail: info@yuzhnoe.com.

Григорьев Александр Львович – проф., д-р техн. наук, профессор, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: +380577076035, e-mail: kpi_mmtt@mail.ru.

Grigoriev Aleksandr L. – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University «KhPI», tel.:

+380577076035, e-mail: kpi_mmtt@mail.ru

Степанов Михаил Сергеевич – проф., д-р техн. наук, декан, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: +380577076035, e-mail: kpi_mmtt@mail.ru.

Stepanov Mikhail S. – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University «KhPI», tel.:

+380577076035, e-mail: kpi_mmtt@mail.ru.