МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для самостійної роботи за темою
«Диференціювання функції однієї змінної»

з навчальної дисципліни «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей ВІТВ

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол №3 від 26.10.22

Харків
НТУ «ХПІ»
2022

Методичні вказівки для самостійної роботи за темою «Диференціювання функції однієї змінної» з навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей ВІТВ/уклад.: В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко, О. В. Веретельник. — Харків: НТУ «ХПІ», 2022. — 82 с.

Укладачі: В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко, О. В. Веретельник.

Рецензент доц. С. М. Решетнікова.

Кафедра прикладної математики

Вступ

Методичні вказівки відповідають навчальним (робочим) програмам з дисципліни «Вища математика». Головна мета — надати студентам певний мінімум теоретичного матеріалу, а також практичних навиків з основних питань для розв'язання задач за темою «Диференціювання функції однієї змінної», допомогти студентам в їх самостійній роботі.

У кожному розділі наведено достатня кількість розв'язаних задач та прикладів, пояснюючих та закріплюючих теоретичний матеріал. Серед розв'язаних задач чимало таких, які можна назвати типовими; в будь-якому випадку ознайомлення з ними дозволяє студенту при мінімальній допомозі з боку викладача оволодіти основними методами розв'язання задач даного розділу. Наприкінці наведено добірку індивідуальних завдань. Також розібрані зразки виконання індивідуальних завдань.

1. Похідна

1.1. Передмова

1.1.1. Задача про миттєву швидкість

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно і закон її руху (залежність довжини шляху s від часу t) задається функцією:

$$s = f(t).$$

Розглянемо два різні моменти часу: t і $t + \triangle t$, де $\triangle t$ — приріст часу. Довжину шляху, який матеріальна точка проходить за час $\triangle t$, позначимо через $\triangle s$, це приріст довжини шляху:

$$\triangle s = s(t + \triangle t) - s(t).$$

Тоді *середня швидкість* за час $\triangle t$ дорівнює:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{s(t + \triangle t) - s(t)}{\triangle t}.$$

В певний момент часу t середня швидкість залежить від приросту часу $\triangle t$, тобто від проміжку часу $\triangle t$, за який вона обчислюється, і при різних значеннях $\triangle t$ вона набуває різних значень.

Означення 1. *Миттєвою швидкістю* точки в момент часу t називається границя середньої швидкості $v_{\text{ср}}$ на проміжку $\triangle t$ при $\triangle t \to 0$:

$$\lim_{\triangle t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle s}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{s(t + \triangle t) - s(t)}{\triangle t}. \tag{1.1}$$

Границя, яка міститься праворуч рівності (1.1), називається *похідною функції* $s(t)$ в точці t.

1.1.2. Задача про дотичну до кривої

Розглянемо довільну криву L. Візьмемо на кривій L дві точки M_0 та M_1 і проведемо через ці точки пряму M_0M_1. Пряма M_0M_1 називається *січною*.

Зафіксуємо точку M_0 і будемо переміщати точку M_1 вздовж кривої L до точки M_0. Тоді положення січної буде змінюватися і може статися, що січна M_0M_1 наближається до певного граничного положення M_0T. Гранична пряма M_0T називається *дотичною* до кривої L в точці M_0.

Означення 2. *Дотичною* до кривої L в точці M_0 називається граничне положення січної M_0M_1, якщо точка M_1 прямує вздовж кривої до точки M_0.

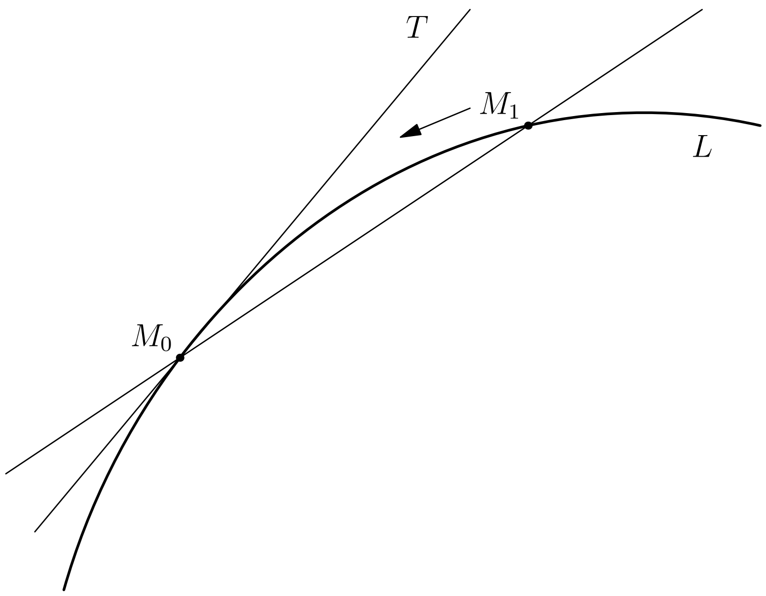

Рис. 1.1. Січна M_0M_1 та дотична M_0T

Зауваження 1. Граничне положення січної може не існувати, тобто не у кожній точці кривій можна провести дотичну до кривої.

Розглянемо криву L, яка в декартовій системі координат задана рівнянням

$$y = f(x). \tag{1.2}$$

Припустимо, що $y = f(x)$ є неперервна функція. Побудуємо рівняння дотичної, для чого скористаємося рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b.$$

Візьмемо на кривій L дві точки: $M_0(x_0, y_0)$ та $M_1(x_1, y_1)$. Очевидно, що

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1).$$

Позначимо

$\triangle x = x_1 - x_0$ – приріст аргумента функції,

$\triangle y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$ – приріст (значення) функції.

Проведемо через точки M_0 та M_1 січну M_0M_1. Позначимо кут, якій вона утворює з додатним напрямом осі Ox через α. Тоді з прямокутного трикутника M_0M_1N випливає, що кутовий коефіцієнт січної M_0M_1 дорівнює:

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\triangle y}{\triangle x}. \tag{1.3}$$

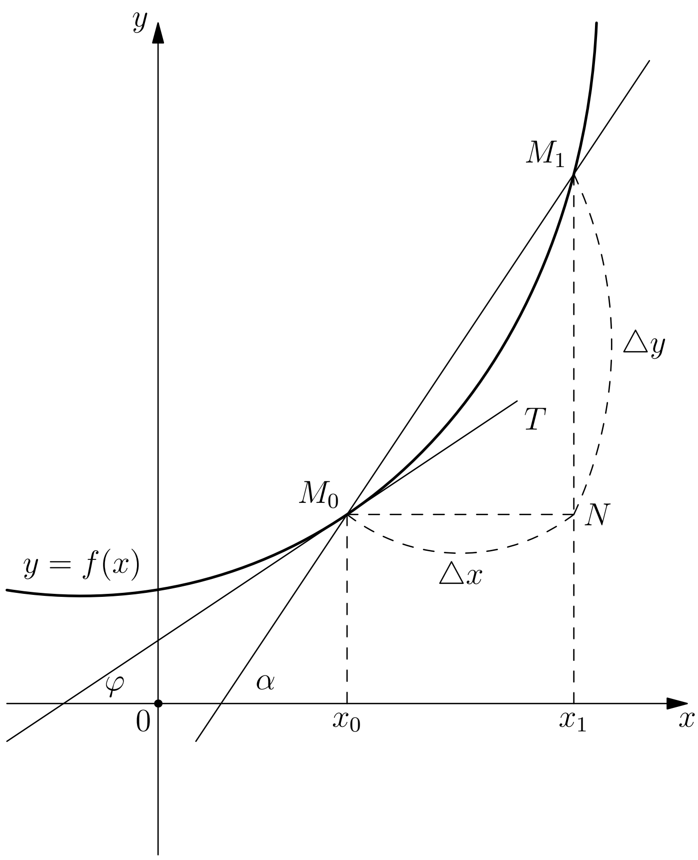

Рис. 1.2. Січна M_0M_1 та дотична M_0T

Нехай крива L в точці M_0 має дотичну M_0T, яка з віссю Ox утворює кут φ. Очевидно, що коли точка M_1 прямує до M_0, то $\triangle x \to 0$ і $\alpha \to \varphi$.

Звідси маємо *кутовий коефіцієнт дотичної* до кривої в точці M_0:

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\triangle x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}. \tag{1.4}$$

Границя, яка міститься праворуч в цій формулі називається *похідною функції* $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ і позначається символом

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}. \tag{1.5}$$

Таким чином, *кутовий коефіцієнт дотичної до графику функції дорівнює її похідній у точці дотику.*

Дотична проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, тому можна записати *рівняння дотичної* до кривої в точці $M_0(x_0, y_0)$ у такому вигляді:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \tag{1.6}$$

1.2. Похідна

Нехай на певному проміжку X задана неперервна функція $y = f(x)$.

1) Візьмемо будь–яку точку x_0 проміжку X і обчислимо значення функції в цій точці:

$$y_0 = f(x_0).$$

2) Надамо аргументу функції приріст $\triangle x$ і обчислимо значення функції у точці $x_1 = x_0 + \triangle x$:

$$y_1 = f(x_0 + \triangle x).$$

3) Віднімаючи з нового значення y_1 попереднє значення y_0, одержимо приріст функції:

$$\triangle y = y_1 - y_0 = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0).$$

4) Побудуємо відношення:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

5) Перейдемо в цьому відношенні до границі при $\triangle x \to 0$:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

Означення 3. Якщо існує границя відношення приросту функції $\triangle y$ до приросту аргументу $\triangle x$ за умовою, що приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}, \tag{1.7}$$

то функція називається *диференційовною в точці* $x = x_0$, а границя (1.7) називається *похідною функції* $y = f(x)$ *в точці* $x = x_0$.

Позначається похідна функції $y = f(x)$ так:

$y' = f'(x)$ (читається: «ігрек штрих»),

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx}$ (читається: «де ігрек по де ікс»),

Зауваження 2. Можна замість точки x_0 взяти іншу точку, тоді одержимо інше значення похідної, тобто похідна функції $f(x)$ також є функцією.

Зауваження 3. Якщо функція $f(x)$ є диференційовною у кожній точці деякого проміжка, то вона називається *диференційовною на цьому проміжку.*

Знаходження похідної називається *диференціюванням.*

За формулою (1.7) можна знайти похідну будь–якої функції.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^2$.

Розв'язання. Нехай x будь–яке значення аргументу функції, тоді в цій точці маємо таке значення функції:

$$f(x) = x^2.$$

Надамо аргументу x приріст $\triangle x$, тоді одержимо інше значення функції:

$$f(x + \triangle x) = (x + \triangle x)^2 .$$

Звідси випливає приріст $\triangle y$ функції $y = x^2$ у точці x, який відповідає приросту аргументу $\triangle x$:

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x) = (x + \triangle x)^2 - x^2 = 2x \cdot \triangle x + (\triangle x)^2 .$$

Тоді за формулою (1.7) одержимо похідну функції $y = x^2$ у точці x:

$$\left(x^2\right)' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2x \cdot \triangle x + (\triangle x)^2}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} (2x + \triangle x) = 2x.$$

□

Звичайно при диференціюванні користуються *правилами диференціювання* та *таблицею похідних.*

Таблиця похідних

1. $(C)' = 0, \qquad C = \mathrm{const}\,.$
2. $(x)' = 1.$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}.$
4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$
5. $(a^x)' = a^x \ln a.$
6. $(e^x)' = e^x.$
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}.$
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$
9. $(\sin x)' = \cos x.$
10. $(\cos x)' = -\sin x.$
11. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$
12. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
15. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$
16. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Зауваження 4. Диференціювання степеневих функцій виконується за формулою 3 з таблиці похідних:

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

причому слід враховувати властивості степеневих функцій:

$$x^0 = 1, \qquad x^n \cdot x^k = x^{n+k}, \qquad \frac{x^n}{x^k} = x^{n-k}, \qquad (x^n)^k = x^{n \cdot k}, \qquad \sqrt[k]{x^n} = x^{n/k}.$$

Наприклад:

$$(x)' = \left(x^1\right)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1.$$

$$\left(x^2\right)' = 2x^{2-1} = 2x, \qquad \left(x^3\right)' = 3x^{3-1} = 3x^2.$$

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = \left(x^{-4}\right)' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}.$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

1.3. Правила диференціювання

1. $(C)' = 0, \quad C = \text{const}\,.$
2. $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x), \quad C = \text{const}\,.$
3. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$
4. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$
5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$
6. $(f(u(x)))' = f'_u \cdot u'_x.$

1. *Похідна сталої дорівнює нулю.*

   Приклад 2.

   $$(3)' = 0, \qquad (2,34)' = 0, \qquad \left(\frac{2}{3}\right)' = 0, \qquad (\pi)' = 0.$$

   Число 3, десятковий дріб $2,34$, раціональний дріб $\frac{2}{3}$ і трансцендентне число $\pi = 3,14159\ldots$ — це сталі величини, тому їх похідна дорівнює нулю.

2. *Сталий множник можна виносити за знак похідної.*

3. *Похідна суми функцій дорівнює сумі похідних цих функцій.*

   Приклад 3. Знайти похідну функції $y = 3x^2 - 4x + 5$.

   Розв'язання.

   $$y' = \left(3x^2 - 4x + 5\right)' = \left(3x^2\right)' - (4x)' + (5)' = \\ = 3\left(x^2\right)' - 4(x)' + 0 = 3 \cdot 2x - 4 \cdot 1 = 6x - 4.$$

   □

4. *Похідна добутку двох функцій дорівнює добутку похідної першої функції на другу функцію плюс добуток першої функції на похідну другої функції.*

   Приклад 4. Знайти похідну функції $y = x^2 \cos x$.

   Розв'язання.

   $$y' = \left(x^2 \cos x\right)' = \left(x^2\right)' \cos x + x^2 (\cos x)' = \\ = 2x \cos x + x^2(-\sin x) = x(2\cos x - x \sin x).$$

   □

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = e^x \sin x$.

Розв'язання.

$$y' = \left(e^x \sin x\right)' = \left(e^x\right)' \sin x + e^x \left(\sin x\right)' = \\ = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x \left(\sin x + \cos x\right).$$

$\square$

5. *Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, знаменник якого є квадратом знаменника вихідного дробу, а чисельник – добутку похідної чисельника на знаменник мінус добуток чисельника на похідну знаменника.*

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Розв'язання.

$$y' = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{\left(x^2 - 1\right)'\left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)'}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \\ = \frac{2x\left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right)2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2 + 1\right)^2}.$$

$\square$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = \operatorname{tg} x$.

Розв'язання.

$$y' = \left(\operatorname{tg} x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\left(\sin x\right)' \cos x - \sin x \left(\cos x\right)'}{\left(\cos x\right)^2} = \\ = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$\square$

6. *Похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежним аргументом.*

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні:

1. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + \dfrac{x}{4} - 5.$

2. $y = \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}.$

3. $y = x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}.$

4. $y = \dfrac{x^5}{3} - \dfrac{2x^3}{5} + x.$

5. $y = 6\sqrt[3]{x} - \dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}.$

6. $y = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{3}{x^3}.$

7. $y = 3x - 6\sqrt{x}.$

8. $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}.$

9. $y = \dfrac{8}{\sqrt[4]{x}} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}.$

10. $y = x^2\,(2x - 1).$

11. $y = (x + 1)\,\sqrt{x}.$

12. $y = \left(x^2 - 1\right)\left(9 - x^3\right).$

13. $y = x^2 \sin x.$

14. $y = \dfrac{x}{1 - 4x}.$

15. $y = \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}.$

16. $y = \dfrac{1 + 3x^2}{\sqrt{2\pi}}.$

17. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}.$

18. $y = (\sqrt{x} - 1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 1\right).$

19. $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}.$

20. $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}.$

21. Для функції $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x$ обчислити $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$.

22. Для функції $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1}$ обчислити $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$.

1.4. Диференціювання складної функції

Означення 4. Накладання двох або більше функцій називається *складною функцією.*

Наприклад, нехай на проміжку X визначена певна функція

$$u = \varphi(x),$$

а на області її значень визначена інша функція

$$y = f(u).$$

Тоді говорять, що на проміжку X визначена *складна функція* y, яка залежить від незалежної величини x (аргументу функції) за допомогою проміжної величини u (*проміжного аргументу*). Цей факт позначають символом:

$$y = f(u(x)).$$

Функцію $y = f(u)$ називають *зовнішньою функцією.*

Іноді корисно уявити складну функцію у вигляді *ланцюжка простих функцій*:

$$x \quad \to \quad u = \varphi(x) \quad \to \quad y = f(u).$$

Похідна складної функції обчислюється за формулою (правило 6):

$$(f(u(x)))' = f'_u \cdot u'_x. \tag{1.8}$$

Похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежним аргументом.

Такий розклад складної функції на прості функції дозволяє скористатися таблицею похідних та правилами диференціювання. Звернемо увагу, що спочатку виконується диференціювання зовнішньої функції $f(u)$.

Приклад 8. Знайти похідну функції $y = \sin 3x$.

Розв'язання. Тому що аргумент синуса дорівнює $3x$, маємо складну функцію:

$$y = \sin u, \qquad u = 3x,$$

тобто маємо такий ланцюжок елементарних функцій:

$$x \quad \to \quad u = 3x \quad \to \quad y = \sin u.$$

Скориставшись табличними похідними

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (x)' = 1,$$

одержимо:

$$y'_u = (\sin u)'_u = \cos u = \cos 3x, \qquad u'_x = (3x)' = 3 \cdot x' = 3.$$

Тут замість проміжного аргументу u було підставлено його значення $3x$. Таким чином, за формулою диференціювання складної функції остаточно маємо:

$$(\sin 3x)' = 3\cos 3x.$$

□

Приклад 9. Знайти похідну функції $y = \ln \sin x$.

Розв'язання. Позначимо проміжний аргумент $u = \sin x$. Отже, маємо складну функцію:

$$y = \ln u, \qquad u = \sin x$$

і за формулою диференціювання складної функції дістанемо:

$$y' = f'_u \cdot u'_x = (\ln u)'_u \cdot (\sin x)'_x = \frac{1}{u} \cdot \cos x.$$

Звернемо увагу, що в похідну

$$(\ln u)'_u = \frac{1}{u},$$

треба підставити замість проміжного аргументу u функцію $\sin x$. Тоді остаточно одержимо:

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

□

Зауваження 5. Вводити проміжний аргумент немає потреби, тому що в кінцевий результат доводиться підставляти його значення. Звичайно, як в даному прикладі, проміжну змінну $u = \sin x$ можна *тільки уявляти*. Це уявлення спрощує користування таблицею похідних. Таким чином, спочатку обчислюємо похідну зовнішньої функції за її аргументом $\sin x$ і множимо її на похідну аргументу зовнішньої функції $(\sin x)'$.

Приклад 10. Знайти похідну функції $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Розв'язання. Маємо складну функцію. Уявимо ланцюжок простих функцій:

$$x \quad \to \quad u = 1 + x^2 \quad \to \quad y = \sqrt{u}.$$

Зовнішня функція $y = \sqrt{u}$, її похідна є в таблиці похідних:

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Врахуємо цю формулу та одразу підставимо аргумент радикалу, тоді одержимо:

$$y' = \left(\sqrt{1 + x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot \left(1 + x^2\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

$\square$

Приклад 11. Знайти похідну функції $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

Розв'язання. Тут зовнішня функція: $y = \operatorname{arctg} u$, її похідна:

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1 + u^2}.$$

Тоді маємо:

$$y' = \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2}{1 + x^2} \left(x^{-1}\right)' =$$

$$= \frac{x^2}{1 + x^2} \left(-x^{-2}\right) = -\frac{x^2}{1 + x^2} \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

$\square$

Приклад 12. Знайти похідну функції $y = 3^{\operatorname{tg}^2 x}$.

Розв'язання. Маємо накладання трьох функцій: обчислення тангенса, піднесення до другого степеня і показникова функція:

$$x \quad \to \quad v = \operatorname{tg} x \quad \to \quad u = v^2 \quad \to \quad y = 3^u.$$

Тут зовнішня функція — показникова функція: $y = 3^u$. Її похідна:

$$(3^u)' = 3^u \ln 3.$$

Отже, маємо:

$$y' = \left(3^{\operatorname{tg}^2 x}\right)' = 3^{\operatorname{tg}^2 x} \ln 3 \cdot \left(\operatorname{tg}^2 x\right)' =$$
$$= 3^{\operatorname{tg}^2 x} \ln 3 \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 3^{\operatorname{tg}^2 x} \ln 3 \cdot 2 \operatorname{tg} x \, \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Звернемо увагу, що функція $\operatorname{tg}^2 x$ – складна функція, тобто накладання степеневої функції та тангенса, і її диференціювання виконується за правилом диференціювання складної функції.

□

Приклад 13. Знайти похідну функції $y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$.

Розв'язання.

$$y' = \left(e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}\right)' = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x}\right)' =$$
$$= e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Тут зовнішня функція — експонента e^x:

$$(e^x)' = e^x,$$

проміжна функція арктангенс $\operatorname{arctg} x$:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

та ще одна проміжна функція — квадратний корень $\sqrt{x}$:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

□

Приклад 14. Знайти похідну функції $y = \ln|x|$.

Розв'язання. Функція $y = \ln|x|$ визначена при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $x \neq 0$. Тоді, враховуючи означення модуля, маємо:

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ \ln(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає:

$$x > 0, \qquad (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$x < 0, \qquad (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Таким чином, маємо:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Зауваження 6. Функція $y = \ln(-x)$ розглядається як складна функція:

$$y = \ln u, \quad u = -x.$$

□

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні:

1. $y = \sqrt{1 + 2x}$.
2. $y = (1 - 5x)^4$.
3. $y = \sqrt[3]{(4 + 3x)^2}$.
4. $y = \dfrac{1}{(1 - x^2)^5}$.
5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2 + 7}}$.
6. $y = \cos 2x$.
7. $y = \cos^2 x$.
8. $y = \sqrt{\sin x}$.
9. $y = \sin\sqrt{x}$.
10. $y = \sqrt{\cos 2x}$.
11. $y = \sin\dfrac{3x}{2}$.

12. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$.

13. $y = x\sqrt{x^2 - 1}$.

14. $y = \dfrac{\sqrt{2x - 1}}{x}$.

15. $y = \sqrt{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}$.

16. $y = \ln \ln x$.

17. $y = \ln^2 x$.

18. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

19. $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

20. $y = e^{-x}$.

21. $y = e^{x/2}$.

22. $y = e^{x^2}$.

23. $y = e^{-x^2}$.

24. $y = e^{1/x}$.

25. $y = 3^{-x/2}$.

26. $y = \arcsin \dfrac{x}{2}$.

27. $y = \arccos \dfrac{1}{x}$.

28. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

29. $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} \dfrac{x}{2}}$.

1.5. Логарифмічне диференціювання

Означення 5. Логарифмічною похідною функції $y = f(x)$ називається похідна від логарифма цієї функції, тобто

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}. \tag{1.9}$$

За допомогою логарифмичного диференціювання знаходять похідні степенево–показникової функції. Також зручно користуватися цим методом для диференціювання добутків і частки. У цих випадках враховуємо такі властивості логарифма:

$$\ln a^b = b \ln a, \quad \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

Приклад 15. Знайти похідну функції $y = (\cos x)^{\sin x}$.

Розв'язання. Ця функція степенево–показникова і немає загальних правил її диференціювання. Тому прологарифмуємо цю рівність та скористаємося властивостями логарифма:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln \cos x.$$

Продифенціювавши останню рівність, знайдемо логарифмичну похідну:

$$\begin{aligned}(\ln y)' = \frac{y'}{y} &= (\sin x \cdot \ln \cos x)' = \\ &= (\sin x)' \cdot \ln \cos x + \sin x \cdot (\ln \cos x)' = \\ &= \cos x \cdot \ln \cos x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}(\cos x)' = \\ &= \cos x \cdot \ln \cos x - \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \\ &= \cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}.\end{aligned}$$

Звідси остаточно знаходимо:

$$y' = (\ln y)' \cdot y = (\cos x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right).$$

□

Приклад 16. Знайти похідну функції $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо цю рівність та скористаємося властивостями логарифма:

$$\ln y = \frac{1}{2}\left(\ln x + \ln|x-1| - \ln|x-2|\right).$$

Продифенціювавши останню рівність, знайдемо

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right).$$

Звідси випливає

$$y' = (\ln y)' \cdot y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right)\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}} =$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}.$$

$\square$

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні методом логарифмічного диференціювання.

1. $y = x^x$.
2. $y = x^{\sin x}$.
3. $y = x^{\ln x}$.
4. $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.
5. $y = (\sin x)^{\arcsin x}$.
6. $y = (\ln x)^{1/x}$.
7. $y = \dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)}$.
8. $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x}}$.

1.6. Диференціал

Означення 6. Різниця $x - x_0$ двох значень x і x_0 аргументів функції називається *приростом аргументу в точці* x_0 і позначається символом

$$\triangle x = x - x_0. \tag{1.10}$$

Означення 7. Різниця $f(x) - f(x_0)$ значень функції в двох точках x і x_0 називається *приростом функції у точці* x_0 і позначається

$$\triangle f(x_0) = f(x) - f(x_0). \tag{1.11}$$

Приклад 17. Обчислити приріст функції $f(x) = 2x^2 - 1$ в точці $x_0 = 3$, якщо приріст аргументу $\triangle x = -0,2$.

Розв'язання. За умовами маємо одну точку $x_0 = 3$. В цій точці дана функція набуває таке значення:

$$f(x_0) = 2 \cdot 3^2 - 1 = 17.$$

Знайдемо іншу точку:

$$x = x_0 + \triangle x = 3 - 0,2 = 2,8.$$

Тоді за формулою (1.11) одержимо приріст функції:

$$\begin{aligned}\triangle f(x) = f(x) - f(x_0) = \\ = \big(2 \cdot 2,8^2 - 1\big) - \big(2 \cdot 3^2\big) = (2 \cdot 7,84 - 1) - (2 \cdot 9 - 1) = \\ = 15,68 - 1 - (18 - 1) = 14,68 - 17 = -2,32.\end{aligned}$$

Приріст функції вказує, як і наскільки зміниться значення функції, коли перейдемо від точці $x_0 = 3$ до точки $x = 2,8$. $\square$

Звернемо увагу на те, що приріст аргументу може бути як більше, так і менше нуля: знак приросту аргументу вказує, де на осі абсцис міститься точка x відносно точці x_0 — праворуч, або ліворуч.

Приріст функції також може бути як більше, так і менше нуля. Знак приросту функції вказує зменшиться або збільшиться значення функції, коли аргументу x буде надано певний приріст $\triangle x$.

Отже, приріст функції $y = f(x)$ в певній точці x, відповідній приросту аргументу функції $\triangle x$ визначається формулою:

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x).$$

Нагадаємо, що це різниця значень функції в двох точках.

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовна, тобто існує скінченна границя:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x). \tag{1.12}$$

Звідси випливає, що

$$\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x) + \alpha(\triangle x),$$

або

$$\triangle y = f'(x) \cdot \triangle x + \alpha(\triangle x) \cdot \triangle x.$$

Тут $\alpha(\triangle x)$ — нескінченно мала при $\triangle x \to 0$ величина.

Таким чином, приріст диференційовної функції складається з двох частин:

– перша частина є *лінійна однорідна функція* змінної $\triangle x$;

– друга частина при $\triangle x \to 0$ є нескінченно мала величина вищого порядку відносно $\triangle x$.

Означення 8. Лінійна (головна) частина приросту диференційовної функції називається *диференціалом функції* $y = f(x)$ в точці x і позначається символом

$$dy = f'(x)\triangle x. \tag{1.13}$$

Крім диференціала функції розглядається також *диференціал незалежної змінної.*

Означення 9. *Диференціалом незалежної змінної* dx називається її приріст $\triangle x$, тобто

$$dx = \triangle x. \tag{1.14}$$

Зауваження 7. Диференціал dx незалежної змінної може приймати будь–яке значення, а диференціал функції обчислюється за формулою $dy = f'(x)dx$.

Приклад 18. Знайти диференціал функції $y = x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $y = x^2$:

$$y' = \left(x^2\right)' = 2x.$$

Тоді маємо

$$dy = f'(x)dx = 2xdx.$$

$\square$

Завдання для самостійної роботи

А. Знайти диференціал функції.

1. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.
2. $y = \sqrt{1 + x^2}$.
3. $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.
4. $y = \ln\cos x$.

Б. Знайти $\triangle y$ і dy, якщо $y = x^3$ та x змінюється від 2 до $1,98$.

1.7. Геометричний зміст похідної та диференціалу

Побудуємо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, для чого скористаємось рівнянням прямій з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b. \tag{1.15}$$

Очевидно, що $y_0 = f(x_0)$.

Похідна в даній точці дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в цій точці:

$$k = f'(x_0). \tag{1.16}$$

Тому що крива проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, маємо

$$y_0 = kx_0 + b. \tag{1.17}$$

Віднімемо рівняння (1.17) з рівняння (1.15). Тоді, раховуючи (1.16), отримаємо рівняння *похилої дотичної* до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)\left(x - x_0\right), \tag{1.18}$$

де $y_0 = f(x_0)$.

Означення 10. *Нормаллю* до кривої в точці $M_0(x_0, y_0)$ називається пряма, яка є перпендикулярною до дотичної в точці дотику.

Тому що нормаль перпедикулярна до дотичної, її кутовий коефіцієнт $k_{\text{нор}}$ дорівнює:

$$k_{\text{нор}} = -\frac{1}{k_{\text{дот}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Отже, *рівняння нормалі* має вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0)\,. \tag{1.19}$$

Тут $y_0 = f(x_0)$.

Приклад 19. Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^3$ в точці $M_0(1, 1)$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до кривої має вигляд (1.18):

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

Тут $x_0 = 1$, $y_0 = f(x_0) = x^3\big|_{x=1} = 1$.

Шукаємо похідну функції $y = x^3$ в точці $M_0(1, 1)$:

$$y' = \left(x^3\right)' = 3x^2.$$

Звідси

$$f'(x_0) = f'(1) = 3x^2\big|_{x=1} = 3.$$

Тоді маємо рівняння дотичної

$$y - 1 = 3(x - 1), \qquad \text{або} \qquad y = 3x - 2,$$

та нормалі

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1), \qquad \text{або} \qquad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

□

Очевидно, що рівняння *вертикальної дотичної* до кривої з абсцисою x_0 має вигляд

$$x = x_0. \tag{1.20}$$

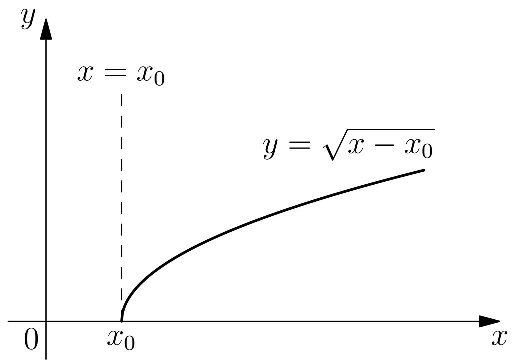

Рис. 1.3. Вертикальна дотична

Наприклад, функція $y = \sqrt{x - x_0}$ в точці $x = x_0$ має вертикальну дотичну, яка зображена на рис. 1.3.

За формулою (1.18) можна одержати геометричний зміст диференціалу функції. Насправді величину $x - x_0$ можна розглядати як приріст аргументу

$$\triangle x = x - x_0,$$

а праву частину формули (1.18) як диференціал

$$dy = f'(x_0)\triangle x.$$

функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$. Ліворуч маємо приріст функції:

$$\triangle y = y - y_0.$$

Таким чином з (1.18) випливає: *диференціал функції дорівнює приросту ординати дотичної* T *в точці* $M_0(x_0, y_0)$. На рис. 1.4 дотична позначена літерою T.

Зауваження 8. Диференціал функції dy не дорівнює її приросту $\triangle y$, диференціал може бути як менше так і більше приросту функції. Але іноді при малих значеннях прирісту аргументу $\triangle x$ можно прийняти, що приріст функції наближено дорівнює її диференціалу та скористатися цим для наближених обчислень. Тобто, якщо прийняти

$$\triangle f(x) = f(x) - f(x_0) \approx df(x) = f'(x_0)\,(x - x_0)\,,$$

тоді маємо таку формулу для наближеного обчислення значення функції у точці x, якщо відомо значення функції в точці x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,. \tag{1.21}$$

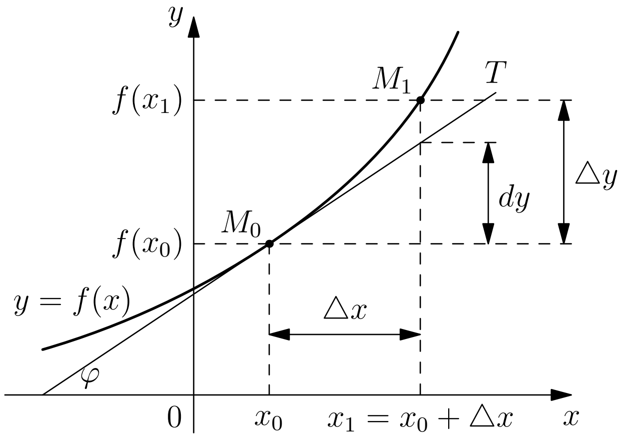

Рис. 1.4. Диференціал функції та її приріст

Приклад 20. Наближено обчислити $\operatorname{arctg} 0,98$.

Розв'язання. Звернемо увагу, що відомо таке значення:

$$\operatorname{arctg} 1 = \pi/4 \approx 0,785\ldots.$$

Тому візьмемо число $x_0 = 1$, як початкове значення. Тоді маємо

$$x = 0,98, \quad \triangle x = x - x_0 = 0,98 - 1 = -0,02.$$

Враховуючи похідну

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

за формулою (1.21) одержимо:

$$\operatorname{arctg} 0,98 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1+1^2}(-0,02) = 0,785 - \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 0,785 - 0,01 = 0,775.$$

Можна перевірити, що похибка відповіді у цьому прикладі менше 0.001. □

Завдання для самостійної роботи

Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої.

1. $y = x^2$ в точці $M(2,8)$;

2. $y = \sin x$ в точці $x = \pi$.

1.8. Похідні вищих порядків. Формула Лейбниця

1.8.1. Похідні вищих порядків

Звернемо увагу, що похідна залежить від точки $x = x_0$, в якій вона обчислюється, тобто *похідна є функція*, тому можна обчислити похідну похідної.

Означення 11. Похідна від похідної називається *похідною другого порядку*, або *другою похідною.*

Позначають другу похідну так:

$$y'' = f''(x), \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

Таким чином, щоб знайти похідну другого порядку функції $y = f(x)$, треба спочатку знайти похідну першого порядку y' цієї функції, а потім знайти похідну похідної першого порядку, тобто похідну функції y'. Отже, треба функцію продиференціювати два рази:

$$y'' = (y')'.$$

Аналогічно визначаються інші похідні вищого порядку.

Третя похідна — це похідна похідної другого порядку:

$$y''' = (y'')',$$

похідна n–го порядку — похідна похідної $(n-1)$–го порядку:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Зауваження 9. З визначення похідних вищих порядків випливає, що похідні вищих порядків обчислюються рекурентно (послідовно), похідна похідної. Таким чином, для обчислення похідних вищих порядків потрібні правила диференціювання та таблиця похідних, тобто уміння обчислювати похідну першого порядку.

Приклад 21. Знайти похідну другого порядку функції $y = \ln x$.

Розв'язання. Обчислюємо першу похідну функції $y = \ln x$. Очевидно, що

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Для находження похідної другого порядку диференціюємо y':

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

□

Приклад 22. Знайти похідну другого порядку функції $y = x^3 - 7x^2 + 4x + 5$.

Розв'язання. Знаходимо y':

$$y' = \left(x^3 - 7x^2 + 4x + 5\right)' = 3x^2 - 14x + 4.$$

Для находження похідної другого порядку диференціюємо y':

$$y'' = (y')' = \left(3x^2 - 14x + 4\right)' = 6x - 14.$$

□

Приклад 23. Знайти похідну другого порядку функції $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned} y' = \left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)' = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(1+x^2\right)'\right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned} y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' &= \left(\left(1+x^2\right)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-3/2}\left(1+x^2\right)' = \\ &= -\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-3/2} 2x = -\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

□

1.8.2. Формула Лейбниця

При обчислення похідних вищого порядку іноді зручно користуватися загальними формулами:

$$(C \cdot u)^{(n)} = C\,(u)^{(n)}, \quad C = \text{const}, \tag{1.22}$$

$$(u \pm v)^{(n)} = (u)^{(n)} \pm (u)^{(n)}, \tag{1.23}$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \ldots + C_n^n u^{(0)} v^{(n)}. \tag{1.24}$$

Остання формула називається *формулою Лейбніца.*

Тут $v^{(0)} = v(x)$, $u^{(0)} = u(x)$ — диференційвні до n – го порядку функції. Коефіцієнти формули Лейбніца (біномні коефіцієнти) обчислюється за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Наприклад:

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \quad C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ \ldots .$$

Тоді формулу Лейбница можна записати так:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)} v'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{(n-3)} v^{(3)} + \\ + \ldots + u v^{(n)}.$$

Приклад 24. Знайти похідну 5-го порядку функції $y = \sin x \cdot e^{-x}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned}
&(\sin x)' = \cos x, && (\sin x)'' = -\sin x, && (\sin x)^{(3)} = -\cos x, \\
&(\sin x)^{(4)} = \sin x, && (\sin x)^{(5)} = \cos x, && \\
&\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}, && \left(e^{-x}\right)'' = e^{-x}, && \left(e^{-x}\right)^{(3)} = -e^{-x}, \\
&\left(e^{-x}\right)^{(4)} = e^{-x}, && \left(e^{-x}\right)^{(5)} = -e^{-x}. &&
\end{aligned}$$

Враховуючи ці вирази, за формулою Лейбніца одержимо:

$$
\begin{aligned}
y^{(5)} &= \left(\sin x \cdot e^{-x}\right)^{(5)} = \\
&= \sin^{(5)} x \cdot e^{-x} + 5\sin^{(4)} x \cdot \left(e^{-x}\right)' + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\sin^{(3)} x \cdot \left(e^{-x}\right)'' + \\
&+ \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\sin'' x \cdot \left(e^{-x}\right)^{(3)} + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin' x \cdot \left(e^{-x}\right)^{(4)} + \sin x \cdot \left(e^{-x}\right)^{(5)} = \\
&= \cos x \cdot e^{-x} - 5\sin x \cdot e^{-x} - 10\cos x \cdot e^{-x} + \\
&+ 10\sin x \cdot e^{-x} + 5\cos x \cdot e^{-x} - \sin x \cdot e^{-x} = \\
&= 4e^{-x}\left(\sin x - \cos x\right).
\end{aligned}
$$

$\square$

Завдання для самостійної роботи

А. Знайти похідні другого порядку.
Зауваження 10. При виконанні двох останніх завдань скористатися методом логарифмичного диференціювання.

1. $y = \cos^2 x$.
2. $y = \operatorname{arctg} x^2$.
3. $y = e^{-x^2}$.
4. $y = x + \sin x$.
5. $y = x^2 e^{-x}$.
6. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$.
7. $y = x^{\sqrt{x}}$.
8. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Б. Знайти похідні функції вказаного порядку.

1. $y = \left(x^2 + x + 1\right)\sin x$, знайти $y^{(15)}$.
2. $y = \left(x^2 - x\right)e^x$, знайти $y^{(20)}$.
3. $y = x\log_2 x$, знайти $y^{(10)}$.

1.9. Диференціювання функції, яка задана параметрично

Нехай величини x і y задані як функції допоміжної величини (параметра) t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{1.25}$$

Система (1.25) устанавлює зв'язок між величинами x і y, тобто визначає певну функцію $y = f(x)$. Похідна параметрично заданої функції обчислюється за формулою:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{1.26}$$

Ця формула дозволяє знаходити похідну y'_x від функції, заданої параметрично, не знаходячи безпосередньо залежність y від x .

Приклад 25. Знайти похідну функції, заданої параметрично

$$\begin{cases} x = t^2 + t, \\ y = t^3 - 2t + 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо похідні функцій $x(t)$ і $y(t)$ відносно параметра t:

$$x'_t = \left(t^2 + t\right)'_t = 2t + 1,$$
$$y'_t = \left(t^3 - 2t + 1\right)'_t = 3t^2 - 2.$$

Тоді за формулою (1.26) одержимо:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t+1}{3t^2-2}.$$

□

Друга похідна функції $y = f(x)$, яка задана параметрично, обчислюється за формулою:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{dx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}. \tag{1.27}$$

Приклад 26. Знайти похідну другого порядку функції, якщо

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо похідні функцій $x(t)$ і $y(t)$ відносно параметру t:

$$x'_t = \left(t^2\right)'_t = 2t,$$
$$y'_t = \left(\frac{t^3}{3} - t\right)'_t = t^2 - 1.$$

$$x''_{tt} = (x'_t)' = (2t)'_t = 2,$$
$$y''_t = (y'_t)' = \left(t^2 - 1\right)'_t = 2t.$$

Тоді за формулою (1.27) одержимо:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{2t \cdot 2t - 2 \cdot \left(t^2 - 1\right)}{(2t)^3} = \frac{4t^2 - 2t^2 + 2}{4t^2} = \frac{2t^2 + 2}{8t^3} = \frac{t^2 + 1}{4t^3}.$$

□

Завдання для самостійної роботи

А. Знайти похідні другого порядку.

1. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t + t^3. \end{cases}$

1.10. Індивідуальні завдання

1. Знайти похідні функцій.

1.1. $y = 2x^5 - \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x}$.

1.2. $y = \dfrac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \dfrac{2}{x^4}$.

1.3. $y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2}$.

1.4. $y = 7x + \dfrac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4} + \dfrac{6}{x}$.

1.5. $y = 7x + \dfrac{5}{x^2} - \sqrt{7}x^4 + \dfrac{6}{x}$.

1.6. $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{5}{x}$.

1.7. $y = 3x^5 - \dfrac{3}{x} - \sqrt{x^3} + \dfrac{10}{x^5}$.

1.8. $y = \sqrt[3]{x^7} + \dfrac{3}{x} - 4x^6 + \dfrac{4}{x^5}$.

1.9. $y = 8x^2 + \dfrac{3}{x} - \sqrt{x^6} + \dfrac{4}{x^5}$.

1.10. $y = 4x^6 + \dfrac{5}{x} - \sqrt[3]{x^4} - \dfrac{7}{x^4}$.

1.11. $y = 2\sqrt{x^3} - \dfrac{7}{x} + 3x^2 - \dfrac{2}{x^5}$.

1.12. $y = 4x^3 - \dfrac{3}{x} - \sqrt[5]{x^2} + \dfrac{6}{x^2}$.

1.13. $y = 5x^3 - \dfrac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.

1.14. $y = \dfrac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \dfrac{2}{x} + 5x^4$.

1.15. $y = \dfrac{4}{x^5} - \dfrac{9}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 7x^3$.

1.16. $y = \dfrac{8}{x^3} + \dfrac{3}{x} - 4\sqrt{x^3} + 2x^7$.

1.17. $y = 5x^2 + \dfrac{4}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \dfrac{2}{x^6}$.

1.18. $y = 10x^2 + \sqrt{x^5} - \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{x^4}$.

1.19. $y = \sqrt{x^5} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^3} - 3x^3$.

1.20. $y = 9x^3 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}$.

1.21. $y = 3\sqrt{x} + \dfrac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{7}{x}$.

1.22. $y = \sqrt{x^3} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^5} - 5x^3$.

1.23. $y = 7x^2 + \dfrac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \dfrac{8}{x^3}$.

1.24. $y = 8x^3 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{7}{x^4} + \sqrt[7]{x^2}$.

1.25. $y = 8x - \dfrac{5}{x^4} + \dfrac{1}{x} - \sqrt[5]{x^4}$.

1.26. $y = \sqrt[4]{x^3} - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^5} + 3x$.

1.27. $y = 4x^3 + \dfrac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \dfrac{2}{x^4}$.

1.28. $y = 4x^5 - \dfrac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \dfrac{2}{x^3}$.

1.29. $y = \dfrac{7}{x} + \dfrac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6$.

1.30. $y = \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}$.

2. Знайти похідні функцій.

2.1. $y = \dfrac{3x-2}{3x^2+8}$.

2.2. $y = \dfrac{3x^2-2}{x-1}$.

2.3. $y = \dfrac{10x-8}{x^2+4}$.

2.4. $y = \dfrac{2x^2-3}{3x-4}$.

2.5. $y = \dfrac{7x-12}{11x+15}$.

2.6. $y = \dfrac{x^2-8}{x^2-6}$.

2.7. $y = \dfrac{17x+35}{x-20}$.

2.8. $y = \dfrac{2x^2}{x^2+4}$.

2.9. $y = \dfrac{x^2-16x}{5x-2}$.

2.10. $y = \dfrac{3x^2+2x}{x^2-1}$.

2.11. $y = \dfrac{x-3}{x^2+7}$.

2.12. $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$.

2.13. $y = \dfrac{x^2+5}{x^2}$.

2.14. $y = \dfrac{14x-5}{6x+5}$.

2.15. $y = \dfrac{3x^2+2}{x^2+6}$.

2.16. $y = \dfrac{9x+2}{3x-10}$.

2.17. $y = \dfrac{5x^2+1}{x^2-6}$.

2.18. $y = \dfrac{x^2}{2x^2+3}$.

2.19. $y = \dfrac{x+6}{4x-3}$.

2.20. $y = \dfrac{x^2+5}{x^2-7}$.

2.21. $y = \dfrac{-x-12}{4x+3}$.

2.22. $y = \dfrac{7x-2}{x^2}$.

2.23. $y = \dfrac{x^2 - x}{x + 16}$.

2.24. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x - 3}$.

2.25. $y = \dfrac{2 - 3x}{3 - 2x^2}$.

2.26. $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 3}$.

2.27. $y = \dfrac{3x - 14}{7x + 2}$.

2.28. $y = \dfrac{x^2 - 10}{x^2 - 3}$.

2.29. $y = \dfrac{7x - 5}{x^2 + 5x}$.

2.30. $y = \dfrac{x - 9}{3x^2 - 10}$.

3. Знайти похідні функцій.

3.1. $y = \sin\sqrt{x^2 - 4}$.

3.2. $y = \cos\sqrt{3 - 2x^2}$.

3.3. $y = \operatorname{tg}\sqrt{x^2 + 4}$.

3.4. $y = \operatorname{ctg}\sqrt{6 - x^2}$.

3.5. $y = \arcsin\sqrt{x + 1}$.

3.6. $y = \arccos\sqrt{2x + 1}$.

3.7. $y = e^{\sqrt{9 - x}}$.

3.8. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 16}$.

3.9. $y = 2^{\sqrt{2x + 3}}$.

3.10. $y = \ln\sqrt{x^2 + 9}$.

3.11. $y = 3^{\sqrt{5x + 1}}$.

3.12. $y = \sin\sqrt{4 - 3x}$.

3.13. $y = \cos\sqrt{5x - 1}$.

3.14. $y = \operatorname{tg}\sqrt{2x - 1}$.

3.15. $y = \ln\sqrt{4x + 1}$.

3.16. $y = e^{\sqrt{x^2 - 25}}$.

3.17. $y = \arcsin\sqrt{9 - x}$.

3.18. $y = \operatorname{ctg}\sqrt{3x + 10}$.

3.19. $y = 2^{\sqrt{9 - 4x}}$.

3.20. $y = \ln\sqrt{1 - 2x}$.

3.21. $y = \sin\sqrt{1 - 3x^2}$.

3.22. $y = \operatorname{tg}\sqrt{2x^2 - 1}$.

3.23. $y = \cos\sqrt{1 + 3x}$.

3.24. $y = \arccos\sqrt{2x - 1}$.

3.25. $y = \cos\sqrt{6x + 1}$.

3.26. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x - 1}$.

3.27. $y = \ln\sqrt{x^2-81}$.

3.28. $y = e^{\sqrt{x^2-25}}$.

3.29 $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$.

3.30. $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{1-x^2}$.

4. Знайти похідні функцій

4.1. $y = (3x-7)\sin^2 5x$.

4.2. $y = (5x-3)^3\cos 3x$.

4.3. $y = (2-7x)^2\arcsin 3x$.

4.4. $y = (2x-3)\operatorname{tg}^2 x$.

4.5. $y = (3x-4)^4\operatorname{arctg} 2x$.

4.6. $y = (5x+1)^5\sin 2x$.

4.7. $y = (4x+5)\sin^2 4x$.

4.8. $y = (7x-3)^2\arcsin 2x$.

4.9. $y = (1-7x)^{-3}\cos 4x$.

4.10. $y = (5x+2)\arcsin^2 x$.

4.11. $y = (2-x)\operatorname{tg}^2 4x$.

4.12. $y = (3x-2)^3\sin 5x$.

4.13. $y = (1-7x)^7\operatorname{arctg} 2x$.

4.14. $y = (7x+1)^{-2}\cos 4x$.

4.15. $y = (2x-3)^4\arcsin 3x$.

4.16. $y = (4x+3)\sin^2 3x$.

4.17. $y = (1-x)^5\operatorname{tg} 2x$.

4.18. $y = (7x-5)^{-3}\operatorname{arctg} 7x$.

4.19. $y = (4x-2)^7\cos 2x$.

4.20. $y = (5-2x)^9\sin 3x$.

4.21. $y = (1-2x)^2\operatorname{arctg} 3x$.

4.22. $y = (3x+2)^3\operatorname{tg} 6x$.

4.23. $y = (3x+5)^4\cos 4x$.

4.24. $y = (7-3x)^5\sin 2x$.

4.25. $y = \left(x^2-1\right)\arcsin^2 5x$.

4.26. $y = (3x+7)^2\operatorname{tg} 3x$.

4.27. $y = (6x-7)\sin^2 5x$.

4.28. $y = (2x+9)\operatorname{arctg}^2 3x$.

4.29. $y = (2-5x)^3\operatorname{tg} 2x$.

4.30. $y = (5x+3)^4\arcsin 2x$.

5. Знайти похідну другого порядку y'' у точці x_0.

5.1. $y = \sin^2 x, \quad x_0 = \pi/2.$

5.2. $y = \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 1.$

5.3. $y = \ln(2 + x^2), \quad x_0 = 0.$

5.4. $y = e^x \cos x, \quad x_0 = 0.$

5.5. $y = e^x \sin 2x, \quad x_0 = 0.$

5.6. $y = e^{-x} \cos x, \quad x_0 = 0.$

5.7. $y = \sin 2x, \quad x_0 = \pi.$

5.8. $y = (2x + 1)^5, \quad x_0 = 1.$

5.9. $y = \ln(1 + x), \quad x_0 = 2.$

5.10. $y = x^2 e^x, \quad x_0 = 0.$

5.11. $y = \arcsin x, \quad x_0 = 0.$

5.12. $y = (5x - 4)^5, \quad x_0 = 2.$

5.13. $y = x \arcsin x, \quad x_0 = 0.$

5.14. $y = x^2 \ln x, \quad x_0 = 1/3.$

5.15. $y = x \cos 2x, \quad x_0 = \pi/12.$

5.16. $y = x \sin 2x, \quad x_0 = -\pi/4.$

5.17. $y = x^4 \ln x, \quad x_0 = 1.$

5.18. $y = x + \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 1.$

5.19. $y = \cos^2 x, \quad x_0 = \pi/4.$

5.20. $y = \ln\left(x^2 - 4\right), \quad x_0 = 3.$

5.21. $y = x^2 \cos x, \quad x_0 = \pi/2.$

5.22. $y = x \arccos x, \quad x_0 = \sqrt{3}/2.$

5.23. $y = (x + 1)\ln(x + 1),$
$x_0 = -1/2.$

5.24. $y = \ln^3 x, \quad x_0 = 1.$

5.25. $y = 2^{x^2}, \quad x_0 = 1.$

5.26. $y = (4x - 3)^5, \quad x_0 = 1.$

5.27. $y = x \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 2.$

5.28. $y = (7x - 4)^5, \quad x_0 = 1.$

5.29. $y = x \sin 2x, \quad x_0 = \pi/4.$

5.30. $y = \sin(x^3 + \pi), \quad x_0 = \sqrt[3]{\pi}.$

6. Побудувати дотичну до кривої.

6.1. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 7x + 3$ в точці з абсциссою $x = 1$.

6.2. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x - 4}$ в точці з абсциссою $x = 8$.

6.3. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 16x + 7$ в точці з абсциссою $x = 1$.

6.4. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x+4}$ в точці з абсциссою $x = -3$.

6.5. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ в точці $(2, 1)$.

6.6. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ в точці $(1, 1)$.

6.7. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 6x + 2$ в точці з абсциссою $x = 2$.

6.8. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^2/4 - x + 5$ в точці з абсциссою $x = 4$.

6.9. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^3/3 - 27x + 60$ в точці з абсциссою $x = 3$.

6.10. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^2/2 + 7x - 15$ в точці з абсциссою $x = 2$.

6.11. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = 3\operatorname{tg} 2x + 1$ в точці з абсциссою $x = \pi/2$.

6.12. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = 4\operatorname{tg} 3x$ в точці з абсциссою $x = \pi/9$.

6.13. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = 6\operatorname{tg} 5x$ в точці з абсциссою $x = \pi/20$.

6.14. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = 4\sin 6x$ в точці з абсциссою $x = \pi/18$.

6.15. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = \sin 2x$ в точці з абсциссою $x = \pi/6$.

6.16. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - x^2 - 7x + 9$ в точці з абсциссою $x = 1$.

6.17. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 4$ в точці $(1, 7)$.

6.18. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 9x^2 + 20x - 7$ в точці $(2, 5)$.

6.19. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^4/4 - 7$ в точці з абсциссою $x = 1$.

6.20. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = -3x^2 + 4x + 7$ в точці з абсциссою $x = 1$.

6.21. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = 3x^2/2 - 4x + 4$ в точці з абсциссою $x = 2$.

6.22. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = 5x^2 - 4x + 1$ в точці з абсциссою $x = 1$.

6.23. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = 3x^2 - 5x - 11$ в точці з абсциссою $x = 2$.

6.24. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = -4x^2 + 7x + 16$ в точці з абсциссою $x = 2$.

6.25. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = 5x^2 - 7x + 4$ в точці з абсциссою $x = 3$.

6.26. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = 7x^2 - 5x + 1$ в точці з абсциссою $x = 1$.

6.27. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{5 - x^2} + 1$ в точці з абсциссою $x = 1$.

6.28. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^2/4 - 7x + 5$ в точці з абсциссою $x = 4$.

6.29. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = \operatorname{arctg} 5x$ в точці з абсциссою $x = \pi/20$.

6.30. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = \sin^2 2x$ в точці з абсциссою $x = \pi/6$.

Зауваження 11. При диференціюванні степеневих функцій треба враховувати їх властивості:

$$\sqrt[k]{x^m} = x^{\frac{m}{k}}, \quad \frac{x^m}{x^k} = x^{m-k}, \quad \frac{1}{x^k} = x^{-k}.$$

Приклад виконання завдання

Вариант 30
Знайти похідні функцій:

1.30. $y = \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}.$

$$y' = \left(\frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}\right)' =$$

$$= \left(\frac{6}{x^4}\right)' - \left(\frac{3}{x}\right)' + \left(3x^3\right)' - \left(\sqrt{x^7}\right)' =$$

$$= 6\left(x^{-4}\right)' - 3\left(x^{-1}\right)' + 3\left(x^3\right)' - \left(x^{\frac{7}{2}}\right)' =$$

$$= 6 \cdot (-4)x^{-4-1} - 3 \cdot (-1)x^{-1-1} + 3 \cdot 3x^{3-1} - \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} =$$

$$= -24x^{-5} + 3x^{-2} - 9x^2 - \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} =$$

$$= -\frac{24}{x^5} + \frac{3}{x^2} - 9x^2 - \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}.$$

2.30. $y = \dfrac{x-9}{3x^2-10}.$

$$y' = \left(\frac{x-9}{3x^2-10}\right)' = \frac{(x-9)'(3x^2-10) - (x-9)(3x^2-10)'}{\left(3x^2-10\right)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (3x^2-10) - (x-9) \cdot 3 \cdot 2x}{\left(3x^2-10\right)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 - 10 - 6x^2 + 36x}{\left(3x^2-10\right)^2} = \frac{-3x^2 + 36x - 10}{\left(3x^2-10\right)^2}.$$

3.30. $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{1-x^2}.$

$$y' = \left(\operatorname{arcctg}\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{1}{1+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)' =$$
$$= -\frac{1}{1+1-x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(1-x^2\right)' =$$
$$= -\frac{1}{2-x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = \frac{x}{2-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.30. $y = (5x+3)^4 \arcsin 2x.$

$$y' = \left((5x+3)^4\arcsin 2x\right)' = \left((5x+3)^4\right)'\cdot\arcsin 2x + (5x+3)^4\cdot(\arcsin 2x)' =$$
$$= 4\,(5x+3)^{4-1}\cdot(5x+3)'\cdot\arcsin 2x + (5x+3)^4\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)' =$$
$$= 4\,(5x+3)^3\cdot 5\cdot\arcsin 2x + (5x+3)^4\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot 2 =$$
$$= 20\,(5x+3)^3\arcsin 2x + \frac{2\,(5x+3)^4}{\sqrt{1-(2x)^2}}.$$

Знайти похідну другого порядка y'' в точці x_0.
5.30. $y = \sin(x^3+\pi)$, $x_0 = \sqrt[3]{\pi}$.

Розв'язання. Знайдемо похідну першого порядку:

$$y' = \left(\sin(x^3+\pi)\right)' = \cos(x^3+\pi)\cdot\left(x^3+\pi\right)' =$$
$$= \cos(x^3+\pi)\cdot 3x^{3-1} = \cos(x^3+\pi)\cdot 3x^2.$$

Знайдемо похідну другого порядку:

$$y'' = \left(\cos(x^3+\pi)\cdot 3x^2\right)' = 3\left(\left(\cos(x^3+\pi)\right)'\cdot x^2 + \cos(x^3+\pi)\cdot\left(x^2\right)'\right) =$$
$$= 3\left(-\sin(x^3+\pi)\left((x^3+\pi)\right)'\cdot x^2 + \cos(x^3+\pi)\cdot 2\cdot x\right) =$$
$$= 3\left(-\sin(x^3+\pi)\cdot 3\cdot x^2\cdot x^2 + 2x\cos(x^3+\pi)\right) =$$
$$= -9x^4\sin(x^3+\pi) + 6x\cos(x^3+\pi).$$

Знайдемо значення похідної другого порядку в точці $x_0 = \sqrt[3]{\pi}$:

$$y''(x_0) = y''(\sqrt[3]{\pi}) = -9 \cdot (\sqrt[3]{\pi})^4 \cdot \sin((\sqrt[3]{\pi})^3 + \pi) + 6 \cdot \sqrt[3]{\pi} \cdot \cos((\sqrt[3]{\pi})^3 + \pi) =$$
$$= -9\pi^{\frac{4}{3}} \sin(\pi + \pi) + 6\sqrt[3]{\pi} \cos(\pi + \pi) =$$
$$= -9\pi^{\frac{4}{3}} \sin(2\pi) + 6(\sqrt[3]{\pi}) \cos(2\pi) = 6\sqrt[3]{\pi}.$$

$\square$

6.30. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = \sin^2 2x$ в точці з абсциссою $x = \pi/6$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці (x_0, y_0) має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Тут $y_0 = f(x_0)$.

Знайдемо значення функції та її похідної в даній точці $x_0 = \pi/6$:

$$y' = \left(\sin^2 2x\right)' = 2 \sin 2x \,(\sin 2x)' = 2 \sin 2x \cos 2x (2x)' = 4 \sin 2x \cos 2x.$$
$$y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \sin(2 \cdot \frac{\pi}{6}) \cos(2 \cdot \frac{\pi}{6}) = 4 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$
$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Підставляючи знайдені значення до рівняння дотичної, одержимо:

$$y - \frac{3}{4} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$\square$

2. Застосування похідної

2.1. Правила Лопіталя

Розглянемо відношення
$$\frac{f(x)}{g(x)},$$
де функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і диференційовні в деякому околі точці $x = a$, за винятком, можливо, $x = a$.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є нескінченно малі, або нескінченно великі в точці $x = a$. Тоді відношення функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ являє *невизначеність* типу $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$, або $\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|$. Відношення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ може мати границю в точці $x = a$.

Знаходження границі відношення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ називають *розкриття невизначеності.*

Одним із засобів розкриття невизначеностей типу $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$, або $\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|$ є *правила Лопіталя.*

Теорема 1. *Границя відношення двох нескінченно малих, або нескінченно великих функцій дорівнює границі похідних цих функцій, якщо остання існує:*
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Приклад 27. Користуючись правилом Лопіталя, знайти границю функції
$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}.$$

Розв'язання.
$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{\cos x} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2.$$

$\square$

Приклад 28. Користуючись правилом Лопіталя, знайти границю функції

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln x}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{1}=\infty.$$

Зауваження 12. Степенева функція зростає швидче, ніж логарифмічна.

$\square$

Приклад 29. Користуючись правилом Лопіталя, знайти границю функції

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=\infty.$$

Зауваження 13. В цьому прикладі правило Лопіталя було використовано двічі.

Зауваження 14. Експоненціальна функція зростає швидче, ніж степенева.

$\square$

При обчисленні границі добутку двох функцій $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)$, де $f(x)$ — нескінченно мала, а $g(x)$ — нескінченно велика функції при $x\to a$, одержимо невизначенність типу $\|0\cdot\infty\|$. Тому спочатку треба перетворити добуток до дробу вигляду

$$\frac{f(x)}{1/g(x)},\quad\left(\text{або до дробу}\quad\frac{g(x)}{1/f(x)}\right)$$

тоді одержимо невизначенність типу $\left\|\frac{0}{0}\right\|$, (або $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$) і можна буде скористатися правилом Лопіталя.

Приклад 30. Користуючись правилом Лопіталя, знайти границю функції

$$\lim_{x\to+0} x\ln x.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \|0\cdot\infty\| = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0.$$

□

Приклад 31. Користуючись правилом Лопіталя, знайти границю функції

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right)$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right) = \|\infty-\infty\| = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x - 1}{\cos x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{(\sin x - 1)'}{(\cos x)'} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

□

Завдання для самостійної роботи

Знайти границі функцій, використовуючи правила Лопіталя.

1. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2}{x^2-x-6}$.

4. $\lim\limits_{x\to1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

8. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

9. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$.

10. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x-1}{x^2-x+1}$.

11. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x\sqrt{x}+1}{\sqrt{3x^2+1}}$.

12. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3-3x}{5x^3+4x-3}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 7x}-1}{x^2+3x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 5x}{\ln(1+x)}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2\ln x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x-2^x}{\ln(1+x)}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x-\sin x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

27. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

2.2. Дослідження функції та побудова її графіка

2.2.1. Деякі властивості функцій

Залежність між двома змінними величинами x і y, коли кожному значенню змінної величини x ставится у відповідність певне значення величини y, називається *функцією* $y = f(x)$. Змінна x називається *незалежної змінної* або *аргументом* функції, а змінна y називається *залежною змінною* або *функцією.*

Означення 12. Сукупність всіх значень незалежної змінної величини x, при яких функція визначена, називається *областю визначення функції.*

Звичайно функцію задають *аналітично*, тобто у вигляді *формули*, яка описує *алгоритм* обчислення значення функції y. Щоб уявити поведінку функції, будують *графік* функції.

Означення 13. *Графіком функції* $y = f\,(x)$ називається геометричне місце точок площини, координати (x, y) яких пов'язані співвідношенням $y = f\,(x)$. Рівність $y = f\,(x)$ називається *рівнянням* графіка.

На осі Ox (абсцис) відкладається аргумент функції, а на осі Oy (ординат) — її значення. Отже, график функції — це лінія, рівнянням якої є рівність $y = f\,(x)$, яка визначаєть функцію.

Означення 14. Функція $f(x)$ називається *парною*, якщо область визначення симметрична відносно початку координат (точки $x = 0$) і виконується умова

$$f(-x) = f(x). \tag{2.1}$$

Якщо функція парна, то її графік симетричен відносно *осі ординат.* Наприклад, розглянемо функцію $f(x) = x^2$. Область визначення цієї функції вся множина дійсніх чисел, тобто область визначення симметрична відносно початку координат. Крім того віконується умова симетричності (2.1):

$$f(-x) = (-x)^2 = (x)^2 = f(x).$$

Отже, функція $f(x) = x^2$ парна. Її график наведено на рис. 2.1. На графіку позначені значення функції у симетричних точках $x = 2$ та $x = -2$, ці значення рівні один одному.

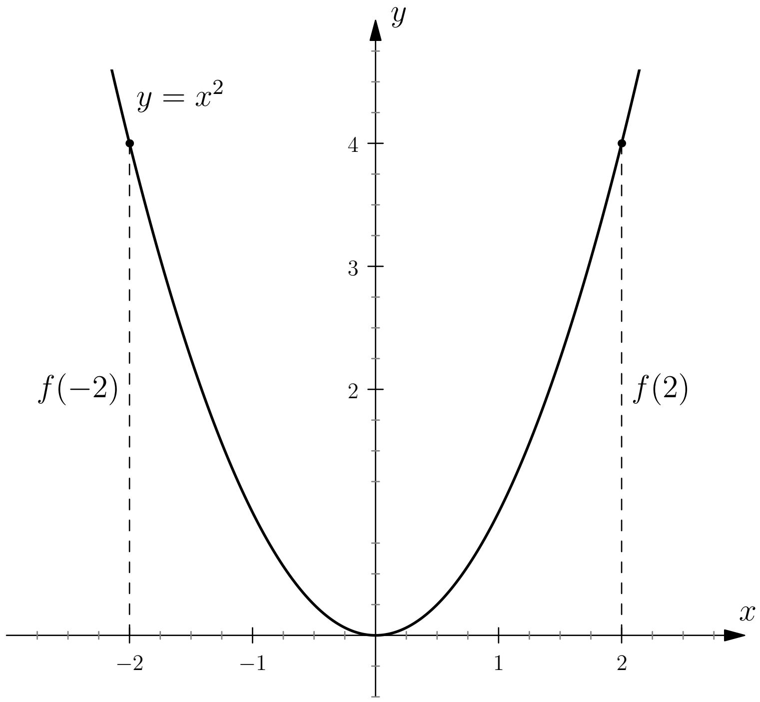

Рис. 2.1. Парна функція $y = x^2$

Означення 15. Функція $f(x)$ называется *непарною*, якщо область визначення симметрична відносно початку координат (точки $x = 0$) і виконується умова

$$f(-x) = -f(x). \tag{2.2}$$

Графік непарної функції симетричен відносно *початку координат.*

Функція $f(x) = x^3$ — непарна. Графік функції $f(x) = x^3$ наведено на рис. 2.2. Її область визначення симетрична відносно початку координат і виконується умова (2.2):

$$f(-x) = (-x)^3 = -(x)^3 = -f(x).$$

Функція загального виду симетрії не має.

На рис. 2.3 наведено графік функції $y = e^x$. Це функція загального вигляду, тому що для експоненти не виконуються ні умови парности, ні умови непарности:

$$f(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{f(x)} \neq \pm f(x).$$

Зауважимо, що

$$f(1) = e^1 = e = 2,718\ldots, \quad \text{але} \quad f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0,367\ldots.$$

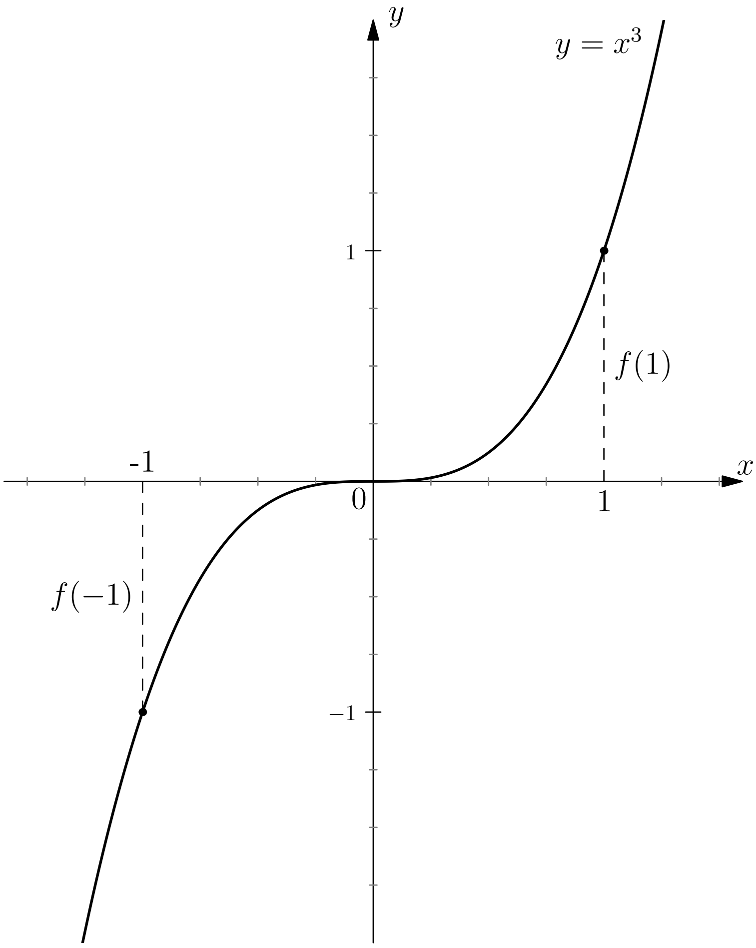

Рис. 2.2. Непарна функція $y = x^3$

Означення 16. Функція $f(x)$ называется *періодичною*, якщо вона визначенна на всій множині дійсних чисел та існує таке додатне число T, що виконується умова

$$f(x + T) = f(x). \tag{2.3}$$

Найменше з таких чисел T називається *періодом функції*.

Наприклад, функція $f(x) = \sin x$ періодична с періодом 2π: вона визначена на всій множині дійсних чисел і для неї виконується умова:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Функція $\operatorname{tg} x$ періодична с періодом π:

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x.$$

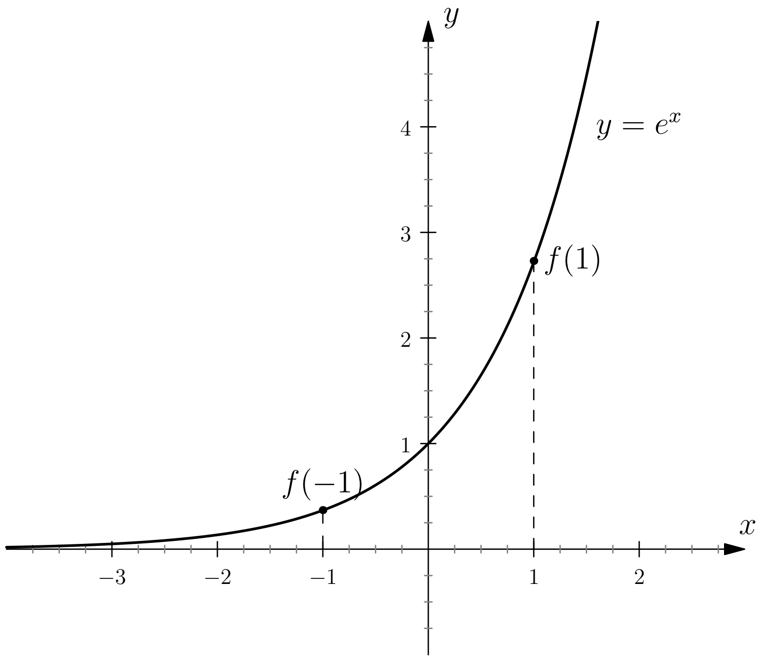

Рис. 2.3. Функція загального вигляду $y = e^x$

2.2.2. Зростання, спадання функції. Точки екстремума

Означення 17. Функція $f(x)$ називається *спадною* на певному проміжку, якщо більшому значенню аргумента відповідає менше значення функції.

Отже, якщо функція $f(x)$ спадає на проміжку X, то для будь–яких двох точок x_1 і x_2 з цього проміжка, таких що

$$x_1 < x_2,$$

виконується умова

$$f(x_1) > f(x_2)$$

(див. рис. 2.4).

Означення 18. Функція $f(x)$ називається *зростаючою* на певному проміжку, якщо більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції.

Таким чином, функція $f(x)$ зростає на проміжку X, якщо з нерівності

$$x_1 < x_2,$$

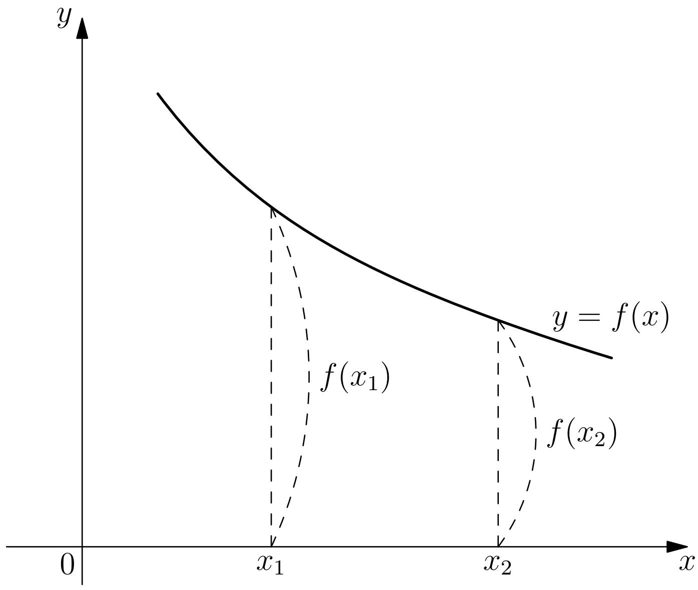

Рис. 2.4. Спадна функція

випливає умова

$$f(x_1) < f(x_2)$$

(див. рис. 2.5).

Теорема 2. *Якщо функція $f(x)$ має на проміжку X похідну і ця похідна дотатна, то функція $f(x)$ на проміжку X зростає; якщо похідна від'ємна, то функція $f(x)$ — спадає.*

Очевидно, що у точках зміни знаку похідної похідна або дорівнює нулю, або не існує. Отже, точки зміни знаку похідної ділять область визначення функції на інтервали зростання та спадання функції. Такі інтервали називаються *інтервалами монотоності.*

Приклад 32. Знайти інтервали зростання і спадання функції

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Розв'язання. Ця функція визначена при будь–якому x:

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

Знайдемо похідну:

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x + 1\right)' = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right).$$

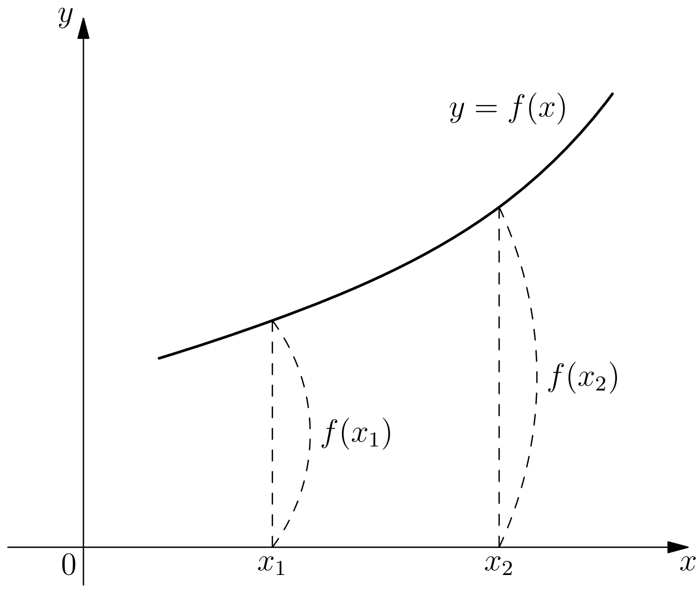

Рис. 2.5. Зростаюча функція

Похідна дорівнює нулю в точках

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 1.$$

Ці точки ділять область визначення $(-\infty, +\infty)$ на три інтервали:

$$(-\infty, -1), \qquad (-1, +1), \qquad (+1, +\infty),$$

на кожному з яких похідна зберегає свій знак.

В інтервалах $(-\infty, -1)$ і $(+1, +\infty)$ похідна додатна, тому функція зростає. В інтервалі $(-1, +1)$ похідна від'ємна і функція спадає. Результати зручно помістити до таблиці:

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

График даної функції наведено на рис. 2.6. $\square$

Слід зауважити, що коли неперервна функція спочатку зростає, а потім починає спадати, то існує точка, в який функція набуває *найбільшего значення* порівняно із значеннями, які вона набуває в досіть близких точках.

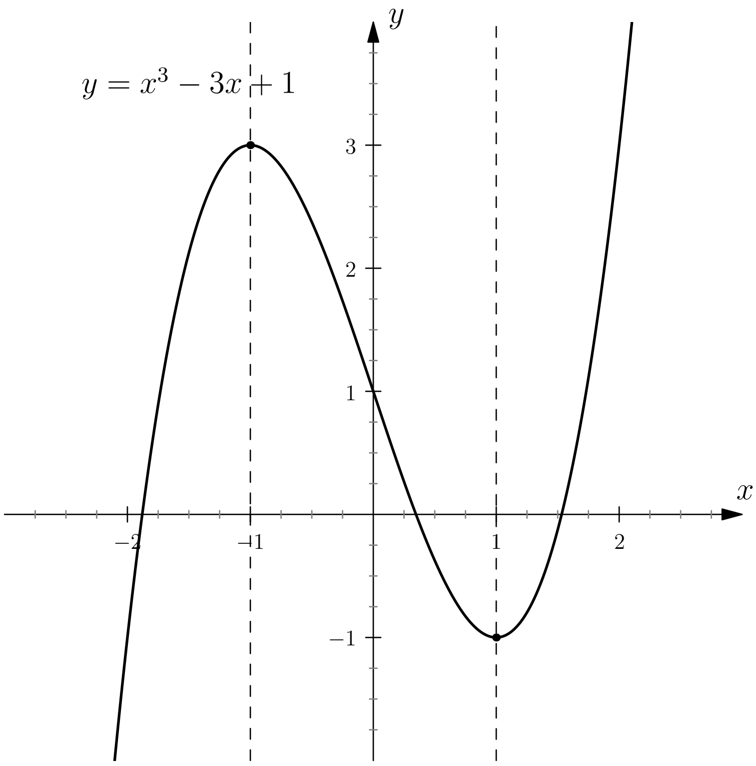

Рис. 2.6. Функція $y = x^3 - 3x + 1$

Аналогично, коли неперервна функція спочатку спадає, а потім зростає, то існує точка, у який вона набуває *найменше значення.*

Означення 19. Якщо існує такий окіл точки x_0, в якому задовольняється нерівність

$$f(x_0) > f(x),$$

то точка x_0 називається точкою *локального максимуму* функції $f(x)$, а значення функції (число) $f(x_0)$ у точці x_0 називається *максимумом* функції $f(x)$ (рис. 2.7).

Аналогично визначається точка локального мінімума.

Означення 20. Якщо існує такий окіл точки x_0, в якому задовольняється нерівність

$$f(x_0) < f(x),$$

то точка x_0 називається точкою *локального мінімуму* функції $f(x)$, а значення функції (число) $f(x_0)$ у точці x_0 називається *мінімумом* функції $f(x)$ (рис. 2.8).

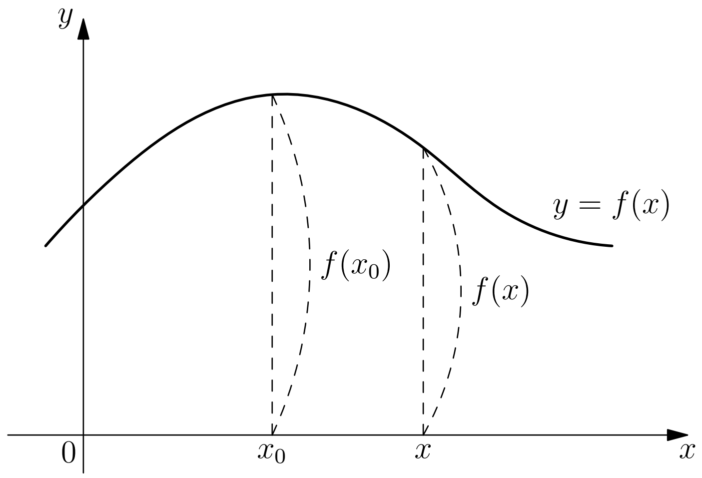

Рис. 2.7. Локальний максимум

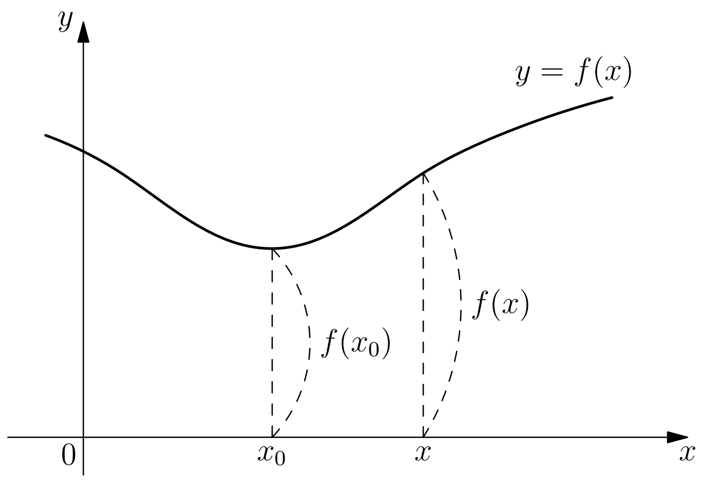

Рис. 2.8. Локальний мінімум

Означення 21. Точки максимуму і мінімуму функції називаються *точками екстремуму* функції, а значення функції в точках мінімуму и максимуму — *екстремумами функції*.

Зауваження 15. Тому що похідна функції в точках екстремуму дорівнює нулю означає, що дотична в точках екстремума паралельна осі абсцис.

На рис. 2.6 точками позначено екстремуми функції $y = x^3 - 3x + 1$, причому в точці $x = -1$ функція набуває максимальне значення

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3,$$

та у точці $x = 1$ функція набуває мінімальне значення

$$f(1) = (1)^3 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1.$$

Теорема 3 (Необхідна умова існування екстремуму)**.** *Якщо функція $f(x)$ має в точці $x = x_0$ екстремум, то похідна функції або дорівнює нулю, або не існує.*

Насправді, коли похідна функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ додатна, то функція в цієї точці зростає і екстремуму не має; якщо похідна функції $f(x)$ від'ємна в точці $x = x_0$, то функція спадає і теж не має екстремуму. Таким чином, функція може мати екстремум тільки в тих точках, в яких похідна дорівнює нулю, або не існує.

Означення 22. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними*.

Теорема 4 (Достатня умова існування екстремуму)**.** *Нехай x_0 – критична точка функці $f(x)$. Якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює свій знак, то функція має в точці x_0 екстремум, причому:*

1) функція $f(x)$ має максимум при $x = x_0$, якщо знак похідної змінюється з плюса на мінус;

2) функція $f(x)$ має мінімум при $x = x_0$, якщо знак похідної змінюється з мінуса на плюс.

Якщо похідна знака не змінює, то екстремуму в точці $x = x_0$ не має.

Приклад 33. Дослідити на екстремум функцію: $y = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3.$

Розв'язання. Область визначення має вигляд:

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

Знайдемо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує. Для цього знайдемо похідну:

$$y' = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right)' = x^3 + 2x^2 = x^2\left(x + 2\right).$$

Прирівнюємо похідну до нуля. Тоді одержимо такі критичні точки:

$$x_1 = -2, \qquad x_{2,3} = 0.$$

Ці точки ділять область визначення $(-\infty, +\infty)$ на три інтервали:

$$(-\infty, -2), \qquad (-2, 0), \qquad (0, +\infty),$$

на кожному з яких похідна зберегає свій знак.

В інтервалі $(-\infty, -2)$ похідна від'ємна, тому функція спадає. В інтервалах $(-2, 0)$ та $(0, +\infty)$ похідна додатна і функція зростає.

Отже, при переході через точку $x_1 = -2$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, тому у цій точці функція має мінімум, який дорівнює

$$f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^4 + \frac{2}{3}(-2)^3 = \frac{16}{4} - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}.$$

При переході через точку $x_1 = 0$ похідна знак не змінює, тому в цій точці функція екстремуму не має.

Результати дослідження помістимо до таблиці:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	< 0	0	> 0	0	> 0
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$ min	$\nearrow$	0 немає	$\nearrow$

$\square$

Графік функції $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3}$ наведено на рис. 2.9. Звернемо увагу, що точка $x = -2$ — це точка мінімуму, а у точці $x = 0$ екстремуму немає, це точка перегину.

Іноді потрібно знайти найбільше і найменше значення неперервної функції, яка визначена на відрізку. Ці значення неперервна функція може набувати як у внутрішніх точках даного відрізка, так на його кінцях, причому в середині відрізка функція може набувати найбільшого і найменшого значень тільки в критичних точках. В цьому випадку немає потреби перевіряти достатні умови існування екстремуму функції в критичних точках. Досить обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка та порівняти ці значення. Найбільше і найменше з усіх чисел й буде відповідно найбільшим і найменьшим значенням функції на даному відрізку.

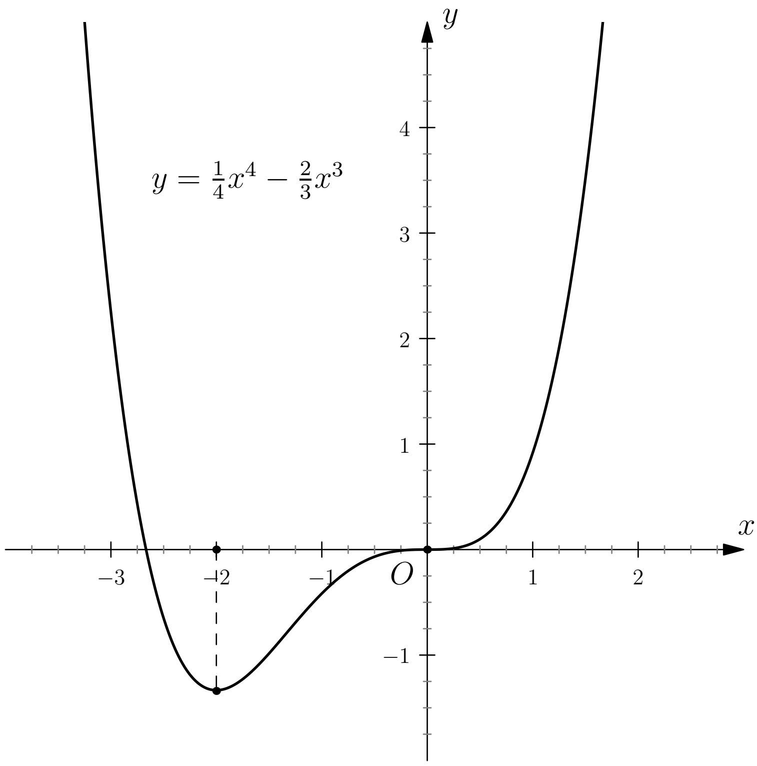

Рис. 2.9. Функція $y = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3$

Приклад 34. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 3x - x^3$ на відрізку $[0; 3]$.

Розв'язання. Функція набуває найбільшого і найменшого значень або в критичних точках, або на кінцях даного відрізка.

Знайдемо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує. Для цього знайдемо похідну:

$$y' = \left(3x - x^3\right)' = 3 - 3x^2 = 3\left(1 - x^2\right).$$

Прирівнюючи цю похідну до нуля і розв'язуючи рівняння

$$1 - x^2 = 0,$$

одержимо критичні точки:

$$x_1 = 1 \in [0; 3], \quad x_2 = -1 \notin [0; 3].$$

Звернемо увагу, що точка $x_2 = -1$ не належить даному відрізку $[0; 3]$.

Обчислимо значення функції в точці $x_1 = 1$ і на кінцях відрізка:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 2, \quad y(3) = -18.$$

Отже, найбільше значення функція набуває при $x = 1$:

$$\max y = y(1) = 2.$$

Найменше значенння дорівнює -18 при $x = 3$:

$$\min y = y(3) = -18.$$

$\square$

Завдання для самостійної роботи

А. Знайти інтервали зростання та спадання функції.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$;

2. $f(x) = (x-2)^2(x+2)$.

3. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$.

4. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$.

5. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2} + 1$.

Б. Дослідити на екстремум функції:

1. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$.

2. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

В. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = -3x^4 + 6x^2$ на відрізку $[-2; 2]$.

2.2.3. Опуклість і вгнутість кривої. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ визначена і диференційовна в будь–якій точці інтервалу (a, b). Тоді можна провести дотичну до кожної точці $M(x, f(x)$ графіка функції $y = f(x)$, причому ця дотична не паралельна осі Oy. Такі криві називаються *гладкими.*

Означення 23. Функція $y = f(x)$ називається *опуклою* (вгнутою догори) на інтервалі (a, b), якщо у кожній точці цього інтервалу графік функції $y = f(x)$ лежить не вище будь–якої своєї дотичної.

Означення 24. Функція $y = f(x)$ називається *вгнутою* (вгнутою донизу) на інтервалі (a, b), якщо у кожній точці цього інтервалу графік функції $y = f(x)$ лежить не нижче будь–якой своєї дотичної.

Теорема 5. *Нехай крива задана на інтервалі (a, b) функцією $f(x)$, причому $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на цьому інтервалі. Якщо друга похідна додатна ($f''(x) > 0$) всюди на інтервалі (a, b), то крива вгнута донизу на цьому інтервалі; якщо друга похідна від'ємна ($f''(x) < 0$), то крива — вгнута догори .*

На рис. 2.10 зображена функція $y = f(x)$, яка на інтервалі (a, b) є опуклою, тому що всі точки графіка цієї функції на інтервалі (a, b) лежать під дотичною, а на інтервалі (b, c) — вгнута, тому що всі точки графіка цієї функції $y = f(x)$ на інтервалі (b, c) лежать над дотичною.

Звичайно область визначення функції $f(x)$ можна розбити на скінченну кількість інтервалів, на яких зберігається напрям вгнутості. Кожен з цих інтервалів обмежен точками, в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x)$ не існує.

Означення 25. Точка, в який крива змінює напрям вгнутості на протилежний, називається *точкою перегину.*

На рис.2.10 зображена крива $y = f(x)$, яка ліворуч точки $x = b$ вгнута догори, праворуч — вгнута донизу, тобто точка $x = b$ є точкою перегину.

Теорема 6. *Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна в певному околі точки x_0, дорівнює нулю в самій точці x_0 або не існує. Якщо при переході через точку x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює свій знак, то точка кривої з абсцисою x_0 є точкою перегину.*

Отже, якщо друга похідна $f''(x)$ має різні знаки по різні боки точки x_0, тоді точка кривої $(x_0, f(x_0))$ є *точкою перегину.*

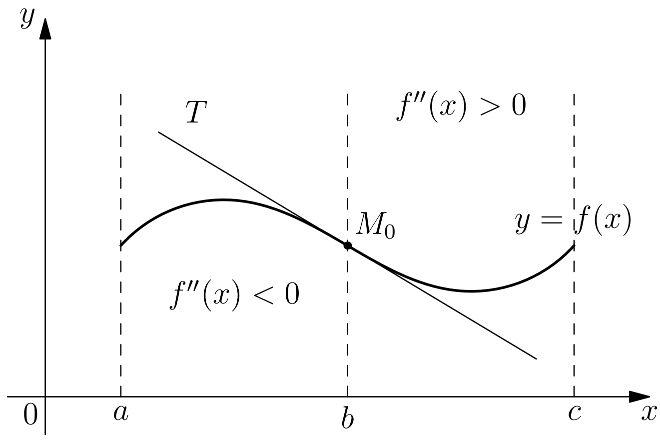

Рис. 2.10. Точка перегину

Приклад 35. Знайти інтервали опуклості та точки перегину кривої:

$$y = \frac{1}{3}\,x^3 - x^2 - 3x.$$

Розв'язання. Знаходимо другу похідну:

$$y' = \left(\frac{1}{3}\,x^3 - x^2 - 3x\right)' = x^2 - 2x - 3,$$

$$y'' = (y')' = \big(x^2 - 2x - 3\big)' = 2x - 2.$$

Прирівнюємо другу похідну до нуля і розв'язуємо рівняння:

$$2x - 2 = 0, \qquad 2(x - 1) = 0, \qquad x_0 = 1.$$

Ця точка ділить область визначення $(-\infty, +\infty)$ на два інтервали опуклості:

$$(-\infty, 1), \qquad (1, +\infty).$$

На першому інтервалі $(-\infty, 1)$ друга похідна від'ємна, тому функція

$$y = \frac{1}{3}\,x^3 - x^2 - 3x$$

опукла. На другому інтервалі $(1, +\infty)$ друга похідна додатна, тому функція — вгнута.

Точка $x_0 = 1$ є точкою перегину, тому що друга похідна в цей точці дорівнює нулю і при переході через цю точку друга похідна змінює свій знак. □

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтервали опуклості та точки перегину кривої.

1. $f(x) = x^7 + 7x + 1$.
2. $f(x) = x^4 + 6x^2$.
3. $f(x) = xe^{2x} + 1$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

2.2.4. Асимптоти кривих

Означення 26. *Асимптотою* кривої $y = f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається точка M кривої при віддаленні від початка координат в нескінченність.

Зауваження 16. Не кожна крива має асимптоти.

Розрізняють *вертикальні* і *похилі* асимптоти.

Означення 27. Якщо при віддаленні на нескінченність абсциса x точки M кривої прагне до скінченного числа a, то пряма $x = a$ називається *вертикальною асимптотою.*

Для існування вертикальної асимптоти $x = a$ необхідно і достатньо, щоб в точці з абсцисою $x = a$ хоч одна з однобічних границь дорівнювала нескінчености, тобто

$$\text{або} \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty, \qquad \text{або} \qquad \lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty.$$

Існування таких границь можливо тільки в точках розрива другого рода, тому неперервні функції вертикальних асимптот не мають.

Означення 28. Якщо при віддаленні точки M кривої на нескінченність

$$x \to +\infty,$$

і функцію $y = f(x)$ можна уявити в вигляді

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0,$$

то пряма $y = kx + b$ називається *похилою асимптотою* кривої при $x \to +\infty$.

Теорема 7. *Для існування похилої асимптоти $y = kx + b$ кривої $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ необхідно і достатньо існування двох скінчених границь:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Аналогично визначається похила асимптота $y = kx + b$ при $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Приклад 36. Знайти асимптоти кривої $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Розв'язання. Ця функція визначена при будь–якому x, крім точки $x = 1$. Отже

$$x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

Тому що:

$$\lim_{x\to1-0} \frac{x^2}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to1+0} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

у точці $x = 1$ маємо розрив другого роду і пряма

$$x = 1$$

є вертикальною асимптотою.

З'ясуємо існування похилої асимптоти:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(x-1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1} = 1,$$

тоді

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Таким чином, пряма $y = x + 1$ є похилою асимптотою при $x \to +\infty$.

Аналогично можна одержати, що таж сама пряма є похилою асимптотою при $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1} = 1.$$

Вертикальна та похила асимптоти функції $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ зображені на рис. 2.11.

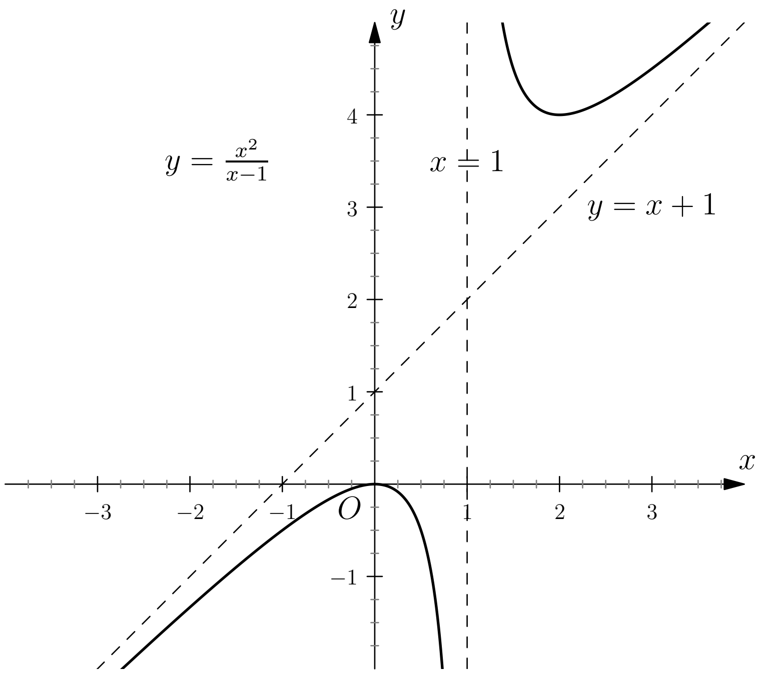

Рис. 2.11. Асимптоти функції

□

Зауваження 17. Звичайно при обчисленні наведених границь зручно користуватися правилами Лопіталя.

Завдання для самостійної роботи

Знайти асимптоти кривої.

1. $y = \dfrac{x^2+3}{x^2-9}$.

2. $y = xe^x$.

2.3. Загальна схема дослідження функції

1. Знайти область визначення функції.

2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.

3. Знайти точки розриву функції, дослідити їх характер. Знайти вертикальні асимптоти.

4. Знайти значення функції на кінцях області визначення. Знайти похилі асимптоти графіка функції.

5. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат і інтервали, на яких знак функції не змінюється.

6. Знайти точки екстремуму і інтервали зростання та спадання функції.

7. Знайти точки перегину графіка функції і інтервали вгнутости та опуклості.

8. Побудувати графік функції.

Приклад 37. Дослідити функцію та побудувати її графік: $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$.

Розв'язання. 1. Знайдемо область визначення функції.

Функція не визначена, якщо

$$x - 1 = 0,$$

тобто при $x = 1$. Отже, точка $x = 1$ — точка розрива функції.

Область визначення має вигляд:

$$x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty).$$

2. Досліджуємо функцію на парність, непарність, періодичність.

$$f(-x) = \frac{(-x+2)^3}{4(-x-1)^2} = -\frac{(x-2)^3}{4(x+1)^2} \neq \pm f(x),$$

тобто ця функція загального виду і вона не періодична.

3. Досліджуємо функцію в точці розрива $x = 1$.

Обчислимо однобічні границі:

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1-0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty.$$

Обидві границі нескінчені, рівні $+\infty$. Таким чином, точка $x = 1$ — точка розриву другого роду і пряма $x = 1$ — вертикальна асимптота.

4. Знайдемо похилі асимптоти $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^3}{4x(x-1)^2} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^3}{4x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{4},$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4}x\right) = \|\infty - \infty\| =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2+11x+8}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(8+\dfrac{11}{x}+\dfrac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2} = 2.$$

Таким чином, маємо похилу асимптоту при $x \to +\infty$

$$y = \frac{1}{4}x + 2.$$

Звернемо увагу, що при $x \to -\infty$ одержимо теж самі границі, тобто ця функція має тільки одну похилу асимптоту.

5. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат.

Очевидно, що точка перетину кривої з віссю Ox $(y = 0)$ буде при $x = -2$:

$$y = \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad (x+2)^3 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad x = -2,$$

а з віссю Oy $(x = 0)$ — при $y = 2$:

$$y = \left.\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}\right|_{x=0} = \frac{(0+2)^3}{4(0-1)^2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Знайдемо інтервали, на яких знак функції не змінюється:

$$y = \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty; -2),$$

$$y = \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2) > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-2; +\infty).$$

6. Знайдемо точки екстремуму та інтервали зростання та спадання функції.

Обчислимо похідну функції та знайдемо критичні точки функції:

$$y' = \left(\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}\right)' = \frac{3(x+2)^2(x-1)^2 - 2(x+2)^3(x-1)}{4(x-1)^4} =$$
$$= \frac{3(x+2)^2(x-1) - 2(x+2)^3}{4(x-1)^3} = \frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}.$$

Звідси випливає, що: $y' = 0$ при $x_1 = -2$ і $x_2 = 7$; y' не існує при $x_3 = 1$.

Критичні точки x_1, x_2 і x_3 ділять область визначення на чотире інтервали монотоності

$$(-\infty; -2), \quad (-2; 1), \quad (1; 7), \quad (7; +\infty).$$

Тому що $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (7; +\infty)$, то на цих інтервалах функція зростає.

При $x \in (1; 7)$ похідна від'ємна $f'(x) < 0$ і функція спадає.

В точці $x = 7$ функція набуває *мінімуму* $f(7) = \dfrac{81}{16}$.

Зауважемо, що в точці $x_1 = -2$ екстремума немає.

Результати зручно помістити до таблиці:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 7)$	7	$(7; +\infty)$
$f'(x)$	> 0	0	> 0	не існує	< 0	0	> 0
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	не існує	$\searrow$	$\dfrac{81}{16}$	$\nearrow$

7. Знайдемо точки перегину графіка функції й інтервали опуклості та вгнутості.

Обчислимо другу похідну функції і знайдемо критичні точки другої похідної:

$$y'' = \left(\frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}\right)' =$$
$$= \frac{\left[2(x+2)(x-7)+(x+2)^2\right](x-1)^3 - 3(x+2)^2(x-7)(x-1)^2}{4(x-1)^6} =$$
$$= \frac{(x+2)\left[(2(x-7)+(x+2))(x-1) - 3(x+2)(x-7)\right]}{4(x-1)^4} =$$
$$= \frac{54(x+2)}{4(x-1)^4} = \frac{27(x+2)}{2(x-1)^4}.$$

Отже, критичними точками другої похідної є точки $x_1 = -2$ і $x_2 = 1$, причому в точці $x_2 = 1$ друга похідна не існує, а в точці $x_1 = -2$ вона дорівнює нулю.

Критичні точки другої похідної x_1 і x_2 ділять область визначення функції на три інтервала опуклості:

$$(-\infty; -2), \quad (-2; 1), \quad (1; +\infty).$$

Тому що $f''(x) < 0$ в інтервалі $(-\infty; -2)$, то на цьому інтервалі функція $f(x)$ опукла, а на інтервалах $(-2; 1)$ і $(1; +\infty)$ друга похідна додатна і функція вгнута.

Точка $x_1 = -2$ є *точка перегину.*

Одержані результати помістимо до таблиці:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f''(x)$	< 0	0	> 0	не існує	> 0
$f(x)$	$\frown$	0	$\smile$	не існує	$\smile$

Обчислимо значення функції і її першої похідної в точці перегину:

$$f(-2) = 0, \quad f'(-2) = 0.$$

Таким чином, в точці перегину $(-2; 0)$ дотична до графіка функції паралельна віссі Ox (тому що точка перетину міститься на осі абсцис, то дотична збігається з віссю Ox).

8. Побудуємо графік функції:

– будуємо осі координат;

– будуємо похилу та вертикальну асимптоти;

– наносимо точки перетину графика з вісями координат, точки екстремуму та перегину;

– у точках перегину проводимо дотичні;

– проводимо лінію графика.

На рис. 2.12 побудован графік функціі.

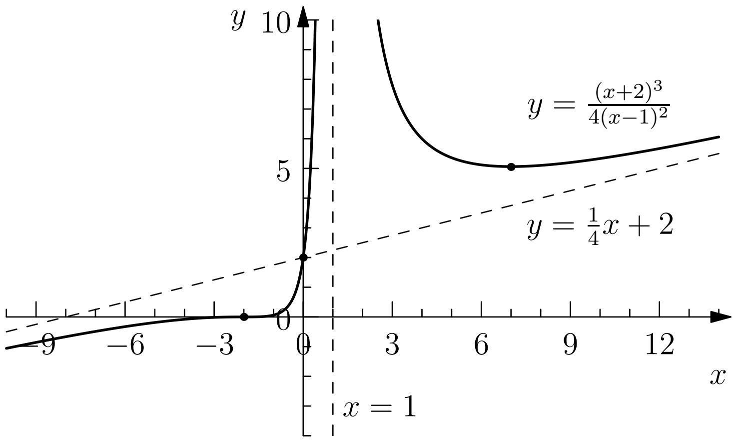

Рис. 2.12. График функції $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$

$\square$

Приклад 38. Дослідити функцію та побудувати її графік: $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

Розв'язання. 1. Знайдемо область визначення функції.

Функція визначена при всіх x, тобто область визначення має вигляд:

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

2. Досліджуємо функцію на парність, непарність, періодичність.

$$f(-x) = \sqrt[3]{3(-x)^2 - (-x)^3} = \sqrt[3]{3x^2 + x^3} \neq \pm f(x),$$

тобто ця функція загального виду і вона не періодична.

3. Функція неперервна. Тому що дана функція неперервна, то вертикальних асимптот вона не має.

4. Знайдемо похилі асимптоти $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - x^3}}{x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x \right) = \|\infty - \infty\| =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x\right)\left(\sqrt[3]{\left(3x^2 - x^3\right)^2} - x\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(3x^2 - x^3\right)^2} - x\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(3x^2 - x^3 + x^3\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(3x^2 - x^3\right)^2} - x\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{x} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} + 1} = 1.$$

Таким чином, маємо похилу асимптоту при $x \to \pm\infty$

$$y = -x + 1.$$

5. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат.

Якщо $y = 0$, то маємо $3x^2 - x^3 = 0$. Звідси випливає:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3,$$

тобто $(0, 0)$, $(3, 0)$ — точки перетину графіку з віссю Ox.

Якщо $x = 0$, то маємо $y = 0$. Таким чином, $(0, 0)$ — точка перетину графіку з віссю Oy.

6. Знайдемо точки екстремуму та інтервали зростання та спадання функції.

Обчислимо похідну функції і знайдемо критичні точки функції:

$$y' = \left(\left(3x^2 - x^3\right)^{1/3}\right)' = \frac{6x - 3x^2}{3\left(3x^2 - x^3\right)^{2/3}} = \frac{2x - x^2}{\left(3x^2 - x^3\right)^{2/3}}.$$

Звідси випливає, що: $y' = 0$ при $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$; y' не існує при $x_3 = 3$.

Критичні точки x_1, x_2 і x_3 ділять область визначення на чотири інтервали монотоності

$$(-\infty; 0), \quad (0; 2), \quad (2; 3), \quad (3; +\infty).$$

Тому що $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$, то на цих інтервалах функція спадає.

При $x \in (0; 2)$ похідна $f'(x) > 0$ і функція зростає.

В точці $x = 0$ функція набуває *мінімуму* $f(0) = 0$, а в точці $x = 2$ функція набуває *максимуму* $f(2) = \sqrt[3]{4}$,

Зауважемо, що в точці $x = 3$ екстремума немає.

Результати зручно помістити до таблиці:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	< 0	∞	> 0	0	< 0	∞	< 0
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	немає екст	$\searrow$

7. Знайдём точки перегину графіка функції і інтервали опуклості та вгнутості.

Обчислимо другу похідну функції і знайдемо критичні точки другої похідної:

$$y'' = \left(\frac{2x - x^2}{(3x^2 - x^3)^{2/3}}\right)' = -\frac{2}{\sqrt[3]{x^4 (3 - x)^5}}$$

Отже, критичними точками другої похідної є точки $x_1 = 0$ і $x_2 = 3$, В цих точках друга похідна не існує.

Критичні точки другої похідної x_1 і x_2 ділять область визначення функції на три інтервала опуклості:

$$(-\infty; 0), \quad (0; 3), \quad (3; +\infty).$$

Тому що $f''(x) < 0$ в інтервалах $(-\infty; 0)$ та $(0; 3)$, то на цих інтервалах функція $f(x)$ опукла, а в інтервалі $(3; +\infty)$ друга похідна додатна і функція вгнута.

Точка $x_2 = 3$ є *точка перегину.*

Одержані результати помістимо до таблиці:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$
$f''(x)$	<0	∞	<0	∞	>0
$f(x)$	$\frown$	перегину немає	$\frown$	точка перегину	$\smile$

Обчислимо значення функції та її першої похідної в точці перегину:

$$f(3) = 0, \quad f'(3) = \infty.$$

Таким чином, в точці перегину $(3;0)$ дотична до графіка функції паралельна віссі Oy.

8. Побудуємо графік функції:

– будуємо осі координат;

– будуємо похилу асимптоту;

– наносимо точки перетину графика з вісями координат, точки екстремуму та перегину;

– у точках перегину проводимо дотичні;

– проводимо лінію графика.

На рис. 2.13 побудован графік функціі.

□

Приклад 39. Дослідити функцію та побудувати її графік: $f(x) = \dfrac{3x^2-4x}{x-2x^2}$.

Розв'язання. 1. Знайдемо область визначення функції.

Дана функція є алгебрачний дріб і його знаменник

$$x - 2x^2 = x\,(1-2x)$$

дорівнює нулю при $x = 0$ і при $x = \frac{1}{2}$, тобто в цих точках функція невизначена. Таким чином, область визначення функції складається з трьох інтервалів:

$$(-\infty;0)\,, \quad \left(0;\frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2};+\infty\right).$$

2. Дана функція загального вигляду, тому що область визначення не має сіметрії відносно початку координат, крім того не виконують умови парності

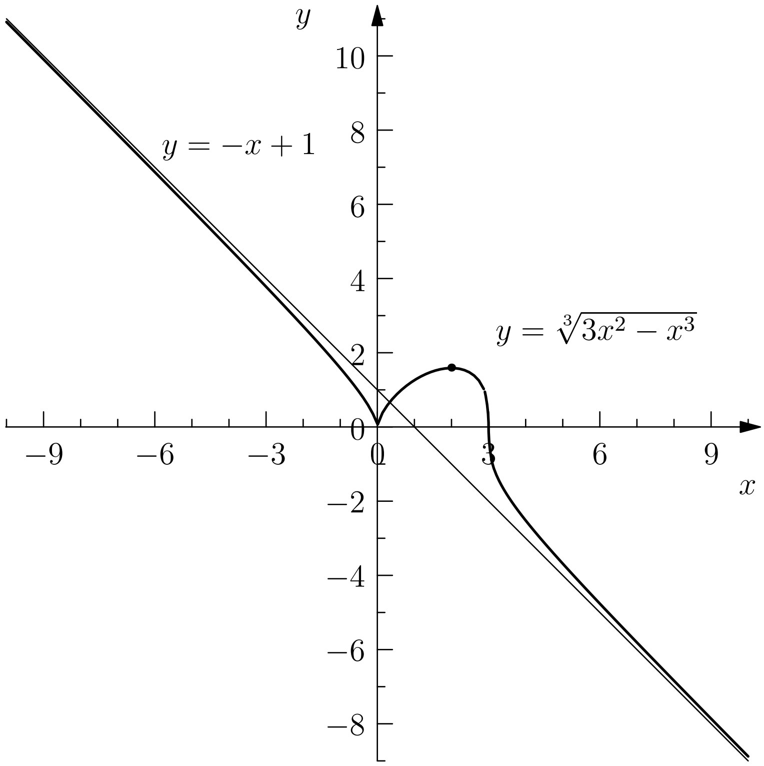

Рис. 2.13. Функція $y = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$

та непарности:

$$f(-x) = \frac{3(-x)^2 - 4(-x)}{(-x) - 2(-x)^2} = \frac{3x^2 + 4x}{-x - 2x^2} \neq \pm f(x).$$

3. З'ясуємо характер точок розриву. Обчислимо однобічні границі у точці $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{3x^2 - 4x}{x - 2x^2} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \to 0+0} \frac{x\,(3x - 4)}{x\,(1 - 2x)} = \lim_{x \to 0+0} \frac{3x - 4}{1 - 2x} = \frac{-4}{1} = -4,$$

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{3x^2 - 4x}{x - 2x^2} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \to 0-0} \frac{x\,(3x - 4)}{x\,(1 - 2x)} = \lim_{x \to 0-0} \frac{3x - 4}{1 - 2x} = \frac{-4}{1} = -4,$$

Таким чином, у точці $x = 0$ ліва та права однобічні границі рівні, тобто у точці $x = 0$ існує скінченна границя. Отже, точка $x = 0$ — це точка усувного розриву.

Звернемо увагу, що у всіх точках, крім точки $x = 0$, дану функцію можна перетворити таким чином:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{x - 2x^2} = \frac{x\,(3x - 4)}{x\,(1 - 2x)} = \frac{3x - 4}{1 - 2x}.$$

З'ясуємо характер точки $x = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}+0} \frac{3x^2 - 4x}{x - 2x^2} = \lim_{x \to \frac{1}{2}+0} \frac{3x - 4}{1 - 2x} =$$
$$= \left\| \begin{array}{l} x \to \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} > 0 \end{array} \right\| = \frac{3 \cdot \dfrac{1}{2} - 4}{-\left|1 - 2 \cdot \dfrac{1}{2}\right|} = \frac{-2.5}{-0} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}-0} \frac{3x^2 - 4x}{x - 2x^2} = \lim_{x \to \frac{1}{2}-0} \frac{3x - 4}{1 - 2x} =$$
$$= \left\| \begin{array}{l} x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} < 0 \end{array} \right\| = \frac{3 \cdot \dfrac{1}{2} - 4}{+\left|1 - 2 \cdot \dfrac{1}{2}\right|} = \frac{-2.5}{+0} = -\infty.$$

Таким чином, точка $x = \frac{1}{2}$ — це точка розриву другого роду і пряма $x = \frac{1}{2}$ є вертикальна асимптота.

4. Знайдемо похилі асимптоти $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 4}{(1 - 2x)\,x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 - \dfrac{4}{x}\right)}{x^2\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \dfrac{4}{x}}{x\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)} = \frac{3 - \dfrac{4}{\infty}}{\infty\left(\dfrac{1}{\infty} - 2\right)} = \frac{3}{\infty} = 0.$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x - 4}{1 - 2x} - 0\right) = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 - \dfrac{4}{x}\right)}{x\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \dfrac{4}{x}}{\dfrac{1}{x} - 2} = \frac{3 - \dfrac{4}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty} - 2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

Очевидно, що при $x \to -\infty$ одержимо тіж самі границі. Таким чином, маємо похилу асимптоту при $x \to \pm\infty$

$$y = -\frac{3}{2}.$$

5. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат.

Якщо $y = 0$, то маємо

$$y = \frac{3x^2 - 4x}{x - 2x^2} = \frac{3x - 4}{1 - 2x} = 0, \quad \Rightarrow \quad 3x - 4 = 0, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}.$$

тобто $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ — точка перетину графіку з віссю Ox.

Якщо $x = 0$, то маємо

$$f(0) = \frac{3x^2 - 4x}{x - 2x^2} = \frac{3 \cdot 0 - 4}{1 - 2 \cdot 0} = -4.$$

Таким чином, $(0, -4)$ — точка перетину графіку з віссю Oy.

6. Знайдемо точки екстремуму та інтервали зростання та спадання функції.

Обчислимо похідну функції і знайдемо критичні точки функції:

$$f'(x) = \left(\frac{3x - 4}{1 - 2x}\right)' = \frac{(3x-4)'(1-2x) - (3x-4)(1-2x)'}{(1-2x)^2} =$$
$$\frac{3(1-2x) - (3x-4)(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{-5}{(1-2x)^2}.$$

Звідси випливає, що $f'(x)$ не існує при $x = \frac{1}{2}$, тобто точка $x = \frac{1}{2}$ є критичною, але знак похідної у цій точці не змінюється: перша похідна від'ємна в усій області визначення. Отже дана функція є спадною.

7. Знайдёмо точки перегину графіка функції і інтервали опуклості та вгнутості.

Обчислимо другу похідну функції і знайдемо критичні точки другої похідної:

$$f''(x) = \left(\frac{-5}{(1-2x)^2}\right)' = -\frac{20}{(1-2x)^3}.$$

Отже, є одна критична точка $x = \frac{1}{2}$, де друга похідна не існує. Ця точка розбиває область визначення на два інтервалі

$$\left(-\infty; \tfrac{1}{2}\right) \left(\tfrac{1}{2}; +\infty\right),$$

причому у першому інтервалі друга похідна від'ємна, тобто функція опукла; у другому — друга похідна додатна, тому функція — вгнута.

8. На рис. 2.14 побудован графік функції. $\square$

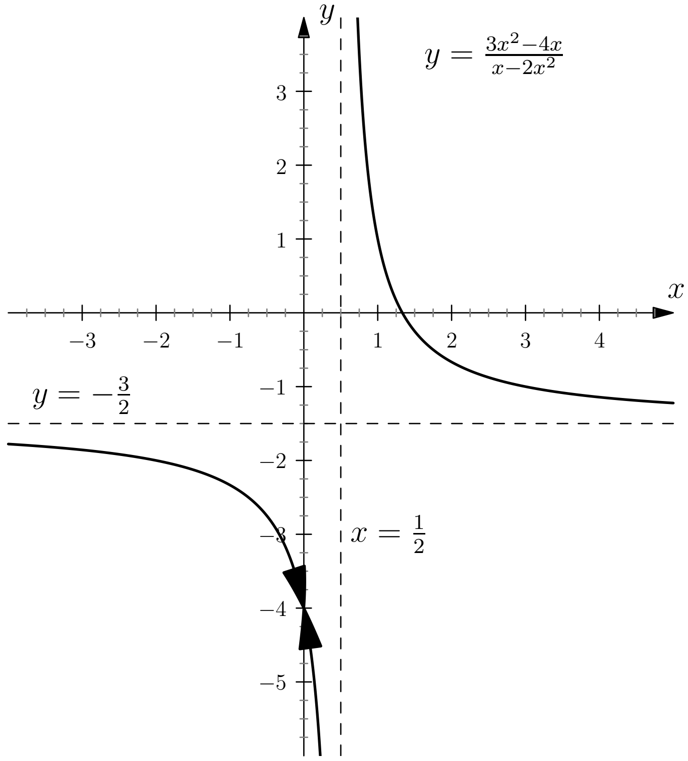

Рис. 2.14. Функція $y = \dfrac{3x^2 - 4x}{x - 2x^2}$

2.4. Індивідуальні завдання

А. Знайти найбільше і найменьше значення функції на відрізку.

1. $f(x) = \dfrac{x+6}{x^3+13}$, $[-5; 5]$.

2. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos x$, $[0; \pi]$.

3. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-16}$, $[-5; 10]$.

4. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+7}$, $[-3; 7]$.

5. $f(x) = \dfrac{x}{2} - \sin x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+16}$, $[-3; 7]$.

7. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \cos x$, $[-\pi; \pi]$.

8. $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+6}$, $[-4; 6]$.

9. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \cos x$, $[-\pi; \pi]$.

10. $f(x) = \cos x - \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

11. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $[-1; 2]$.

12. $f(x) = x^2 e^{-x} + \sqrt{3}$, $[-1; 4]$.

13. $f(x) = x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}$, $[0; 2]$.

14. $f(x) = 2x^2 - \ln x + \dfrac{1}{2}$, $\left[\dfrac{1}{4}; 1\right]$.

15. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} - \sqrt{2}$, $\left[-\dfrac{1}{2}; 4\right]$.

16. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $[-2; 0]$.

17. $f(x) = \sin 2x - x - 2$, $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

18. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$, $[-2; 3]$.

19. $f(x) = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}$, $[0; 2]$.

20. $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 9$, $[-3; 1]$.

21. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $[1; 20]$.

22. $f(x) = \sin 2x - x$, $[0; \pi]$.

23. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3}$, $[-3; 3]$.

24. $f(x) = \sqrt{3}x - 2\sin x$, $[0; \pi]$.

25. $f(x) = \sin x - \dfrac{x}{2}$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

26. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, $[-1; 1]$.

27. $f(x) = \dfrac{x}{2} - \sin x$, $[-\pi; \pi]$.

28. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-3}$, $[2;4]$.

29. $f(x) = 2\cos x + \sqrt{3}x$, $[0;\pi]$.

30. $f(x) = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}x}{2}$, $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Б. Дослідити функцію та побудувати її графік

1. $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

2. $f(x) = \dfrac{x^3+16}{x}$.

3. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{4x^2}$.

4. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$.

5. $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

6. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$.

7. $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

8. $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^3-1}$.

9. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$.

10. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

11. $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x}$.

12. $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$.

13. $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$.

14. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5}$.

15. $f(x) = \dfrac{2x-8}{(x-3)^3}$.

16. $f(x) = \dfrac{2x}{(x-2)^2}$.

17. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3-1}$.

18. $f(x) = \dfrac{x+3}{2(x+2)^2}$.

19. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

20. $f(x) = \dfrac{16x^2}{x-4}$.

21. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$.

22. $f(x) = \dfrac{x}{3-x^2}$.

23. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$.

24. $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x}$.

25. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$.

26. $f(x) = \dfrac{2x^3}{x-2}$.

27. $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

28. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2}$.

29. $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

30. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

Список літератури

[1] Шкіль М. І. Математичний аналіз: У 2 ч. Ч. 1/ М. І. Шкіль. — К.: Вища шк., 2005. — 447 с.

[2] Тимченко Г. М. Стислий курс вищої математики, частина 1: навч.посіб./ Г. М. Тимченко, О. В. Одинцова, Н. О. Кириллова, О. С. Мазур. — Київ: «Кондор», 2022. — 188 с.

Зміст

Навчальне видання

Методичні вказівки
для самостійної роботи за темою
«Диференціювання функції однієї змінної»
з навчальної дисципліни «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей ВІТВ

Укладачі:
ВЕРЕТЕЛЬНИК Віктор Володимирович
ТИМЧЕНКО Галина Миколаївна
ВЕРЕТЕЛЬНИК Олег Вікторович

Відповідальний за випуск проф. В. Н. Бурлаєнко
Роботу до видання рекомендував проф. Д. В. Бреславський

В авторській редакції

План 2022 р., поз. 351

Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 5.

Видавничий центр НТУ “ХПІ”
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

Електронна версія