

**Ю. В. БАТЫГИН, С. А. ШИНДЕРУК, Е. А. ЧАПЛЫГИН, Е. Ф. ЕРЁМИНА, А. В. БЕЗРОДНАЯ**

**ПЛОСКИЙ КРУГОВОЙ СОЛЕНОИД МЕЖДУ МАССИВНЫМИ БИФИЛЯРНЫМИ  
КАТУШКАМИ. РАСЧЁТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ**

Проведен анализ электромагнитных процессов в металле кругового соленоида-индуктора конечной толщины, размещенного между массивными многовитковыми катушками бифиляра с однонаправленными токами, получены расчётные соотношения. Предложенная физико-математическая модель позволяет исследовать влияние полей обмоток бифиляра на электромагнитные процессы в металле индуктора, что необходимо для формулирования условий практической работоспособности исследованной индукторной системы в целом. Найдена аналитическая пространственно-временная зависимость индуцированного тока при возбуждении системы гармоническими токами в массивных обмотках бифиляра. Полученные результаты дают возможность анализа и конкретных вычислений, направленных на поиск условий успешной технической реализации предложенной индукторной системы.

**Ключевые слова:** бифилярная катушка, индукторная система, электромагнитные процессы, однонаправленные токи, пространственно-временная зависимость, расчетная модель.

**Ю. В. БАТЫГИН, С. О. ШИНДЕРУК, Є. О. ЧАПЛИГІН, О. Ф. ЄРЬОМІНА, О. В. БЕЗРІДНА  
ПЛАСКИЙ КРУГОВИЙ СОЛЕНОЇД МІЖ МАСИВНИМИ БІФІЛЯРНИМИ КОТУШКАМИ.  
РОЗРАХУНКОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ**

Проведено аналіз електромагнітних процесів в металі кругового соленоїда-індуктора кінцевої товщини, розміщеного між масивними багатовитковими катушками бифіляра з односпрямованими струмами, отримані розрахункові співвідношення. Запропонована фізико-математична модель дозволяє досліджувати вплив полів обмоток бифіляра на електромагнітні процеси в металі індуктора, що необхідно для формулювання умов практичної працездатності дослідженої індукторної системи в цілому. Знайдена аналітична просторово-часова залежність індукваного струму при порушенні системи гармонічними струмами в масивних обмотках бифіляра. Отримані результати дають можливість аналізу і конкретних обчислень, спрямованих на пошук умов успішної технічної реалізації запропонованої індукторної системи.

**Ключові слова:** бифілярна катушка, індукторного система, електромагнітні процеси, односпрямовані струми, просторово-часова залежність, розрахункова модель.

**YU. V. BATYGIN, S. A. SHYNDERUK, E. A. CHAPLYGIN, E. F. YERYOMINA, A. V. BEZRIDNA  
FLAT CIRCULAR SOLENOID BETWEEN MASSIVE BIFILAR COILS. ESTIMATED RATIOS**

The aim of this work is to obtain design relationships for the analysis of electromagnetic processes in real metal of a circular solenoid-inductor of finite thickness, located between massive multi-turn coils of a bifilar with unidirectional currents. This work is a consistent continuation of the author's ideas and research aimed at the development and creation of circuits of equipment for magnetic-pulse metal processing. The list of literary sources contains the author's works, where the investigated system was first proposed and, in the framework of accepted idealizations, the characteristics of the proceeding electromagnetic processes were calculated. This work significantly expands the possibilities for subsequent theoretical studies, since it offers a more adequate physical and mathematical model of a planar inductor system with massive windings of a bifilar coil, in the space between which there is a flat multi-turn circular solenoid. The proposed model allows us to study the effect of the fields of bifilar windings on electromagnetic processes in the metal of the inductor solenoid itself, which is necessary to formulate the conditions for the practical operability of the investigated inductor system as a whole. As a result of solving the boundary-value problem of electrodynamics, an analytical spatio-temporal dependence of the current induced in the metal of a planar circular inductor was found when the system was excited by harmonic currents in the massive windings of the bifilar. The obtained result allows analysis and specific calculations aimed at finding the conditions for successful technical implementation of the proposed inductor system.

**Key words:** bifilar coil, inductor system, electromagnetic processes, unidirectional currents, spatio-temporal dependence, calculation model.

**Введение.** *Бифиляр* – от латинского «bis» – дважды и «filum» – нить. *Бифилярная катушка* – это катушка индуктивности, предназначенная для накопления энергии магнитного поля, обмотка которой выполнена из двух параллельных изолированных проводников. В общем смысле к бифиляру можно отнести также любую электротехническую конструкцию, состоящую из двух отдельных *однослойных соленоидов*. Геометрически это могут быть *коаксиальные цилиндрические устройства* или плоские параллельные намотки, электрическое соединение которых может быть параллельным или последовательным в зависимости от назначения бифиляра. Следует отметить, что наряду с бифилярными используются также *трифилярные, тетрафилярные, пентафилярные катушки* и так далее, что соответствует намотке тройным, четверным и пятерным проводом.

Во всех случаях использования любых катушек индуктивности как элементов электротехнических систем возникает ряд вопросов, ответы на которые определяют выбор конкретной конструкции и освещают характеристики протекающих электромагнитных процессов.

**Анализ последних исследований.** Исторический приоритет в создании первых образцов бифилярных катушек принадлежит *Николе Тесла*, потому что научный уровень как у *Исаака Ньютона*. Автор предложения достаточно успешно использовал их для уменьшения реактивных параметров элементов электрических цепей [1]. Современные применения бифиляров, как правило, сконцентрированы в области создания мало индуктивных омических сопротивлений, в работах по созданию импульсных реле и блоков питания электронных устройств [2], а также в разработках датчиков различного назначения, позволяющих осуществить преобразование измеряемого естественного параметра в эквивалентный электрический сигнал [3, 4]. Необходимо отметить и

достижения в технологиях намотки для промышленного приборо- и электроаппаратостроения [5].

Из современных трудов по расчётам катушек разнообразной геометрии можно выделить научную монографию [6], где освещены эффективные и физически адекватные методы расчета магнитных систем электрических аппаратов. Значительное внимание аналитическим вычислениям характеристик электромагнитных процессов в элементарных составляющих техники сильных и сверхсильных полей уделяется авторами издания [7].

Для схем оборудования магнитно-импульсной обработки металлов, описанных в [8], практический интерес представляют исследования плоских индукторных систем, где многovitковый соленоид-индуктор размещается между ветвями бифилярной катушки. Следует отметить, что аналогичное с физической точки зрения устройство было предложено авторами работы [9]. Здесь, в качестве аналогов ветвей бифиляра, можно усмотреть плоские листовые экран и заготовку, между которыми находился источник импульсного магнитного поля. Не вдаваясь в подробности проведенного анализа и выводов, справедливых лишь для конкретной электродинамической структуры, отметим, что более близкими являются исследования, описанные в работах [10, 11]. Авторами впервые была предложена и проанализирована именно плоская система, где многovitковый индуктор размещён между ветвями бифилярной массивной катушки с однонаправленными токами. Недостатком принятой для расчёта физико-математической модели является пренебрежение влиянием металла собственно индуктора на протекающие электромагнитные процессы. Остаётся открытым вопрос о реальных условиях, при выполнении которых результирующая напряжённость возбуждаемого магнитного поля в плоскости размещения соленоида-индуктора будет равна нулю. Для ответа на поставленный вопрос без нарушения адекватности расчётной модели можно положить, что система возбуждается однонаправленными токами в обмотках бифиляра.

**Постановка задачи.** Цель настоящей работы – получение расчётных соотношений для анализа электромагнитных процессов в реальном металле кругового соленоида конечной толщины, размещённого между массивными многovitковыми катушками бифиляра с однонаправленными токами в плоской индукторной системе.

Научная новизна состоит в получении аналитических зависимостей для характеристик электромагнитных процессов в реальном металле индуктора плоской системы, размещённого между массивными обмотками бифилярной катушки. Конечной целью комплекса проводимых исследований является теоретическое и экспериментальное обоснование практической работоспособности исследуемой индукторной системы.

**Расчётные соотношения.** Сформулируем принятые допущения.

Расчетная модель исследуемой индукторной системы представлена на рис. 1.

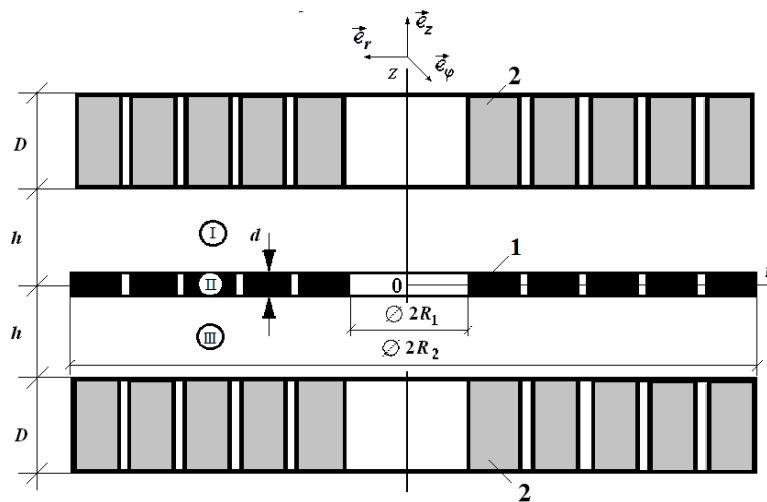


Рис. 1 – Расчётная модель индукторной системы:

1 – плоский многovitковый соленоид-индуктор; 2 – ветви бифиляра – плоские многovitковые соленоиды;  
I, II, III – области с однородными электрофизическими характеристиками.

В принимаемой цилиндрической системе координат объект исследования обладает аксиальной симметрией, поэтому частные произведения  $\partial \cdot [\cdot] / \partial \varphi = 0$ ,  $\varphi$  – азимутальный угол.

Расстояния между соленоидом-индуктором и ветвями обмотки бифиляра  $h$  достаточно малы, то есть  $h \ll R_{1,2}$  ( $R_{1,2}$  – внутренний и внешний радиусы обмотки индуктора-соленоида), что позволяет пренебречь краевыми эффектами.

Витки бифилярной катушки достаточно массивны ( $D \gg R_{1,2}$ ) и выполнены из металла с высокой электропроводностью, они плотно прилегают друг к другу, так что их рабочие поверхности со стороны индуктора-соленоида можно считать сплошной поверхностью, выполненной из идеального проводника.

По рабочим поверхностям обмоток бифиляра протекает гармонический ток с однородной по радиусу линейной плотностью

$$j_{\varphi}(t, r, z = \pm h) = j_m \cdot \sin(\omega t) \cdot (\eta(r - R_1) - \eta(r - R_2)),$$

где  $j_m = I_m / (R_2 - R_1)$  – амплитуда плотности,  $I_m$  – амплитуда тока,  $\omega$  – циклическая частота,  $\eta(r - R_{1,2})$  – ступенчатые функции Хэвисайда [12].

Витки соленоида-индуктора выполнены из металла конечной толщины  $d$  с конечной удельной электропроводностью  $\gamma$  и плотно прилегают друг к другу, так что их поверхности можно считать сплошными [7 – 9].

Временные параметры возбуждающего тока удовлетворяют квазистационарному приближению по Ландау  $[\omega/c] \cdot l \ll 1$ , где  $c$  – скорость света в вакууме,  $l$  – максимальный размер в системе [7, 8].

В пренебрежении токами смещения уравнения Максвелла ( $E_{\varphi} \neq 0$ ,  $H_{r,z} \neq 0$ ) для возбуждаемых компонент вектора электромагнитного поля, преобразованных по Лапласу с учётом нулевых начальных условий, принимают вид [7, 8, 12]:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_r(p, r, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(p, r, z)}{\partial r} = \gamma \cdot E_{\varphi}(p, r, z); & (1) \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_{\varphi}(p, r, z)) = -\mu_0 \cdot p \cdot H_z(p, r, z); & (2) \\ \frac{\partial E_{\varphi}(p, r, z)}{\partial z} = \mu_0 \cdot p \cdot H_r(p, r, z); & (3) \end{cases}$$

где  $p$  – параметр преобразования Лапласа;  $E_{\varphi}(p, r, z) = L\{E_{\varphi}(t, r, z)\}$ ;  $H_{r,z}(p, r, z) = L\{H_{r,z}(t, r, z)\}$ ;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума.

В принятой модели расчёта следует выделить области с однородными электрофизическими характеристиками.

В соответствии с рис. 1 можно считать, что таковыми являются:

I – пространство между поверхностями индуктора и верхней обмоткой бифиляра,  $z \in \left[ \frac{d}{2}, h \right]$ ;

II – область металла индуктора,  $z \in \left[ -\frac{d}{2}, +\frac{d}{2} \right]$ ;

III – пространство между поверхностями индуктора и нижней обмоткой бифиляра,  $z \in \left[ -h, -\frac{d}{2} \right]$ .

Условию ограниченности радиального распределения векторов электромагнитного поля при  $r=0$  и  $r=\infty$  удовлетворяет интегральное преобразование Фурье – Бесселя [12].

Так, для  $E_{\varphi}(p, r, z)$  можно записать, что

$$E_{\varphi}(p, r, z) = \int_0^{\infty} E_{\varphi}(p, \lambda, z) \cdot J_1(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (4)$$

где  $E_{\varphi}(p, \lambda, z)$  – напряжённость электрического поля в пространстве Фурье – Бесселя;  $\lambda$  – параметр преобразования;  $J_1(\lambda r)$  – функция Бесселя первого рода первого порядка [12].

Из уравнений (1 – 3) с учётом интеграла (4) получим уравнения для лапласова изображения и изображения Фурье – Бесселя азимутальной компоненты напряжённости электрического поля и радиальной составляющей напряжённости магнитного поля в выделенных областях.

Область I,  $z \in \left[ \frac{d}{2}, h \right]$ ,

$$\begin{cases} E_{\varphi}^{(1)}(p, \lambda, z) = \frac{p\mu_0}{\lambda} \cdot (A(p, \lambda) \cdot ch(\lambda z) + B(p, \lambda) \cdot sh(\lambda z)); \\ H_r^{(1)}(p, \lambda, z) = A(p, \lambda) \cdot sh(\lambda z) + B(p, \lambda) \cdot ch(\lambda z); \end{cases} \quad (5)$$

где  $A(p, \lambda)$ ,  $B(p, \lambda)$  – неизвестные произвольные постоянные интегрирования.

Область II,  $z \in \left[ -\frac{d}{2}, +\frac{d}{2} \right]$ ,

$$\begin{cases} E_{\varphi}^{(2)}(p, \lambda, z) = \frac{p\mu_0}{q(p, \lambda)} \cdot (C(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}(q(p, \lambda) \cdot z) + D(p, \lambda) \cdot \operatorname{sh}(q(p, \lambda) \cdot z)); \\ H_r^{(2)}(p, \lambda, z) = C(p, \lambda) \cdot \operatorname{sh}(q(p, \lambda) \cdot z) + D(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}(q(p, \lambda) \cdot z), \end{cases} \quad (6)$$

где  $q(p, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 + p\mu_0\gamma}$ ,  $C(p, \lambda)$ ,  $D(p, \lambda)$  – неизвестные произвольные постоянные интегрирования.

$$\text{Область III, } z \in \left[-h, -\frac{d}{2}\right],$$

$$\begin{cases} E_{\varphi}^{(3)}(p, \lambda, z) = \frac{p\mu_0}{\lambda} (F(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}(\lambda z) + G(p, \lambda) \cdot \operatorname{sh}(\lambda z)); \\ H_r^{(3)}(p, \lambda, z) = F(p, \lambda) \cdot \operatorname{sh}(\lambda z) + G(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}(\lambda z), \end{cases} \quad (7)$$

где  $F(p, \lambda)$ ,  $G(p, \lambda)$  – неизвестные произвольные постоянные интегрирования.

Неизвестные произвольные постоянные интегрирования в выражениях (5) и (7) найдём из известных граничных условий:

– равенство нулю напряжённостей возбуждаемых электрических полей на идеально проводящих рабочих поверхностях обмоток бифиляра;

– равенство модуля напряжённости возбуждаемых магнитных полей при линейной плотности тока на идеально проводящих рабочих поверхностях обмоток бифиляра.

После выполнения необходимых тождественных преобразований находим следующие зависимости в полостях между поверхностями обмоток бифиляра и индуктора-соленоида.

$$\text{Область I, } z \in \left[\frac{d}{2}, h\right],$$

$$\begin{cases} E_{\varphi}^{(1)}(p, \lambda, z) = -j_m \cdot j(p) \cdot \frac{p\mu_0}{\lambda} \cdot f(\lambda) \cdot \operatorname{sh}(\lambda(h-z)); \\ H_r^{(1)}(p, \lambda, z) = j_m \cdot j(p) \cdot f(\lambda) \cdot \operatorname{ch}(\lambda(h-z)), \end{cases} \quad (8)$$

где  $j(p)$  – *лапласово изображение* временной зависимости возбуждающего тока;  $f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(r) \cdot J_1(\lambda r) r dr$  –

по определению образ его радиального распределения в пространстве Фурье – Бесселя.

$$\text{Область III, } z \in \left[-h, -\frac{d}{2}\right],$$

$$\begin{cases} E_{\varphi}^{(3)}(p, \lambda, z) = j_m \cdot j(p) \cdot f(\lambda) \cdot \frac{p\mu_0}{\lambda} \cdot \operatorname{sh}(\lambda(h+z)); \\ H_r^{(3)}(p, \lambda, z) = j_m \cdot j(p) \cdot f(\lambda) \cdot \frac{p\mu_0}{\lambda} \cdot \operatorname{ch}(\lambda(h+z)). \end{cases} \quad (9)$$

Из условий непрерывности тангенциальных компонент напряжённости электромагнитного поля на границах раздела выделенных областей можно найти взаимосвязь между их геометрическими и электрофизическими характеристиками с параметрами интегральных преобразований, а также неизвестные произвольные постоянные интегрирования в выражении (6).

Математические преобразования требуют отдельных комментариев.

Итак, формальные соотношения взаимосвязи имеют следующий вид:

$$\frac{\operatorname{th}\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right)}{q(p, \lambda)} = -\frac{\operatorname{th}\left(\lambda\left(h - \frac{d}{2}\right)\right)}{\lambda}. \quad (10)$$

Для неизвестных произвольных постоянных получаем, что

$$\begin{cases} C(p, \lambda) = 0; \\ D(p, \lambda) = -\frac{q(p, \lambda)}{\lambda} \cdot j_m \cdot j(p) \cdot f(\lambda) \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\lambda\left(h - \frac{d}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right)}. \end{cases} \quad (11)$$

В выражении для  $D(p, \lambda)$  следует учесть связь (10). В общем случае эта математическая операция представляется весьма проблематичной. Упростить использование (10) можно, если к допущениям, принятым в постановке задачи, дополнительно положить, что  $\left(h - \frac{d}{2}\right) \rightarrow 0$ . Отметим, что такое упрощение вполне согласуется с требованием минимально возможных изоляционных зазоров в реальных индукторных системах [7, 8].

С учётом приближённого равенства гиперболических тангенса и синуса для достаточно малых значений аргументов [12] в соотношении (10) и подстановки его в выражение для  $D(p, \lambda)$  находим, что

$$D(p, \lambda) = j_m \cdot j(p) \cdot f(\lambda) \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right)}. \quad (12)$$

Найденные произвольные постоянные  $C(p, \lambda)$  и  $D(p, \lambda)$  подставим в выражение (6) для напряжённости электрического поля в металле внутреннего индуктора. Полученный результат помножим на его удельную электропроводность  $\gamma$ .

После тождественных преобразований и введения новой пространственной переменной находим изображение плотности возбуждаемого тока.

$$j_i(p, \lambda, z) = j_m \mu_0 \gamma (p \cdot j(p)) f(\lambda) \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right)}{q(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right)}, \quad (13)$$

где  $f(\lambda) = \int_{R_1}^{R_2} r \cdot J_1(\lambda r) dr$  – изображение Фурье – Бесселя для заданного радиального распределения возбуждающего тока на рабочих поверхностях обмоток бифиляра;  $\zeta \in \left[-\frac{d}{2}, +\frac{d}{2}\right]$  – поперечная координата в металле индуктора.

Далее, выполним в (11) обратное преобразование Фурье – Бесселя [12].

Получим, что

$$j_i(p, r, z) = j_m \mu_0 \gamma (p \cdot j(p)) \int_0^{\infty} f(\lambda) \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right)}{q(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right)} \cdot J_1(\lambda r) \lambda d\lambda. \quad (14)$$

Обратное преобразование Лапласа в выражении (11) с учётом амплитудно-временной гармонической зависимости возбуждающего тока сводится к определению оригинала следующего выражения:

$$(p \cdot j(p)) \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(q(p, \lambda) \cdot \zeta\right)}{q(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right)} \Leftrightarrow j_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) * F(t), \quad (15)$$

где

$$F(t) \Leftrightarrow F(p), \quad F(p) = \frac{\operatorname{sh}\left(\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right)}{q(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right)}.$$

Согласно алгоритму обратного преобразования Лапласа дроби, находим [12], что

$$F(t) = \frac{d}{\tau} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \sin \left( (2k+1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)} \right) \cdot e^{p_k \cdot t}, \quad (16)$$

где  $p_k = -\frac{1}{\tau} \cdot \left( \left( (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right)^2 + \left( \lambda \cdot \frac{d}{2} \right)^2 \right)$ ;  $\tau = \mu_0 \gamma \left( \frac{d}{2} \right)^2$  – характерное время диффузии магнитного поля в проводящий слой толщиной  $\left( \frac{d}{2} \right)$  [7].

Свёртка функций в правой части выражения (16) с учётом зависимости (13) определяется интегралом вида [12]:

$$j_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) * F(t) = j_m \cdot \left( \frac{d \cdot \omega}{\tau} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin \left( (2k+1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)} \right) \cdot \int_0^t e^{p_k \cdot (t-x)} \cos(\omega \cdot x) dx. \quad (17)$$

Вычисляя интеграл в (17) для стационарного временного режима  $t \gg \tau$ , находим, что

$$(j_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)) * F(t) \approx \left( 2j_m \cdot \frac{\omega \cdot \mu_0 \gamma \left(\frac{d}{2}\right)^2}{\left(\frac{d}{2}\right)} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \sin \left( (2k+1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)} \right) \cdot \frac{\sin(\omega t - \psi_k)}{\sqrt{(\omega \tau)^2 + (p_k \tau)^2}}. \quad (18)$$

где  $\psi_k = \operatorname{arctg} \left( \frac{p_k}{\omega} \right)$  и отброшено слагаемое, убывающее как  $\exp(p_0 t)$ .

Выражение (18) подставим в (12), выполним необходимые тождественные преобразования и раскроем ранее принятые обозначения. В конечном итоге получим аналитическую пространственно-временную зависимость тока, индуцированного в металле индуктора:

$$j_i(t, r, z) = 2j_m \cdot \frac{(\omega \tau)}{\left(\frac{d}{2}\right)} \cdot \int_0^{\infty} f(\lambda) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sin \left( (2k+1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)} \right) \cdot \frac{(-1)^k \cdot \sin(\omega t - \psi_k)}{\sqrt{(\omega \tau)^2 + \left( \left( (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right)^2 + \left( \lambda \frac{d}{2} \right)^2 \right)^2}} \cdot J_1(\lambda r) \lambda d \lambda. \quad (19)$$

Результат (19) является обобщённым аналитическим решением поставленной задачи, позволяющим проанализировать электромагнитные процессы в реальном металле плоского кругового индуктора, размещённого между массивными обмотками бифилярной катушки. В практических вычислениях выражение (19) трансформируется в несколько аналитических зависимостей, каждая из которых описывает протекающие процессы соответственно условиям выполняемых расчётов.

**Перспективы дальнейших исследований.** Весьма перспективным в направлении дальнейших исследований видится теоретический анализ электромагнитных процессов в плоских индукторных системах, где индукторы-соленоиды с реальными электрофизическими параметрами обмоток размещают между ветвями массивных бифилярных катушек, с последующим переходом к экспериментам для обоснования практической дееспособности исследованной индукторной системы.

**Выводы.** Получена аналитическая пространственно-временная зависимость тока, индуцированного в металле плоского кругового индуктора, размещённого между ветвями бифиляра – массивными идеально проводящими многовитковыми катушками.

Полученные результаты позволяют проводить анализ и конкретные вычисления, направленные на поиск условий успешной технической реализации предложенной индукторной системы.

#### Список литературы

1. Герасимов В. Г., Кузнецов Э. В., Николаева О. В. Электротехника и электроника. Электрические и магнитные цепи. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 288 с.
2. Шарипов В. М., Полищук Е. С. Мир электроники. Датчики: справочное пособие. – М.: Техносфера, 2012. – 624 с.
3. Тесла Н. Лекции и статьи. – М.: Изд. «Tesla Print», 2003. – 386 с.

4. Ziegler S., Woodward R. C., H. H. C., Borle L. J. Current Sensing Techniques : A Review // IEEE Sensors Journal. – 2009. – Vol. 9. – No. 4. – P. 354 – 376. DOI: 10.1109/JSEN.2009.2013914.
5. Ларин В. П. Технология намотки в приборо- и электроаппаратостроении. Уч. пособие. – СПб. : Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2003. – 56 с.
6. Буль О. В. Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов. – М. : Академия, 2006. – 336 с.
7. Shneerson G. A., Dolotenko M. I., Krivosheev S. I. Strong and Superstrong Pulsed Magnetic Field Generation. – Berlin : Walter de Gruyter, 2014. – 439 p.
8. Batygin Yu. V., Barbashova M. V., Sabokar O. S. Electromagnetic Metal Forming for Advanced Processing Technologies – Switzerland : Springer, 2018. – 94 p. DOI : 10.1007/978-3-319-74570-1.
9. Batygin Yu. V., Golovashchenko S. F., Gnatov A. V. Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals //Journal of Materials Processing Technology. – 2014. – № 214 (2). – pp. 390 – 401. DOI : 10.17877/DE290R-945.
10. Батыгин Ю. В., Шиндерук С. А., Чаплыгин Е. А., Коряк А. А., Довгий А. В. Цилиндрическая индукторная система с внешним бифилярным соленоидом. Расчётные соотношения // Вісник Хмельницького національного університету. – 2019. – № 5 (277) – С. 13 – 18.
11. Батыгин Ю. В., Шиндерук С. А., Чаплыгин Е. А., Ерёміна Е. Ф., Борисенко Б. В. Цилиндрическая индукторная система с внешним бифилярным соленоидом. Анализ электромагнитных процессов // Вісник Хмельницького національного університету. – 2019. – № 6 – С. 12 – 19.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М. : «Наука», 1973. – 831 с.

## References (transliterated)

1. Gerasimov V. G., Kuznetsov Je. V., Nikolaeva O. V. *Elektrotehnika i elektronika. Elektricheskie i magnitnye tsepi* [Electrical and Electronics. Electric and magnetic circuits]. – Moscow, Energoatomizdat Publ., 1996. 288 p.
2. Sharipov V. M., Polishhuk E. S. *Mir elektroniki. Datchiki : spravocnoe posobie* [The world of electronics. Sensors: reference guide]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2012. 624 p.
3. Tesla N. *Lektsii i stat'i* [Lectures and articles]. Moscow, «Tesla Print» Publ., 2003. 386 p.
4. Ziegler S., Woodward R. C., H. H. C., Borle L. J. Current Sensing Techniques : A Review. *IEEE Sensors Journal*. 2009, vol. 9, no. 4, pp. 354–376. DOI: 10.1109/JSEN.2009.2013914.
5. Larin V. P. *Tekhnologiya namotki v priboro- i elektroapparatostroyenii* [Winding technology in instrument and electrical engineering]. St. - Petersburg, St. - Petersburgskiy gosudarstvennyy universitet aerokosmicheskogo priborostroyeniya Publ., 2003. 56 p.
6. Bul' O. V. *Metody rascheta magnitnykh sistem elektricheskikh apparatov* [Methods of calculation of electrical apparatus magnetic systems]. Moscow, Akademiya Publ., 2006. 336 p.
7. Shneerson G. A., Dolotenko M. I., Krivosheev S. I. *Strong and Superstrong Pulsed Magnetic Field Generation*. Berlin, Walter de Gruyter, 2014. 439 p.
8. Batygin Yu. V., Barbashova M. V., Sabokar O. S. *Electromagnetic Metal Forming for Advanced Processing Technologies*. Switzerland : Springer, 2018. 94 p. DOI : 10.1007/978-3-319-74570-1.
9. Batygin Yu. V., Golovashchenko S. F., Gnatov A. V. Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*. 2014, no. 214 (2), pp. 390–401. DOI : 10.17877/DE290R-945.
10. Batygin Yu. V., Shinderuk S. A., Chaplygin E. A., Koryak A. A., Dovgy A. V. Tsilindricheskaya induktornaya sistema s vneshnim bifilyarnym solenoidom. Raschyotnye sootnosheniya [Cylindrical inductor system with an external bifilar solenoid. Estimated Ratios]. *Visnyk Khmel'nits'kogo natsional'nogo universitetu* [Bulletin of Khmelnytskyi National University]. 2019, no. 5 (277), pp. 13–18.
11. Batygin Yu. V., Shinderuk S. A., Chaplygin E. A., Eryomina E. F., Borisenko B. V. Cilindricheskaya induktornaya sistema s vneshnim bifilyarnym solenoidom. Analiz elektromagnitnykh protsessov [Cylindrical inductor system with an external bifilar solenoid. Analysis of electromagnetic processes]. *Visnyk Khmel'nits'kogo natsional'nogo universitetu* [Bulletin of Khmelnytskyi National University]. 2019, no. 6, pp. 12–19.
12. Korn G., Korn T. *Spravocnik po matematike* [Math reference]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 831 p.

Поступила (received) 11.10.2019

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Батыгин Юрій Вікторович (Батыгин Юрий Викторович, Batygin Yuriy Viktorovich)** – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-36-53; e-mail: yu.v.batygin@gmail.com.

**Шиндерук Світлана Олександрівна (Шиндерук Светлана Александровна, Shynderuk Svitlana Oleksandrivna)** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: s.shinderuk.2016102@ukr.net.

**Чаплыгин Євген Олександрович (Чаплыгин Евгений Александрович, Chaplygin Evgen Oleksandrovich)** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: chaplygin.e.a@gmail.com.

**Єрёміна Олена Федорівна (Ерёміна Елена Фёдоровна, Yeryomina Olena Fedorivna)** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 248-52-75; e-mail: elena.yeryomina@gmail.com.

**Безрідна Олександра Володимирівна (Безродная Александра Владимировна, Bezridna Oleksandra Volodimirivna)** – студентка, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; e-mail: alex25kh@gmail.com.