

**Численное моделирование рабочего цикла дизеля с непосредственным впрыском. Прогнозирование эмиссии сажи и оксидов азота / А. М. Левтеров, Л. И. Левтерова // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2012. – №5 (979). – С. 141-155. Бібліогр.: 16 назв.**

Розглянуто побудову математичної моделі робочого циклу дизеля з безпосереднім впорскуванням. Передбачається прогнозування робочих характеристик дизеля, що працює на традиційному і альтернативному паливах з урахуванням емісії шкідливих складових у відпрацьованих газах, у тому числі й сажі, що є особливо важливим для цього типу поршневих двигунів.

**Ключові слова:** робочий процес, дизель, сажа, поліциклічні ароматичні вуглеводні, ацетилен, радикали, оксиди азоту.

This article discusses the construction of a mathematical model of the operating cycle of diesel engine with direct injection. This paper also provides that result of modeling becomes possible predict the performance of diesel engine on traditional and alternative fuels with the emission of harmful substances in the exhaust gases, including carbon black, which is particularly important for this type of piston engines.

**Key words:** working process, diesel, soot, polycyclic aromatic hydrocarbons, acetylene, radicals, nitrogen oxides.

*О.С. МАЗУР*, канд. физ.-мат. наук, доцент НТУ «ХП»

## **СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ ПОДХОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

Представлены два подхода к изучению параметрических колебаний ортотропных пластин произвольной геометрии с различными видами граничных условий. В основу первого подхода положено использование уравнений движения в перемещениях, второй базируется на использовании уравнений движения в смешанной форме. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных с помощью предложенных алгоритмов для  $T$ -образной пластины.

**Ключевые слова:** параметрические колебания, динамическая устойчивость, ортотропные пластины, теория  $R$ -функций.

**Введение.** Одним из видов колебаний, активно изучаемых в современной литературе, являются параметрические колебания. В последнее время появилось достаточно большое количество публикаций посвященных нелинейному анализу таких колебаний [3]. В большинстве опубликованных работ предложены методы исследования параметрических колебаний пластин канонической формы (квадратной, прямоугольной, круглой) для некоторых видов граничных условий. При этом в основном исследуются уравнения движения, представленные в смешанной форме относительно функций прогиба и усилий ( $w - F$ ), которые не учитывают сил инерции в срединной плоскости. В этом случае систе-

ма уравнений упрощается, что делает решение данной задачи более простым. Заметим, что использование уравнений движения в смешанной форме сужает класс исследуемых задач. Например, возникают трудности, если край пластины является неподвижным в нормальном ( $u_n = 0$ ) или касательном направлении ( $v_n = 0$ ) к границе области. Тем не менее, использование различных математических постановок задачи и методов их решения, особенно при исследовании параметрических колебаний пластин сложной формы, позволяет в некоторой степени гарантировать достоверность полученного приближенного решения.

В данной работе предлагается сравнение двух методов исследования колебаний ортотропных пластин сложной формы (отличной от канонических). В основу первого метода положено использование системы уравнений в перемещениях ( $u - v - w$ ). При разработке второго подхода использована математическая постановка задачи в смешанной форме, полученная относительно функций ( $w - \Phi$ ). Применение метода  $R$ -функций в предлагаемых алгоритмах делает возможным изучение пластин различной формы с различными граничными условиями и учетом неоднородного докритического состояния пластины.

**Постановка задачи.** Система уравнений движения в перемещениях. Рассмотрим колебания ортотропной пластины постоянной толщины  $h$ , сжимаемой периодической нагрузкой  $p = p_0 + p_1 \cos \theta t$ . Математическая постановка задачи в рамках классической теории представляет собой следующую систему уравнений [2]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \\ = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} N_x + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} T + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} N_y - \varepsilon \rho h \frac{\partial w}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где  $N_x, N_y, T$  — усилия в срединной плоскости;  $E_1, E_2$  — модули Юнга;  $G$  — модуль сдвига;  $\mu_1, \mu_2$  — коэффициенты Пуассона;  $\rho$  — плотность пластины;  $\varepsilon$  — коэффициент затухания;  $D_1, D_2$  — жесткости изгиба;  $D_3$  — приведенная жесткость, равная

$$D_3 = \frac{1}{2}(D_1 \mu_2 + D_2 \mu_1 + 4D_k)$$

где  $D_k$  — жесткость кручения.

Система уравнений дополнена начальными и граничными условиями. Приложенная к участку границы  $\partial\Omega_1$  нагрузка, учитывается в граничных условиях следующими соотношениями:

$$N_n = -p, \quad N_\tau = 0,$$

где  $N_n$ ,  $N_\tau$  — нормальное и касательное усилия в плоскости соответственно.

Перепишем разрешающую систему уравнений (1),(2) в безразмерной форме, для чего введём дополнительные обозначения:

$$A\bar{U} = \bar{Nl}(w), \quad (3)$$

$$L_1 w = Nl(u, v, w) - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} C_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} & C_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ C_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & C_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix},$$

$$\bar{Nl}(w) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \left( C_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + C_3 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \left( C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + C_3 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix},$$

$$Nl(u, v, w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} N_x(u, v, w) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} T(u, v, w) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} N_y(u, v, w),$$

$$L_1 = \frac{1}{12(1-\mu_1\mu_2)} \left( C_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2C_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right),$$

$$C_1 = \frac{E_1}{E_2}, \quad C_2 = \frac{G(1-\mu_1\mu_2)}{E_2}, \quad C_3 = \frac{G(1-\mu_1\mu_2)}{E_2} + \mu_1.$$

Связь между размерными и безразмерными параметрами определяется соотношениями

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{u} = \frac{ua}{h^2}, \quad \bar{v} = \frac{va}{h^2}, \quad \bar{p} = \frac{a^2 p}{h^3 E_2},$$

$$\bar{t} = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E_2}{\rho}} t, \quad \bar{N}_x = \frac{a^2}{h^3 E_2} N_x, \quad \bar{N}_y = \frac{a^2}{h^3 E_2} N_y, \quad \bar{T} = \frac{a^2}{h^3 E_2} T, \quad \bar{N}_n = \frac{a^2}{h^3 E_2} N_n,$$

$$\bar{N}_\tau = \frac{a^2}{h^3 E_2} N_\tau, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \varepsilon. \quad (5)$$

Черточки над безразмерными параметрами в (3), (4) и далее опущены.

*Смешанная форма уравнений движения.* Введем функцию усилий с помощью следующих соотношений:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = N_x, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = N_y, \quad -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = T.$$

Тогда система уравнений движения примет вид [2]:

$$\frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \left( \frac{\mu_2}{E_2} + \frac{\mu_1}{E_1} - \frac{1}{G} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -\frac{1}{2} L(w, w), \quad (6)$$

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = L(w, \Phi) - \varepsilon \rho h \frac{\partial w}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (7)$$

где

$$L(w, w) = 2 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right],$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Как и ранее перепишем систему (6), (7) в безразмерном виде,

$$L_2 \Phi = -C_1 \frac{1}{2} L(w, w), \quad (8)$$

$$L_1 w = L(w, \Phi) - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (9)$$

где

$$L_2 = C_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \left( 2\mu_1 - \frac{E_1}{G} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Черточки над безразмерными параметрами в (8), (9), связанными с размерными соотношениями (5), опущены.

**Метод решения.** Система уравнений движения в перемещениях. Прогиб пластины представим в виде

$$w(x, y, t) = f(t) w_1(x, y), \quad (10)$$

а перемещения в плоскости представим как:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= p u_0(x, y) + u_1(x, y) f^2(t), \\ v(x, y, t) &= p v_0(x, y) + v_1(x, y) f^2(t), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $w_1(x, y)$  – собственная функция, отвечающая первой форме линейных колебаний ненагруженной пластины; вектор  $\bar{U}_0 = (u_0, v_0)$  — решение линейной задачи теории упругости  $A\bar{U}_0 = 0$  с неоднородными граничными условиями на нагруженной части контура

$$N_n^L(u_0, v_0) = -1, \quad N_n^L(u_0, v_0) = 0.$$

Вектор  $\bar{U}_1 = (u_1, v_1)$  является решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$A\bar{U}_1 = \bar{N}I(w_1).$$

Это решение должно удовлетворять однородным граничным условиям на нагруженной части. Нахождение функций  $w_1, u_0, v_0, u_1, v_1$  осуществляется методом  $R$ -функций [6] в сочетании с вариационным методом Рунца [5].

Подставив (10), (11) в (4) и применив к полученному уравнению метод Бубнова-Галеркина, получим уравнение с периодическими коэффициентами

$$f''(t) + \varepsilon f'(t) + \omega_L^2 (1 - (p_0 + p_t \cdot \cos \theta t) \alpha) f(t) + \beta f^3(t) = 0, \quad (12)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\omega_L^2 \|w_1\|^2} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} N_x^L(u_0, v_0) + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} T^L(u_0, v_0) + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} N_y^L(u_0, v_0) \right) w_1 d\Omega,$$

$$\beta = -\frac{1}{\|w_1\|^2} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} N_x(u_1, v_1, w_1) + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} T(u_1, v_1, w_1) + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} N_y(u_1, v_1, w_1) \right) w_1 d\Omega.$$

Здесь  $N_x^L, N_y^L, N_{xy}^L$  – линейные усилия в срединной плоскости пластины;  $\omega_L$  – основная частота колебаний.

Преобразуем уравнение (12) к виду

$$f''(t) + \varepsilon f'(t) + \Omega_L^2 (1 - 2k \cos \theta t) f(t) + \beta f^3(t) = 0,$$

где

$$\Omega_L = \omega_L \sqrt{1 - p_0 \alpha} \quad (13)$$

– частота колебаний пластины нагруженной статической нагрузкой  $p_0$ ,

$$k = \frac{p_t \alpha}{2(1 - p_0 \alpha)} \quad (14)$$

– коэффициент возбуждения. Дальнейшее исследование колебаний пластины сводится к исследованию уравнения (12).

*Смешанная форма уравнений движения.* Прогиб пластины, представим в виде (10), а функцию усилий как

$$\Phi(x, y, t) = f^2(t) \Phi_1(x, y) + p \Phi_0, \quad (15)$$

где  $\Phi_0$  – решение уравнения

$$L_2 \Phi_0 = 0,$$

удовлетворяющее на нагруженной части границы условиям

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \tau^2} = -1, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial n \partial \tau} = 0;$$

$\Phi_1(x, y)$  – решение уравнения

$$L_2 \Phi_1 = -\frac{1}{2} C_1 L(w_1, w_1),$$

удовлетворяющее соответствующим граничным условиям.

Подставляя (10), (15) в уравнение (9) и применяя метод Бубнова-Галеркина, получаем дифференциальное уравнение (12), где коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  определяются равенствами:

$$\alpha = \frac{1}{\omega_L^2 \|w_1\|^2} \iint_{\Omega} L(w_1, \Phi_0) w_1 d\Omega, \quad \beta = -\frac{1}{\|w_1\|^2} \iint_{\Omega} L(w_1, \Phi_1) w_1 d\Omega.$$

В случае, когда пластина имеет однородное докритическое состояние и нагрузка приложена вдоль сторон параллельных осей  $OX$ ,  $OY$ , функцию  $\Phi_0$  удобно искать в виде

$$\Phi_0 = -\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}.$$

и формула для вычисления коэффициента  $\alpha$  значительно упрощается:

$$\alpha = -\frac{1}{\|w_1\|^2} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) w_1 d\Omega.$$

Нахождение функции  $\Phi_1(x, y)$  выполнено методом Ритца, система координатных функций для областей сложной формы построена с помощью теории R-функций [5,6].

*Главный параметрический резонанс.* Подробнее остановимся на построении первой области динамической неустойчивости, расположенной вблизи частоты нагрузки, равной удвоенной частоте свободных колебаний. Как показано в [1], для этого достаточно использовать линеаризованное уравнение ( $\beta = 0$ ). Частота возбуждения находится в интервале

$$2\Omega_L \sqrt{1 - \sqrt{k^2 - (\Delta/\pi)^2}} \leq \theta \leq 2\Omega_L \sqrt{1 + \sqrt{k^2 - (\Delta/\pi)^2}},$$

где  $\Delta = \pi\varepsilon/\Omega$  декремент затухания.

Решая задачу в линеаризованной постановке, мы можем найти лишь границы зоны неустойчивости, однако, о самом процессе можно лишь сказать, что амплитуды колебаний постоянно возрастают. Решение задачи в геометрически нелинейной постановке позволяет определить зависимость амплитуды колебаний от параметров нагрузки [1]:

$$A = \frac{2\Omega}{\sqrt{3\beta}} \sqrt{\left( \frac{\theta}{2\Omega} \right)^2 - 1 \pm \sqrt{k^2 - \left( \frac{\theta}{2\Omega} \right)^2 \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^2}}.$$

**Исследования параметрически возбуждаемых колебаний изотропной T-образной пластины.** Рассмотрим изотропную пластину сложной формы плана (рис. 1), находящуюся под действием периодических усилий приложенных вдоль сторон параллельных оси  $OY$ .

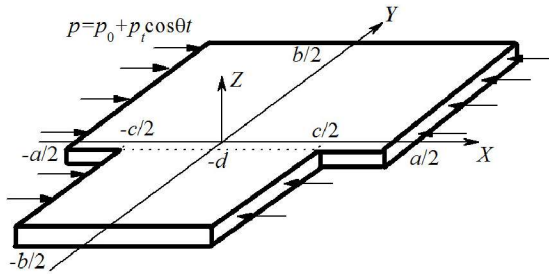


Рис. 1 – Форма пластины.

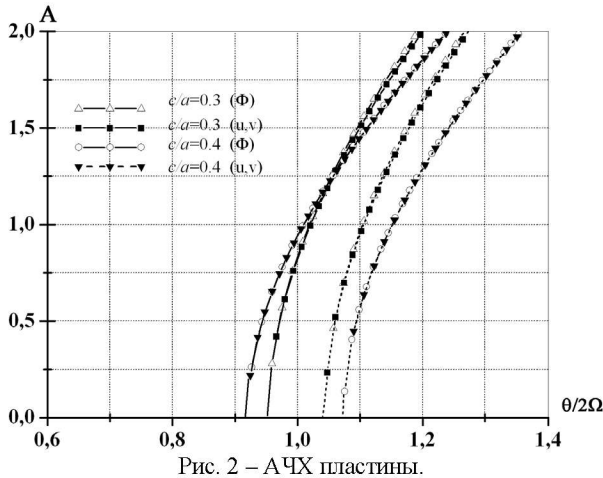


Рис. 2 – АЧХ пластины.

Способ закрепления пластины описывается следующими граничными условиями:

$$w = 0, (\partial^2 w)/(\partial n^2) = 0, N_n = -p, N_\tau = 0, (x, y) \in \partial\Omega_1$$

( $\partial\Omega_1$  – нагруженная часть контура),

$$w = 0, (\partial^2 w)/(\partial n^2) = 0, N_n = 0, N_\tau = 0, (x, y) \in \partial\Omega_2$$

( $\partial\Omega_2$  – ненагруженная часть контура).

Введём функцию усилий и данные граничные условия представим как

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = -p, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial \tau} = 0, (x, y) \in \partial\Omega_1,$$

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial \tau} = 0, (x, y) \in \partial\Omega_2.$$

Поскольку при таком способе нагружения данная пластина имеет однородное докритическое состояние, то функцию  $\Phi_0$  представим как

$$\Phi_0 = -(y^2/2).$$

Исследуем нелинейные колебания пластины в зоне главного параметрического резонанса  $\theta \approx 2\Omega_L$  при параметрах нагрузки  $p_0 = p_t = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ . На рис.2 представлены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), построенные для соотношений  $c/a = 0.3, 0.4$  ( $c/a = d/a$ ,  $b/a = 1$ ) с использованием смешанной формы уравнений движения и уравнений движения в перемещениях.

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), полученные двумя способами, практически совпадают, что подтверждает достоверность разработанных подходов и полученных результатов.

**Выводы.** В работе проведено сравнение двух разработанных алгоритмов исследования параметрических колебаний ортотропных пластин, использующих уравнения движения в перемещениях и в смешанной форме. Оба метода базируются на теории  $R$ -функций. Проведено численное исследование колебаний  $T$ -образной пластины в зоне главного параметрического резонанса, при этом результаты полученные двумя представленными подходами практически совпадали. В случае пластины рассматриваемой формы, более удобным является использование смешанной формы уравнений движения, поскольку упрощается исследуемая система уравнений и одна из используемых функций в представлении функции усилий известна заранее.

**Список литературы:** 1. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М: Гостехиздат, 1956. – 600 с. 2. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 3. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С.* Нелинейные задачи колебаний тонких (обзор) // Прикладная механика. – 1998. – 34. – с. 3-31. 4. *Курна Л.В., Мазур О.С.* Параметрические колебания ортотропных пластин сложной формы // Прикладная механика. – 2010. – № 4. – С. 83-95. 5. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с. 6. *Рвачев В. Л., Курна Л. В.*  $R$ -функции в задачах теории пластин. – К.: Наук. Думка, 1987. – 175с.

*Поступила в редколлегию 05.02.2013*

---

УДК 539.3

**Сравнительный анализ двух подходов к исследованию параметрических колебаний ортотропных пластин сложной формы / О. С. Мазур // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – № 5 (979). – С. 155-162. Бібліогр.: 6 назв.**

Представлено два підходи до вивчення параметричних коливань ортотропних пластин довільної геометрії з різними видами граничних умов. В основу першого підходу покладено використання рівнянь руху в переміщеннях, другий базується на використанні рівнянь руху в мішаній формі. Проведено порівняльний аналіз результатів отриманих за допомогою запропонованих алгоритмів для  $T$ -подібної пластини.

**Ключові слова:** параметричні коливання, динамічна стійкість, ортотропні пластини, теорія  $R$ -функцій.

Parametric vibrations of the orthotropic plates with complex form and various boundary conditions are studied by two approaches. The first method uses the movement equations in terms of displacements; the second approach is based on using the equations in mixed form. The results obtained by the presented algorithms are compared for  $T$ -plate.

**Keywords:** parametric variations, dynamic stability, orthotropic plates, theory of  $R$ -functions.