УДК 62-503.5

Е.Е. Запорожченко, канд. физ.-мат. наук,
М.С. Сазонова, канд. физ.-мат. наук, Днепропетровск, Украина
С.Н. Лавриненко, д-р техн. наук, И.С. Лавриненко, Харьков, Украина

ОПЕРИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРОЦЕССА ПРОИЗВОДСТВА БИОИНЖЕНЕРНЫХ ИЗДЕЛИЙ

У статті розглянуті аспекти застосування теореми байєса про умовну ймовірність певної події при заданій ймовірності іншої події для вирішення проблем підвищення якісних показників при виробництві виробів біоінженерного призначення. даний підхід пов'язаний із статистичним оцінюванням параметрів технологічних моделей і дає можливість отримати прийнятні з практичної точки зору оцінки за допомогою малих вибірок в умовах реального виробництва.

В статье рассмотрены аспекты применения теоремы Байеса об условной вероятности определенного события при заданной вероятности другого события для решения проблем повышения качественных показателей при производстве изделий биоинженерного назначения. Данный подход связан со статистическим оцениванием параметров технологических моделей и дает возможность получить приемлемые с практической точки зрения оценки при помощи малых выборок в условиях реального производства.

The article deals with aspects of the application of Bayes' theorem of conditional probability of a particular event at a given probability of another event to address the quality indexes of the production of bioengineering components. This approach is related to the statistical estimation of parameters of technological models and makes it possible to obtain acceptable evaluation from a practical point of view using small samples in real production.

Анализ литературы и постановка проблемы. Использование байесовских методов для классификации, прогнозирования и восстановления регрессии, необходимые при оперировании вероятностными характеристиками обеспечения качества в реальных технологических процессах производства в настоящее время является актуальной задачей [1-3]. При этом байесовский подход к теории вероятностей является альтернативой классическому частотному подходу [4, 5]. В данном случае вероятность интерпретируется как мера незнания, компенсируемая возможностью экспертной оценки высококвалифицированных специалистов, а не как объективная случайность. Простые правила оперирования с вероятностью, такие как формула полной вероятности и формула Байеса, позволяют проводить оценку в условиях неопределенности, то есть байесовский подход к теории вероятностей можно рассматривать как обобщение классической булевой логики.

Цель статьи – показать результаты создания новой байесовской модели оперирования статистическими данными оценки качественных показателей технологического процесса производства биоинженерных изделий и влияние человеческого фактора (квалификационного уровня персонала), которая более полно учитывает условные вероятности определенного события при заданной вероятности другого события для решения проблем повышения качества выпускаемой продукции. Данный подход связан со статистическим оцениванием экономических и технологических параметров существующих производственных моделей и дает возможность получить приемлемые с практической точки зрения оценки при помощи малых выборок в условиях реального производства.

Байесовская модель повышения качества.

Рассмотрим два предприятия, выпускающие однотипные детали. Предприятие I оснащено высокотехнологичным оборудованием. Однако на нем работает 20% высококвалифицированных работников и 80% работников средней квалификации. Как известно из статистических данных, вероятность изготовить высококачественную деталь для работника высокой квалификации этого предприятия 0,98, а для работника средней квалификации 0,81.

На предприятии II, оснащенном низкотехнологичным оборудованием, также работают как работники высокой, так и средней квалификации. Как известно, вероятность изготовления высококачественной детали для работника высокой квалификации этого предприятия равняется 0,92, а для работника средней квалификации 0,74.

Возникает вопрос о том, каким должно быть процентное соотношение работников высокой и средней квалификации на предприятии II, чтобы если деталь, взятая на выборочный контроль, оказалась высокого качества, то более вероятным было бы, что она изготовлена на предприятии II с низкотехнологичным оборудованием, но с более квалифицированными кадрами. Для решения этого вопроса обратимся к формуле Байеса.

Выскажем две гипотезы о том, где изготовлена деталь, взятая на выборочный контроль:

H_1 – деталь изготовлена на предприятии I,

H_2 – деталь изготовлена на предприятии II.

Если считать, что предприятия изготавливают равные количества деталей, то $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2} = 0,5$.

Предположим, что взятая на выборочный контроль деталь оказалась высокого качества. Это, согласно формуле Байеса, позволяет переоценить вероятности гипотез H_1 и H_2. А именно, для второй гипотезы новая вероятность обозначается $P_A(H_2)$ (вероятность после наступления события A – деталь оказалась высокого качества) и находится по формуле

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}, \tag{1}$$

где $P_{H_1}(A)$ и $P_{H_2}(A)$ – условные вероятности того, что деталь высокого качества (A) при условии, что она изготовлена на предприятии I (H_1); на предприятии II (H_2).

Вычислим вероятность $P_{H_1}(A)$ по формуле полной вероятности. Для этого рассмотрим гипотезы:

B_1 – деталь изготовлена высококвалифицированным работником I предприятия;

B_2 – деталь изготовлена работником средней квалификации предприятия I.

Тогда формула полной вероятности имеет следующий вид:

$$P_{H_1}(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_1}(A)=\frac{20}{100}\cdot 0,98+\frac{80}{100}\cdot 0,81=0,2\cdot 0,98+$$
$$+0,8\cdot 0,81=0,844.$$

Вычисление вероятности $P_{H_2}(A)$ производится также по формуле полной вероятности, с тем лишь отличием, что пока считается неизвестным процентное соотношение работников высокой и средней квалификации этого (II) предприятия. Вводятся гипотезы:

C_1 – деталь изготовлена работником высокой квалификации предприятия II;

C_2 – деталь изготовлена работником средней квалификации предприятия II.

По формуле полной вероятности

$$P_{H_2}(A)=P(C_1)\cdot P_{C_1}(A)+P(C_2)\cdot P_{C_2}(A). \tag{2}$$

Обозначим через m % - процент работников высокой квалификации II предприятия, тогда процент работников средней квалификации - $(100-m)$ %.

Тогда $P\left(C_1\right)=\dfrac{m}{100}$; $\quad P\left(C_2\right)=\dfrac{100-m}{100}$.

Согласно статистическим данным $P_{C_1}\left(A\right)=0,92$; $\quad P_{C_2}\left(A\right)=0,74$.

Тогда по формуле (2) имеем

$$P_{H_2}\left(A\right)=\frac{m}{100}\cdot 0,92+\frac{100-m}{100}\cdot 0,74. \tag{3}$$

Возвращаясь к формуле Байеса (1) и подставляя вероятности, получаем

$$P_A\left(H_2\right)=\frac{0,5\cdot P_{H_2}\left(A\right)}{0,5\cdot 0,844+0,5\cdot P_{H_2}\left(A\right)}=\frac{P_{H_2}\left(A\right)}{0,844+P_{H_2}\left(A\right)}. \tag{4}$$

Нетрудно понять, что для того, чтобы более вероятным было, что высококачественная деталь была изготовлена на предприятии II, надо, чтобы новая вероятность гипотезы H_2 была больше первоначальной вероятности, то есть чтобы $P_A\left(H_2\right)>P\left(H_2\right)=0,5$.

А именно, чтобы $\dfrac{P_{H_2}\left(A\right)}{0,844+P_{H_2}\left(A\right)}>0,5$.

Решив это неравенство, получаем, что $P_{H_2}\left(A\right)$ должна быть больше, чем 0,844. Из формулы (3) имеем условие, что должно выполняться неравенство $\dfrac{m}{100}\cdot 0,92+\dfrac{100-m}{100}\cdot 0,74>0,844$. Отсюда:

$$0,92m+\left(100-m\right)\cdot 0,74>84,4;\quad 0,92m+74-0,74m>84,4;\quad 0,18m>10,4,$$

$$m>\frac{1040}{18};\qquad m>57\frac{7}{9}\ \%.$$

Таким образом, если процент квалифицированных работников II предприятия превысит 57,7%, то более вероятным будет то, что взятая на выборочный контроль и оказавшаяся высокого качества деталь, была изготовлена на предприятии II (за счет высокой квалификации его работников).

Пусть, для определенности, на предприятии II работает 60% работников высокой и 40% средней квалификации.

Тогда $P_{H_1}\left(A\right)=0,6\cdot 0,92+0,4\cdot 0,74=0,848$ и по формуле Байеса

$$P_A\left(H_2\right)=\frac{0,5\cdot 0,848}{0,5\cdot 0,844+0,5\cdot 0,848}=\frac{0,848}{1,692}=0,5012.$$

Так как H_1 и H_2 - несовместные события, образующие полную группу событий, то их вероятности в сумме равна 1. Поэтому $P_A(H_1)=1-P_A(H_2)=$ $=1-0,5012=0,4988$. Таким образом, более вероятным является то, что деталь, взятая при выборочном контроле и оказавшаяся высокого качества, изготовлена на предприятии II.

Предположим, что при повторении выборочного контроля опять была обнаружена деталь высокого качества (A). Как это скажется на вероятности гипотез? Применяя вторично формулу Байеса, имеем

$$P_{A\cdot A}(H_2)=\frac{0,5012\cdot 0,848}{0,4988\cdot 0,844+0,5012\cdot 0,848}=\frac{0,425}{0,846}=0,5024\,.$$

$$P_{A\cdot A}(H_1)=1-0,5024=0,4976\,.$$

Как видно, вероятность гипотезы H_2 еще увеличилась, то есть еще более вероятнее, что успешно прошедшая выборочный контроль деталь изготовлена на менее технологичном предприятии II, но с более квалифицированными работниками.

Можно показать, что тенденция к увеличению вероятности гипотезы H_2 после каждого наступления события A (взятая на контроль деталь высокого качества) сохранится.

$$P_{A\cdot A\cdot A}(H_2)=\frac{0,5024\cdot 0,848}{0,4976\cdot 0,844+0,5024\cdot 0,848}=\frac{0,426}{0,42+0,426}=\frac{0,426}{0,846}=0,5036\,.$$

$$P_{A\cdot A\cdot A}(H_1)=1-0,5036=0,4964\,.$$

Обобщим полученные данные. Обозначим процент работников высокой квалификации предприятия I m_1 %, тогда процент работников средней квалификации – $(100-m_1)$ %.

На предприятии II m_2 % работников высокой квалификации и $(100-m_2)$ % средней квалификации.

Пусть деталь, взятая на выборочный контроль из партии деталей, изготовленной на 50% на предприятий I и на 50% на предприятии II, оказалась высокого качества (событие A).

Этот факт меняет вероятности гипотез H_1 и H_2 (деталь изготовлена на предприятии I и на предприятии II соответственно). Если первоначальные вероятности гипотез $P(H_1)=P(H_2)=0,5$, то новые вероятности гипотез (после наступления события A) $P_A(H_1)$, $P_A(H_2)$ могут быть вычислены по формулам Байеса

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}, \tag{5}$$

где $i=1,2$; $P_{H_1}(A)$, $P_{H_2}(A)$ - условные вероятности того, что деталь, взятая на выборочный контроль высокого качества при условии, что она изготовлена на I предприятии; на II предприятии, которые могут быть вычислены по формуле полной вероятности

$$P_{H_1}(A)=\frac{m_1}{100}\cdot 0,98+\frac{100-m_1}{100}\cdot 0,81=\frac{0,98m_1+0,81(100-m_1)}{100},$$

$$P_{H_2}(A)=\frac{m_2}{100}\cdot 0,92+\frac{100-m_2}{100}\cdot 0,74=\frac{0,92m_2+0,74(100-m_2)}{100}.$$

Тогда

$$P_A(H_1)=\frac{0,5\cdot\frac{1}{100}\left(0,98m_1+0,81(100-m_1)\right)}{0,5\cdot\frac{1}{100}\left(0,98m_1+0,81(100-m_1)\right)+0,5\cdot\frac{1}{100}\left(0,92m_2+0,74(100-m_2)\right)}=$$

$$=\frac{0,98m_1+0,81(100-m_1)}{0,98m_1+0,81(100-m_1)+0,92m_2+0,74(100-m_2)};$$

Аналогично

$$P_A(H_2)=\frac{0,92m_2+0,74(100-m_2)}{0,98m_1+0,81(100-m_1)+0,92m_2+0,74(100-m_2)}. \tag{6}$$

Вычислим, при каком соотношении процента квалифицированных работников предприятий I и II m_1 и m_2 более вероятным было бы, что взятая при выборочном контроле высококачественная деталь изготовлена на менее технологичном предприятии II (за счет достаточно высокого процента m_2 работников высокой квалификации). То есть, чтобы $P_A(H_2)>P_A(H_1)$. Очевидно, что данное неравенство будет выполняться, если

$$0,92m_2+0,74(100-m_2)>0,98m_1+0,81(100-m_1), \tag{7}$$

$$0,92m_2-0,74m_2+74>0,98m_1-0,81m_1+81;\quad 0,18m_2>0,17m_1+7,$$

$$m_2>\frac{17}{18}m_1+38\frac{8}{9}.$$

Понятно, что данное неравенство будет выполняться при $m_2 \geq m_1 + 39$. Заметим, что так как $m_2 \leq 100\%$, то m_1 должно быть не больше 61%.

Таким образом, если процент высококвалифицированных работников высокотехнологичного предприятия I не превышает 61%, то с ним может успешно конкурировать низкотехнологичное предприятие II с процентом высококвалифицированных работников $m_2 \geq m_1 + 39$.

Полученные данные можно обобщить, обозначив вероятности изготовления высококачественной детали работником высокой квалификации p_{11}, работником средней квалификации p_{12} (для предприятия I) и p_{21}, p_{22} (для предприятия II). В этих обозначениях неравенство (7) принимает вид

$$p_{21}m_2 + p_{22}\left(100 - m_2\right) > p_{11}m_1 + p_{12}\left(100 - m_1\right),$$

$$m_2\left(p_{22} - p_{22}\right) + 100p_{22} > m_1\left(p_{11} - p_{12}\right) + 100p_{12},$$

$$m_2\left(p_{21} - p_{22}\right) > m_1\left(p_{11} - p_{12}\right) + 100\left(p_{12} - p_{22}\right).$$

Отсюда $m_2 > \dfrac{p_{11} - p_{12}}{p_{21} - p_{22}} m_1 + \dfrac{p_{12} - p_{22}}{p_{21} - p_{22}} \cdot 100$.

Выводы.

1. Простые правила оперирования с вероятностью, такие как формула полной вероятности и формула Байеса, позволяют проводить оценку в условиях неопределенности, то есть байесовский подход к теории вероятностей можно рассматривать как обобщение классической булевой логики.

2. Определено процентное соотношение работников высокой и средней квалификации на предприятиях с разным уровнем технологического обеспечения производственного процесса. Из представленной байесовской модели следует вывод: если процент высококвалифицированных работников высокотехнологичного предприятия I не превышает 61%, то с ним может успешно конкурировать предприятие II с более низким уровнем технологического оснащения, но с более высоким процентом высококвалифицированных работников ($m_2 \geq m_1 + 39$).

Список использованных источников: 1. *Каніовська І.Ю.* Теорія ймовірностей у прикладах і задачах / *І.Ю. Каніовська* – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2004. – 156 с. **2.** *Литвин І.І.* Вища математика / *І.І. Литвин, О.М. Конончук, Г.О. Желєзняк* – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 368 с. **3.** *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения / *Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров*– М.: Наука, 1998. – 480 с. **4.** *Турчин В.М.* Теорія ймовірностей: Основні поняття, приклади, задачі / *В.М. Турчин* – К.: А.С.К., 2004. – 208 с. **5.** *Зайцев Е.П.* Теория вероятностей и математическая статистика. Учебно-методическое пособие / *Е.П. Зайцев* – Кременчуг, 2008. – 484 с.

Поступила в редколлегию 27.06.2013