

А. Ю. ТАНЧЕНКО, М. А. ТКАЧУК, А. В. НАБОКОВ, А. В. ГРАБОВСЬКИЙ, А. М. МАЛАКЕЙ

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ЛЕГКОБРОНЬОВАНИХ МАШИН: МОДЕЛЬНІ ЗАДАЧІ ТА ЯКІСНІ ОСОБЛИВОСТІ

У роботі наведено розв'язувальні співвідношення для аналізу динамічних процесів у елементах легкоброньованих машин. На прикладі двохмасової системи розглянуто модельну задачу про коливання під дією періодичної збурюючої сили. Визначено особливості усталеного збудженого руху за наявності нелінійної пружної характеристики з'єднань елементів дослідженої системи. Зокрема, встановлено можливість реалізації субгармонійних коливальних режимів різної кратності. Запропоновано для визначення кратності субгармонійного режиму ввести чисельний показник періодичності. Цей показник ілюструє міру відхилення усталеного режиму від періодичного з різною тривалістю періоду. Наведено характерні фазові портрети дослідженої системи. Встановлено області параметрів, у яких реалізовані усталені субгармонійні режими різної кратності.

Ключові слова: нелінійні коливання, елемент легкоброньованих машин, субгармонійний режим, система диференціальних рівнянь.

А. Ю. ТАНЧЕНКО, Н. А. ТКАЧУК, А. В. НАБОКОВ, А. В. ГРАБОВСКИЙ, А. Н. МАЛАКЕЙ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ЛЕГКОБРОНИРОВАННЫХ МАШИН: МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И КАЧЕСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ

В работе приведены разрешающие соотношения для анализа динамических процессов в элементах легкобронированных машин. На примере двухмассовой системы рассмотрена модельная задача о колебаниях под действием периодической возмущающей силы. Определены особенности установившегося возбужденного движения при наличии нелинейной упругой характеристики соединенных элементов исследуемой системы. В частности, установлена возможность реализации субгармонических колебательных режимов различной кратности. Предложено для определения кратности субгармонического режима ввести численный показатель периодичности. Этот показатель иллюстрирует меру отклонения установившегося режима от периодического с разной длительностью периода. Приведены характерные фазовые портреты исследованной системы. Установлены области параметров, в которых реализованы установившиеся субгармонические режимы разной кратности.

Ключевые слова: нелинейные колебания, элемент легкобронированных машин, субгармонический режим, система дифференциальных уравнений.

A. TANCHENKO, M. TKACHUK, A. NABOKOV, A. GRABOVSKIY, A. MALAKEY

NONLINEAR OSCILLATIONS OF LIGHTLY ARMORED VEHICLES ELEMENTS: MODEL PROBLEMS AND QUALITATIVE FEATURES

The resolving relationships are given in the paper for the dynamic processes analysis in elements of lightly armored vehicles. A model problem of oscillations under the action of a periodic disturbing force is considered for the example of a two-mass system. The features of the steady-state excited motion are determined in the presence of a nonlinear elastic characteristic of the compounds of investigated system elements. In particular, it is established that subharmonic oscillatory modes of different multiplicity can be realized. It is proposed to introduce a numerical index of periodicity for determining the multiplicity of the subharmonic mode. This indicator illustrates the measure of the deviation of the steady-state mode from a periodic with a different duration of the period. Typical phase portraits of the system are given. Areas of parameters are established in which steady-state subharmonic mode of different multiplicity are realized.

Keywords: nonlinear oscillations, lightly armored vehicles element, subharmonic mode, system of differential equations.

Вступ. Аналіз динаміки транспортних засобів є дуже важливим етапом проектних розробок. Для машин цивільного призначення мова йде про зниження динамічних навантажень під час руху на місцевості із перешкодами. Для машин військового призначення першочергове значення, крім цих проблемних питань, мають, наприклад, ще й задачі забезпечення міцності бронекорпусів легкоброньованих машин (ЛБМ), а також зменшення збурювальних впливів на системи наведення та стабілізації модулів озброєння. Таким чином, необхідні методи аналізу динамічних процесів у машинах військового та цивільного призначення на етапі проектних розробок. Разом із тим, слід зазначити, що існуючі інструменти аналізу цих процесів не можуть повністю задовольнити існуючі вимоги. Отже, необхідні розробки більш досконалих моделей та методів досліджень об'єктів подібного типу, серед яких першочергову увагу привертають багатовісні транспортні засоби типу

бронетранспортерів.

Аналіз існуючих методів та моделей. На сьогодні аналіз динамічних процесів здійснюється як із залученням традиційних, так – і нових, більш досконалих моделей транспортних засобів. Перша група представлена низкою моделей із декількома ступенями вільності [1–6]. В основному ці традиційні моделі або лінійні, або лінеаризовані, або враховують тільки обмежену множину нелінійностей із великого їх обсягу. Перевагами такого типу моделей є висока оперативність, а недоліками – неадекватність реальним процесам. Більш досконалі моделі [7–14] характеризуються, по-перше, значно більшою кількістю ступенів вільності. По-друге, вони можуть бути адаптовані до урахування різного типу нелінійностей. По-третє, ці моделі природним чином пристосовані до програмної реалізації. Отже, створюються, так би мовити, «віртуальні комп'ютерні стенди», що дають можливість на етапі проектування провести багатоваріантні розрахунки та на основі

аналізу отриманих результатів обґрунтувати більш досконалі технічні рішення з точки зору загальної постановки, параметрів елементів підвіски, бойових модулів тощо. Більш того, такі підходи як свій логічний розвиток розповсюджуються і на елементи із розподіленими інерційно-жорсткісними параметрами (у першу чергу у нашому випадку – бронекорпус). У результаті можлива побудова достатньо адекватних моделей, що містять дискретну та континуальну частини досліджуваних конструкцій.

У середовищі сучасних програмних комплексів типу ANSYS, Nastran, Femap [www...] удається промоделювати практично будь-які нелінійності. Разом із тим, такі дослідження вимагають витрат значних обчислювальних ресурсів.

Аналіз переваг та недоліків існуючих моделей та методів досліджень динамічних процесів у транспортних засобах різного типу дає підстави для висновку про те, що більш прості моделі не володіють необхідним функціоналом, а більш складні затують виявлення впливу тих чи інших типів нелінійностей на характер і параметри модельованих динамічних процесів. Отже, потрібна розробка нового підходу до побудови нових методів та моделей, які б, із одного боку, адекватно б відображали нелінійні динамічні процеси у реальних транспортних засобах, а з іншого, були оперативні та придатні для масштабування. Це й становить напрямок розробок та досліджень.

Методи та моделі досліджень. Розглянемо модель динаміки транспортного засобу типу бронетранспортеру у загальному вигляді [7,15–23]:

$$L(u, \dot{u}, f, t) = 0, \quad (1)$$

де L – оператор задачі,
 u, \dot{u} – фазові змінні, які повністю характеризують поточний стан досліджуваної динамічної системи у поточний момент часу t ;
 f – зовнішнє навантаження.

Рівняння (1) можна отримати, наприклад, із залученням технології складання рівнянь Лагранжа другого роду. Тоді, вичленяючи лінійну та нелінійну складові отримуваної системи рівнянь, можна (1) подати у вигляді:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku + G(u, \dot{u}) = f(u, \dot{u}, t). \quad (2)$$

Тут M, C, K – матриці мас, демпфування та жорсткості,

$G(u, \dot{u})$ – нелінійна складова оператора L в (1),

$f(u, \dot{u}, t)$ – зовнішнє навантаження.

Якщо знехтувати нелінійною складовою $G(u, \dot{u})$ у (2), то отримуємо породжувальну систему

$$M\ddot{v} + C\dot{v} + Kv = f(v, \dot{v}, t). \quad (3)$$

Для цієї системи розв'язок (3) підкоряється усім законам, властивим лінійним системам.

Зокрема, при дії гармонійної збуджувальної сили із частотою ω спостерігається різке зростання амплітуди коливань при частотах, близьких до власних частот $p_i, i = 1, 2, \dots$, які є розв'язками системи рівнянь

$$(-p^2 M + K)\lambda = 0, \text{Det}(k - p^2 M). \quad (4)$$

де λ – набір власних форм коливань λ_i , які відповідають власним частотам p_i .

Як відомо [24–26], для нелінійних коливань напряму незастосовні методи дослідження, які придатні для випадку лінійних коливань. Це розповсюджується і на такі характеристики, як спектр власних частот коливань (ВЧК), та власних форм коливань (ВФК), амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) та фазо-частотних характеристик (ФЧХ) тощо. Разом із тим залишаються у силі підходи, що базуються на безпосередньому інтегруванні рівнянь руху (1) або (2) та аналізі фазових портретів системи [15–17, 24–26]. Це перша суттєва обставина, яка була прийнята до уваги при здійсненні описаних у роботі досліджень.

Друга обставина стосується того, що, як правило, у досліджуваній системі типу ЛБМ є обмежена кількість суттєво нелінійних елементів (підвіска, що має прогресивну жорсткісну характеристику та жорсткі упори при виборі активного динамічного ходу, зазори та люфти у з'єднаннях «бойовий модуль – бронекорпус» та «малокаліберна автоматична гармата (МАГ) – бойовий модуль» тощо). Більша ж частина досліджуваної системи – лінійна або близька до такої (бронекорпус, торсіонні вали, корпус бойового модуля тощо).

І, нарешті, третя обставина стосується того, що, попри індивідуальні або специфічні для певного типу (групи), для лінійних систем існують загальні властивості, які визначають їхню поведінку: спектральні характеристики, АЧХ і ФЧХ. Відповідно, якщо розглядати нелінійну систему як сукупність великої лінійної підсистеми та невеликої нелінійної, то для лінійної складової можна передбачити, так би мовити, її «парціальні» властивості, а, відповідно, за певних умов замінити цю підсистему на меншу (або взагалі – на одномасову) без відчутної втрати точності моделювання поведінки усієї системи.

Означені три обставини дають основу для упровадження наступного підходу:

- 1-й етап: обрання структури тестової підсистеми з нелінійним елементом та дослідження його впливу на зміну поведінки системи порівняно із відповідною їй найпростішою породжувальною лінійною системою;

- 2-й етап: масштабування системи (тобто нарощування її лінійної частини) і дослідження закономірностей цієї системи із багатьма ступенями вільності порівняно із найбільш простою (див. етап 1);

- 3-й етап: застосування розробленого та апробованого підходу до моделювання динаміки системи «бойовий модуль – бронекорпус – підвіска ЛБМ».

Формальна постановка задачі зводиться до наступного:

- визначається збурений рух системи (2) залежно від виду породжувальної системи та нелінійності:

$$u = u(v, G, f); \quad (5)$$

- аналізуються перехідні режими у системі та їхні характеристики:

$$u_{\max}^* = u_{\max}(v, G, f); \quad (6)$$

- визначається кратність усталених режимів та їхні характеристики:

$$u_{\max}^{**} = u_{\max}^{**}(v, G, f), \quad (7)$$

$$K = \min_j \lim_{\tau \rightarrow \infty} |u(\tau + jT) - u(\tau)| \quad \forall \tau, j, \quad (8)$$

де T - період дії збурювальної сили.

Оскільки, як уже зазначалося, для нелінійних систем значна частина арсеналу методів, придатних для аналізу лінійних процесів, непрацездатна, то базову інформацію про динамічні процеси пропонується отримувати шляхом чисельного інтегрування системи диференціальних рівнянь (2). З цією метою проводиться інтегрування на інтервалі часу $T^N \gg T$. Як правило, перші періоди дії збурювальної сили призводять до яскраво виражених перехідних режимів, а ті, що віддалені від початку дії періодичного збудження, - до усталених режимів. Ці режими, на відміну від лінійних систем, можуть мати і кратний, і дольний період порівняно із періодом збурювальної дії.

Визначення кратності (дольності) періоду усталеного режиму - не завжди тривіальна задача із очевидним розв'язком. Дійсно, в силу похибок чисельного інтегрування умови (8) виконуватися точно не можуть. Відповідно, потрібно організувати інший алгоритм пошуку показника кратності k . Для цього пропонується визначити введений у цій роботі так званий «індекс періодичності» k_j . Зокрема, для субгармонійних режимів за певних умов застосований такий «індекс»:

$$k_j = \sum_S \frac{\|u(\tau + iT) - u(\tau)\|}{\|u(\tau + iT)\| + \|u(\tau)\|}, \quad (9)$$

де $\| \cdot \|$ - деяка норма у фазовому просторі змінних u, \dot{u} ;

S - номери базових змінних.

Наприклад, у такій ролі може застосовуватися величини

$$k_i = \sum_q \frac{|u_q(\tau + jT) - u_q(\tau)|}{|u_q(\tau + jT)| + |u_q(\tau)|} + \sum_q \frac{|\dot{u}_q(\tau + jT) - \dot{u}_q(\tau)|}{|\dot{u}_q(\tau + jT)| + |\dot{u}_q(\tau)|}. \quad (10)$$

Показники k_j для точно визначеного усталеного режиму (наприклад, аналітично) дорівнюють нулю для дійсних режимів кратності j . При чисельній реалізації у силу обчислювальних похибок необхідно вимагати

$$k_i \leq \varepsilon \leq 1, \quad (11)$$

де ε - деякий рівень, що визначається з практики обчислень.

Мінімальне значення i_{\min} із критерію (11) визначає кратність, наприклад, субгармонійного режиму. Тоді для випадку $i_{\min} > 1$ маємо

$$k_i > \varepsilon. \quad (12)$$

Якщо мова йде про аналіз параметричної моделі, яка задається деякою множиною параметрів $P = \{p_r\}$, $r = 1, 2, \dots, N_r$, то у параметричному просторі визначаються області, що відповідають різним значенням крайності субгармонійних режимів.

Співвідношення (1) - (12) визначають низку задач, які представляють інтерес при аналізі нелінійної динаміки складних систем типу «легкоброньована машина при дії збурювальних сил». Відповідно до запропонованого вище підходу реалізовано перші етапи досліджень, описані далі.

Тестова модель. Для початкового аналізу розглядається механічна система з однією, двома та багатьма ступенями вільності (рис. 1, 2).

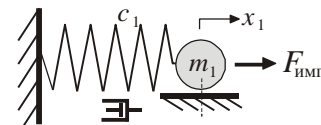
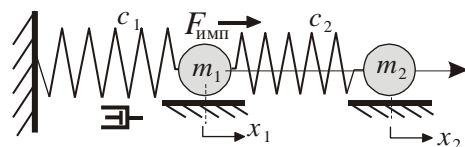


Рис. 1 – Найпростіша породжувальна лінійна коливальна система

Достатньо показовою є система з двома ступенями вільності (рис. 2). Тут c_1, c_2 - жорсткості пружних елементів, m_1, m_2 - маси. Ця система, по-перше, легко масштабується (див. рис. 2).



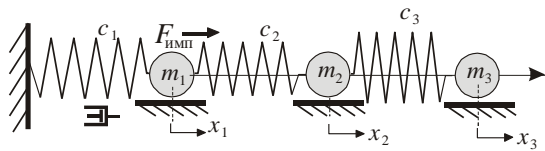


Рис. 2 – Масштабування досліджуваної системи

По-друге, шляхом установлення нелінійних залежностей $c_s = c_s(\dot{u})$ можлива інтеграція у початково лінійну модель нелінійного елемента. І, по-третє, установленням залежностей

$$m_s = m_s(p), c_s = c_s(p), \quad s = 1, \dots, N \quad (13)$$

можлива параметризація системи.

Таким чином, на цьому простому варіанті можлива реалізація усього комплексу запропонованих (див. вище) досліджень.

На реалізацію запропонованих досліджень необхідно проінтегрувати систему рівнянь

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + c_1 u_1 + c_2 (u_1 - u_2) = f_1(t), \\ m_2 \ddot{u}_2 + c_2 (u_2 - u_1) + c_3 (u_2 - u_3) = f_2(t), \\ \dots \\ m_N \ddot{u}_N + c_N (u_N - u_{N-1}) = f_N(t). \end{cases} \quad (14)$$

Для найпростішого випадку двомасової системи та частинного випадку дії гармонійної сили

$$f_1 = A \sin \omega t \quad (15)$$

тривіальними є розв'язання та аналіз АЧХ, ФЧХ, спектрів ВЧК та ВФК [15–17].

Далі шляхом установлення залежності

$$c_1 = c_1(u_1, p) \quad (16)$$

можлива реалізація усього набору запланованих досліджень.

Заявлена до досліджень система має прямий зв'язок із реальними об'єктами досліджень (рис. 3), хоча сама система стає складнішою.

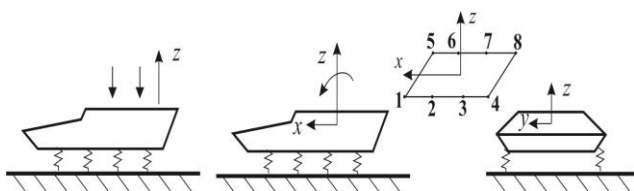


Рис. 3 – Схема динамічної системи «бойовий модуль – бронекорпус – підвіска»

Результати досліджень. На рис. 4 наведено початкову тестову систему.

На рис. 5–11 наведені результати досліджень лінійної породжувальної системи. Цілком очікувані результати полягають у тому, що система має два

резонансних режими. Усталені режими породжують фазові портрети у вигляді овалів.

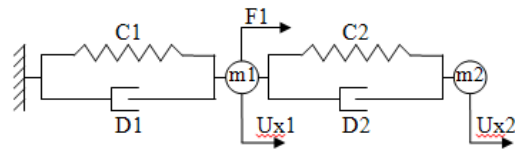


Рис. 4 – Початкова двомасова система. Вихідні дані: жорсткість: $C1=C2=2000$ [Н/м], демпфування: $D1=D2=1$ [Н·м/с], маси: $m1=m2=1$ [кг], гармонійна збудувальна сила, що діє на $m1$: $F1=10\sin(2\pi pt)$ [Н]

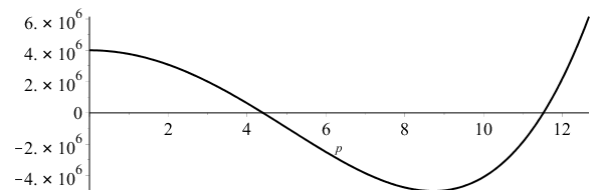


Рис. 5 – Зміна детермінанта [4] при варіюванні частоти збудувальної сили [Гц]. Власні частоти системи: $p1=4.4$ [Гц], $p1=11.5$ [Гц]

Графіки коливань наведені на рис. 6. Зазначимо, що для збудувальної частоти $p=3$ [Гц] коливальний процес повністю стабілізується починаючи з 55-го коливання (згідно докладного аналізу результатів), однак уже до 30-го коливання процес дуже близький до стабільного.

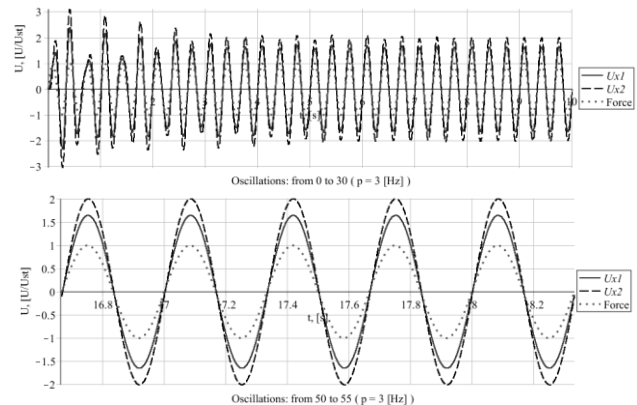


Рис. 6 – Графіки переміщень в характерних точках (результати відмасштабовані щодо статичної задачі)

З метою детального аналізу результати були перетворені в матричне подання, де кожен рядок відповідає одному періоду коливань, що, як буде показано далі, дало можливість робити різноманітні вибірки, оцінювати відмінності, визначати стабільність коливального процесу, а також проводити пошук субгармонік шляхом зіставлення великого набору різноманітних варіацій на будь-якому діапазоні коливань. Так, деякі з описаних результатів представлені на рис. 7–11.

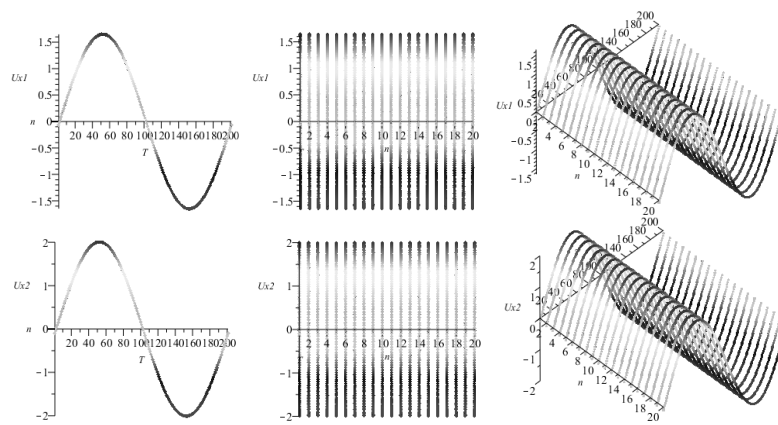


Рис. 7 – Результати візуалізації набору коливань (коливання з 100 по 120)

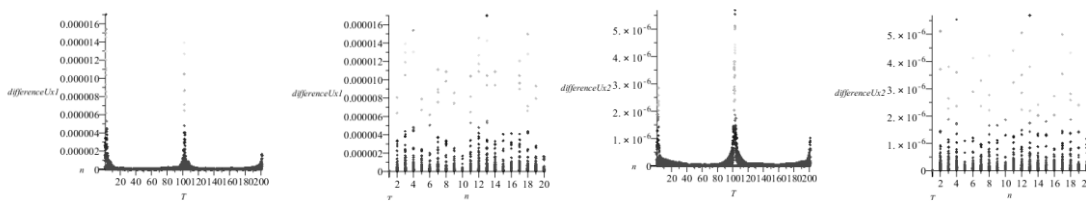


Рис. 8 – Результати візуалізації відмінностей між коливаннями згідно формулі (10) (коливання з 100 по 120)

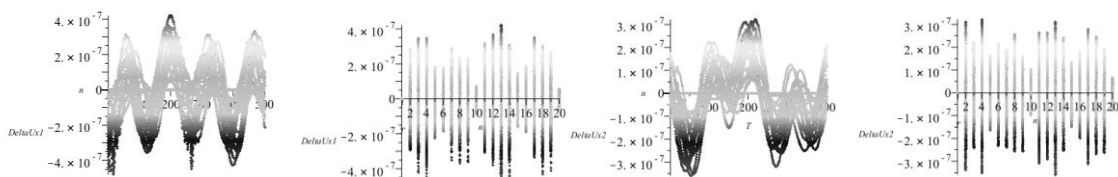


Рис. 9 – Результати візуалізації абсолютних відмінностей між коливаннями (коливання з 100 по 120)

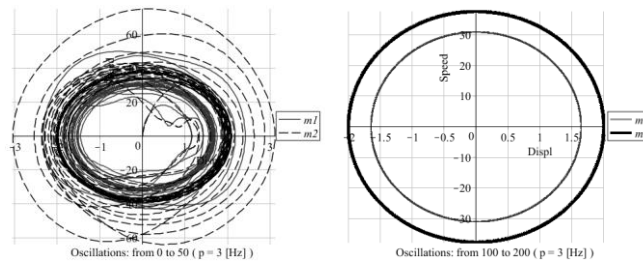


Рис. 10 – Фазові портрети для перших 50 коливань (ліворуч) і для коливань з 100 по 200 (праворуч)

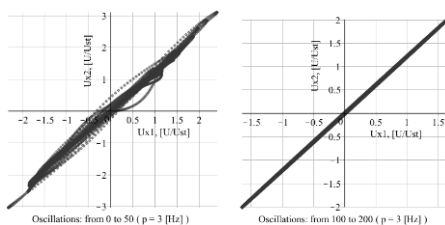


Рис. 11 – Траєкторії спільного руху для перших 50 коливань (ліворуч) і для коливань з 100 по 200 (праворуч)

Далі вихідна лінійна модель перетворюється в нелінійну шляхом перетворення лінійного елемента жорсткості $C1$ в білінійний зі значеннями $C11$ і $C12$ (рис. 12), причому $C11$ залишається незмінним і рівним 2000 [Н], а $C12$ – варіюваням у широких

межах. Границя розподілу $C11$ і $C12$, точка переходу, вибирається з умови розв'язання статичної задачі. Отже, коливальний процес стає нелінійним за умови перевищення «статичної» амплітуди коливань.

На рис. 12–14 наведені результати досліджень нелінійної системи при різних варіантах залежності (16).

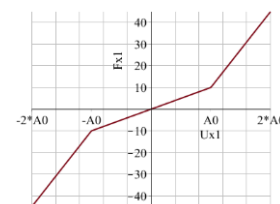


Рис. 12 – Характеристика білінійної пружини

Таким чином, як змінні параметри системи в першу чергу виступають параметри жорсткості: $C12$ (перша пружина) і $C2$ (друга пружина).

При варіюванні коефіцієнта при параметрі жорсткості $C12$, що відповідає за кут нахилу другої

ділянки, були отримані наступні результати – рис. 13, 14. Зауважимо, що значення, менші 1, відповідають «м'якому» налаштуванню пружини, більші 1 – «жорсткому», рівність 1 приводить до вихідної лінійної системи.

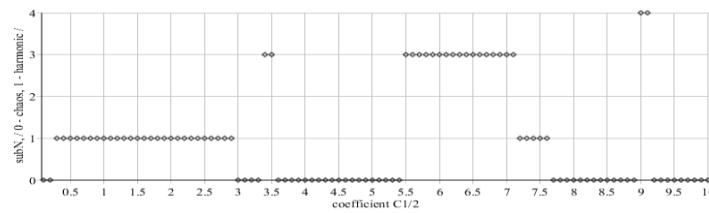


Рис. 13 - Результати пошуку субгармонійних режимів при варіюванні параметром жорсткості $C12$ білінійної пружини

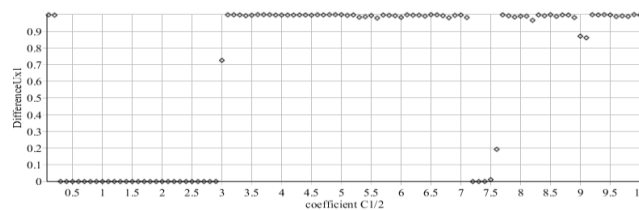


Рис. 14 - Максимальні значення відмінностей коливань при варіюванні параметром жорсткості $C12$

Аналізуючи результати на рис. 13, 14, можна зробити наступні проміжні висновки. У дослідженому діапазоні дійсно спостерігаються стійкі субгармонійні режими кратності 3 та 4. Субгармонійний режим кратності 3 спостерігається у досить широкому діапазоні. Потрібно також звернути увагу на графік відмінностей коливань (заснований на формулі (10)) – значення, що відповідають субгармонійним режимам, високі, що свідчить про достовірність результатів. Далі будуть наведені результати для характерних точок, що повністю підтвердить висловлену тезу. А також буде проведено порівняння із результатами скінченно-елементного моделювання.

Окремо варто згадати про т. з. хаос (відповідає нульовому значенню на графіку, див. рис. 13, 14). У

цьому конкретному випадку це питання підлягає подальшому вивченню, оскільки означає, що використовуваний алгоритм не виявив гармонік із певного набору.

Також варто згадати про дискретний порядок пошуку, таким чином, можна гарантувати виявлення всіх можливих варіантів (принаймні за одну ітерацію), проте можна звзити пошук, або докладніше проаналізувати ділянку, що представляє інтерес.

Наведемо результати для деяких отриманих характерних точок. Результати субгармонік кратності 3 для випадку $C12 = 3.5 \cdot C1$ представлені на рис. 15-19.

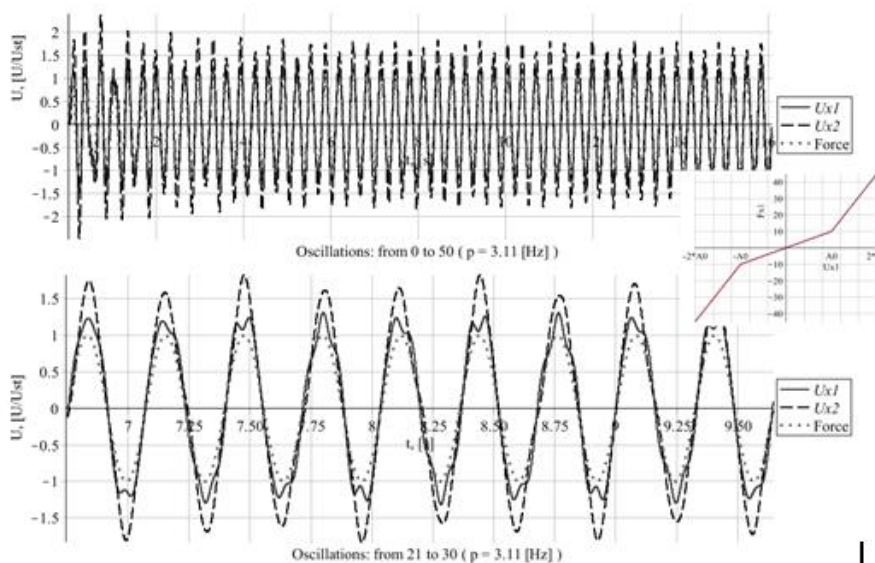


Рис. 15 – Графіки переміщень в характерних точках для випадку $C12 = 3.5 \cdot C1$ (Maple) (результати відмасштабовані щодо статичної задачі)

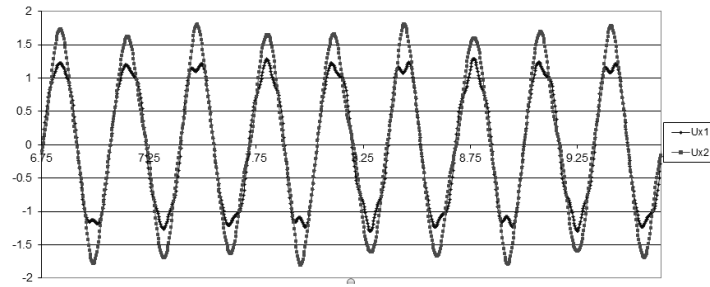


Рис. 16 – Графіки переміщень в характерних точках для випадку $C12 = 3.5 \cdot C1$ (Ansys Classic) (результати відмасштабовані щодо статичної задачі)

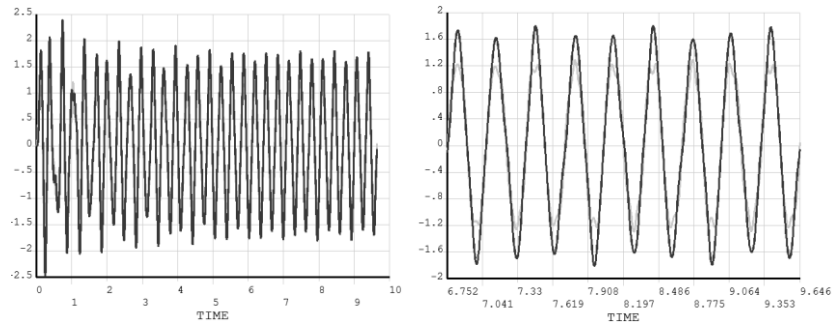


Рис. 17 – Графіки переміщень в характерних точках для випадку $C12 = 3.5 \cdot C1$ (Ansys Classic) (результати відмасштабовані щодо статичної задачі): перші 30 коливань (ліворуч) і з 21 по 30 (праворуч)

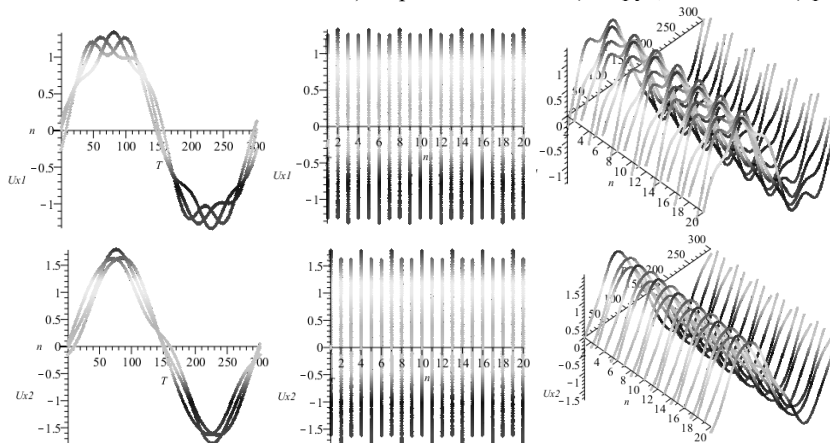


Рис. 18 – Результати візуалізації набору коливань (коливання з 100 по 120): (результати відмасштабовані щодо статичної задачі)

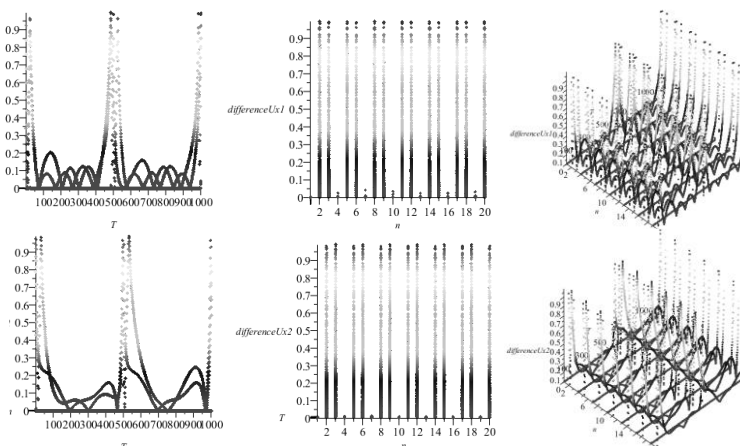


Рис. 19 – Результати візуалізації відмінностей між коливаннями згідно з формулою (10): коливання з 100 по 120

При аналізі поданих на рис. 19 результатів добре видно коливання, що «випали», які відповідають у цьому випадку кратності 3.

Представлені на рис. 20, 21 результати свідчать про повторюваність коливального процесу, а, отже, про стабільність субгармонійних режимів.

Результати для субгармонійного режиму кратності 3 для випадку $C12 = 6 \cdot C1$ представлені на рис. 22-27.

Результати для субгармонійного режиму кратності 4 при $C12 = 9 \cdot C1$ представлені на рис. 28-31.

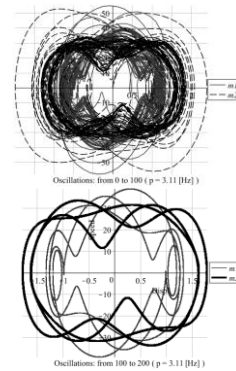


Рис. 20 – Фазові портрети для перших 100 коливань (ліворуч) і коливань з 101 по 200 (праворуч)

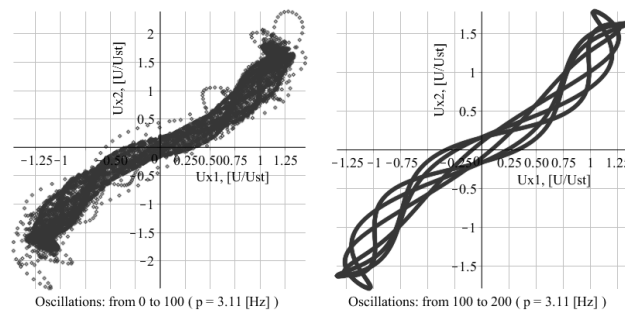


Рис. 21 – Траєкторії спільного руху для перших 100 коливань (ліворуч) і коливань з 101 по 200 (праворуч)

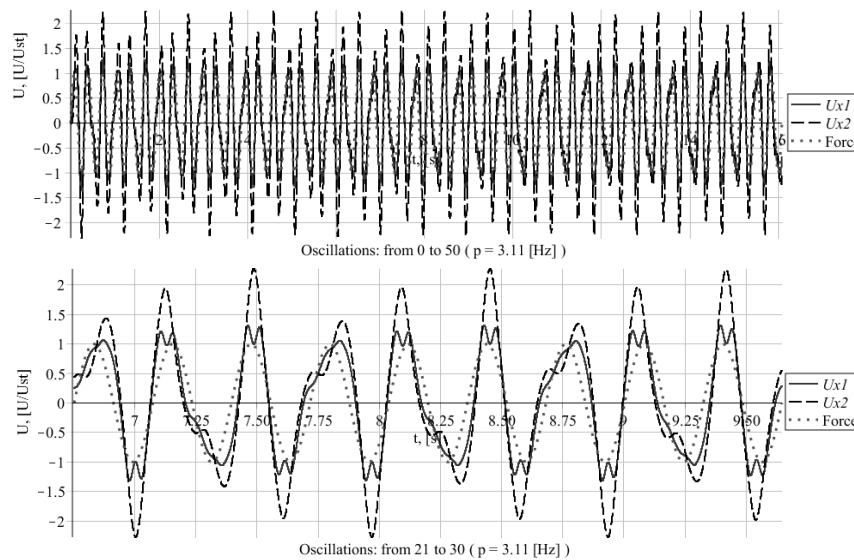


Рис. 22 – Графіки переміщень в характерних точках для випадку $C12=6 \cdot C1$ (Maple), результати відмасштабовані щодо статичної задачі

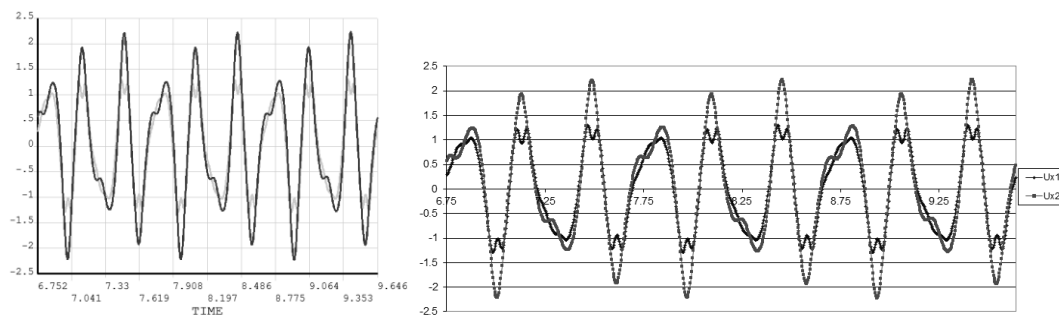


Рис. 23 – Графіки переміщень в характерних точках для випадку $C12=6 \cdot C1$ (Ansys Classic), результати відмасштабовані щодо статичної задачі

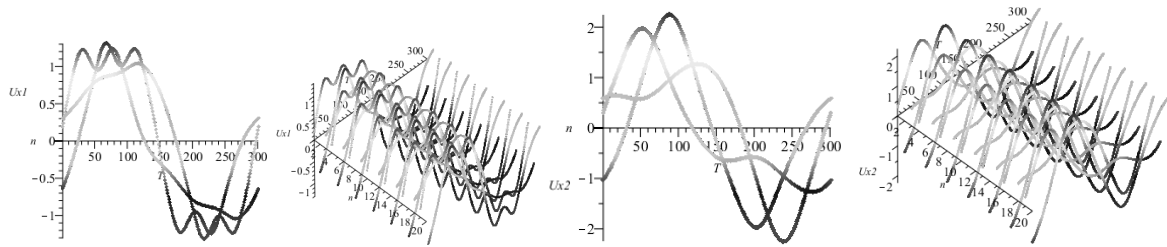


Рис. 24 – Результати візуалізації набору коливань (коливання з 100 по 120) (результати відмасштабовані щодо статичної задачі)

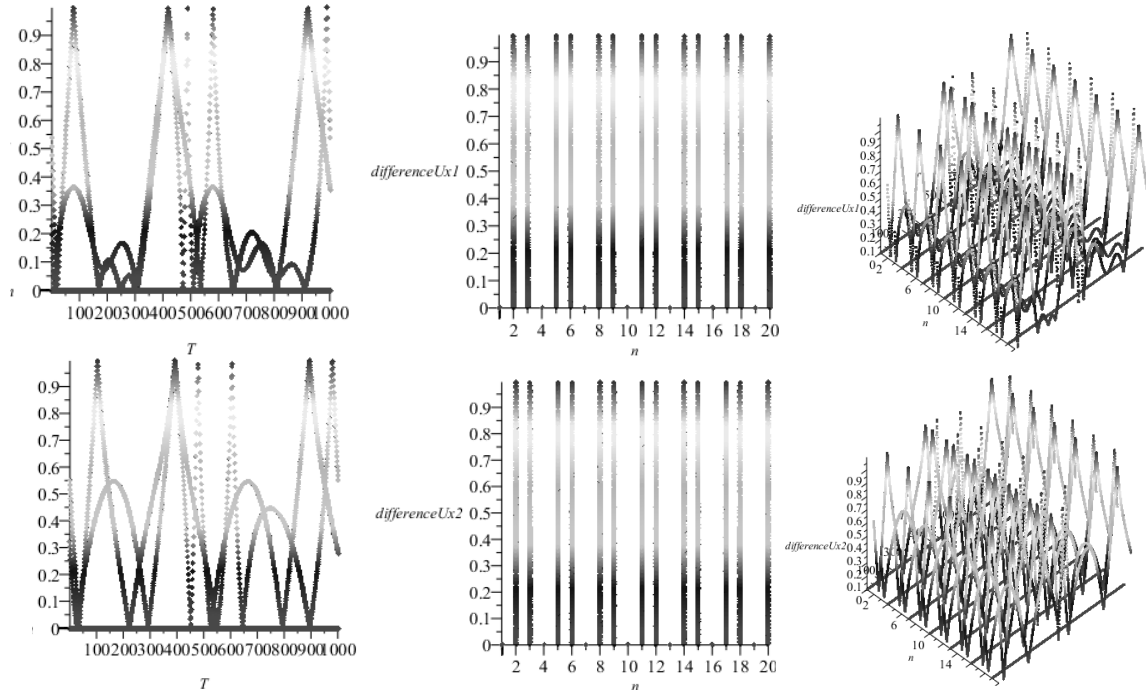


Рис. 25 – Результати візуалізації відмінностей між коливаннями згідно з формулою (10) (коливання з 100 по 120)

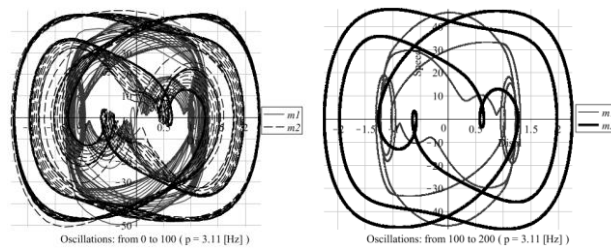


Рис. 26 – Фазові портрети для перших 100 коливань (ліворуч) і з 100 по 200 (праворуч)

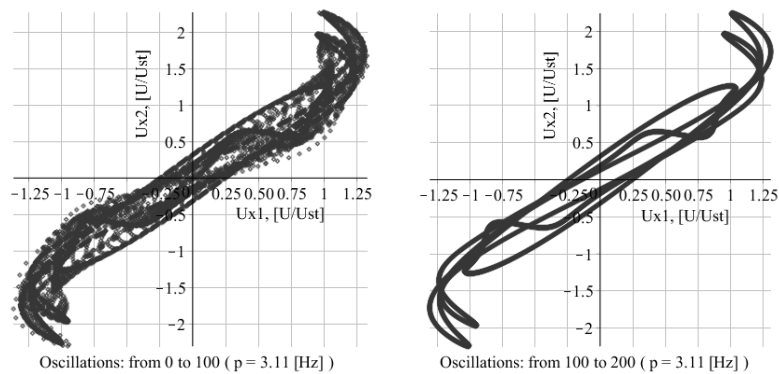


Рис. 27 – Траєкторії спільного руху для перших 100 коливань (ліворуч) і з 101 по 200 (праворуч)

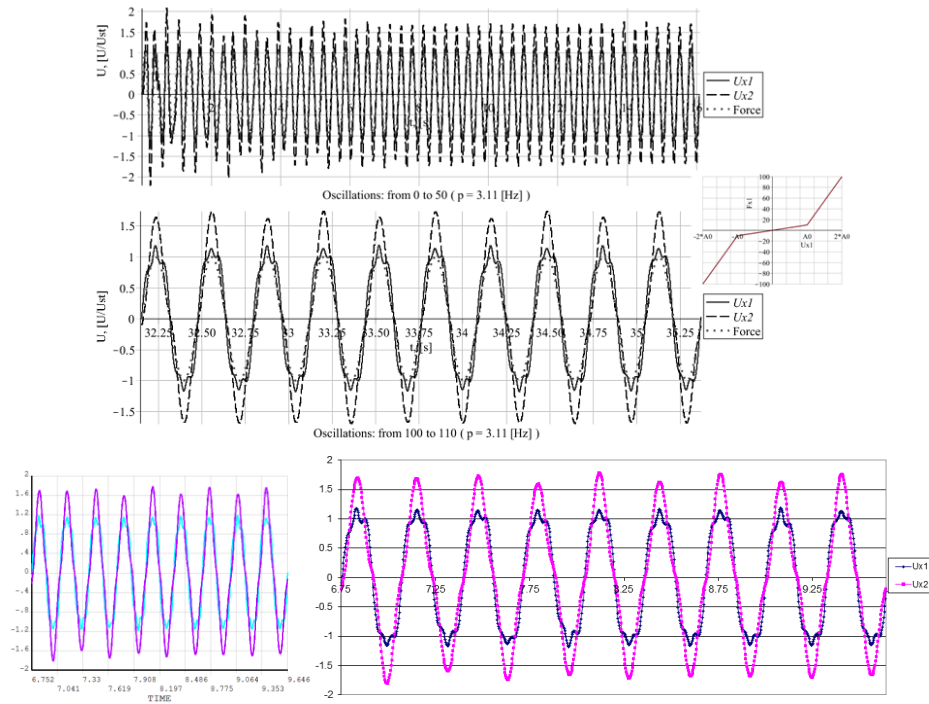


Рис. 28 – Порівняльні розподіли коливань, отримані для тестової нелінійної системи (див. рис. 4 та рис. 12) у Maple та Ansys

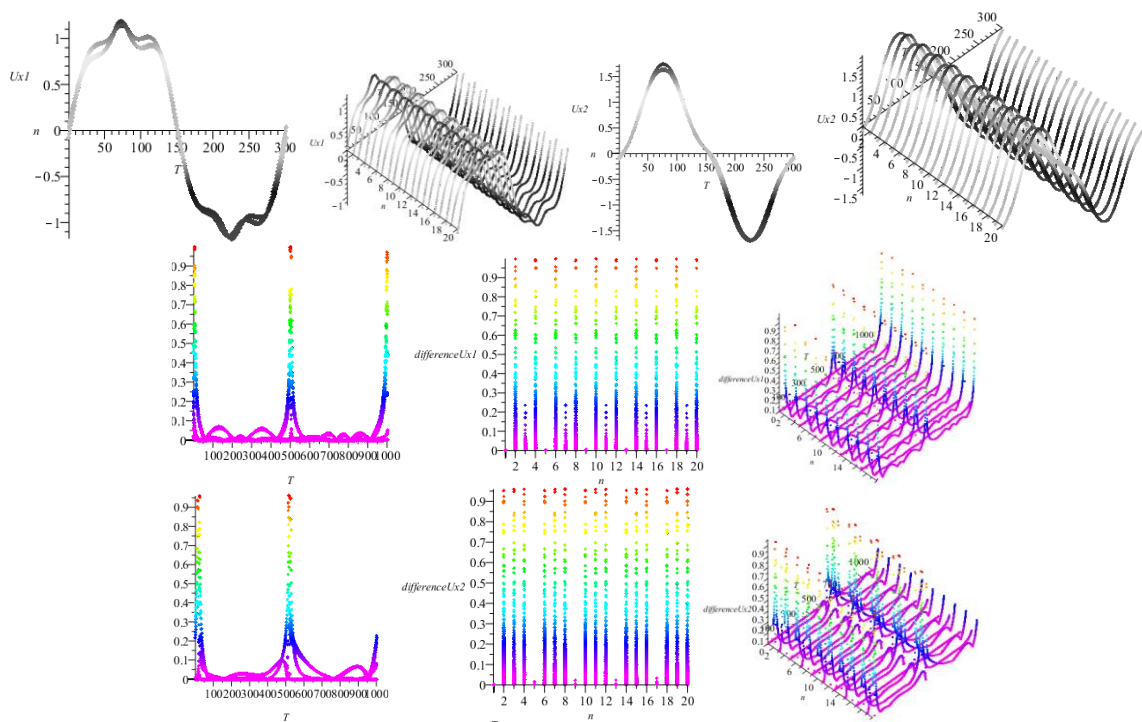


Рис. 29 – Аналіз результатів динамічних процесів

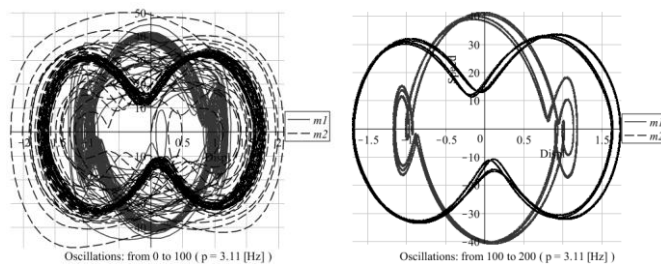


Рис. 30 – Фазові портрети (субгармоніка 4)

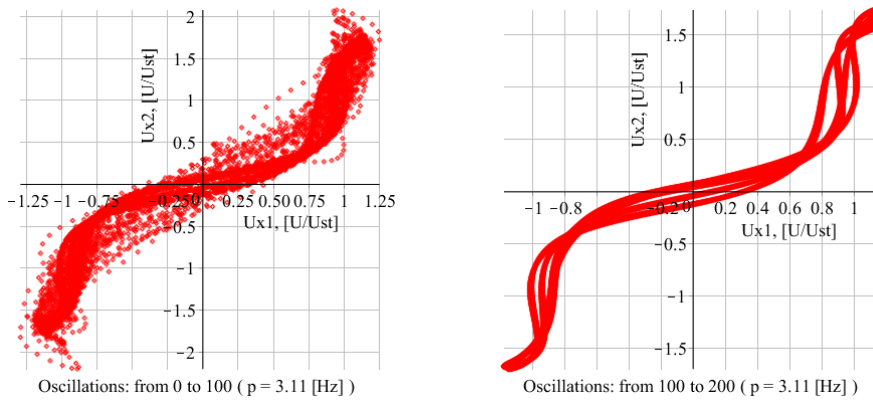


Рис. 31 – Траекторії спільного руху (субгармоніка 4)

Далі було проведено варіювання за двома параметрами – C12 (перша пружина: діапазон 5..7,25 з кроком 0,25) і C2 (друга пружина: діапазон 0,25 .. 2,5 з кроком 0,25), результати представлені на рис. 32-34.

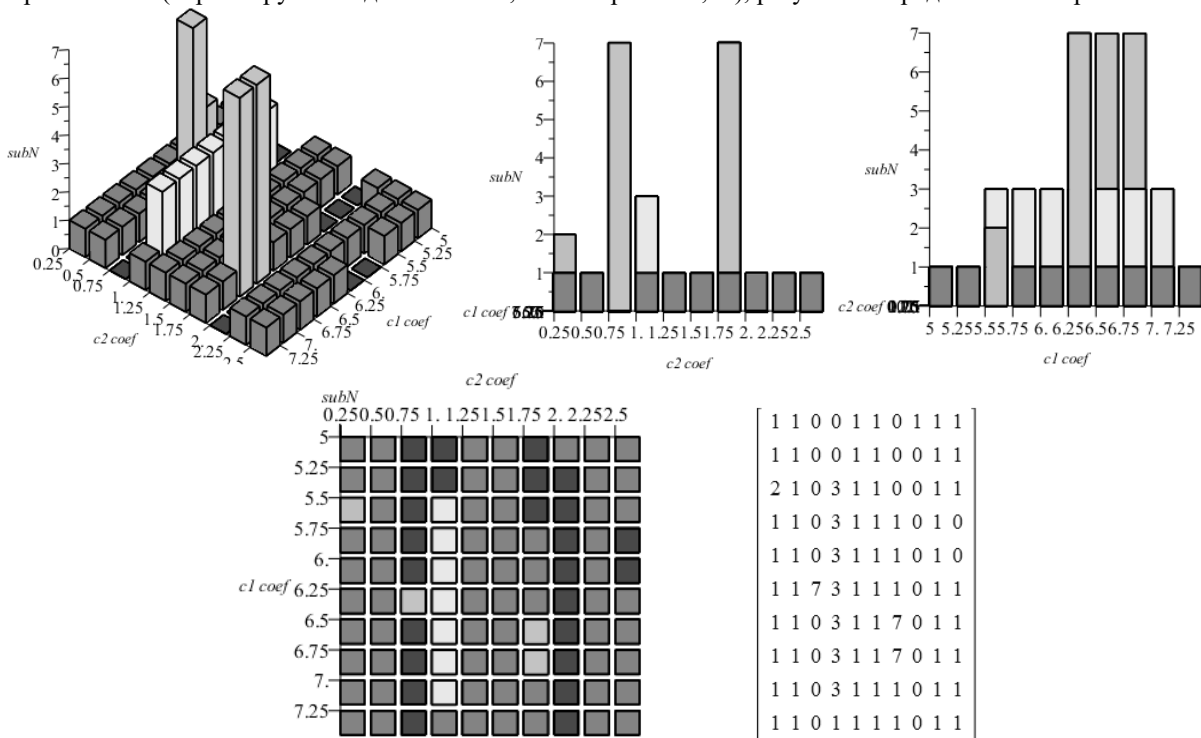


Рис. 32 – Результати пошуку субгармонійних режимів при варіюванні параметром жорсткості C12 першої (білінійної) і C2 другої (лінійної) пружини

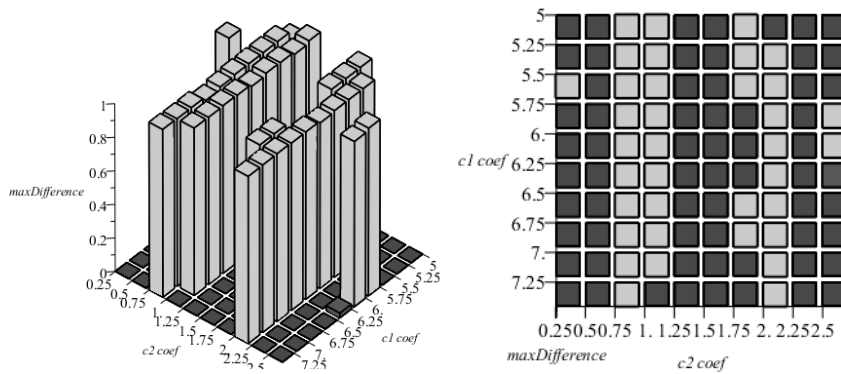


Рис. 33 – Максимальні значення відмінностей коливань (згідно з формулою (10)) при варіюванні параметрами жорсткості C12 і C2

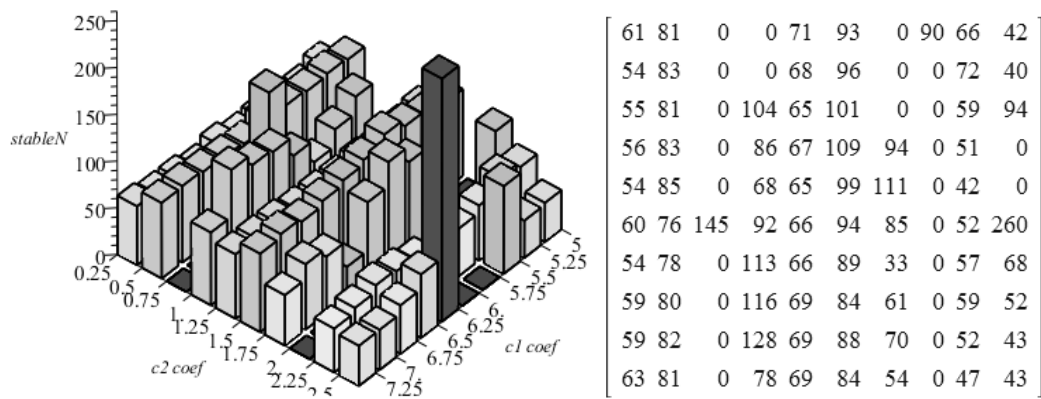


Рис. 34 – Номери коливань, з яких процес повністю стабілізується (при варіюванні параметрами жорсткості C12 і C2)

Результати для субгармонійних режимів кратності 7 при $C12 = 6,25 \cdot C1$ і $C2 = 0,75 \cdot C1$ представлені на рис. 35-38.

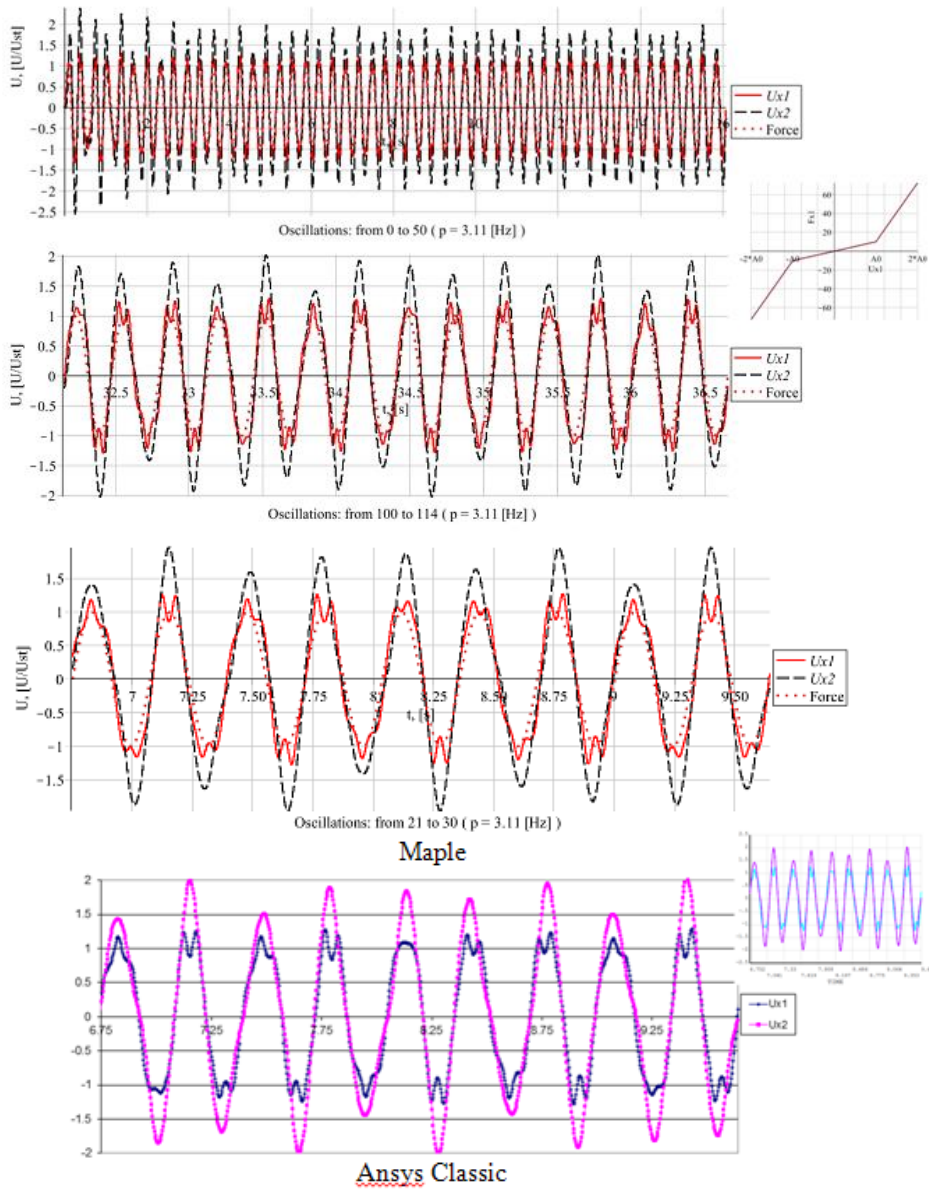
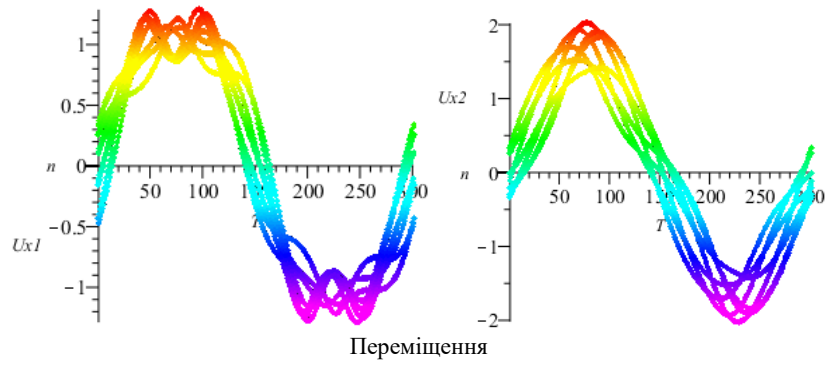
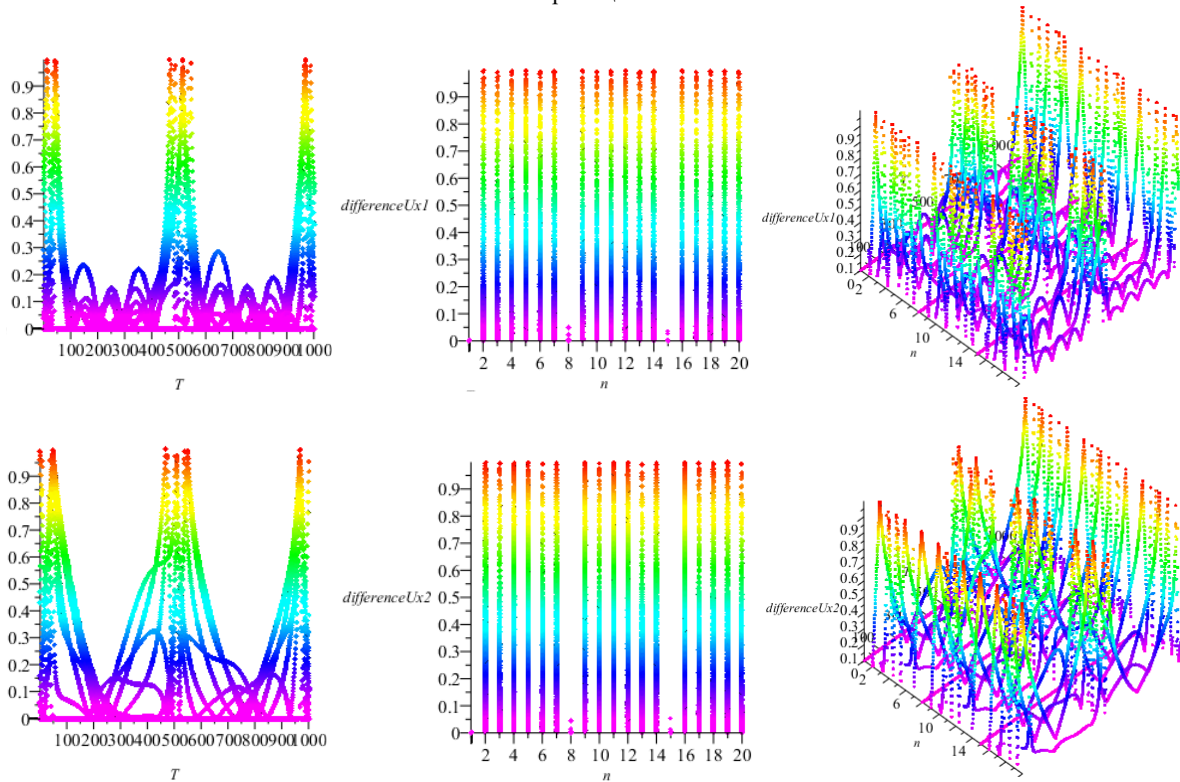


Рис. 35 – Порівняльні результати (Maple та ANSYS) для субгармонійного режиму кратності 7



Переміщення



Відмінності – згідно формулі (10)

Рис. 36 – Аналіз результатів (див. рис. 35)

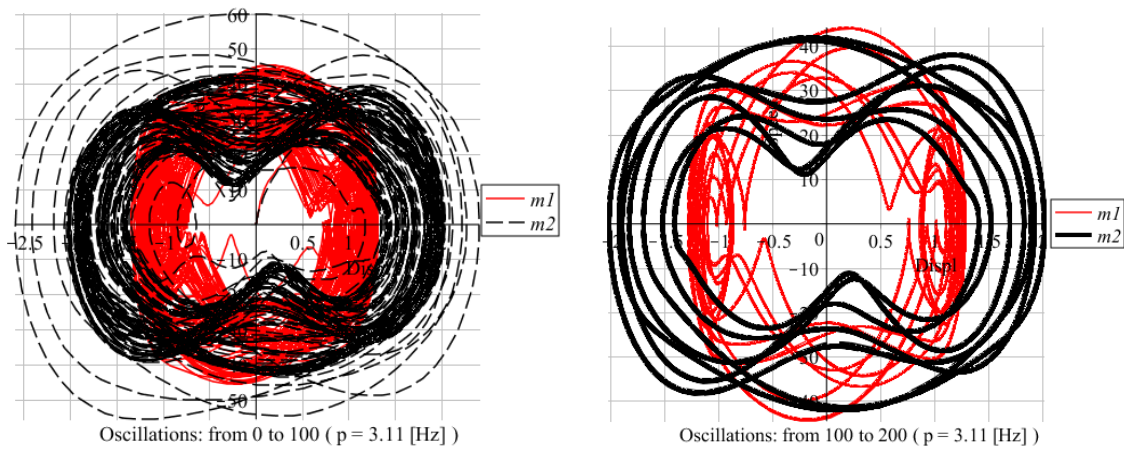


Рис. 37 – Фазові портрети (субгармоніка 7)

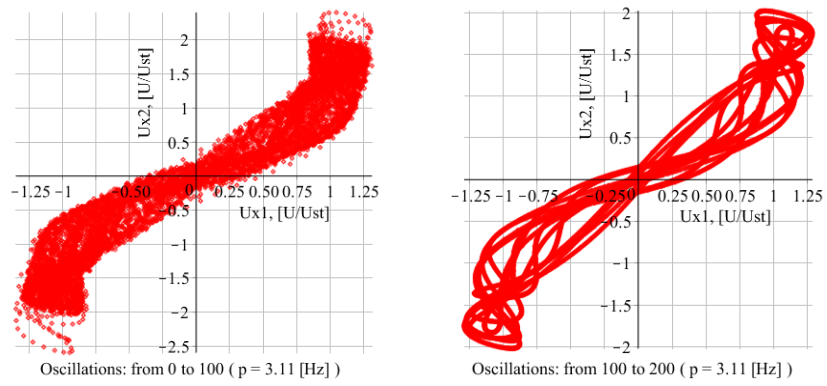


Рис. 38 – Траєкторії спільного руху (субгармоніка 7)

Результати для субгармоніки кратності 2 – на рис. 39–42.

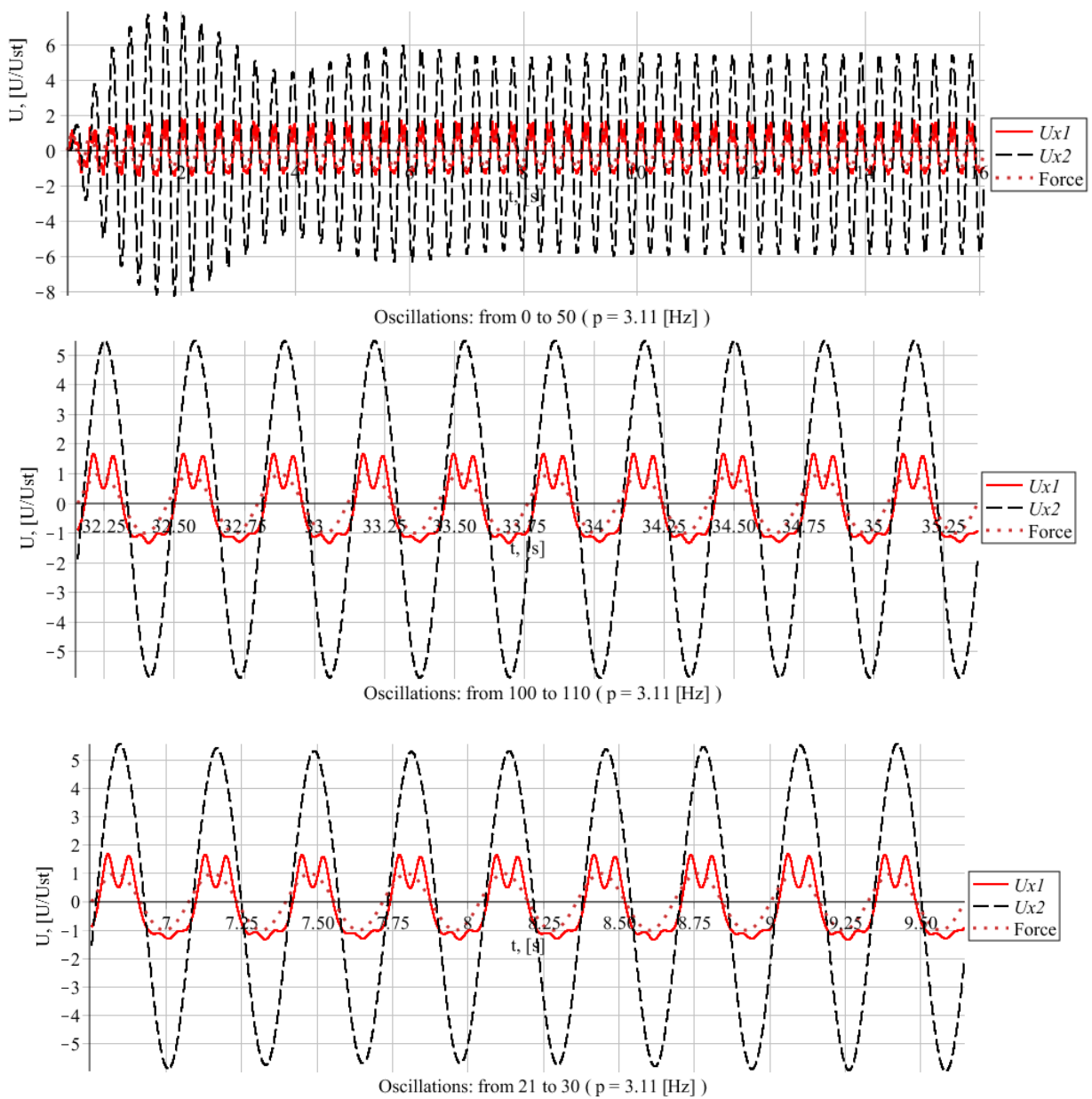


Рис. 39 – Порівняльні результати (Maple та ANSYS) для субгармонійного режиму кратності 2

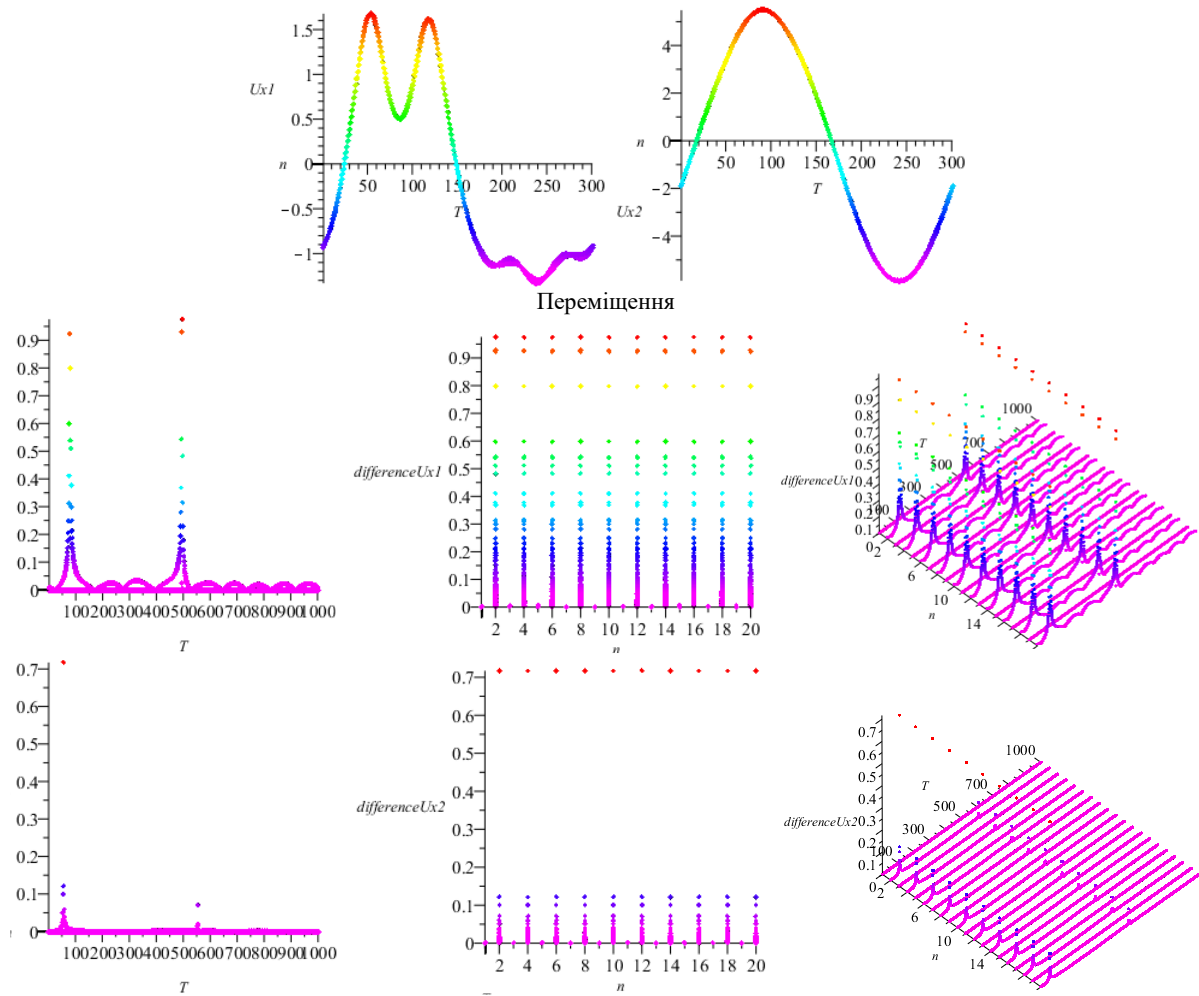


Рис. 40 – Аналіз результатів (див. рис. 39)

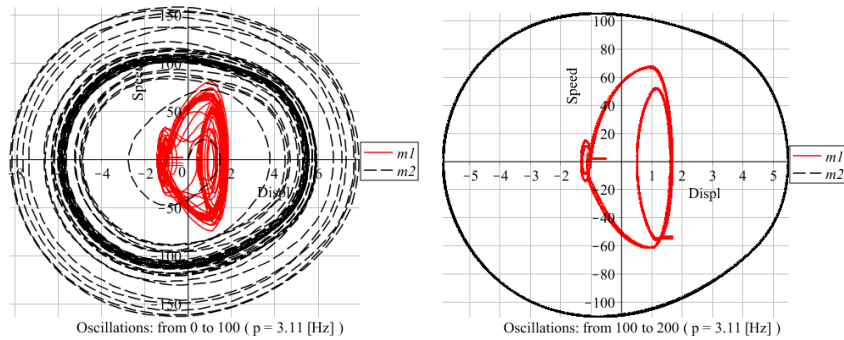


Рис. 41 – Фазові портрети (субгармоніка 2)

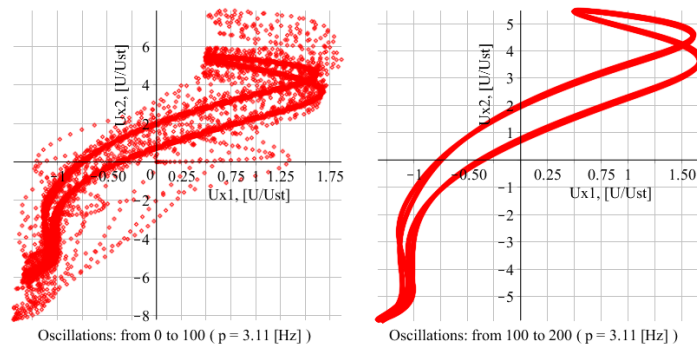


Рис. 42 – Траєкторії спільного руху (субгармоніка 2)

Далі було проведено зменшення області пошуку і зменшення кроку пошуку для коефіцієнта C12 (діапазон 6..6,45 з кроком 0,05) і C2 (діапазон 0,7..1,15 з кроком 0,5), результати представлені на рис. 43-45.

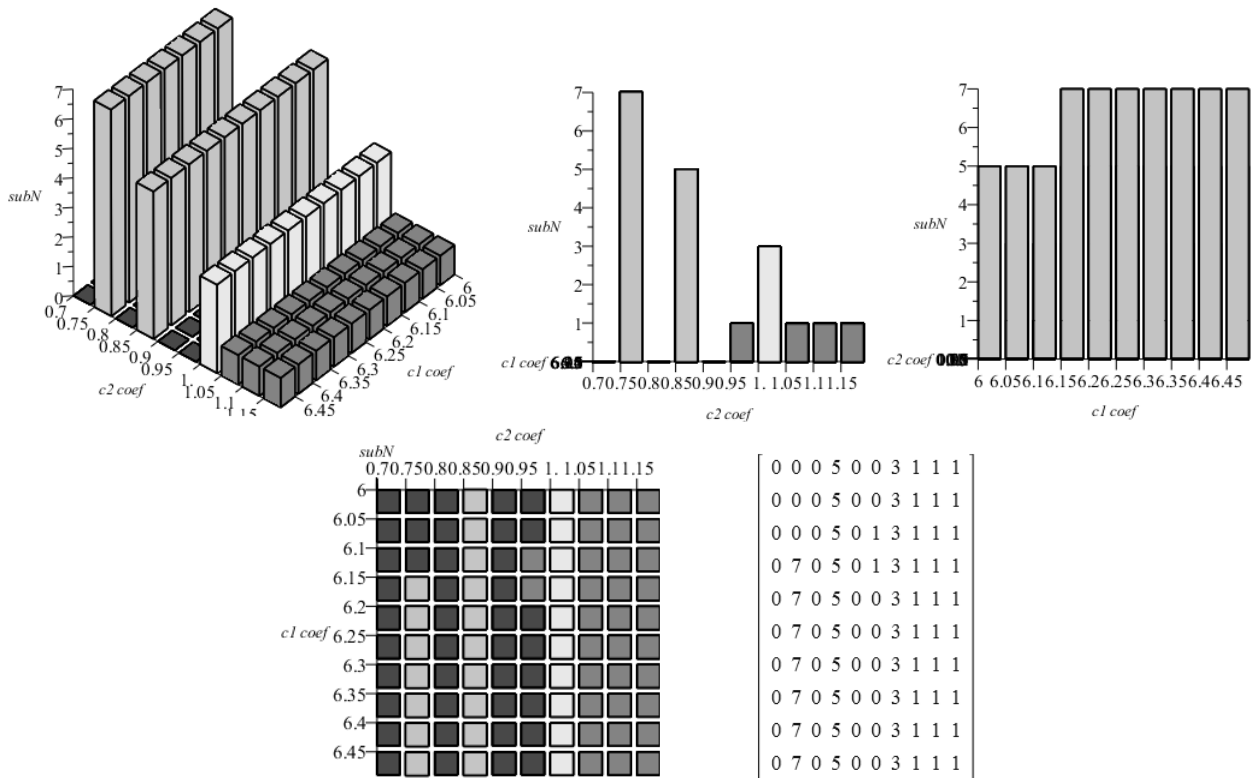


Рис. 43 – Результати пошуку субгармонійних режимів при варіюванні параметром жорсткості C12 першої (білінійної) і C2 другої (лінійної) пружини

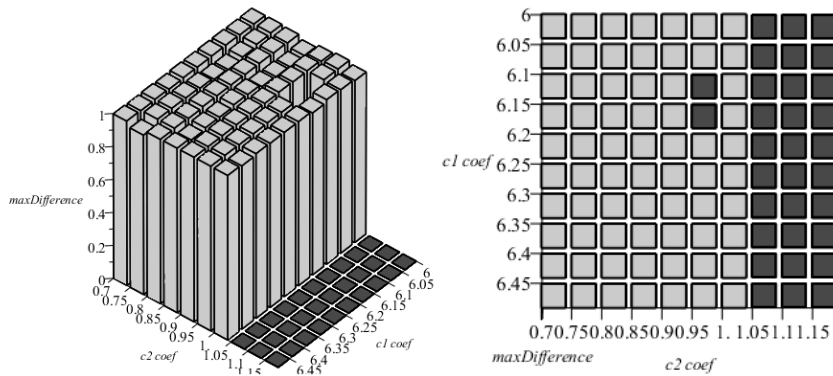


Рис. 44 – Максимальні значення відмінностей коливань (згідно формулі (10)) при варіюванні параметрами жорсткості C12 і C2

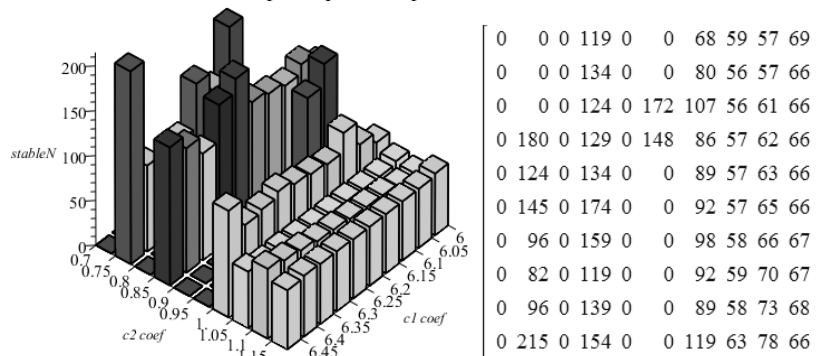


Рис. 45 – Номера коливань, з яких процес повністю стабілізується (при варіюванні параметрами жорсткості C12 і C2)

Субгармоніка кратності 5 для випадку $C12=6,25 \cdot C1$, $C2=0,85 \cdot C1$ – на рис. 46–51.

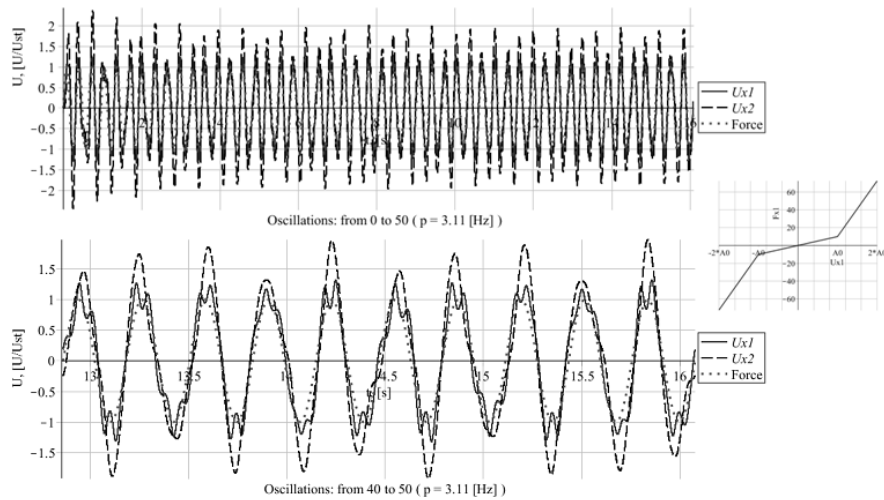


Рис. 46 – Графіки переміщень в характерних точках для випадку $C12 = 6,25 \cdot C1$, $C2 = 0,85 \cdot C1$ (Maple) (результати відмасштабовані щодо статичної задачі)

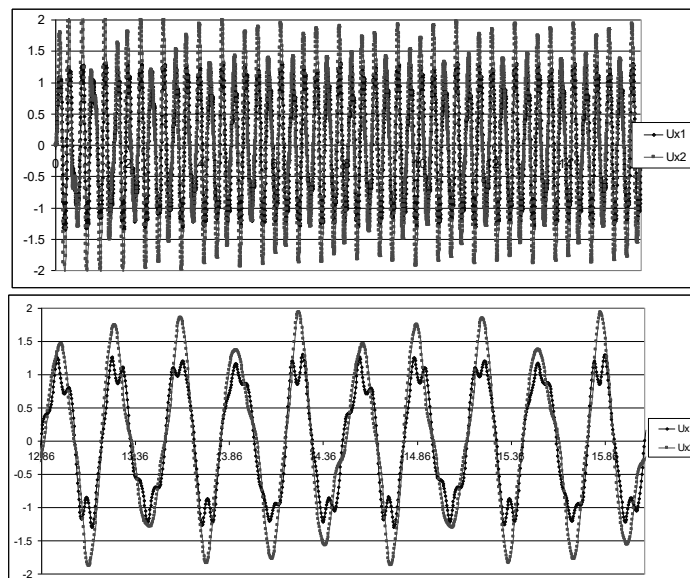


Рис. 47 – Графіки переміщень в характерних точках для випадку $C12=6,25 \cdot C1$, $C2=0,85 \cdot C1$ (ANSYS) (результати відмасштабовані щодо статичної задачі)

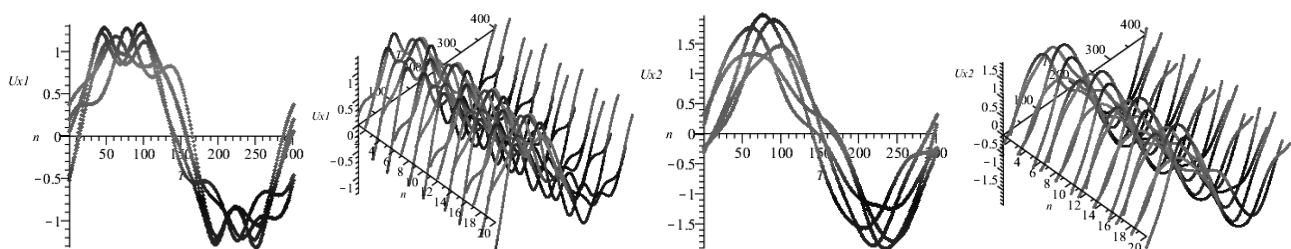


Рис. 48 – Результати візуалізації набору коливань (коливання з 100 по 120) (результати відмасштабовані щодо статичної задачі)

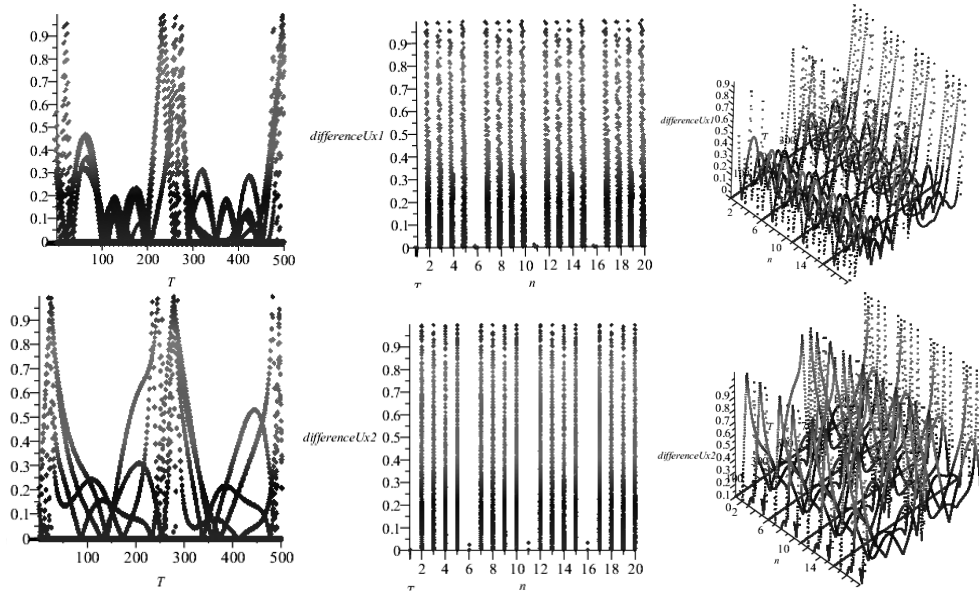


Рис. 49 – Результати візуалізації відмінностей між коливаннями згідно з формулою (10)

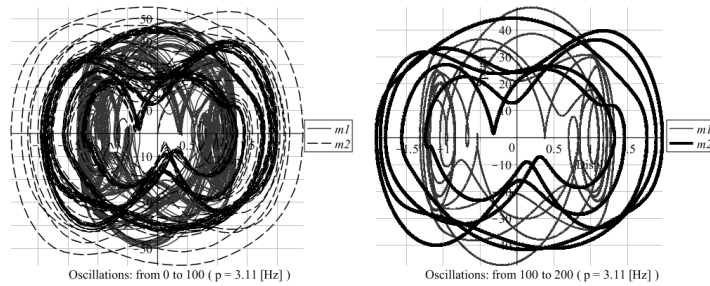


Рис. 50 – Фазові портрети (субгармоніка 5)

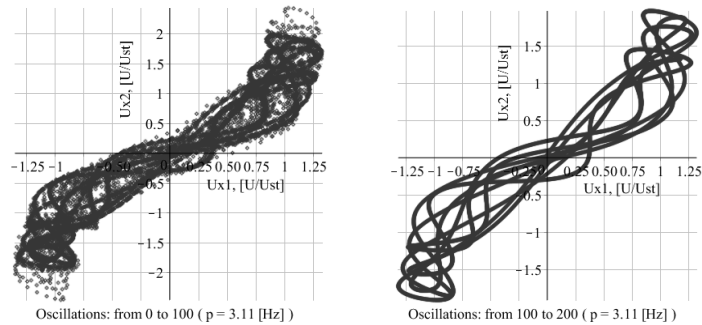


Рис. 51 – Траєкторії спільного руху (субгармоніка 5)

Хаос для випадку $C12=6,25 \cdot C1$, $C2=0,7 \cdot C1$ – на рис. 52–55.

Результати візуалізації відмінностей між коливаннями з 200 по 220 згідно з формулою (10)

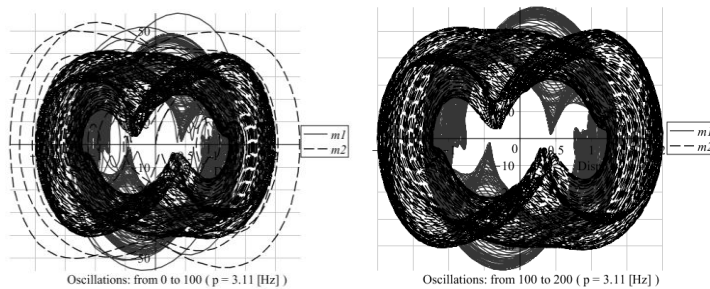


Рис. 52 – Фазові портрети для перших 100 коливань (ліворуч) і з 100 по 200 (праворуч)

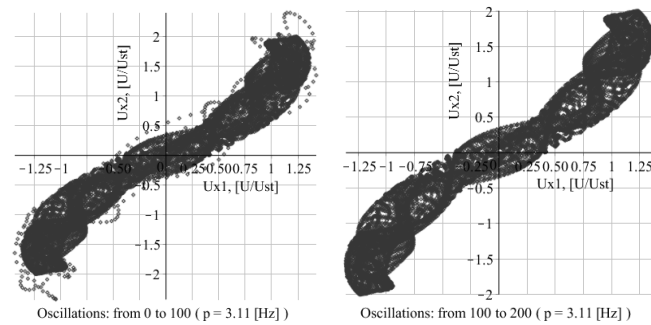


Рис. 53 – Траєкторії спільного руху для перших 100 коливань (ліворуч) і з 100 по 200 (праворуч)

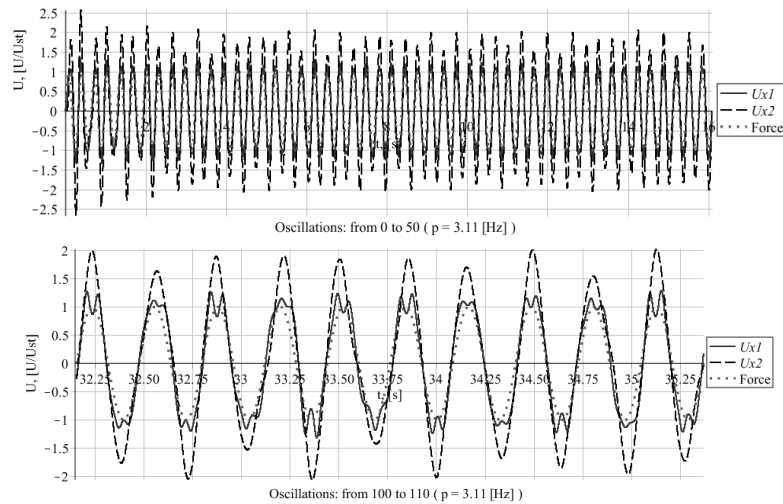


Рис. 54 – Графіки переміщень в характерних точках для випадку $C12=6 \cdot C1$ (Maple) (результати відмасштабовані відносно статичної задачі)

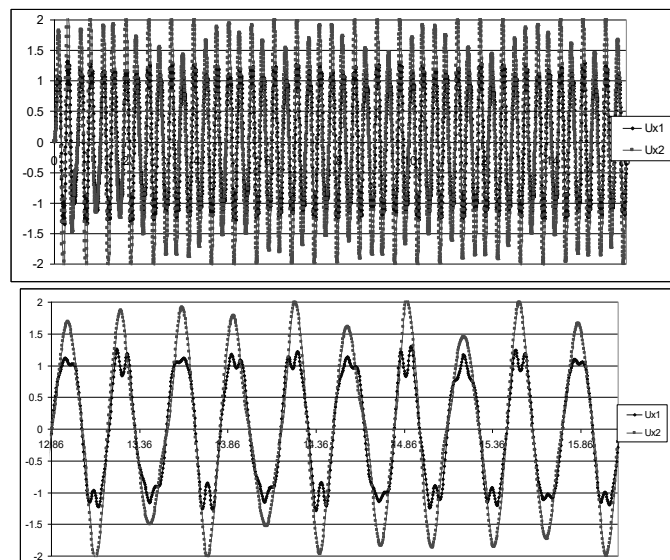


Рис. 55 – Графіки переміщень в характерних точках для випадку $C12=6 \cdot C1$ (Ansys Classic) (результати відмасштабовані відносно статичної задачі)

Висновки. Аналіз отриманих залежностей дає підстави для висновків:

1. При незначному відхиленні (16) від постійного значення відгук нелінійної системи на дію гармонійного збурення схожий із реакцією лінійної системи.

2. При певних залежностях (16) часова залежність $u_1(t), u_2(t)$ різко відрізняється від гармонійного закону для випадку лінійної системи.

3. Для певних варіантів (16) реалізується субгармонійний режим руху різної кратності або хаос.

Таким чином, у роботі розроблено та реалізовано методологію досліджень у загальному випадку нелінійних динамічних систем. Вона відрізняється від традиційних обпиранням на методи та моделі, що вільні від будь-яких гіпотез та спрощень. Запропоновано моделі переходу від породжувальних лінійних моделей до нелінійних, а також підходи до масштабування і параметризації.

У подальшому планується поширити запропоновані підходи, моделі та методи до дослідження нелінійних динамічних процесів у транспортних засобах та легкоброньованих машинах.

Список літератури

1. Александров Е. Е., Волонцевич Д. О., Самородов В. Б., Карпенко В. А., Лебедев А. Т., Перегон В. А., Туренко А. Н. *Динамика транспортно-тяговых колесных и гусеничных машин*. Харьков: ХНАДУ, 2001. 640 с.
2. Повышение устойчивости и управляемости колесных машин в тормозных режимах / Под общ. ред. Д.О. Волонцевича. Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. 320 с.
3. *Динамика системы дорога – шина – автомобиль – водитель* / Под ред. А.А. Хачатурова. Москва: Машиностроение. 1976. 536 с.
4. Агейкин Я.С. *Вездеходные колесные и комбинированные движители*. Москва: Машиностроение, 1972. 184 с.
5. Аксенов П.В. *Многоосные автомобили*. Москва: Машиностроение, 1989. 280 с.
6. Безбородова Г.Б., Галушко В.Г. *Моделирование движения автомобилей*. Киев: Вища школа, 1978. 168 с.
7. Мельник Б. А. К вопросу о влиянии поперечно-угловых колебаний корпуса легкобронированных колесных машин на точность стрельбы. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПБ», 2012. № 2. С. 118-121.
8. Толстолуцкий В. А. Математическое моделирование и анализ процессов в шасси колесных и гусеничных машин. Харьков: НТУ «ХПИ». 2013. 171 с.
9. Воронцов С.Н., Поторока А.В. Определение колебаний корпуса гусеничной машины с учетом влияния гидравлических ограничителей хода катка. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПБ», 2018, № 1, с. 60–64.
10. Душенко В.В., Ярмак М.С., Маслиев А.О., Цимбал Г.М. Методика розрахунку динамічної навантаженості гідропневматичної підвіски колісної легкоброньованої машин. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПБ», 2018, № 1, с. 75–80.
11. Гужва Ю.М., Стривомский С.В., Безлепкин А.А., Ключка Р.В., Собко А.П. Особенности построения алгоритма управления направлением качения колес на четырехосной колесной машине с управляемыми колесами на передней и задней осях. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПБ», 2017, № 1, с. 83–89.
12. Александров Е.Е., Кононенко В.А., Беляев С.Н. [и др.]. Об особенностях построения математической модели совместного движения башенки и боевого модуля как объектов регулирования в комплексах управления вооружением для легкобронированных боевых машин. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПБ», 2007, № 2, с. 3-27.
13. Кравець І.А., Дихановський В.М., Бацман О.М. Підвищення стійкості руху автомобілів модернізацією незалежної підвіски коліс із застосуванням роботи диференційного маятника. Зб. наук. праць. Центральний науково-дослідний інститут озброєння і військової техніки Збройних Сил України. Київ, ЦНДІ ОВТ ЗС України, 2002, вип. 11. 248 с.
14. Воронцов С.Н., Поторока А.В., Решетило Е.И. [и др.]. Моделирование работы гидравлического буфера системы поддресоривания военного транспортного средства. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПБ», 2011, № 2, с. 102-108.
15. Бабак И.М. *Теория колебаний*. Москва, Дрофа, 2004. 591 с.
16. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. *Теория колебаний*. 2-е изд., перераб. и испр. Москва: Наука, 1981, 918 с.
17. *Вибрации в технике. Колебания нелинейных механических систем*. Т.2 / Под ред. И. И. Блехмана. Москва: Машиностроение, 1979. 351 с.
18. Мельник Б.А., Малакей А.Н., Танченко А.Ю., Кохановская О.В. Математическое и численное моделирование динамических процессов в элементах легкобронированных боевых машин *Вісник НТУ «ХПБ»*. Харків, НТУ «ХПБ», 2013, № 1 (975), с. 93-117.
19. *Математическое моделирование процессов возмущенного движения агрегатов и систем бронетанковой техники: учеб. пособие: в 2 т. Т.1* / Е.Е. Александров, Д.О. Волонцевич, В.В. Душенко [и др.]. Харьков, НТУ «ХПИ», 2012. 356 с.
20. Андреев Ю.М. *Розробка аналітичних комп'ютерних методів аналізу та синтезу динаміки машин*: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.02.09. Харків, 2009. 40 с.
21. Ткачук Н.А., Рикунев О.Н., Танченко А.Ю., Малакей А.Н., Мазур А.Н., Мазур И.В., Набоков А.В. Влияние массово-инерционных характеристик боевого модуля, бронекорпуса и подвески на динамические процессы при осуществлении стрельбы. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПБ», 2014, № 1, с. 83-91.
22. Рикунев О. Н., Танченко А. Ю., Ткачук Н. А., Лисовол Я. Н. [и др.] Обеспечение точности стрельбы путем обоснования характеристик модуля вооружения модернизируемых легких бронированных машин. *Вісник НТУ «ХПБ»*. Харків, 2018, № 7 (1283). С. 86–106.
23. Гриценко Г. Д., Малакей А. М., Миргородский Ю. Я., Ткачук Н.А., Ткачук А.В. Интегрированные методы исследования прочностных, жесткостных и динамических характеристик элементов сложных механических систем. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПБ», 2002, № 1, с. 6-13.
24. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.Л. *Введение в теорию нелинейных колебаний*. Москва, Наука, 1976. 384 с.
25. Хаяси Т. *Нелинейные колебания в физических системах*. Москва, Мир, 1968. 432 с.
26. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Из-во «Ленанд», 2014. 248 с.

References (transliterated)

1. Aleksandrov E. E., Volontsevich D. O., Samorodov V. B., Karpenko V. A., Lebedev A. T., Peregon V. A., Turenko A. N. *Dinamika transportno-tyagovykh kolesnykh i gusenichnykh mashin* [Dynamics of transport-traction wheeled and caterpillar vehicles]. Kharkov, HNADU Publ., 2001. 640 p.
2. *Povysheniye ustoychivosti i upravlyayemosti kolesnykh mashin v tormoznykh rezhimakh* [Increase of stability and controllability of wheeled vehicles in braking modes] / Under total. ed. D.O. Volontsevich. Kharkov: NTU "KhPI" Publ., 2007. 320 p.
3. *Dinamika sistemy doroga – shina – avtomobil – voditel* [Dynamics of the system road – bus – car – driver] / Pod red. A.A. Hachaturova. Moscow: Mashinostroenie Publ. 1976. 536 p.
4. Ageykin Y. S. *Vezdekhodnyye kolesnyye i kombinirovannyye dvizhiteli* [All-wheel drive and combined propellers]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972. 184 p.
5. Aksenov P.V. *Mnogoosnyye avtomobili* [Multi-axle cars]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 280 p.
6. Bezborodova G.B., Galushko V.G. *Modelirovaniye dvizheniya avtomobiley* [The cars movement modeling]. Kiyev, Vishcha shkola Publ., 1978. 168 p.
7. Mel'nik B. A. K voprosu o vliyaniy poperechno-uglovykh kolebaniy korpusa legkobronirovannykh kolesnykh mashin na tochnost' strel'by [On the effect of transverse-angular vibrations of the body of lightly armored wheeled vehicles on the accuracy of firing]. *Mekhanika ta mashinobuduvannya* [Mechanics and machine building]. Kharkiv, NTU «KhPI», 2012, no 2, pp. 118-121.
8. Tolstolutskiy V. A. *Matematicheskoye modelirovaniye i analiz protsessov v shassi kolesnykh i gusenichnykh mashin* [Mathematical modeling and analysis of processes in the chassis of wheeled and caterpillar vehicles]. Kharkov, NTU «KhPI», 2013, 171 p.
9. Vorontsov S.N., Potoroka A.V. *Opredeleniye kolebaniy korpusa gusenichnoy mashiny s uchetom vliyaniya gidravlicheskikh ograniчитеley khoda kатka* [Determination of oscillations of caterpillar vehicle hull taking into account the influence of the hydraulic stops of the roller track]. *Mekhanika ta mashinobuduvannya* [Mechanics and machine building]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2018, no 1, pp. 60–64.
10. Dushchenko V.V., Yarmak M.S., Masliyev A.O., Tsymbal H.M. *Metodyka rozrakhunku dynamichnoyi navantazhenosti hidropnevmatichnoyi pidvisky kolisnoyi lehkobron'ovanoyi mashyn* [Method of calculation of dynamic loading hydropneumatic suspension of wheeled light-armored vehicles]. *Mekhanika ta mashynobuduvannya* [Mechanics and machine building]. Kharkiv, NTU «KhPI», 2018, no 1, pp. 75–80.
11. Guzha Y.M., Strimovskiy S.V., Bezlepkina A.A., Klyuchka R.V., Sobko A.P. *Osobennosti postroyeniya algoritma upravleniya napravleniyem kacheniya koles na chetyrekhosnoy kolesnoy*

- ماشین s upravlyayemyimi kolesami na peredney i zadney osyakh [Features of algorithm for controlling the rolling direction of wheels on a four-axle wheeled vehicle with steering wheels on the front and rear axles]. *Mekhanika ta mashinobuduvannya* [Mechanics and machine building]. Kharkiv, NTU «KhPI», 2017, no 1, pp. 83–89.
12. Aleksandrov Y.Y., Kononenko V.A., Belyayev S.N. [i dr.]. Ob osobennostyakh postroyeniya matematicheskoy modeli sovmeznogo dvizheniya bashenki i boyevogo modulya kak ob'yektov regulirovaniya v kompleksakh upravleniya voozuzheniyem dlya legkobronirovannykh boyevykh mashin [On the features of constructing a mathematical model for the joint movement of the turret and combat module as objects of regulation in weapons control complexes for lightly armored combat vehicles]. *Mekhanika ta mashinobuduvannya* [Mechanics and machine building]. Kharkiv, NTU «KhPI», 2007, no 2, pp. 3–27.
 13. Kravets' I.A., Dykhanovs'kyi V.M., Batsman O.M. Pidvyshchennya stiykosti rukhu avtomobiliv modernizatsiyyeu nezalezhnoyi pidvisky kolis iz zastosuvannyam roboty dyferentsiynoho mayatnyka [Increasing the stability of vehicles by modernizing the independent suspension of wheels using the operation of the differential pendulum]. Zb. nauk. prats' Tsentral'nyy naukovy-doslidnyy instytut ozbroynyya i viys'kovoyi tekhniki Zbroynykh Syl Ukrainy [Coll. of scientific papers of Central Research Institute of Arms and Military Equipment of the Armed Forces of Ukraine]. Kyiv, TSNDI OVT ZS Ukrainy, 2002, iss. 11. 248 p.
 14. Vorontsov S.N., Potoraka A.V., Reshetilo Ye.I. [i dr.]. Modelirovaniye raboty gidravlicheskogo bufera sistemy podressorivaniya voyennogo transportnogo sredstva [Modeling the operation of hydraulic buffer of the suspension system of a military vehicle]. *Mekhanika ta mashinobuduvannya* [Mechanics and machine building]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2011, no 2, pp. 102-108.
 15. Babakov I.M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of oscillations]. Moscow, Drofa, 2004. 591 p.
 16. Andronov A. A., Vitt A. A., Khaykin S. E. *Teoriya kolebaniy* [Theory of oscillations]. 2-e izd., pererab. i ispr. Moscow, Nauka, 1981, 918 p.
 17. *Vibratsii v tekhnike. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem* [Vibrations in technology. Oscillations of nonlinear mechanical systems]. Vol. 2 / Ed. I. I. Blekhan. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979. 351 p.
 18. Mel'nik B.A., Malakey A.N., Tanchenko A.YU., Kokhanovskaya O.V. Matematicheskoye i chislennoye modelirovaniye dinamicheskikh protsessov v elementakh legkobronirovannykh boyevykh mashin [Mathematical and numerical modeling of dynamic processes in elements of lightly armored fighting vehicles]. *Visnik NTU «KhPI»* [Bulletin of the NTU "KhPI"]. Kharkiv, NTU «KhPI», 2013, no 1 (975), pp. 93-117.
 19. *Matematicheskoye modelirovaniye protsessov vozmushchennogo dvizheniya agregatov i sistem bronetankovoy tekhniki* [Mathematical modeling of the processes of disturbed motion of aggregates and systems of armored vehicles]: Textbook. Vol.1 / Y.Y. Aleksandrov, D.O. Volontsevich, V.V. Dushchenko [and oth.]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2012. 356 p.
 20. Andryeyev Y.M. *Rozrobka analitychnykh komp'yuternykh metodiv analizu ta syntezu dynamiky mashyn* [Development of analytical computer methods of analysis and synthesis of machine dynamics]: author's abstract of dis. doc. tech. sciences: 05.02.09. Kharkiv, 2009. 40 p.
 21. Tkachuk N.A., Rikunov O.N., Tanchenko A.YU., Malakey A.N., Mazur A.N., Mazur I.V., Nabokov A.V. Vliyaniye massovo-inertsionnykh kharakteristik boyevogo modulya, bronekorpusa i podveski na dinamicheskiye protsessy pri osushchestvlenii strel'by. *Mekhanika ta mashinobuduvannya* [Mechanics and machine building]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, no 1, pp. 83-91.
 22. Rikunov O. N., Tanchenko A. Y., Tkachuk N. A., Lisovol Y. N. [i dr.] Obespecheniye tochnosti strel'by putem obosnovaniya issledovaniya prochnostnykh, zhestkostnykh i dinamicheskikh kharakteristik elementov slozhnykh mekhanicheskikh sistem [Ensuring the accuracy of firing by justifying the characteristics of the armament module of modernized light armored vehicles]. *Visnik NTU «KhPI»* [Bulletin of the NTU "KhPI"]. Kharkiv, 2018, no 7 (1283), pp. 86–106.
 23. Gritsenko G. D., Malakey A. M., Mirgorodskiy Y. Y., Tkachuk N.A., Tkachuk A. V. Integrirovannyye metody issledovaniya prochnostnykh, zhestkostnykh i dinamicheskikh kharakteristik elementov slozhnykh mekhanicheskikh sistem [Integrated methods for investigating the strength, rigidity, and dynamic characteristics of elements of complex mechanical systems]. *Mekhanika ta mashinobuduvannya* [Mechanics and machine building]. Kharkiv, NTU «KhPI», 2002, no 1, pp. 6-13.
 24. Butenin N.V., Neymark Y.I., Fufayev N.L. *Vvedeniye v teoriyu nelineynykh kolebaniy* [Introduction to the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 384 p.
 25. Khayasi T. *Nelineynyye kolebaniya v fizicheskikh sistemakh* [Nonlinear oscillations in physical systems]. Moscow, Mir Publ., 1968. 432 p.
 26. Malkin I. G. *Metody Lyapunova i Puankare v teorii nelineynykh kolebaniy* [Methods of Lyapunov and Poincaré in the theory of nonlinear oscillations]. Lenand Publ., 2014. 248 p.

Надійшла (received) 03.09.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Танченко Андрій Юрійович (Танченко Андрей Юрьевич, Tanchenko Andrii) – кандидат технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», докторант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; тел.: (057)707-69-01; e-mail: ATanchenko@tmm-sapr.org.

Ткачук Микола Анатолійович (Ткачук Николай Анатольевич, Tkachuk Mykola) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідуючий кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4174-8213>; e-mail: tma@tmm-sapr.org.

Набоков Анатолій Володимирович (Набоков Анатолий Владимирович, Nabokov Anatoly) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; тел.: (057)707-69-02; e-mail: tma@tmm-sapr.org.

Грабовський Андрій Володимирович (Грабовский Андрей Владимирович, Grabovskiy Andrey) – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6116-0572>; e-mail: andrej8383@gmail.com.

Малакей Андрій Миколайович (Малакей Андрей Николаевич, Malakei Andrii) – державне підприємство «Завод імені Малишева», м. Харків; заступник генерального директора з якості, тел. (057) 784-40-08, e-mail: kanc@malyshev.kharkov.ua.