Список литературы: 1. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями.— М.: Наука, 1980.— 384 с. 2. *Табак Д., Куо Б.* Оптимальное управление и математическое программирование.— М.: Наука, 1975.— 280 с. 3. *Математическая* теория оптимальных процессов/Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко.— М.: Наука, 1976.—392 с. 4. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968.— 764 с.

Поступила в редколлегию 10.12.80.

УДК 518.61

Ю. Ф. СЕНЧУК, канд. физ.-мат. наук

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Сеточные методы решения уравнений эллиптического типа подробно освещены в работах [1, 2]. Некоторые прямые методы, основанные на динамическом программировании, даны в монографии [3]. Однако авторы этой монографии рассматривают только равномерную квадратную сетку, что недостаточно для целого ряда задач. В статье один из методов, изложенных в работе [3], обобщается на случай неравномерной прямоугольной сетки. Пусть требуется решить уравнение Лапласа $\nabla^2 u(x, y)=0$ в прямоугольнике $D=\{(x, y):0<x<a;\ 0<y<b\}$. Граничное условие $u(x, y)|_\Gamma=f(x, y)$. Исходное уравнение — это уравнение Эйлера для функционала $I(u)=\iint\limits_D (u_x^2+u_y^2)\,dxdy$ (1). Покроем прямоугольник D сеткой прямых $x=x_i$ $(i=1, 2, ..., n-1)$ и $y=y_j$ $(j=1, 2, ..., m-1)$. Обозначим $h_i=x_i-x_{i-1}$, $l_j=y_j-y_{j-1}$. Тогда вместо уравнения (1) можно рассматривать функционал

$$I(u)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2(u_{ij}-u_{i,j-1})^2+\beta_i^2\sum_{j=1}^{m-1}(u_{ij}-u_{i-1,j})^2\right], \qquad (2)$$

где α_j, β_i обратно пропорциональны l_j, h_i. Введем квадратную матрицу $Q(m-1)$-го порядка с элементами

$$q_{ij}=\begin{cases}\alpha_i^2+\alpha_{i+1}^2, & j=i;\\ -\alpha^2_{\max\{i,j\}}, & |i-j|=1;\\ 0 & \text{во всех остальных случаях}\end{cases}$$

и $(m-1)$-мерные векторы $u_k=(u_{k1}, u_{k2},..., u_{k,m-1})$, $r_k=(\alpha_1^2 u_{k0}, 0,...,0, \alpha_m^2 u_{km})$, $k=1, 2,...,n$, а также положим $s_k=\alpha_1^2 u_{k0}^2+\alpha_m^2 u_{km}^2$. Тогда выражение (2) примет вид

$$J(u)=\sum_{k=1}^{n}[(Qu_k, u_k)-2(r_k, u_k)+s_k+\beta_k^2|u_k-u_{k-1}|^2]. \qquad (3)$$

Требуется найти векторы $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$, доставляющие минимум функционалу (3). Следуя идее, изложенной Р. Беллманом и Э. Энджелом [3], обозначим

$$f_k(v) = \min_{\{u_k, u_{k+1}, \dots, u_{n-1}\}} \sum_{i=k}^{n} [(Qu_i, u_i) - 2(r_i, u_i) + s_i + \beta_i^2 |u_i - u_{i-1}|^2], \tag{4}$$

где $v = u_{k-1}$. Тогда

$$f_k(v) = \min_{u_k} [(Qu_k, u_k) - 2(r_k, u_k) + s_k + \beta_k^2 |u_k - v|^2 + f_{k+1}(u_k)]. \tag{5}$$

Будем искать $f_k(v)$ в виде

$$f_k(v) = (A_k v, v) - 2(b_k, v) + c_k. \tag{6}$$

Подставим это выражение в предыдущее и решим уравнение $\nabla f_k(v) = 0$. Получим

$$u_k = (Q + \beta_k^2 E + A_{k+1})^{-1} (\beta_k^2 v + r_k + b_{k+1}). \tag{7}$$

Преобразуем с помощью этой формулы выражение (5) и сравним результат с равенством (6). Придем к формулам

$$A_k = \beta_k^2 [E - \beta_k^2 (Q + \beta_k^2 E + A_{k+1})^{-1}]; \ b_k = (E - A_k/\beta_k^2)(r_k + b_{k+1}). \tag{8}$$

Далее, используя равенства (4) при $k=n$ и (6), легко находим

$$A_n = \beta_n^2 E; \ b_n = \beta_n^2 u_n. \tag{9}$$

Наконец, из выражения (7), учитывая формулы (8), имеем

$$u_k = (E - A_k/\beta_k^2) u_{k-1} + b_k/\beta_k^2. \tag{10}$$

Итак, исходя из выражений (9) по формулам (8) находим A_{n-1}, b_{n-1}; A_{n-2}, b_{n-2}; ...; A_1, b_1. Затем берем из граничного условия вектор u_0, по формуле (10) вычисляем $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$. Докажем теперь, что все матрицы $Q + \beta_k^2 E + A_{k+1}$ неособенны. Прежде всего легко увидеть, что матрица Q — положительно определенная ($Q > 0$). Далее, в силу формул (8), (9)

$$A_{n-1} = \beta_{n-1}^2 \{E - \beta_{n-1}^2 [Q + (\beta_{n-1}^2 + \beta_n^2) E\}. \tag{11}$$

Поскольку $Q + (\beta_{n-1}^2 + \beta_n^2) E > 0$, матрица $Q + \beta_{n-1}^2 E + A_n$ обратима. Далее,

$$[Q + (\beta_{n-1}^2 + \beta_n^2) E]^{-1} < E/\beta_{n-1}^2,$$

а это согласно выражению (11) значит, что $A_{n-1}>0$. Следовательно, $0<A_{n-1}<\beta_{n-1}^2 E$. Применяя метод индукции, предположим, что и при некотором $k<n-1$

$$0<A_k<\beta_k^2 E. \tag{12}$$

Тогда $0<(Q=\beta_{k-1}^2 E+A_k)^{-1}<E/\beta_{k-1}^2$.

Отсюда и из выражения (8) имеем $0<A_{k-1}<\beta_{k-1}^2 E$.
Таким образом, $A_k>0$ для всех k, а значит, $Q+\beta_k^2 E+A_{k+1}>$

>0 для всех k. Следовательно, все матрицы, подлежащие обращению в ходе процесса, неособенны.

Исследуем теперь описанный алгоритм на устойчивость по отношению к малым ошибкам промежуточных вычислений. Пусть на некотором шаге вместо матрицы A_{k+1} была вычислена матрица $\tilde{A}_{k+1}=A_{k+1}+\Delta_{k+1}$. Тогда легко получить

$\Delta_k=(E-\tilde{A}_k/\beta_k^2)\,\Delta_{k+1}\,(E-A_k/\beta_k^2)$. Если $\|\Delta_{k+1}\|$ достаточно мало, то $\tilde{A}_k\approx A_k$. Тогда $\|\Delta_k\|\leqslant\|E-A_k/\beta_k^2\|^2\|\Delta_{k+1}\|$.

Возьмем в качестве нормы матрицы ее спектральный радиус. В силу неравенства (12) $\|E-A_k/\beta_k^2\|<1$. Значит, $\|\Delta_k\|<\|\Delta_{k+1}\|$. Это и доказывает, что ошибка, возникшая в ходе промежуточных вычислений, в дальнейшем не возрастает. Данный факт верен и для вычисления b_k и u_k.

Список литературы: 1. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 591 с. 2. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы решения эллиптических уравнений.— М.: Наука, 1976.— 352 с. 3. *Беллман Р., Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных.— М.: Мир, 1974.— 207 с.

Поступила в редколлегию 04.12.81.