Multiplicative three-frequency models of rigid body rotation / Yu. A. Plaksiy // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 72 – 81. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Плаксій Юрій Андрійович – кандидат технічних наук, доцент, професор НТУ «ХПІ», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy_yu@gmail.com.

Плаксий Юрий Андреевич – кандидат технических наук, доцент, профессор НТУ «ХПИ», Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy_yu@gmail.com.

Plaksiy Yuriy Andriyovych – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Professor NU "KhPI", National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy_yu@gmail.com.

УДК 517.968.519.6

Т. С. ПОЛЯСКАЯ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НА $[-1,1]$ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ

Розглянуто інтегральне рівняння першого роду з логарифмічним ядром, до якого наводить ряд задач дифракції хвиль. Проведена дискретизація цього рівняння на основі методу дискретних особливостей. Введені пари гільбертових просторів і оператори у них, відповідні заданій і дискретної задачам. З їх допомогою доведена однозначна розв’язність дискретної задачі і дано строге обгрунтування оцінки швидкості збіжності рішення дискретної задачі до точного рішення інтегрального рівняння.

Ключові слова: інтегральні рівняння, логарифмічне ядро, метод дискретних особливостей.

Рассмотрено интегральное уравнение первого рода с логарифмическим ядром, к которому приводит ряд задач дифракции волн. Проведена дискретизация этого уравнения на основе метода дискретных особенностей. Введены пары гильбертовых пространств и операторы в них, соответствующие заданной и дискретной задачам. С их помощью доказана однозначная разрешимость дискретной задачи и дано строгое обоснование оценки скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению интегрального уравнения.

Ключевые слова: интегральные уравнения, логарифмическое ядро, метод дискретных особенностей.

We consider an integral equation of the first kind with a logarithmic kernel, which arises in a number of problems of wave diffraction. The equation is discretized using the method of discrete singularities. We introduce a pair of Hilbert spaces and operators in them, corresponding to the given and the discrete problems. With their help, we prove the unique solvability of the discrete problem and justify rigorously the rate of convergence of the solution of the discrete problem to the exact solution of the integral equation.

Key words: integral equations, logarithmic kernel, the method of discrete singularities.

Введение. Ряд задач математической физики приводит к необходимости решать интегральные уравнения и системы интегральных уравнений первого рода с логарифмическими особенностями [1]. В статье рассмотрен и обоснован численный метод дискретных особенностей [2, 3] решения таких систем интегральных уравнений на отрезке $[-1,1]$.

Основная идея метода дискретных особенностей заключается в следующем: решение интегрального уравнения ищем в специально выбраных точках, которые соответсвуют узлам квадратурных формул для интегралов с логарифмическими ядрами.Причём применяются две различные квадратурные формулы: одна для интеграла с логарифмическим ядром, другая для регулярной части уравнения (с теми же самыми узлами). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений, которая аппроксимирует заданное интегральное уравнение.

Постановка задачи. Рассматривается интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x-x_0|\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x_0,x)\frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}}=f(x_0),\ |x_0|<1 \tag{1}$$

относительно неизвестной функции $u(x)$. Предполагается, что $f(x_0)\in C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$, $K(x_0,x)\in C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной.

Пусть $C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ обозначает класс μ раз непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций, $\mu-$е производные которых удовлетворяют *условию Гёльдера* с показателем γ $(0<\gamma\le 1)$.

Интерполяционные полиномы и квадратные формулы. Обозначим:

$$\left\{t_k^n\right\}_{k=1}^n = \left\{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right\}_{k=1}^n$$

– нули *полинома Чебышева* первого рода $T_n(t)=\cos(n\arccos t)$; $(P_{n-1}^I g)(x)$ – интерполяционный *полином Лагранжа* функции $g(x)$ с узлами интерполирования $\left\{t_k^n\right\}_{k=1}^n$.

Пусть $v_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n-1$, тогда имеют место квадратурные формулы [4]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} v_{n-1}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_{n-1}\left(t_k^n\right), \tag{2}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\left|x-x_0\right| v_{n-1}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_{n-1}\left(t_k^n\right)\left[\ln 2 + 2\sum_{p=1}^{n-1} T_p(x_0)\frac{T_p\left(t_k^n\right)}{p}\right], \tag{3}$$

причём фомула (2) остаётся верной для полиномов степени не выше $2n-1$.

Дискретизация уравнения. Приближённое решение уравнения (1) ищем в виде полинома $(n-1)$-й степени $u_{n-1}(x)\equiv(P_{n-1}^I u_{n-1})(x)$ из приближённого уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_{n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left|x-x_0\right|dx + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_{n-1}(x_0,x)\frac{u_{n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = f_{n-1}(x_0),\ \left|x_0\right|<1, \tag{4}$$

где $K_{n-1}(x_0,x) = \left(P_{n-1,x_0}^I P_{n-1,x}^I K\right)(x_0,x)$, $f_{n-1}(x_0) = \left(P_{n-1}^I f\right)(x_0)$.

Рассматривая это уравнение в точках $\left\{t_i^n\right\}_{i=1}^n$, получаем эквивалентную ему систему интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_{n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left|x-t_i^n\right|dx + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_{n-1}\left(t_i^n,x\right)\frac{u_{n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = f_{n-1}\left(t_i^n\right),\ i=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Вычисляя в (5) интегралы с помощью квадратурных формул (2) и (3) и перегруппировывая слагаемые, получаем, с учетом того, что

$$K_{n-1}\left(t_i^n,t_k^n\right) = \left(P_{n-1,x_0}^I P_{n-1,x}^I K\right)\left(t_i^n,t_k^n\right) = K\left(t_i^n,t_k^n\right),\ f_{n-1}\left(t_i^n\right) = \left(P_{n-1}^I f\right)\left(t_i^n\right) = f\left(t_i^n\right),\ i,k=\overline{1,n},$$

следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно значений приближённого решения $u_n(x)$ в узлах интерполирования

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_{n-1}\left(t_k^n\right)\left[-\ln 2 - 2\sum_{p=1}^{n-1} T_p\left(t_i^n\right)\frac{T_p\left(t_k^n\right)}{p} + K\left(t_i^n,t_k^n\right)\right] = f\left(t_i^n\right),\ i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Однозначная разрешимость системы (6) эквивалентна однозначной разрешимости уравнения (4).

Основные пространства и операторы в них. Обозначим: $L_{[-1,1]}^2$ – *гильбертово пространство функций* на $[-1,1]$ со скалярным произведением

$$(u,v) = \int_{-1}^{1} u(x)\overline{v}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$\|x\|$ – норма, порождённая этим скалярным произведением; $\Pi_{n-1}^I \subset L_{[-1,1]}^2$ – n–мерное подпространство всех алгебраических полиномов степени не выше $n-1$. Введём операторы:

$$(Bu)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left|x-x_0\right|dx,\quad (Ku)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K(x_0,x)\frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$(K_{n-1}u_{n-1})(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_{n-1}(x_0,x)\frac{u_{n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Тогда уравнения (1) и (4) можно записать,соответственно, в виде

$$(B+K)u = f\ , \tag{7}$$

$$(B+K_{n-1})u_{n-1} = f_{n-1}\,. \tag{8}$$

В рассматриваемых задачах оператор $B+K$ непрерывно обратим в паре пространств $\left(L^2_{[-1,1]}, L^2_{[-1,1]}\right)$.

Имеют место соотношения [4]

$$B: T_0(t) \to (-\ln 2) T_0(t_0)\,,\quad B: T_n(t) \to -\frac{T_n(t_0)}{n}\,,\quad n = 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

Из (9) следует, что оператор B отображает Π_n^I в Π_n^I. Поэтому, в силу определения оператора K_{n-1}, оператор $B+K_{n-1}$ отображает Π_n^I в Π_n^I.

Доказательство однозначной разрешимости системы (6). Докажем, что оператор $B+K_{n-1}$ непрерывно обра-тим в паре пространств

$$\left(\Pi_{n-1}^I, \Pi_{n-1}^I\right) \tag{10}$$

и, следовательно, уравнение (8) и система (6) однозначно разрешимы. Для этого воспользуемся следующим результатом [5].

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $\tilde{X} \subset X$ и $\tilde{Y} \subset Y$ – их конечномерные подпространства одинаковой размерности. Рассмотрим два уравнения:

точное

$$Kx = y \quad (x \in X, y \in Y) \tag{11}$$

и приближённое

$$\tilde{K}\tilde{x} = \tilde{y} \quad \left(\tilde{x} \in \tilde{X}, \tilde{y} \in \tilde{Y}\right), \tag{12}$$

где K и $\tilde{K}$ – линейные операторы, $K: X \to Y$, $\tilde{K}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

а) оператор K непрерывно обратим в паре пространств (X, Y);

б) $p = \left\|K^{-1}\right\|_{Y\to X} \left\|K - \tilde{K}\right\|_{\tilde{X}\to\tilde{Y}} < 1$.

Тогда приближённое уравнение (12) имеет единственное решение $\tilde{x}^* \in \tilde{X}$ при любой правой части $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, причём, если $x^* \in X$ – точное решение уравнения (11) и $\delta = \|y - \tilde{y}\|_Y$, то

$$\left\|x^* - \tilde{x}^*\right\|_X \le \left\|K^{-1}\right\|_{Y\to X} (1-p)^{-1} \left[\delta - p\|y\|_Y\right].$$

Чтобы воспользоваться теоремой 1, нужно оценить $\left\|(K-K_n)u_n\right\|$ и $\|f - f_n\|$.

Лемма. *Пусть E_n – это наилучшее приближение функции $g(x)$ на $[-1,1]$ алгебраическими полиномами степени не выше n. Тогда*

$$\left\|P_n^I g - g\right\| \le 2E_n\sqrt{\pi}\,.$$

Оценки E_n для различных классов функций даются *теоремами Джексона* [6]. В частности, для $g(x) \in C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ при $n > \mu$:

$$E_n \le \frac{C_\mu 2^{\mu+\gamma}}{n^{\mu+\gamma}} M(g)\,,$$

где $C_\mu = 12\dfrac{6^\mu \mu^\mu}{\mu!}\left(\dfrac{\mu+1}{2}\right)^\gamma$; $M(g)$ – константа в условии Гёльдера для $g^{(\mu)}(x)$.

Пользуясь этой леммой, получаем при $n-1 > \mu$ следующие оценки:

$$\|f-f_{n-1}\| \le \frac{D(f)}{(n-1)^{\mu+\gamma}} \text{ и } \|K-K_{n-1}\|_{\Pi^I_{n-1}\to\Pi^I_{n-1}} \le \frac{D(K)}{(n-1)^{\mu+\gamma}},$$

где $D(f)$ и $D(K)$ – константы, не зависящие от n. Тогда при $n-1>\mu$:

$$\|(B+K)-(B+K_{n-1})\|_{\Pi^I_{n-1}\to\Pi^I_{n-1}} = \|K-K_{n-1}\|_{\Pi^I_{n-1}\to\Pi^I_{n-1}} \le D(K)(n-1)^{-\mu-\gamma}.$$

Выберем $N>\mu+1$ такое, чтобы при любом $n\ge N$ выполнялось неравенство

$$p_n = \left\|(B+K)^{-1}\right\|_{L^2\to L^2}\|K-K_{n-1}\|_{\Pi^I_{n-1}\to\Pi^I_{n-1}} <1.$$

Тогда из теоремы 1 следует, что при любом $n\ge N$ оператор $B+K_{n-1}$ непрерывно обратим в паре пространств (10), то есть приближённое уравнение (4) имеет единственное решение $u_{n-1}(x)$. Кроме того, если $u(x)$ – точное решение уравнения (7), то имеет место оценка скорости сходимости приближённого решения к точному

$$\|u-u_n\| \le \left\|(B+K)^{-1}\right\|_{L^2\to L^2}\frac{1}{1-p_n}\left[\frac{D(f)}{(n-1)^{\mu+\gamma}}+p_n\|f\|\right],$$

где $p_n \le \left\|(B+K)^{-1}\right\|_{L^2\to L^2}\dfrac{D(K)}{(n-1)^{\mu+\gamma}}=\alpha_n$, $\alpha_n=\underline{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)$ при $n\to\infty$.

Отсюда следует, что $\|u-u_n\|\le\sigma_n$, где $\sigma_n=\underline{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)$ при $n\to\infty$.

Выводы. На основе численного метода дискретных особенностей приближенного решения интегральных уравнений построена система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая заданное интегральное уравнение с логарифмическим ядром. Доказано,что при некоторых предположениях гладкости ядра регулярной части и правой части интегрального уравнения соответствующая система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение. Кроме того, получена оценка скорости сходимости приближённого решения к точному в среднем.

Список литературы

1. *Tsalamengas J. L.* «Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part I : TM-Case» IEEE Trans. Antennas Propagat., 2010, vol. 58, pp. 3265 – 3274.
2. *Лифанов И. К.* Метод сингулярних интегральных уравнений и численный эксперимент. – М. : ТОО «Янус», 1995 – 520 с.
3. *Гандель Ю. В.*, *Еременко С. В.*, *Полянская Т. С.* Математические вопросы метода дискретних токов. Учеб. пособие. Ч. II. – Харьков, 1992. – 145 с.
4. *Гандель Ю. В.* Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учеб. пособие. Ч. 1. – Харьков – Херсон, 2001. – 92 с.
5. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань : Изд. Казанск. ун-та, 1980. – 231 с.
6. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М.-Л. : ГТТИ, 1949. – 688 с.

References (transliterated)

1. *Tsalamengas J. L.* "Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part I: TM-Case". IEEE Trans. Antennas Propagat. Publ., 2010, vol. 58, pp. 3265–3274.
2. *Lifanov I. K. Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislenniy eksperiment* [Method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow, Open Company "Janus" Publ., 1995. 520 p.
3. *Gande'l Y. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov. Ucheb. posobie. Ch. II* [Mathematical problems in the method of discrete currents. Proc. allowance. PartII]. Kharkov, 1992. 145 p.
4. *Gandel Y. V. Lektsii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integral'nykh uravneniy. Ucheb. posobie. Ch. I* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Proc. allowance. Part 1]. Kharkov-Kherson, 2001. 92 p.
5. *Gabdulkhaev B. G. Optimal'nye approksimatsii resheniy lineynykh zadach* [Optimal approximation of solutions for linear problems]. Kazan, Univ. Kazan. Universita Publ., 1980. 231p.
6. *Natanson I. P. Konstruktivnaya teoriya funktsyy* [Constructive theory of functions]. Moscow-Leningrad, GTTI Publ., 1949. 688p.

Поступила (received) 11.07.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Інтегральне рівняння на $[-1,1]$ **з логарифмічним ядром / Т. С. Полянська** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 81 – 85. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Интегральное уравнение на $[-1,1]$ **с логарифмическим ядром / Т. С. Полянская** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 81 – 85. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Integral equation on $[-1,1]$ **with a logarithmic kernel / T. S. Polyanskaya** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 81 – 85. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Полянська Тетяна Семенівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: 093- 921-97-17; e-mail: tatyana-polyanskaya1@mail.ru.

Полянская Татьяна Семеновна – кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: 093- 921-97-17; e-mail: tatyana-polyanskaya1@mail.ru.

Polyanskaya Tatyana Semenowna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: 093- 921-97-17; e-mail: tatyana-polyanskaya1@mail.ru.

УДК 621.224

А. В. РУСАНОВ, О. Н. ХОРЕВ, Д. Ю. КОСЬЯНОВ, С. А. РЯБОВА, П. Н. СУХОРЕБРЫЙ

ВЛИЯНИЕ ОСЕВОГО НАВАЛА ЛОПАСТЕЙ РАБОЧЕГО КОЛЕСА ОСЕВОЙ ГИДРОТУРБИНЫ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ В ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ

Представлено результати чисельного дослідження впливу складного осьового навалу лопатей робочого колеса осьової гідротурбіни ПЛ20 на характеристики потоку в проточній частині. Моделювання течії виконано на основі чисельного інтегрування рівнянь Рейнольдса і двопараметричної моделі турбулентності Ментера (SST). Розрахунки проведені за допомогою програмного комплексу IPMflow. Наведено аналіз структури потоку в розрахунковій області, що включає направляючий апарат, робоче колесо і відсмоктувальну трубу; представлені залежності значень ККД, потужності і напору від величини навалу при оптимальному режимі роботи.

Ключові слова: осьова гідротурбіна, проточна частина, просторове профілювання, осьовий навал, робоче колесо, відсмоктувальна труба, гідродинамічне вдосконалення.

Представлены результаты численного исследования влияния сложного осевого навала лопастей рабочего колеса осевой гидротурбины ПЛ20 на характеристики потока в проточной части. Моделирование течения выполнено на основе численного интегрирования уравнений Рейнольдса и двухпараметрической модели турбулентности Ментера (SST). Расчеты проведены с помощью программного комплекса IPMflow. Приведен анализ структуры потока в расчетной области, включающей направляющий аппарат, рабочее колесо и отсасывающую трубу, представлены зависимости значений КПД, мощности и срабатываемого напора от величины навала при оптимальном режиме работы.

Ключевые слова: осевая гидротурбина, проточная часть, пространственное профилирование, осевой навал, рабочее колесо, отсасывающая труба, гидродинамическое совершенствование.

The results of numerical investigation of the influence of the complex axial offset of the runner blades of the Kaplan turbine PL20 upon flow characteristics in the flow part are presented. The flow simulation has been carried out on basis of numerical integration of the Reynolds equations and the two-parameter turbulence model of Menter (*SST*). The calculations have been conducted with the help of the software system *IPMFlow*. The analysis of the flow pattern in the computational region including guide vanes, runner and draft tube is presented; the dependences of the values of efficiency, capacity and actuated head on the offset value at optimum operating condition are shown. As a result of investigations it is established that the application of peripheral axial offset: 1) has little impact on the flow pattern in the area behind the guide vanes and in front of the runner and significant impact behind the runner at the entrance to the draft tube; 2) leads to changes of the form of pressure diagrams on the surfaces of the runner blades, especially in the area of the inlet edges; 3) makes it possible to align the distribution of total pressure across the channel width of the runner; 4) impacts on the flow pattern and energy loss in the draft tube; 5) impacts on integral parameters of flow part: efficiency, capacity, head; 6) makes it possible to increase the maximum values of efficiency and capacity at the optimum operating condition of modern high-performance flow part of the Kremenchug HPP.

Key words: Kaplan turbine, flow part, spatial profiling, axial offset, runner, draft tube, hydrodynamic improvement.

Введение. Повышение эффективности гидротурбинного оборудования ГЭС является важной научно-технической проблемой, решение которой приводит к необходимости совершенствования существующих методов расчета и анализа рабочего процесса гидротурбин [1]. Перспективным способом повышения эффективности проточных частей (ПЧ) гидромашин является их гидродинамическое усовершенствование за счет пространственного профилирования лопастных систем. В ИПМаш НАН Украины накоплен большой опыт по пространст-