

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до виконання практичних робіт**

«Визначення напружень та переміщень  
при простих та складних деформаціях»

з дисциплін «Прикладна механіка» та «Технічна механіка»

для студентів денної та заочної форм навчання немеханічних спеціальностей

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 2 від 26.06.2025 р.

ХАРКІВ  
НТУ «ХПІ»  
2025

**Методичні вказівки** до виконання практичних робіт «Визначення напружень та переміщень при простих та складних деформаціях» з дисциплін «Прикладна механіка» та «Технічна механіка» для студентів денної та заочної форм навчання немеханічних спеціальностей / уклад.: В.В. Клітної, С.В. Бобрицький, М.В. Павлюченко, В.В. Клітної. – Харків: НТУ «ХП», 2025. – 52 с.

Укладачі: В. В. Клітної  
С. В. Бобрицький  
М.В. Павлюченко  
В. В. Клітної

Рецензент А. В. Гайдамака

Кафедра деталей машин та гідропневмосистем

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
ЗАВДАННЯ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ.....	5
Завдання 1. Деформація «Розтяг - стиск» .....	5
Завдання 2. Деформація «Кручення».....	7
Завдання 3. Деформація «Згин» .....	11
Завдання 4. «Складна деформація».....	18
ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКІВ .....	24
Приклад 1. Деформація «Розтяг-стиск». ....	24
Приклад 2. Деформація «Кручення» .....	27
Приклад 3 Деформація «Згин». Балка 1 .....	30
Приклад 4. Деформація «Згин». Балка 2 .....	34
Приклад 5. Деформація «Згин». Балка 3 .....	39
Приклад 6. «Складна деформація»: спільна дія згину з крученням.....	44
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	50
ДОДАТОК.....	51

## ВСТУП

Методичні вказівки до виконання практичних робіт «Визначення напружень та переміщень при простих та складних деформаціях» з дисциплін «Прикладна механіка» та «Технічна механіка» розроблені для студентів денної та заочної форм навчання немеханічних спеціальностей

Методичні вказівки присвячені розв'язанню практичних завдань з визначення напружень та переміщень при простих та складних деформаціях.

В першій частині методичних вказівок наведені варіанти завдань для розв'язання задач з центрального розтягування і стиснення прямолінійних стрижнів, розрахунків на міцність і жорсткість при крученні, вигині та складних видах деформації.

У другій частині вказівок наведені приклади розв'язання задач, що супроводжується основними теоретичними даними курсу, які покладено в основу розв'язку.

# ЗАВДАННЯ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

## Завдання 1. Деформація «Розтяг - стиск»

Для заданої розрахункової схеми східчастого стрижня (рис. 1) за одним з наведених варіантів (табл. 1):

- 1) побудувати епюру повздовжніх сил;
- 2) побудувати епюру нормальних напружень;
- 3) визначити переміщення вільного кінця сталевого стрижня ( $E=2 \cdot 10^5$  МПа);
- 4) побудувати епюру переміщень;
- 5) обчислити коефіцієнт запасу  $n_T$  по відношенню до межі плинності ( $\sigma_T = 240$  МПа).

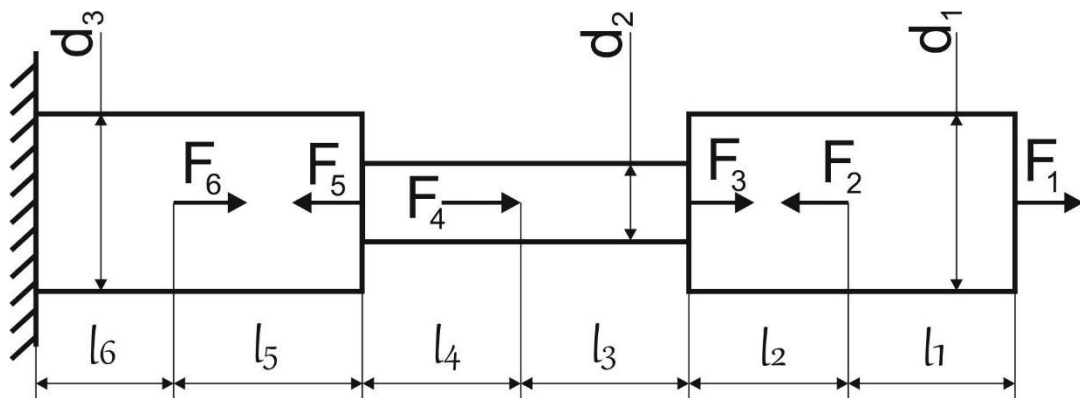


Рис.1. Розрахункова схема східчастого стрижня

Таблиця 1. Вихідні дані для розрахунку завдання 1

Варіант	Сила, кН						Довжина, м						Діаметр стрижня, мм		
	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$\ell_1$	$\ell_2$	$\ell_3$	$\ell_4$	$\ell_5$	$\ell_6$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
1	40	10	0	40	0	10	1,0	0,5	1,5	1,0	0,5	1,5	20	20	30
2	60	20	40	0	40	60	1,5	1,0	0,5	0	1,0	0,5	25	30	35
3	70	0	30	20	90	0	0,5	1,5	0,5	0,5	1,0	0	30	32	40
4	50	60	50	0	70	80	0,5	2,0	0	0,5	1,0	0,5	25	20	25
5	60	20	20	40	0	60	0,5	1,0	0,5	1,5	1,5	0,5	30	40	30
6	100	50	0	20	80	0	1,0	0,5	1,5	2,0	0	1,0	35	30	20
7	0	100	40	60	0	40	0	2,0	0,5	1,5	0,5	0,5	35	35	40
8	30	0	20	40	60	120	1,0	0	0,5	1,5	1,0	0,5	20	30	35
9	20	60	80	0	10	50	0,5	0,5	0,5	0	1,0	0,5	20	25	30
10	40	20	50	40	20	0	1,5	0,5	1,0	0,5	1,5	0	25	30	20
11	80	40	0	10	20	100	0,5	1,0	1,0	0,5	0,5	0,5	30	25	35
12	0	60	20	40	0	80	0	1,0	1,2	0,6	0,3	1,5	25	30	35
13	100	0	20	30	20	60	0,8	0	1,0	1,2	0,8	1,0	32	30	40
14	90	30	20	0	40	70	1,5	0,5	0	0,5	1,5	1,0	30	28	35
15	70	80	40	20	90	0	0,6	0,5	1,5	0,5	2,0	0,5	25	25	30
16	0	40	60	40	60	40	0	1,0	0,5	1,5	0,8	0,6	20	20	30
17	40	80	100	40	0	80	1,2	0,8	0,5	0,5	0,8	1,2	20	25	30
18	100	80	20	0	20	70	0,8	0,5	0,6	0,6	1,2	0,8	30	20	30
19	20	0	40	20	20	50	1,5	0	0,5	1,2	0,5	0,8	20	25	30
20	60	20	40	0	20	20	0,5	0,8	1,5	0,7	1,0	1,2	25	25	25
21	30	80	40	20	30	0	1,0	0,5	1,5	0,8	0,6	0	24	20	25
22	70	30	20	40	0	80	1,2	1,5	0,6	0,6	1,5	1,2	30	25	35
23	40	0	20	0	80	40	0,6	0	0,6	1,5	0,5	0,8	20	20	25
24	0	60	30	20	50	20	0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,5	25	30	35
25	40	20	40	20	90	0	1,0	1,5	0,8	0,6	0	1,0	20	25	25
26	60	40	0	80	20	40	1,5	0,6	0,5	0,8	1,5	1,0	25	30	35
27	50	20	20	100	0	20	1,0	0,8	0,6	0,6	0,5	1,2	25	28	30
28	10	0	20	10	60	50	0,8	0	1,0	0,8	0,5	0,8	30	20	20

## Завдання 2. Деформація «Кручення»

Для розрахункової схеми (рис. 2) за варіантом, наведеним у таблиці 2:

1) побудувати епюру крутних моментів. При побудові епюри крутних моментів, прийняти, що  $M_0 = M_1 + M_2 + M_3$ , або  $P_0 = P_1 + P_2 + P_3$ . Отримані розрахункові значення діаметрів валу округлити до найближчого більшого, що закінчується на 0, 2, 5, 8;

2) визначити діаметр валу на кожній ділянці;

3) побудувати епюру кутів повороту перерізів валу;

4) намалювати ескіз валу.

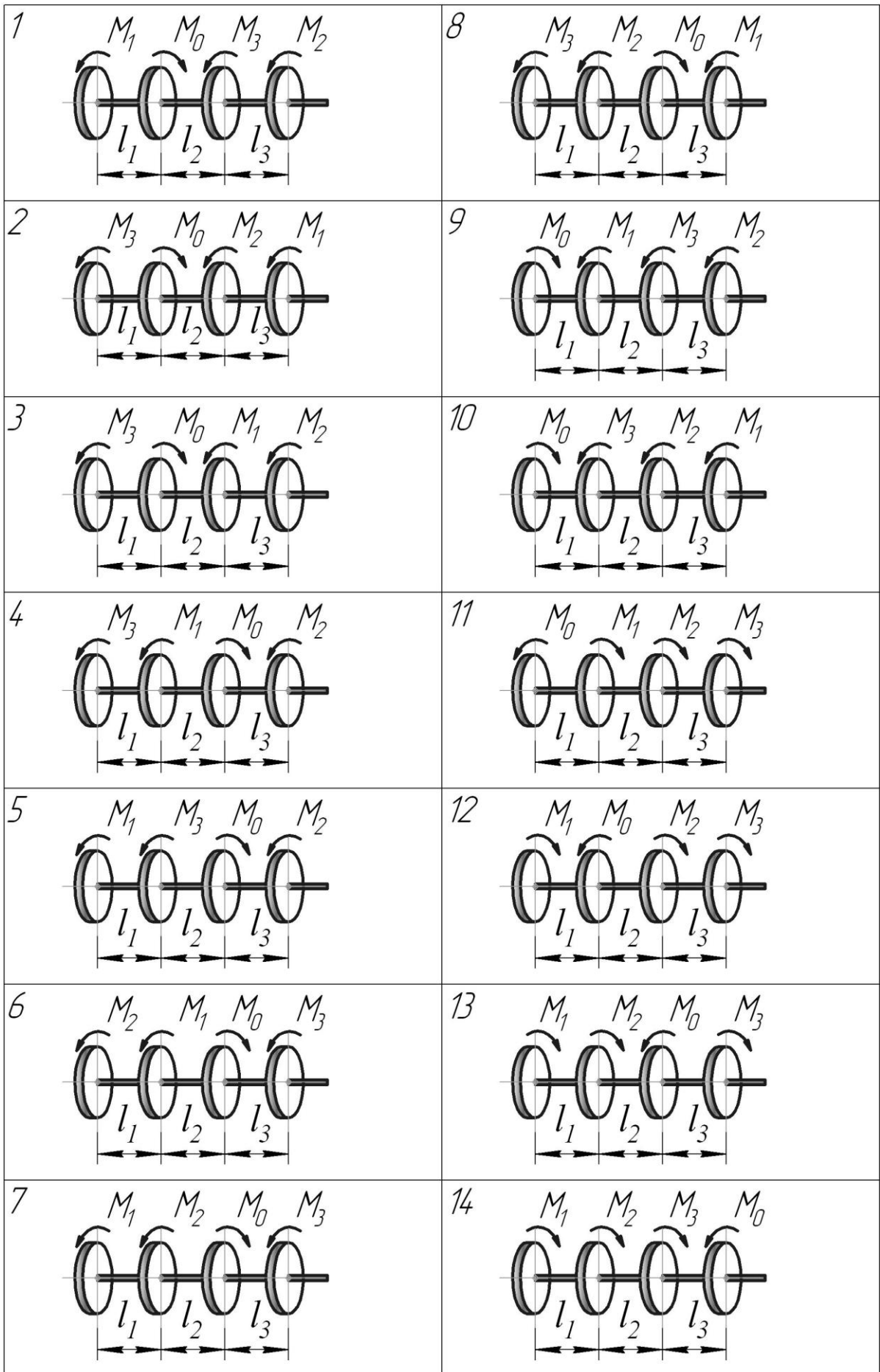


Рис. 2. Розрахункова схема до виконання завдання 2

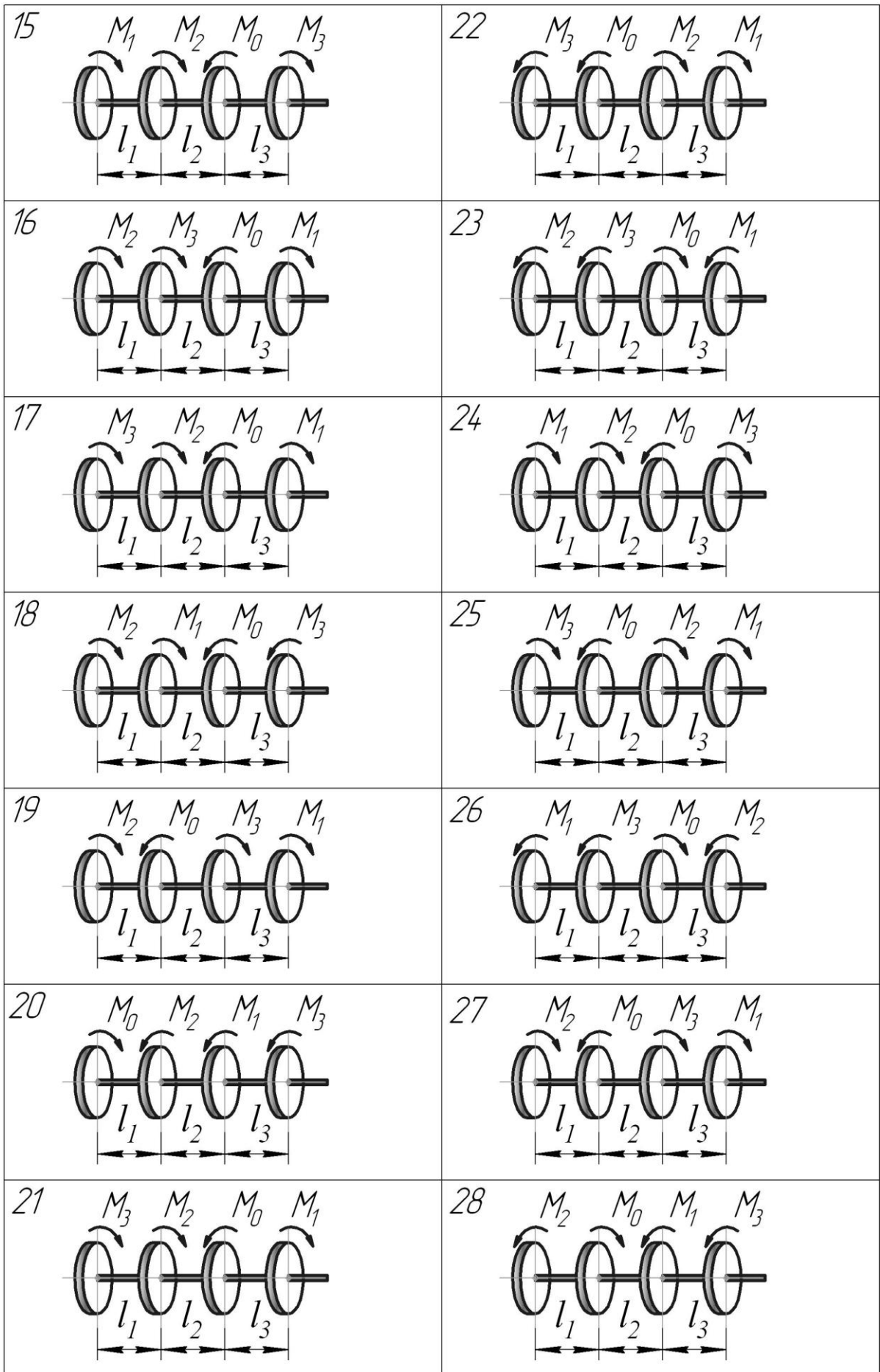


Рис. 2. Розрахункова схема до виконання завдання 2 (продовження)

Таблиця 2. Вихідні дані для розрахунку завдання 2

Варіант	Відстань, м			Крутні моменти, кНм			Потужність, кВт			Кутова швидкість, рад/с	Частота обертання, об/хв	Допустимі напруження при крученні, МПа
	$\ell_1$	$\ell_2$	$\ell_3$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$\omega$	$n$	[ $\tau$ ]
1	0,4	0,1	0,7	300	400	220						25
2	0,5	0,2	0,6				2,0	3,5	2,8	25	238	28
3	0,6	0,3	0,5	320	380	250						30
4	0,1	0,4	0,4				2,5	3,2	3,0	30	286	32
5	0,2	0,5	0,3	350	350	280						35
6	0,3	0,6	0,8				2,8	3,0	3,5	35	334	40
7	0,4	0,6	0,7	380	320	300						25
8	0,5	0,5	0,6				3,0	2,8	2,2	40	382	28
9	0,6	0,4	0,5	400	300	320						30
10	0,1	0,3	0,4				3,2	2,5	2,5	26	248	32
11	0,2	0,2	0,7	420	280	350						35
12	0,3	0,1	0,6				3,5	2,0	2,8	28	267	40
13	0,4	0,2	0,5	450	200	380						25
14	0,5	0,3	0,4				4,0	2,0	3,2	30	286	28
15	0,6	0,4	0,3	300	400	220						30
16	0,2	0,5	0,7				4,2	2,2	3,0	35	334	32
17	0,3	0,6	0,5	320	380	250						35
18	0,4	0,7	0,4				4,5	2,5	3,5	40	382	40
19	0,5	0,2	0,3	350	320	280						25
20	0,6	0,3	0,7				2,0	2,8	2,2	45	430	28
21	0,1	0,4	0,6	380	350	300						30
22	0,2	0,5	0,5				2,5	3,0	2,5	50	477	32
23	0,3	0,6	0,4	400	380	220						35
24	0,4	0,7	0,6				2,8	3,2	2,6	60	572	40
25	0,5	0,7	0,5	420	400	250						25
26	0,6	0,6	0,4				3,0	3,5	2,8	70	667	28
27	0,1	0,5	0,6	300	220	280						30
28	0,2	0,4	0,5				3,2	2,0	2,6	80	765	32

### Завдання 3. Деформація «Згин»

Для однієї із схем рис. 3 за варіантом, наведеним у таблиці 3:

1) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для трьох випадків навантаження балок. Масштаб поперечних сил і згинальних моментів для кожної балки вибрати з урахуванням місця, відведеного для побудови епюр;

- на кожній балці показати напрямки реакцій та вказати їх величини;
- на побудованих епюрах поперечних сил та згинальних моментів вказати їх величини;

2) для консольної балки 1 визначити переміщення та кут повороту вільного кінця, якщо  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

3) для балки 2 з поперечним перерізом зазначеного виду (рис. 4) визначити:

- положення центру ваги перерізу;
- момент інерції перерізу відносно нейтральної вісі  $X$ ;
- значення найбільших напружень, що розтягують, і побудувати епюру  $\sigma$ ;
- значення найбільших дотичних напружень та побудувати епюру  $\tau$ ;

4) для балки 3:

- з умови міцності за нормальними напруженнями при  $[\sigma] = 200$  МПа виконати підбір перерізів балки різної форми:

- прямокутний  $\frac{h}{b} = \beta$  та  $\frac{h}{b} = \frac{1}{\beta}$ ;
- круглий; кільцевий  $\frac{d}{D} = \alpha$ ;
- двотавровий.

- усі перерізи відобразити в одному масштабі;
- співставити величини площ різних перерізів;
- для обраного двотаврового перерізу побудувати в масштабі 1 см - 40 МПа епюри розподілу нормальних напружень в перерізі, де  $M = M_{max}$ , і дотичних напружень в перерізі, де  $Q = Q_{max}$ ;

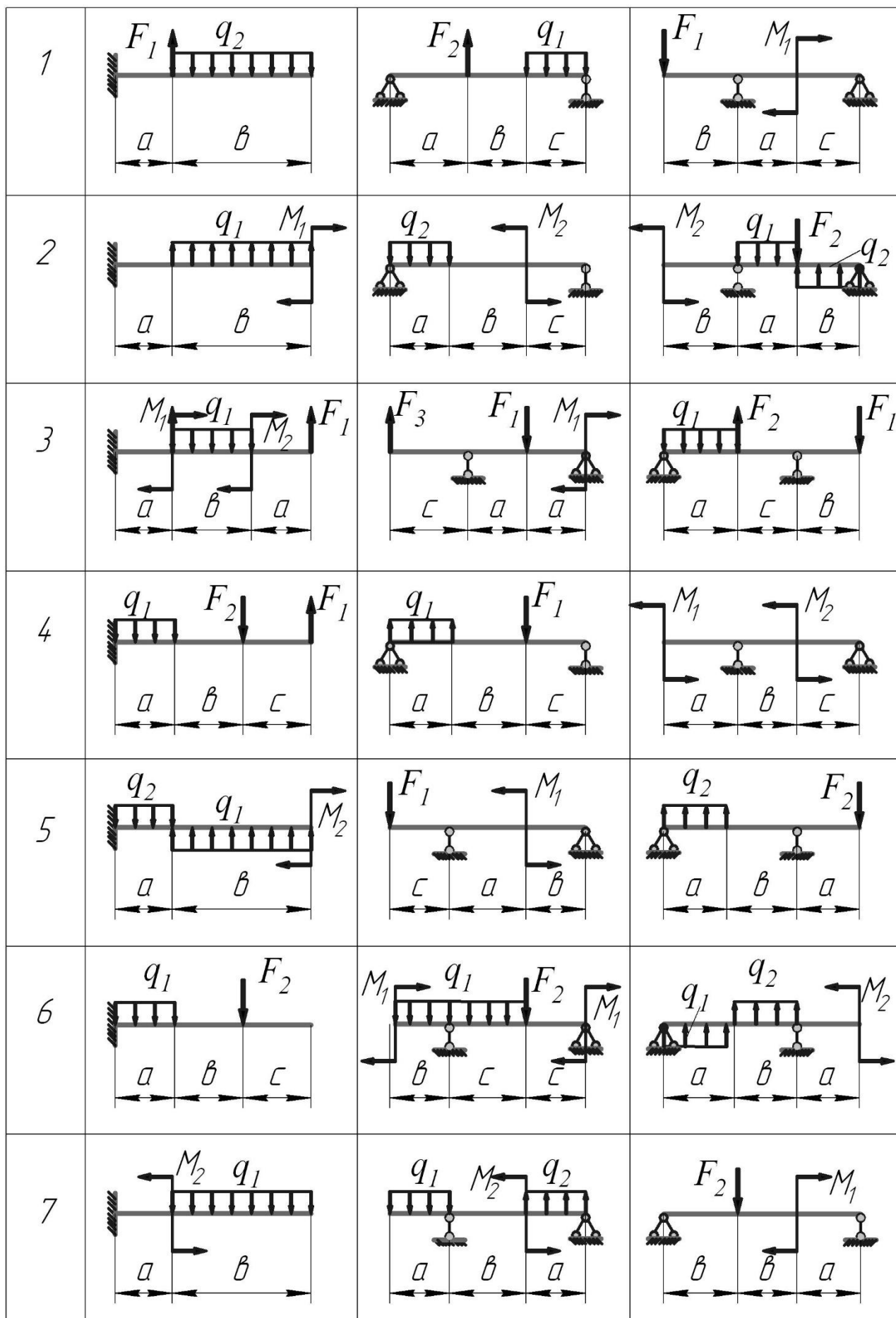


Рис.3. Розрахункові схеми до виконання завдання 3

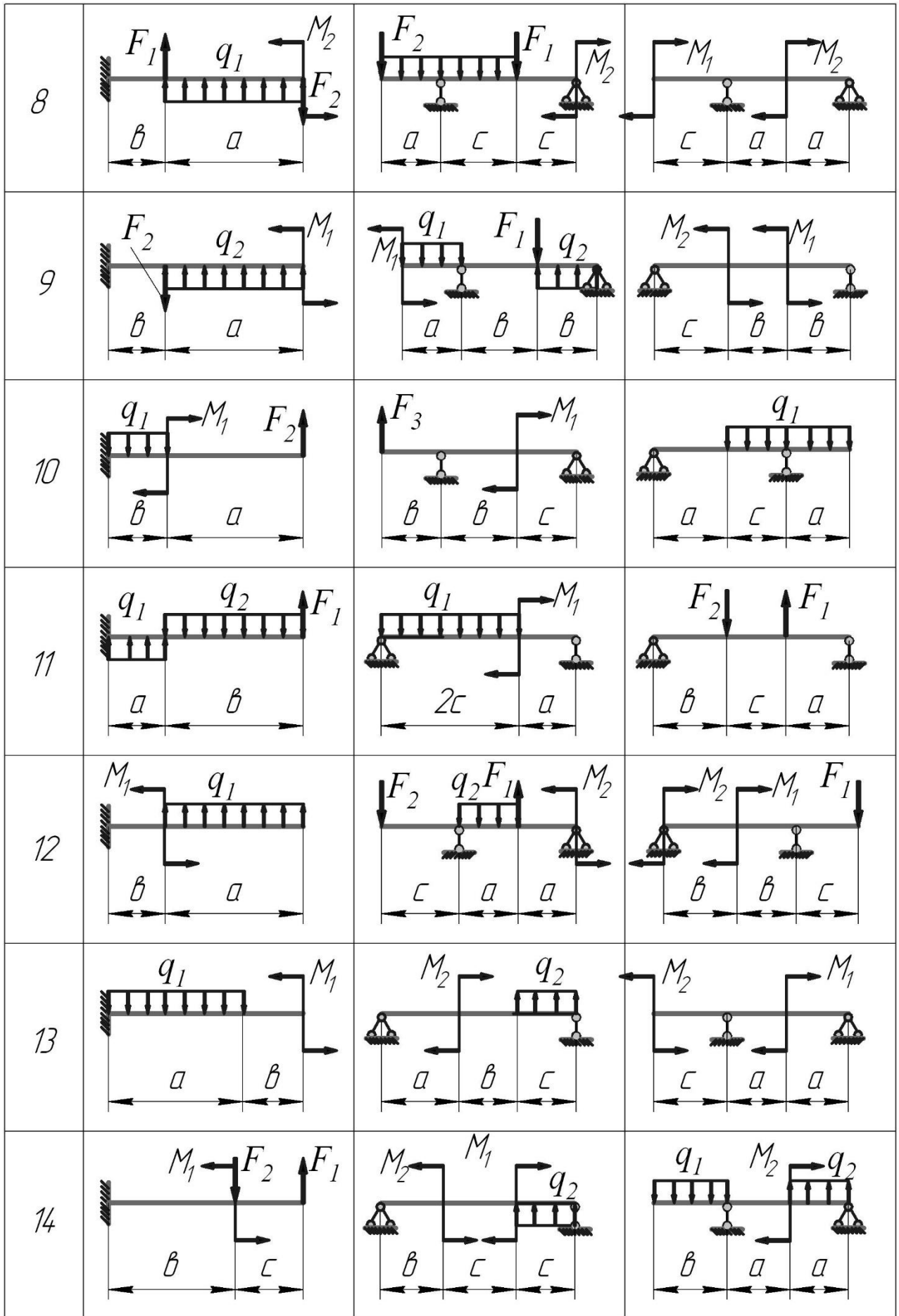


Рис.3. Розрахункові схеми до виконання завдання 3 (продовження)

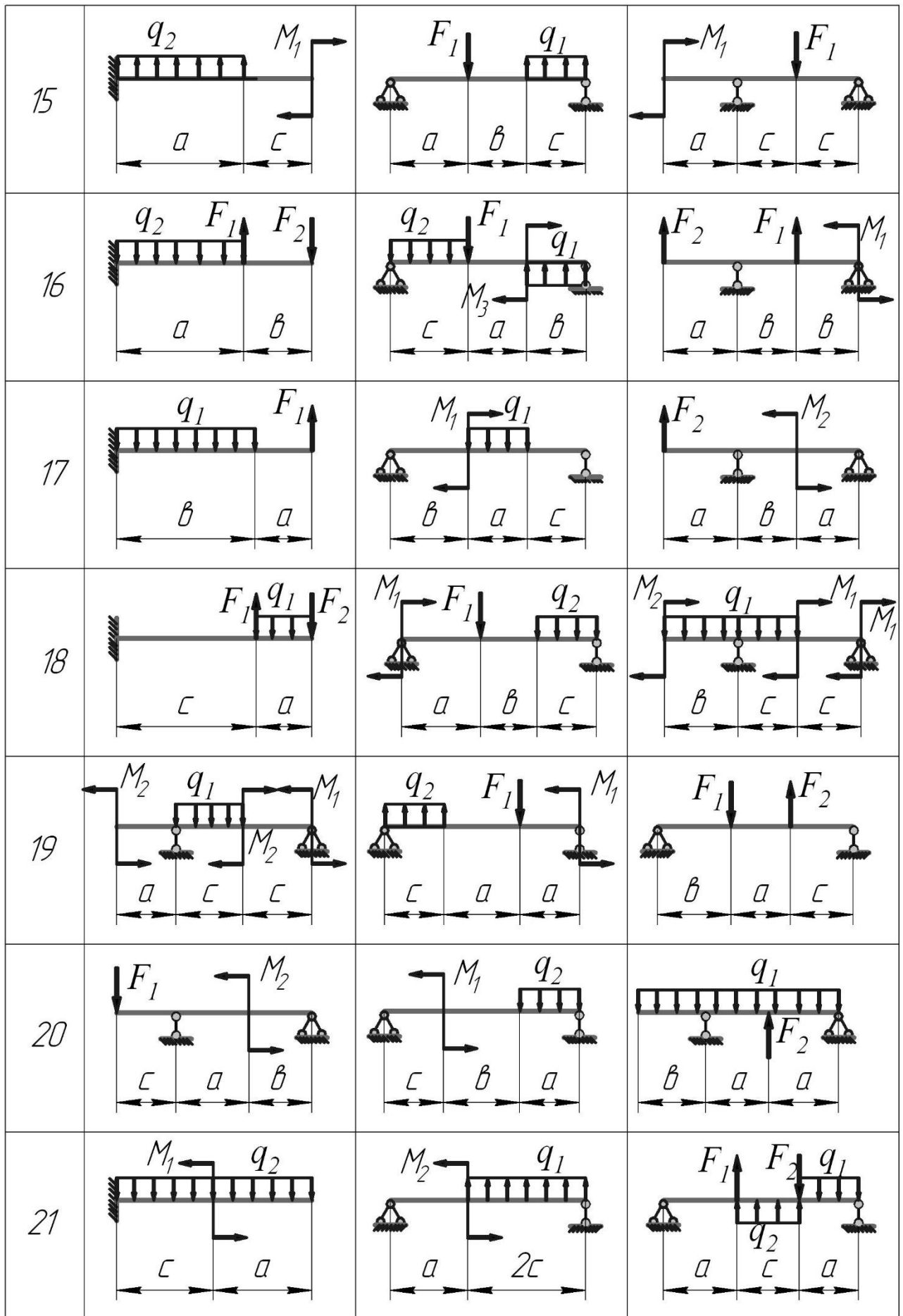


Рис.3. Розрахункові схеми до виконання завдання 3 (продовження)

22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			

Рис.3. Розрахункові схеми до виконання завдання 3 (продовження)

Таблиця 3. Вихідні дані для розрахунку завдання 3

Варіант	Довжина, м			Зовнішні силові чинники						Співвідношення та розміри			
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$M_1$ , кН/м	$M_2$ , кНм	$\beta$	$\alpha$	<i>m</i> , см	Переріз балки
1	1	1	2	20	25	10	8	30	20	1,4	0,40	5	A
2	2	3	6	15	30	12	14	40	20	1,5	0,45	6	B
3	3	1	4	30	35	14	16	50	20	1,6	0,50	7	C
4	3	2	4	25	35	16	10	30	30	1,7	0,55	4	D
5	2	2	5	35	40	18	10	40	40	1,8	0,60	5	E
6	3	2	4	30	40	20	10	50	20	1,9	0,65	5	J
7	1	3	2	35	45	10	12	30	40	2,0	0,70	7	A
8	2	3	3	40	40	12	16	40	50	2,1	0,75	8	L
9	3	3	5	50	40	14	18	50	30	2,2	0,80	9	M
10	1	2	4	45	35	16	18	30	50	2,3	0,85	4	N
11	2	3	6	45	40	18	20	40	20	1,6	0,60	5	A
12	3	2	3	50	40	20	14	50	40	1,7	0,65	6	B
13	1	2	3	40	45	10	14	30	20	1,8	0,70	7	C
14	2	3	2	45	50	12	18	40	30	1,9	0,75	8	D
15	3	1	3	35	50	14	20	50	30	2,0	0,80	9	E
16	1	2	4	30	45	16	20	30	40	2,1	0,70	5	J
17	2	3	3	50	45	18	14	40	40	1,8	0,75	6	A
18	3	1	4	40	50	20	16	50	40	1,9	0,80	7	L
19	1	1	3	20	15	5	15	20	10	2,0	0,85	8	M
20	2	1	6	25	20	10	5	30	10	2,1	0,40	9	N
21	3	2	4	30	25	15	5	40	10	2,2	0,45	4	A
22	1	2	2	35	30	20	5	50	20	2,3	0,50	5	B
23	2	2	5	40	35	5	10	20	30	1,4	0,55	6	C
24	3	2	4	45	40	10	15	30	20	1,5	0,60	7	D
25	1	3	2	50	45	15	10	40	20	1,6	0,65	8	E
26	2	3	1	20	50-	20	10	50	20	1,7	0,70	9	J
27	3	1	5	25	45	5	15	20	30	1,8	0,75	4	A
28	1	2	4	30	40	10	15	30	40	1,9	0,80	5	L

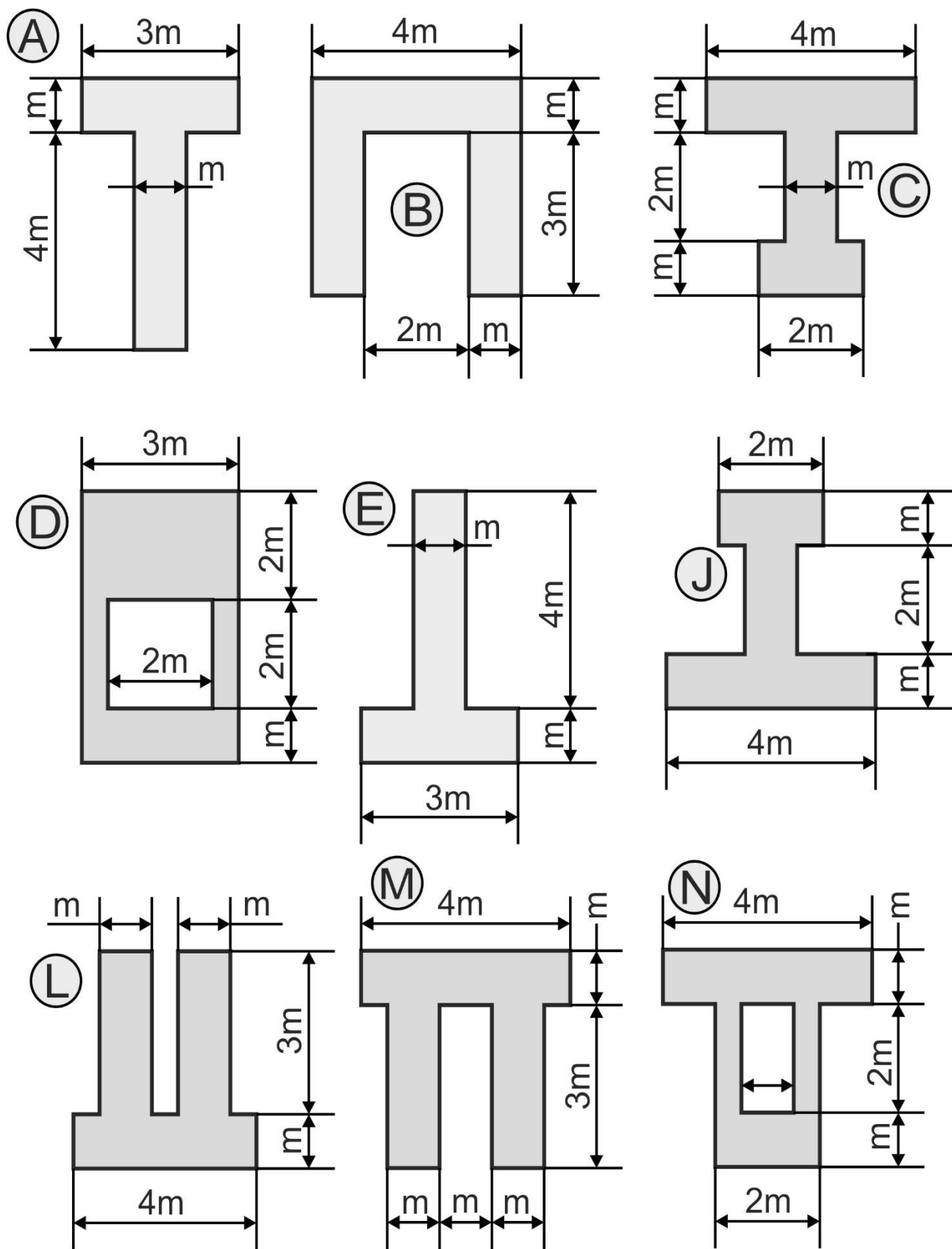


Рис.4. Варіанти перерізів балок

#### Завдання 4. «Складна деформація»

Для однієї зі схем (рис. 5) за варіантом, наведеним в таблиці 4:

- 1) побудувати епюри згинальних моментів від зусиль, що діють у горизонтальній і вертикальній площинах, а також епюру сумарних згинальних моментів;
- 2) побудувати епюру крутних моментів;
- 3) в небезпечному перерізі визначити еквівалентний момент за IV-ою теорією міцності та підібрати діаметр вала за умови, що відома межа плинності матеріалу  $\sigma_T$  і коефіцієнт запасу  $n_T$ ;
- 4) визначити діаметр вала.

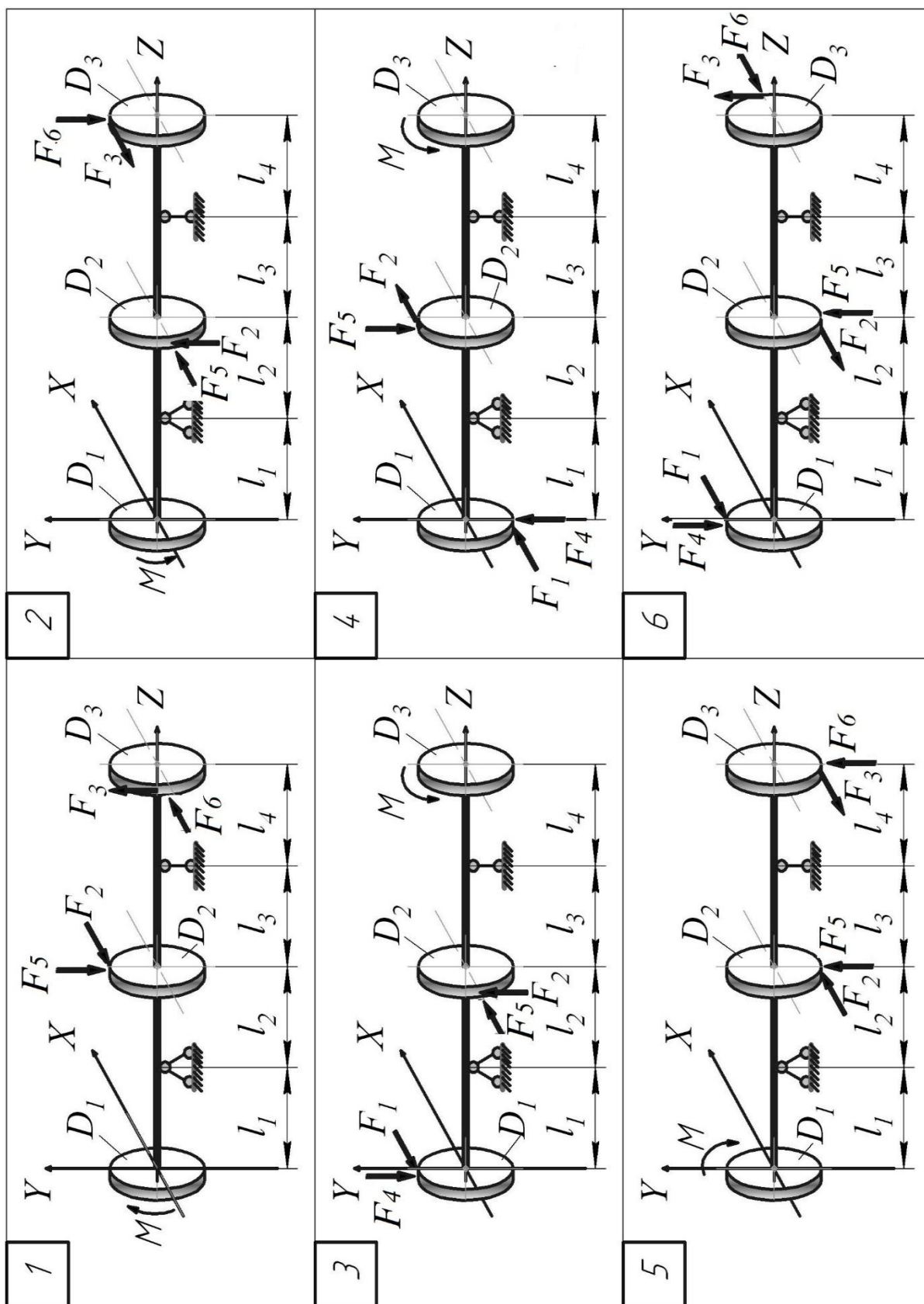


Рис. 5. Розрахункові схеми до виконання завдання 4

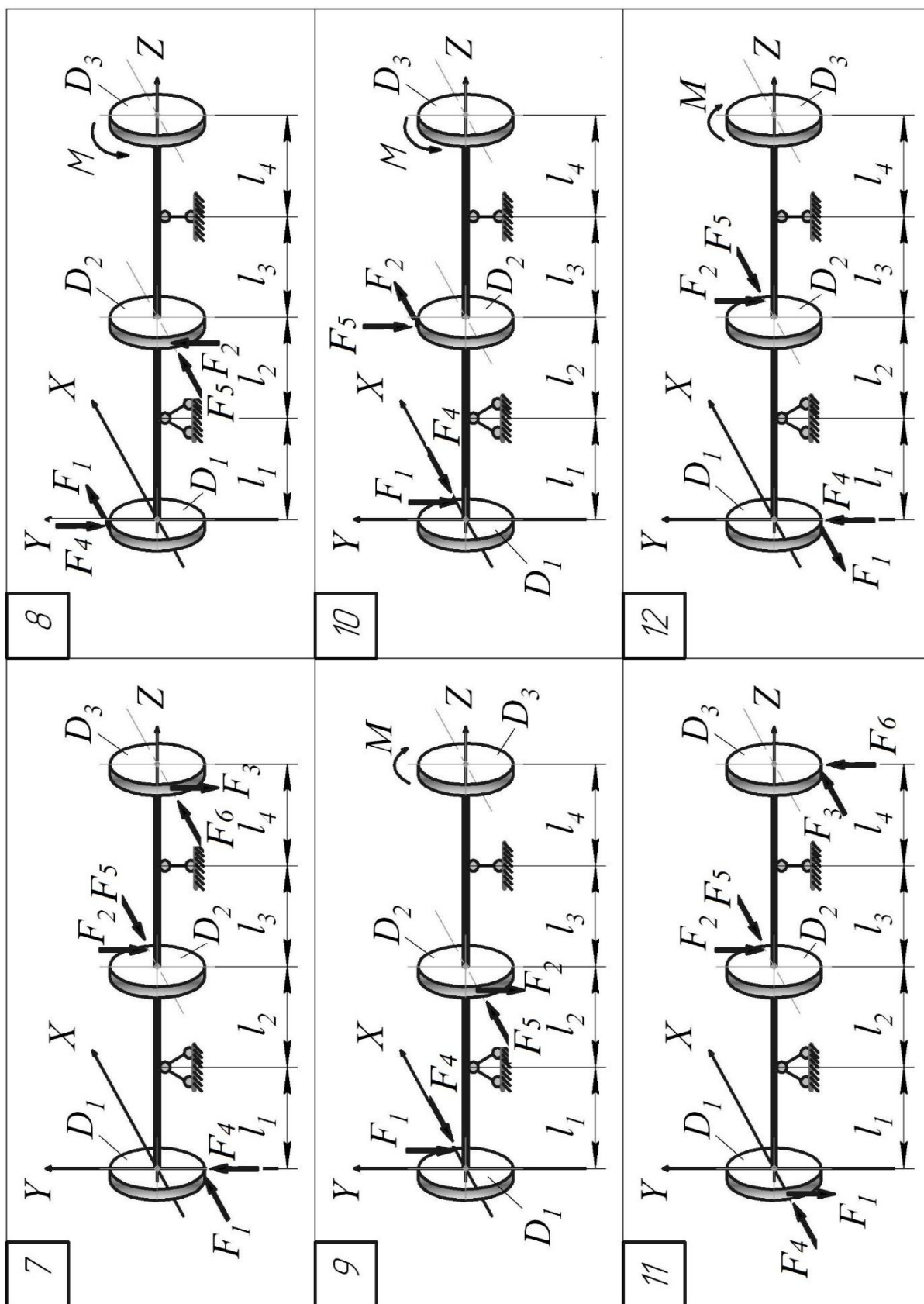


Рис. 5. Розрахункові схеми до виконання завдання 4 (продовження)

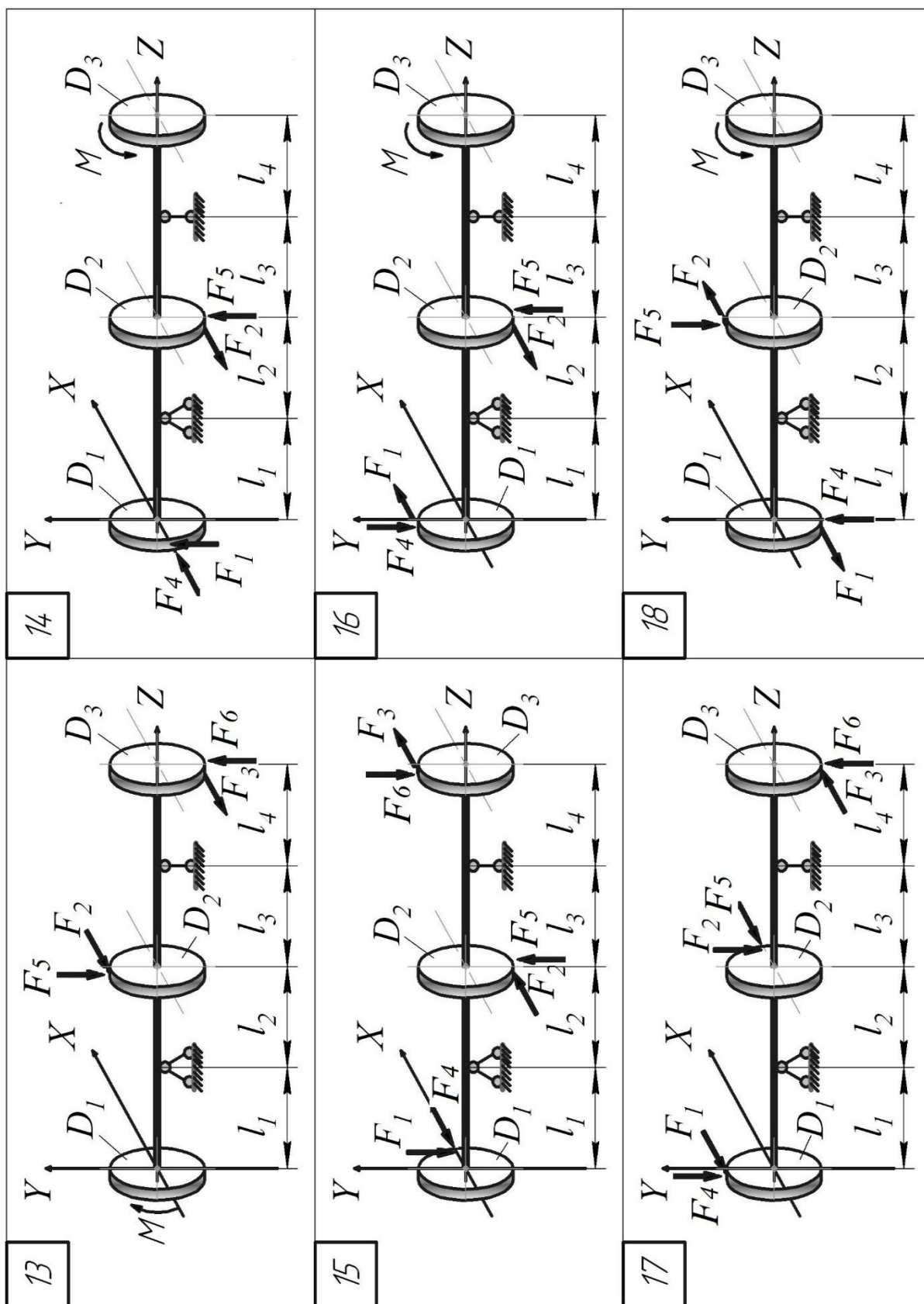


Рис. 5. Розрахункові схеми до виконання завдання 4 (продовження)

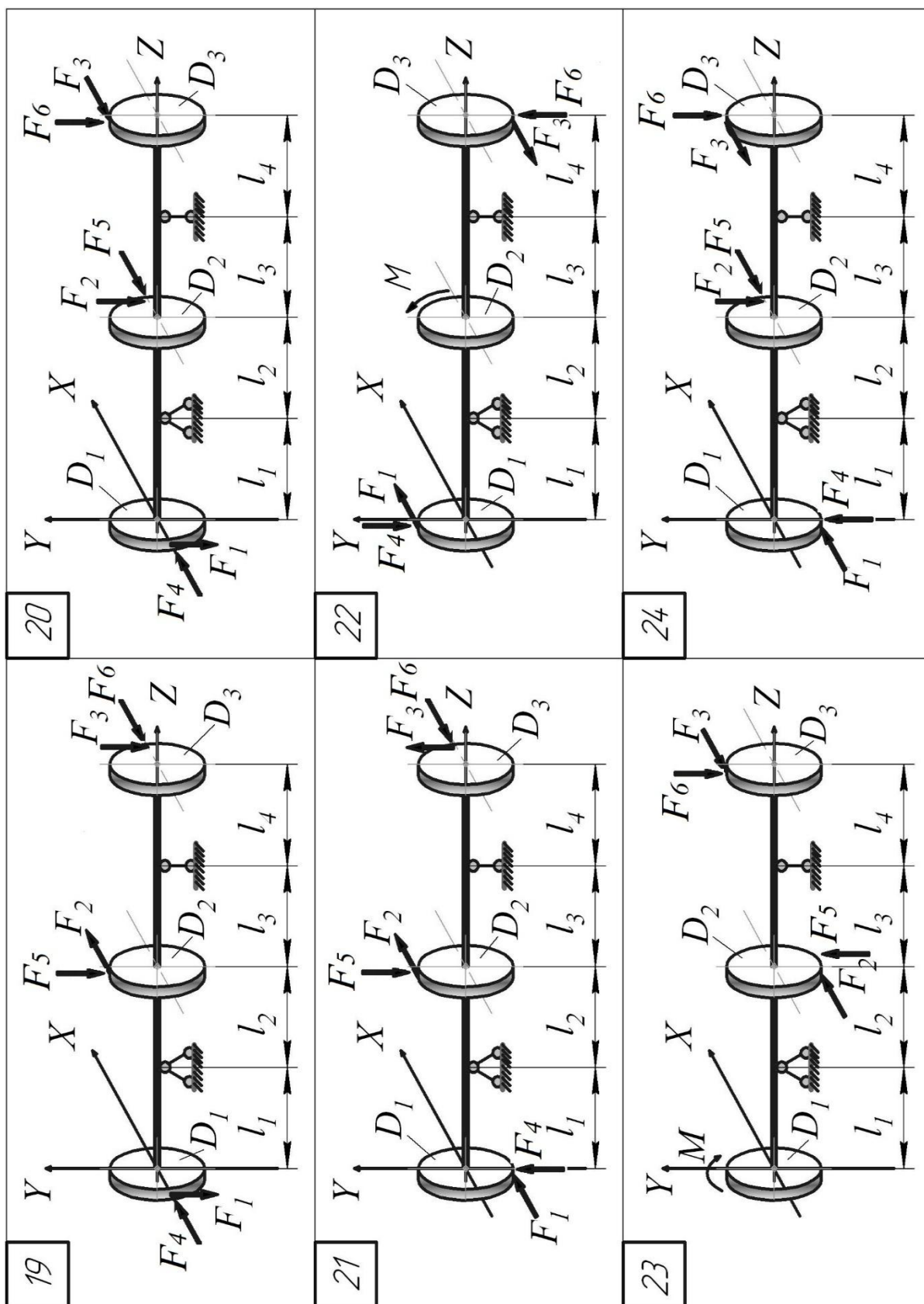


Рис. 5. Розрахункові схеми до виконання завдання 4 (продовження)

Таблиця 4. Вихідні дані для розрахунку завдання 4

Варіант	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	M	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$\ell_1$	$\ell_2$	$\ell_3$	$\ell_4$	$\sigma_T$	$n_T$
	кН						кНм	см							МПа	
1	-	40	10	-	20	10	2,4	6	8	10	8	20	50	15	300	1,8
2	-	30	15	-	15	10	1,2	8	6	10	10	30	40	12	340	2,0
3	20	10	-	25	5	-	0,6	10	8	6	12	40	30	10	360	2,1
4	20	20	-	15	10	-	2,0	6	10	8	15	50	20	8	220	2,2
5	-	30	20	-	5	15	2,4	8	6	8	10	30	30	12	650	2,3
6	20	30	30	10	10	25	1,5	10	6	10	8	40	40	15	240	2,4
7	30	20	10	15	10	5	1,2	10	6	8	15	50	20	8	380	2,5
8	20	20	-	10	5	-	2,4	8	8	8	12	20	50	10	320	2,6
9	35	50	-	5	10	-	4,0	8	10	6	12	40	20	10	270	2,7
10	10	20	-	10	5	-	0,6	6	8	10	15	30	30	8	340	2,8
11	45	20	30	15	15	25	1,2	6	6	8	8	20	40	15	360	2,7
12	20	20	-	10	5	-	2,2	10	8	8	10	30	50	12	260	2,6
13	-	20	10	-	10	5	2,0	10	8	6	15	40	30	8	800	2,5
14	20	40	-	10	20	-	1,6	8	10	8	8	20	40	10	320	2,4
15	30	20	30	15	5	10	1,0	6	8	10	10	30	30	12	250	2,3
16	10	20	-	5	5	-	2,6	8	6	10	12	40	10	15	800	2,2
17	20	30	10	15	20	10	1,2	10	6	8	15	30	20	10	380	2,5
18	10	30	-	5	15	-	0,6	6	10	10	15	20	30	15	340	2,8
19	20	30	40	10	5	20	2,0	8	10	8	15	30	20	8	220	2,2
20	30	30	20	10	5	15	1,0	8	8	10	10	20	30	12	250	2,3
21	10	50	40	5	30	20	2,4	6	10	6	8	30	20	15	300	1,8
22	20	-	30	10	-	5	2,4	6	6	10	10	20	50	10	350	2,4
23	-	40	40	-	15	25	2,0	10	8	8	12	30	20	12	250	2,0
24	20	30	40	5	20	25	2,1	8	8	6	10	20	40	15	300	2,5

## ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКІВ

### Приклад 1. Деформація «Розтяг-стиск».

Побудувати епюри поздовжніх сил, нормальних напружень і переміщень для східчастого стрижня (рис. 6).

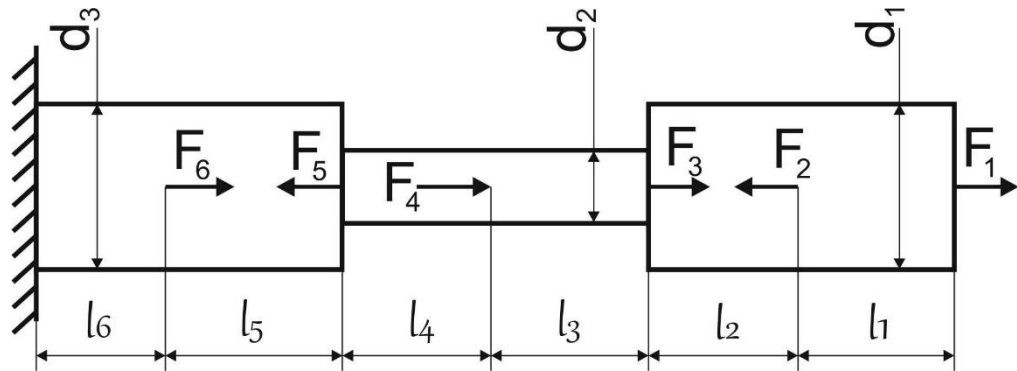


Рис.6. Розрахункова схема східчастого стрижня

Вихідні дані:

$$F_1 = 0 \text{ кН}; F_2 = 40 \text{ кН}; F_3 = 60 \text{ кН}; F_4 = 40 \text{ кН}; F_5 = 60 \text{ кН}; F_6 = 40 \text{ кН};$$

$$l_1 = 0 \text{ м}; l_2 = 1,0 \text{ м}; l_3 = 0,5 \text{ м}; l_4 = 1,5 \text{ м}; l_5 = 0,8 \text{ м}; l_6 = 0,6 \text{ м};$$

$$d_1 = 30 \text{ мм}; d_2 = 20 \text{ мм}; d_3 = 30 \text{ мм}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \sigma_T = 240 \text{ МПа}$$

Користуючись методом перерізів, знаходимо поздовжні сили на кожній ділянці:

$$N_I = -F_2 = -40 \text{ кН};$$

$$N_{II} = F_3 - F_2 = 60 - 40 = 20 \text{ кН};$$

$$N_{III} = F_4 - F_2 + F_3 = 40 - 40 + 60 = 60 \text{ кН};$$

$$N_{IV} = F_4 - F_2 + F_3 - F_5 = 40 - 40 + 60 - 60 = 0 \text{ кН};$$

$$N_V = F_4 - F_2 + F_3 - F_5 + F_6 = 40 - 40 + 60 - 60 + 40 = 40 \text{ кН}.$$

За отриманими значеннями будуємо епюру  $N$  (рис.7, а)

Для визначення напружень в перерізах кожної ділянки  $\sigma$  необхідно знати величину поздовжньої сили  $N$  та площу перерізу  $A$ :

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

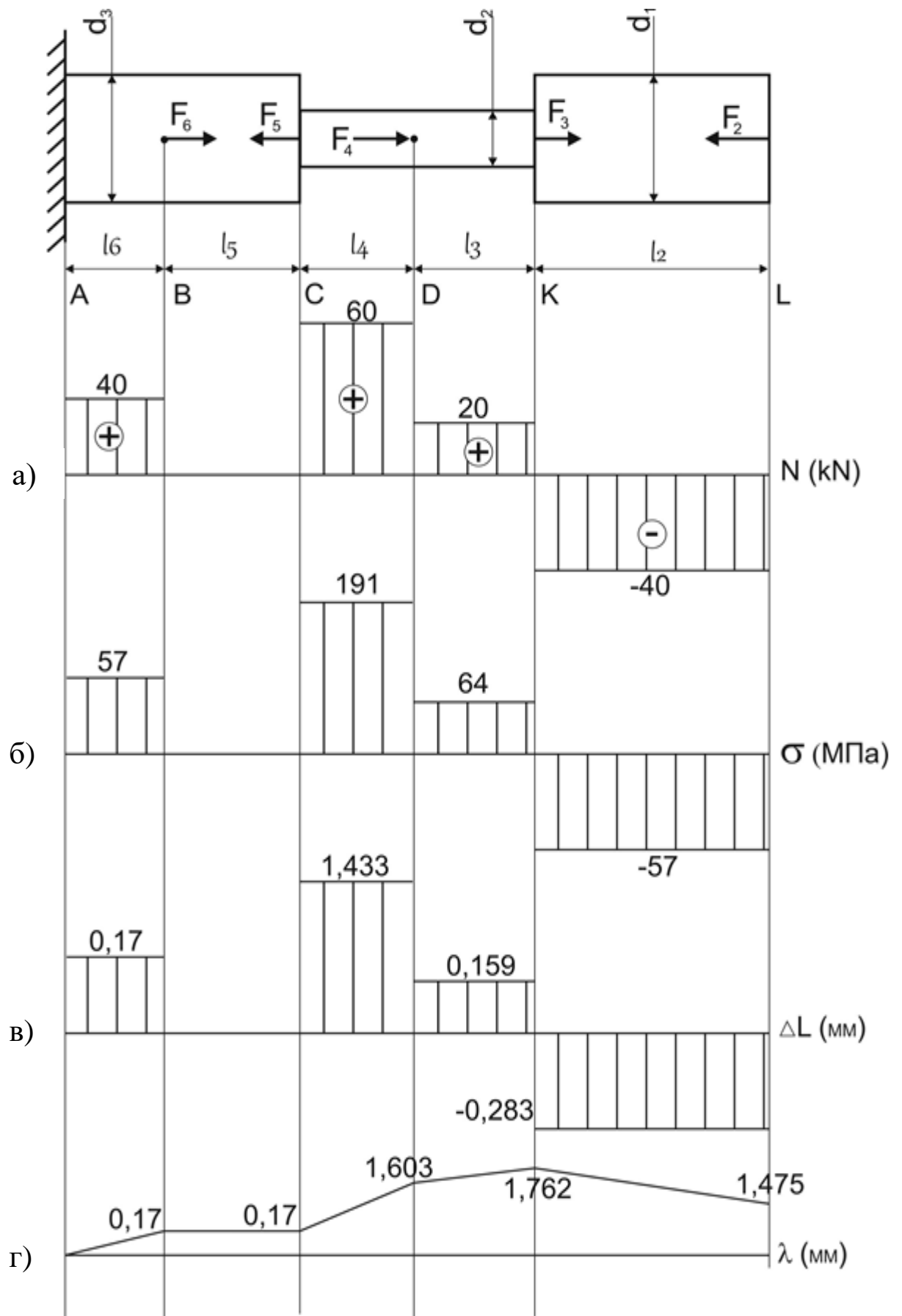


Рис.7. Розрахункова схема стрижня та епюри  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\Delta l$ ,  $\lambda$

Значення поздовжньої сили беремо з епюри  $N$

Визначаємо площі перерізів,  $\text{мм}^2$ :

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 30^2}{4} = 706,5;$$

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} = 314 ;$$

$$A_3 = \frac{\pi d_3^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 30^2}{4} = 706,5 .$$

Тоді напруження  $\sigma$ , МПа:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_1} = \frac{-40 \cdot 10^3}{706,5} = -57;$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{314} = 64;$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_3} = \frac{60 \cdot 10^3}{314} = 191;$$

$$\sigma_{IV} = \frac{N_{IV}}{A_3} = \frac{0}{706,5} = 0;$$

$$\sigma_V = \frac{N_V}{A_3} = \frac{40 \cdot 10^3}{706,5} = 57.$$

За отриманими даними будуємо епюру нормальних напружень  $\sigma$  (рис.7, б).

Максимальні напруження виникають у перерізі ділянки  $CD$ :

$$\sigma_{max} = \sigma_{III} = 191 \text{ МПа}$$

Отже, коефіцієнт запасу відносно межі плинності дорівнює:

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}} = \frac{240}{191} = 1,26$$

Знаходимо зміну довжини кожної ділянки бруса,  $\text{мм}$  (рис.7, в):

$$\Delta l_I = \frac{N_I l_2}{EA_1} = \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 706,5} = -0,283 ;$$

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{II} l_3}{EA_2} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 314} = 0,159 ;$$

$$\Delta l_{III} = \frac{N_{III} l_4}{EA_2} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 314} = 1,433 ;$$

$$\Delta l_{IV} = \frac{N_{IV} l_5}{EA_3} = \frac{0 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 706,5} = 0 ;$$

$$\Delta l_V = \frac{N_V l_6}{EA_3} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,6 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 706,5} = 0,17 .$$

Переміщення вільного кінця бруса дорівнює сумі деформацій усіх його ділянок, мм:

$$\lambda = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} + \Delta l_{IV} + \Delta l_V = -0,283 + 0,159 + 1,433 + 0 + 0,17 = 1,479$$

Весь брус подовжився на 1,479 мм.

Побудову епюри переміщень перерізів бруса починаємо від закріпленого кінця бруса, послідовно складаючи деформації окремих ділянок, мм:

$$\lambda_A = 0$$

$$\lambda_B = \Delta l_{VI} = 0,17$$

$$\lambda_C = \Delta l_{VI} + \Delta l_V = 0,17 + 0 = 0,17$$

$$\lambda_D = \Delta l_{VI} + \Delta l_V + \Delta l_{IV} = 0,17 + 0 + 1,433 = 1,603$$

$$\lambda_K = \Delta l_{VI} + \Delta l_V + \Delta l_{IV} + \Delta l_{III} = 0,17 + 0 + 1,433 + 0,159 = 1,762$$

$$\lambda_L = \Delta l_{VI} + \Delta l_V + \Delta l_{IV} + \Delta l_{III} + \Delta l_{II} = 0,17 + 0 + 1,433 + 0,159 - 0,283 = 1,479$$

За отриманими значеннями будуємо епюру переміщень (рис.7, г).

## Приклад 2. Деформація «Кручення»

За умовами міцності визначити діаметри східчастого вала (Рис.8). Побудувати епюри крутних моментів і кутів повороту перерізів вала. Виконати ескіз вала.

Вихідні дані:

$$l_1=0,4 \text{ м}; l_2=0,1 \text{ м}; l_3=0,7 \text{ м};$$

$$M_1=300 \text{ Нм}; M_2=400 \text{ Нм}; M_3=220 \text{ Нм};$$

Допустимі дотичні напруження  $[\tau]=25 \text{ МПа}$

Модуль пружності сталі під час зсуву  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

1. Побудова епюри крутних моментів.

Визначаємо крутні моменти в перерізах

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3 = 300 + 400 + 220 = 920 \text{ Нм}$$

$$M_{KI} = M_1 = 300 \text{ Нм}$$

$$M_{KII} = M_1 - M_2 = 300 - 920 = -620 \text{ Нм}$$

$$M_{KIII} = M_1 - M_0 + M_3 = 300 - 920 + 220 = -400 \text{ Нм}$$

Будуємо епюру  $M_K$  (рис.8)

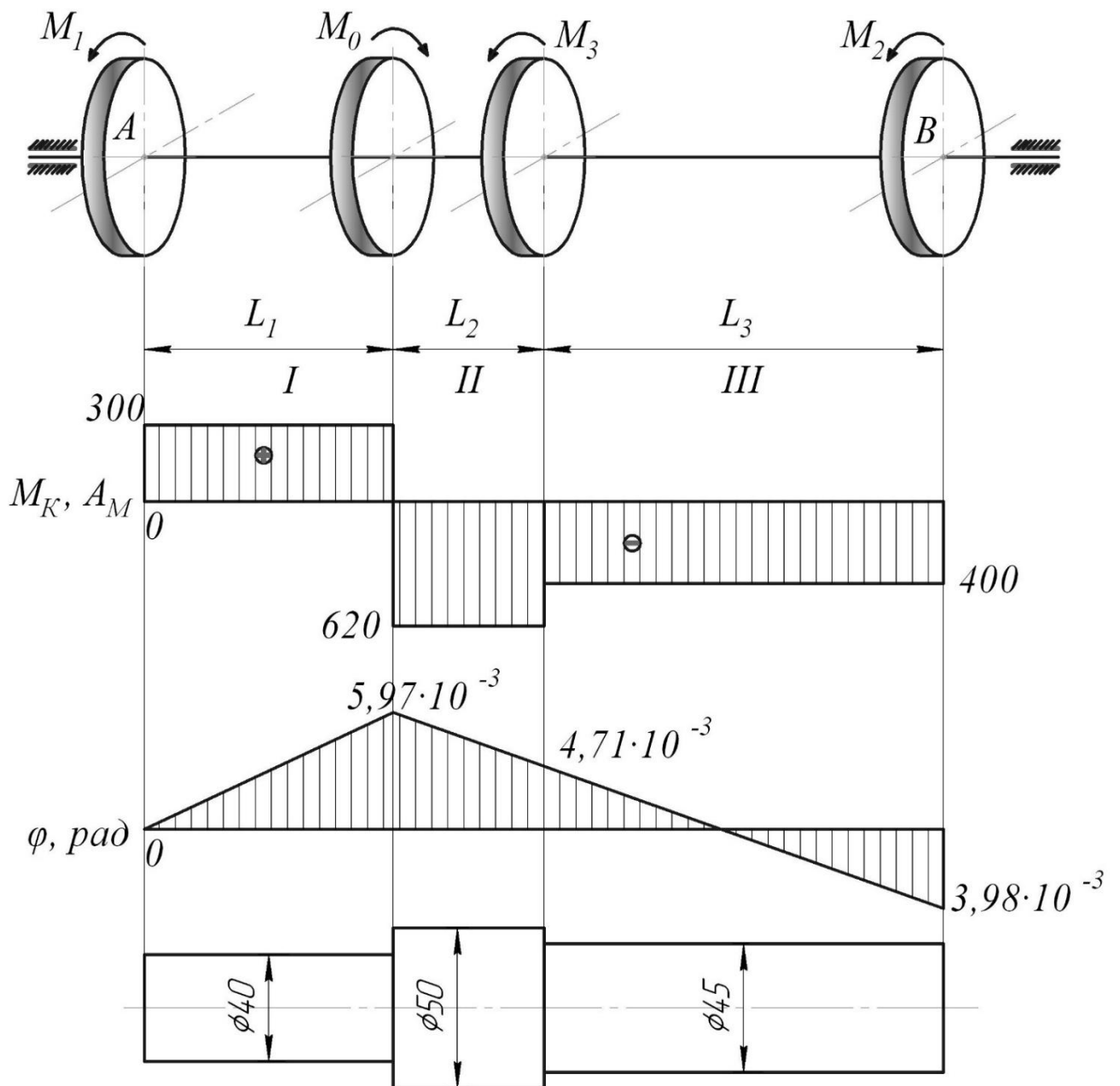


Рис.8. Розрахункова схема, епюри  $M_K$ ,  $\varphi$  та ескіз вала

2. Визначаємо діаметр вала на кожному відрізку з умови міцності

$$\frac{M_K}{W_p} = \frac{16 \cdot M_K}{\pi \cdot d^3} \leq [\tau]; \text{ звідки } d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_K}{\pi \cdot [\tau]}}$$

$$d_I = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 300 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 25}} = 39,4 \text{ мм, приймаємо } d_I = 40 \text{ мм}$$

$$d_{II} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 620 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 25}} = 50,2 \text{ мм, приймаємо } d_{II} = 50 \text{ мм}$$

$$d_{III} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 400 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 25}} = 43,4 \text{ мм, приймаємо } d_{III} = 45 \text{ мм}$$

3. Рисуємо ескіз вала.

4. Визначаємо кути закручування кожної ділянки вала.

$$\phi = \frac{M_K \cdot \ell}{G \cdot J_p} = \frac{32 \cdot M_K \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot d^4};$$

$$\phi_I = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 32 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 40^4} = 5,97 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

$$\phi_{II} = -\frac{32 \cdot 620 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 50^4} = -1,26 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

$$\phi_{III} = -\frac{32 \cdot 400 \cdot 10^3 \cdot 0,7 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 45^4} = -8,69 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

5. Визначаємо кути повороту перерізів вала. Вважаємо переріз А нерухомим.

$$\phi_A = 0$$

$$\phi_{I-II} = \phi_I = 5,97 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

$$\phi_{II-III} = \phi_I + \phi_{II} = 5,97 \cdot 10^{-3} - 1,26 \cdot 10^{-3} = 4,71 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

$$\phi_B = \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} = 5,97 \cdot 10^{-3} - 1,26 \cdot 10^{-3} - 8,69 \cdot 10^{-3} = -3,98 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

Будуємо епюру кутів повороту перерізів.

### Приклад 3 Деформація «Згин». Балка 1

Для консольної балки 1 визначити прогин і кут повороту на вільному кінці (переріз  $A$ ) методом Мора і способом Верещагіна, якщо  $EJ$  - константа.

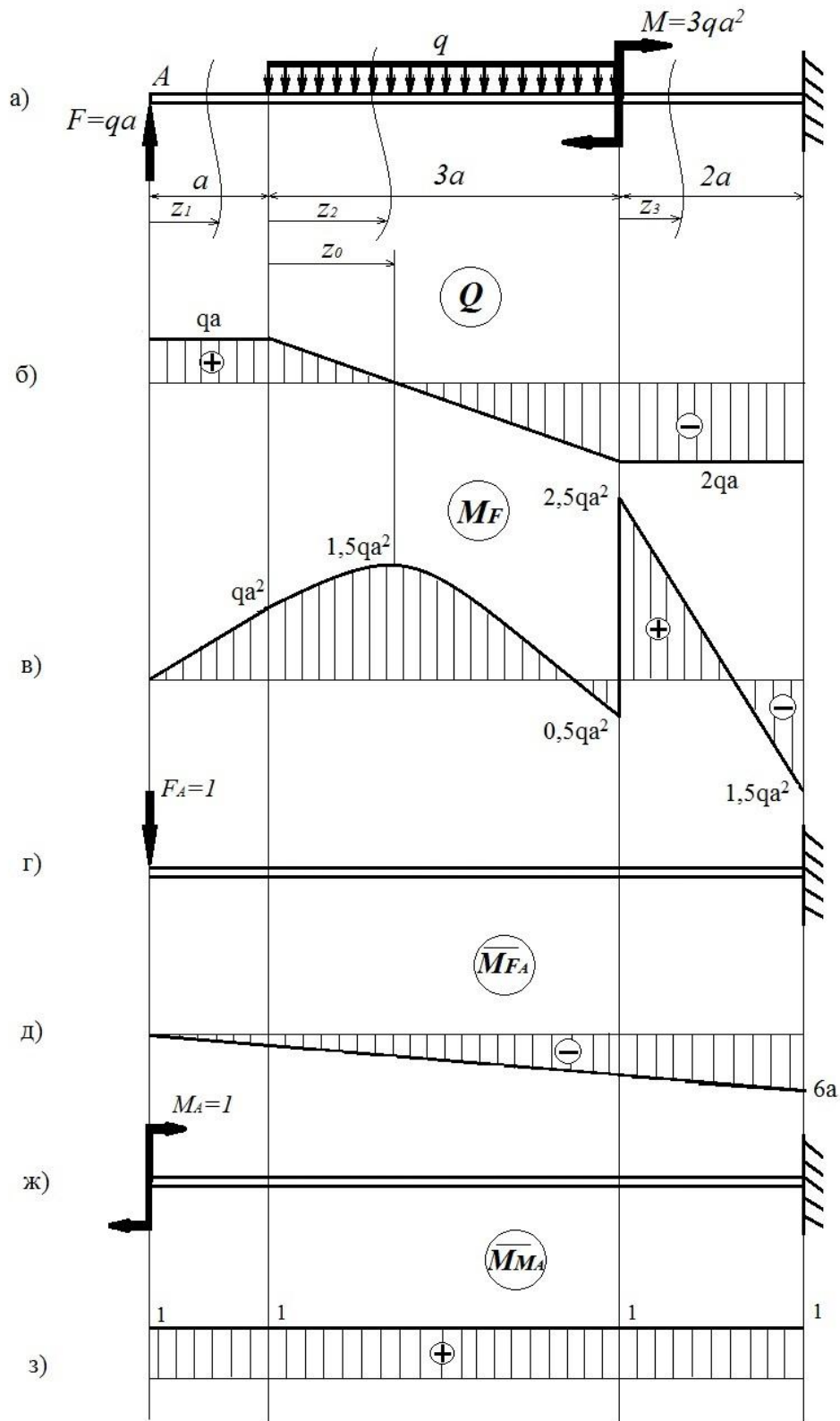


Рис. 9. Епюри  $Q$ ,  $M_F$ ,  $M_{FA}$ ,  $M_{MA}$  балки 1

### Визначення поперечних сил $Q$ і згинальних моментів $M_F$ .

Балка має три ділянки (рис. 9, а). Визначимо функції  $Q$  і  $M_F$  на кожній з них і обчислимо значення функцій у характерних точках.

$$0 \leq z_1 \leq a$$

$$Q(z_1) = F = qa;$$

$$M_F(z_1) = Fz_1 = qaz_1;$$

$$M_F(0) = 0; \quad M_F(a) = Fa = qa^2;$$

$$0 \leq z_2 \leq 3a$$

$$Q(z_2) = F - qz_2 = qa - qz_2;$$

$$Q(0) = qa; \quad M_F(3a) = -2qa;$$

Значення  $Q$  змінює знак. Визначимо точку екстремуму функції  $M_F$ :

$$Q(z_2) = qa - qz_0 = 0 \Rightarrow z_0 = a;$$

$$M_F(z_2) = F(a + z_2) - q\frac{z_2^2}{2} = qa^2 + qaz_2 - q\frac{z_2^2}{2};$$

$$M_F(0) = qa^2; \quad M_F(3a) = 4qa^2 - 4,5qa^2 = -0,5qa^2;$$

$$0 \leq z_3 \leq 2a$$

$$Q(z_3) = F - q3a = -2qa;$$

$$M_F(z_3) = F(4a + z_3) - q3a(1,5a + z_3) + M = 2,5qa^2 - 2qaz_3;$$

$$M_F(0) = 2,5qa^2; \quad M_F(2a) = -1,5qa^2.$$

За обчисленими результатами будемо епюри (рис. 9, б, в).

### Визначення прогину і кута повороту перерізу $A$ методом Мора.

Оскільки, балка, що розглядається - прямолінійний брус постійної жорсткості під час вигину, то формулу Мора можна перетворити в такий вигляд:

$$\Delta_{KF} = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \bar{M}_K M_F dz,$$

де  $n$  - число ділянок балки.

Побудуємо дві допоміжні системи, навантажені одиничними зусиллями  $F_A = 1$  (рис. 9, г) і  $M_A = 1$  (рис. 9, ж), прикладаємо їх за напрямом переміщень.

Запишемо функції моментів  $\overline{M_{F_A}}$  і  $\overline{M_{M_A}}$  для допоміжних систем на розглянутих раніше ділянках:

$$0 \leq z_1 \leq a$$

$$\overline{M_{F_A}}(z_1) = -F_A z_1 = -z_1;$$

$$\overline{M_{M_A}}(z_1) = M_A = 1;$$

$$0 \leq z_2 \leq 3a$$

$$\overline{M_{F_A}}(z_2) = -F_A(a + z_2) = -a - z_2;$$

$$\overline{M_{M_A}}(z_2) = M_A = 1;$$

$$0 \leq z_3 \leq 3a$$

$$\overline{M_{F_A}}(z_3) = -F_A(4a + z_3) = -4a - z_3;$$

$$\overline{M_{M_A}}(z_3) = M_A = 1.$$

Для визначення прогину перерізу  $A$  підставимо функції  $\overline{M_{F_A}}$  і  $M_F$  в формулу Мора і проведемо інтегрування по всіх ділянках:

$$\begin{aligned} y_A &= \frac{1}{EJ} \left[ \int_0^a (-z)(qaz) dz + \int_0^{3a} (-a - z) \left( qa^2 + qaz - q \frac{z^2}{2} \right) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2a} (-4a - z)(2,5qa^2 - 2qaz_3) dz = \right. \\ &= \frac{qa^4}{EJ} \left( -\frac{1}{3} - 3 - 9 - \frac{9}{2} + \frac{81}{8} - 20 + 11 + \frac{16}{3} \right) = -\frac{qa^4}{EJ} 10,375. \end{aligned}$$

Знак мінус вказує на те, що прогин перерізу спрямований вгору.

Для визначення кута повороту перерізу  $A$  підставимо функції  $\overline{M_{M_A}}$  і  $M_F$  у формулу Мора і проведемо інтегрування по всіх ділянках:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{EJ} \left[ \int_0^a (1)(qaz) dz + \int_0^{3a} (1) \left( qa^2 + qaz - q \frac{z^2}{2} \right) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2a} (1)(2,5qa^2 - 2qaz_3) dz \right] = \frac{qa^3}{EJ} \left( \frac{1}{2} + 3 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 5 - 4 \right) = \frac{qa^3}{EJ} 4,5. \end{aligned}$$

## Визначення прогину і кута повороту перерізу $A$ способом Верещагіна

Обчислення інтегралів Мора істотно спрощується, якщо одна з епюр  $M_F$  або  $\bar{M}_K$  прямолінійна. Така умова завжди виконується для систем, що складаються з прямих брусів, оскільки при цьому епюри від одиничного навантаження (зосередженої сили або моменту) завжди обмежені прямими лініями. В таких випадках загальна формула Мора визначення переміщень перетворюється наступним чином:

$$\Delta_{KF} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i y_i}{EJ},$$

де  $\omega_i$  – площа епюри  $M_F$  на  $i$ -ій ділянці;

$y_i$  – ордината епюри  $\bar{M}_K$  відносно центру ваги площі  $\omega_i$ .

Визначення переміщень за цією залежністю має назву способу Верещагіна.

Для визначення переміщень спершу побудуємо епюри від дії одиничних зусиль  $F_A$  і  $M_A$ , для цього скористуємося отриманими раніше функціями. Епюри наведено на рис. 9, д, з.

Помноживши епюри  $M_F$  і  $\bar{M}_{F_A}$ , визначимо прогин перерізу  $A$ :

$$y_A = M_F \cdot \bar{M}_{F_A} = \frac{qa^4}{EJ} \left( -\frac{1}{3} + \left( -\frac{1}{8} - \frac{23}{12} - 2 - \frac{7}{3} \right) - \frac{22}{6} \right) = -\frac{qa^4}{EJ} 10,374.$$

Помноживши епюри  $M_F$  і  $\bar{M}_{M_A}$ , визначимо кут повороту перерізу  $A$ :

$$\theta_A = M_F \cdot \bar{M}_{M_A} = \frac{qa^3}{EJ} \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{12} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3} + 1 \right) + 1 \right] = \frac{qa^3}{EJ} 4,4999.$$

Оскільки деякі ділянки епюри  $M_F$  являють собою фігури, площі і центри тяжіння яких визначити важко, під час розрахунку вони розбивалися на простіші складові.

#### Приклад 4. Деформація «Згин». Балка 2

Побудувати епюри  $Q$  і  $M$  для балки 2 з поперечним перерізом В (Рис.4), навантаженої за схемою, що наведена на рис. 10.

Визначити:

- положення центра ваги перерізу;
- момент інерції перерізу відносно нейтральної вісі  $X$ ;
- значення найбільших напружень, що розтягують і побудувати епюру  $\sigma$ ;
- значення найбільших дотичних напружень і побудувати епюру  $\tau$ ;

Вихідні дані:

$$M=50 \text{ кНм}; q=30 \text{ кН/м}; F=40 \text{ кН};$$

$$l_1 = 0,6 \text{ м}; l_2 = 1,0 \text{ м}; l_3 = 1,0 \text{ м}; l_4 = 0,5 \text{ м}; l_5 = 1,0 \text{ м};$$

Насамперед, визначимо опорні реакції

$$\Sigma M_A = 30 \cdot 2,6 \cdot 0,7 - 50 - R_B \cdot 2,5 + 40 \cdot 3,5 = 0; R_B = 57,8 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = -30 \cdot 2,6 \cdot 1,8 + R_A \cdot 2,5 - 50 + 40 \cdot 1 = 0; R_A = 60,2 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\Sigma F_Y = 0; \quad 60,2 - 30 \cdot 2,6 + 57,8 - 40 = 118 - 118 = 0.$$

Балка має п'ять ділянок.

У довільних перерізах будь-якої з них записуємо вирази для  $Q$  і  $M$ , перевіряючи при цьому, чи виконується рівність  $Q = dM/dz$ , і обчислюємо  $Q$  і  $M$  у характерних перерізах.

Для ділянки  $KA$  ( $0 \leq z_1 \leq 0,6 \text{ м}$ )

$$Q(z) = -g \cdot z; \quad M(z) = -g \cdot \frac{z^2}{2};$$

$$\text{при } z_1 = 0: Q_F = Q(0) = 0; \quad M_F = M(0) = 0;$$

$$\text{при } z_1 = 0,6: Q_{\text{Алів}} = Q(0,6) = -30 \cdot 0,6 = -18 \text{ кН};$$

$$M_A = M(0,6) = -\frac{30 \cdot 0,6^2}{2} = -5,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

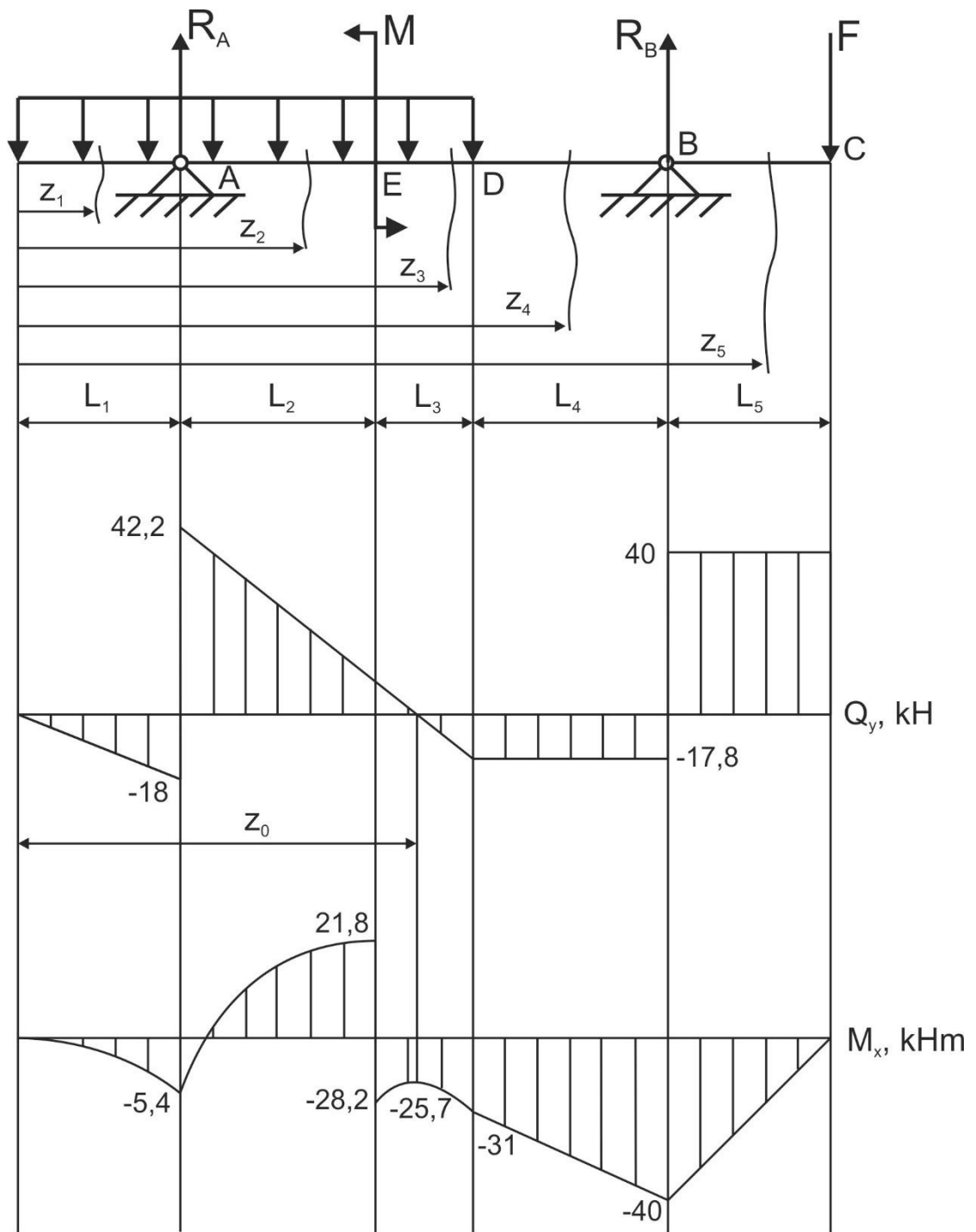


Рис.10. Епюри  $Q_y$  і  $M_x$  балки 2

Для ділянки  $AE$  ( $0,6 \leq z_2 \leq 1,6$  м)

$$Q_y(z_2) = -q \cdot z_2 + R_A; M_x(z_2) = -\frac{q \cdot z_2^2}{2} + R_A(z_2 - L_1)$$

при  $z_2 = 0,6$ :  $Q_{\text{Апр}} = Q(0,6) = -30 \cdot 0,6 + 60,2 = 42,2$  кН;

$$M_A = M(0,6) = -\frac{30 \cdot 0,6^2}{2} + 0 = -5,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при  $z_2 = 1,6$ :  $Q_E = Q(1,6) = -30 \cdot 1,6 + 60,2 = 12,2$  кН;

$$M_{\text{Елів}} = M(1,6) = -\frac{30 \cdot 1,6^2}{2} + 60,2(1,6 - 0,6) = 21,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для ділянки  $ED$  ( $1,6 \text{ м} \leq z_3 \leq 2,6 \text{ м}$ )

$$Q_Y(z_3) = -q \cdot z_3 + R_A; M_X(z_3) = -\frac{q \cdot z_3^2}{2} + R_A(z_3 - 0,6) - M$$

при  $z_3 = 1,6$ :  $Q_E = Q(1,6) = -30 \cdot 1,6 + 60,2 = 12,2$  кН;

$$M_{\text{Епр}} = M(1,6) = -\frac{30 \cdot 1,6^2}{2} + 60,2(1,6 - 0,6) - 50 = -28,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при  $z_3 = 2,6$ :  $Q_D = Q(2,6) = -30 \cdot 2,6 + 60,2 = -17,8$  кН;

$$M_D = M(2,6) = -\frac{30 \cdot 2,6^2}{2} + 60,2(2,6 - 0,6) - 50 = -31 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для ділянки  $DB$  ( $2,6 \text{ м} \leq z_4 \leq 3,1 \text{ м}$ )

$$Q(z_4) = -q \cdot 2,6 + R_A = -30 \cdot 2,6 + 60,2 = 17,8 \text{ кН};$$

$$M(z_4) = -q \cdot 2,6 \cdot (z_4 - 1,3) + R_A(z_4 - 0,6) - M;$$

при  $z_4 = 2,6$ :

$$M_D = M(2,6) = -30 \cdot 2,6 \cdot (2,6 - 1,3) + 60,2 \times (2,6 - 0,6) - 50 = -31 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при  $z_4 = 3,1$ :

$$M_B = M(3,1) = -30 \cdot 2,6(3,1 - 1,3) + 60,2 \times (3,1 - 0,6) - 50 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для ділянки  $BC$  ( $3,1 \text{ м} \leq z_5 \leq 4,1 \text{ м}$ )

$$Q(z_5) = -q \cdot 2,6 + R_A + R_B = -30 \cdot 2,6 + 60,2 + 57,8 = 40 \text{ кН};$$

$$M(z_5) = -q \cdot 2,6 \cdot (z_5 - 1,3) + R_A(z_5 - 0,6) - M + R_B(z_5 - 3,1);$$

при  $z_5 = 3,1$ :  $M_B = M(3,1) = -40$  кН · м;

при  $z_5 = 4,1$ :  $M_C = M(4,1) = 0$ .

Побудувавши за отриманими даними епюру  $Q$ , бачимо, що в деякому перерізі  $z_0$  на ділянці  $ED$  зусилля  $Q$  дорівнює нулю, а отже, там дотична до епюри  $M$  буде горизонтальною. Для побудови епюри  $M$  необхідно ще обчислити ординату  $M(z_0)$ .

Скориставшись виразом  $Q(z)$  на ділянці  $ED$ , знаходимо  $z_0$  з умови:

$$Q(z_0) = -30 \cdot z_0 + 60,2 = 0.$$

Звідки

$$z_0 = \frac{60,2}{30} = 2,01 \text{ м.}$$

Тоді

$$M(z_0) = -\frac{30 \cdot 2,01^2}{2} + 60,2(2,01 - 0,6) - 50 = -25,7 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

За отриманими даними будуємо епюру  $M$  (Рис.10).

Задано переріз балки «В» (рис.11). Переріз має одну вісь симетрії, отже, вона і буде однією з головних центральних вісей «V».

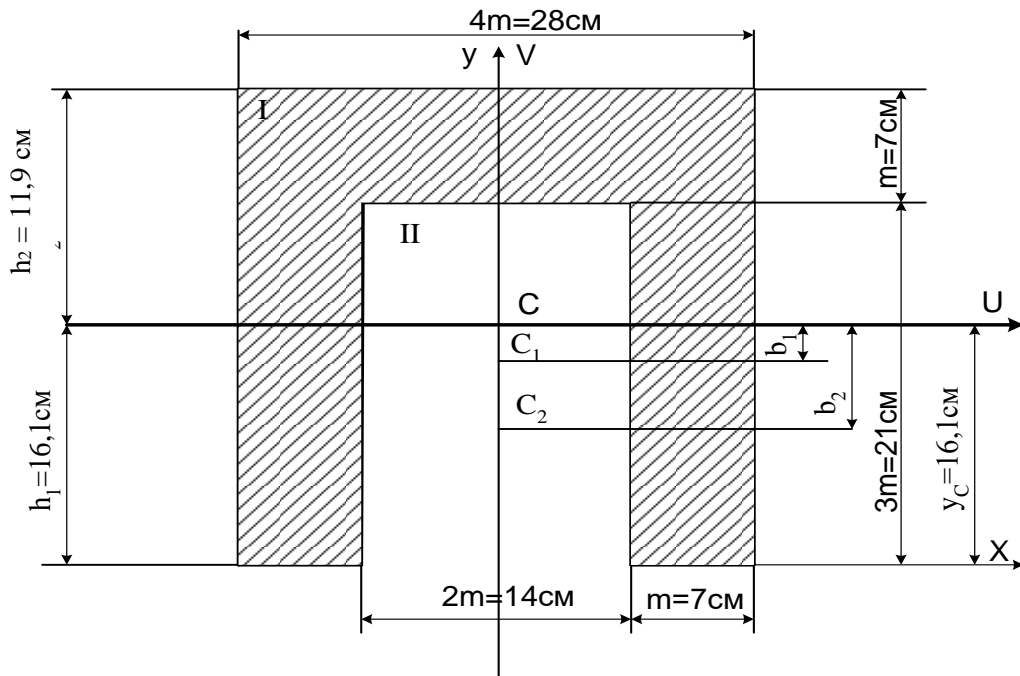


Рис.11. Переріз балки «В»

Переріз являє собою прямокутник I площею  $A_1 = 28 \times 28 \text{ см}^2$ , від якого відрізаний прямокутник II площею  $A_2 = 14 \times 21 \text{ см}^2$ .

Визначаємо центри тяжіння  $C_1$  і  $C_2$  окремих частин I і II на вісі Y.

$$y_1 = 14 \text{ см}; y_2 = 10,5 \text{ см};$$

площі прямокутників:

$$A_1 = 28 \cdot 28 = 784 \text{ см}^2; A_2 = 14 \cdot 21 = 294 \text{ см}^2$$

Обчислюємо ординату центру ваги C перерізу:

$$y_C = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2} = \frac{784 \cdot 14 - 294 \cdot 10,5}{784 - 294} = 16,1 \text{ см};$$

Позначаємо на схемі центр ваги  $C$  перерізу і проводимо другу головну центральну вісь  $U$ .

Знаходимо відстані  $h_1=16,1$  см;  $h_2=11,9$  см найвіддаленіших від вісі  $U$  точок перерізу.

Тоді, відстані від нейтральної вісі до центрів тяжіння перерізів I і II дорівнюватимуть:

$$b_1 = 16,1 - 14 = 2,1 \text{ см}; \quad b_2 = 16,1 - 10,5 = 5,6 \text{ см};$$

Момент інерції перерізу відносно нейтральної осі знайдемо за теоремою про моменти інерції відносно паралельних осей (для прямокутника  $I_x = \frac{bh^3}{12}$ ).

$$I_X = \left( \frac{28 \cdot 28^3}{12} + 28 \cdot 28 \cdot 2,1^2 \right) - \left( \frac{14 \cdot 21^3}{12} + 14 \cdot 21 \cdot 5,6^2 \right) = 34654,4 \text{ см}^4$$

Згідно з епурою  $M$  найбільше розтягувальне напруження виникає в нижніх точках перерізу «В» (рис.12):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_X} \cdot h_1 = \frac{40 \cdot 10^6 \cdot 161}{34654,4 \cdot 10^4} = 18,6 \text{ Н/мм}^2$$

Максимальне напруження стиснення у верхніх точках цього перерізу:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_X} \cdot h_2 = \frac{-40 \cdot 10^6 \cdot 119}{34654,4 \cdot 10^4} = -13,7 \text{ Н/мм}^2$$

Найбільші дотичні напруження знаходимо за формулою Журавського:

$$\tau_{max} = \frac{Q \cdot S_H}{I_X \cdot b}$$

Тут:  $Q = Q_{max} = 42,2$  кН;  $b = 2m = 14$  см - ширина перерізу по нейтральній вісі.

$S_H$  - статичний момент частини перерізу з однієї зі сторін нейтральної вісі відносно цієї вісі.

$$\text{Знаходимо: } S_H = h_2 \cdot 4 \cdot m \cdot \frac{h_2}{2} - (h_2 - m) \cdot 2m \cdot \frac{h_2 - m}{2};$$

$$S_H = 11,9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{11,9}{2} - (11,9 - 7) \cdot 14 \cdot \frac{11,9 - 7}{2} = 1814,5 \text{ см}^3$$

$$\text{ТОДІ} \quad \tau_{max} = \frac{42,2 \cdot 10^3 \cdot 1814,5 \cdot 10^3}{34654,4 \cdot 10^4 \cdot 140} = 1,6 \text{ Н/мм}^2$$

Показуємо характер епюри  $\sigma$  та  $\tau$  у перерізі.

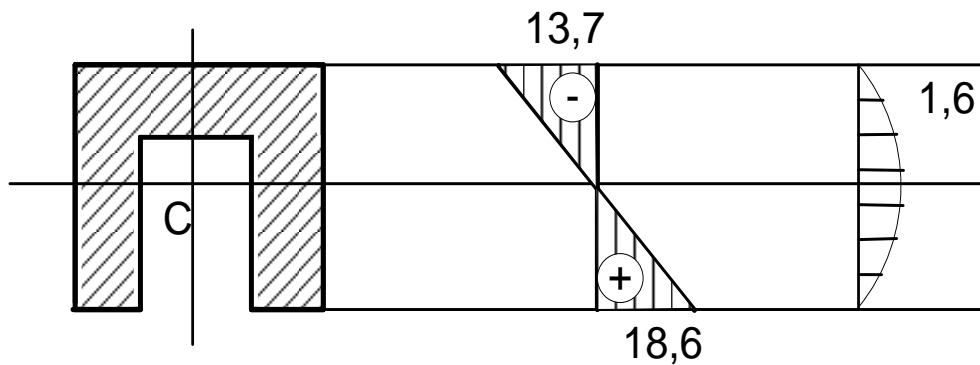


Рис.12. Епюри нормальних і дотичних напружень

### Приклад 5. Деформація «Згин». Балка 3

Вихідні дані:  $M=10$  кНм;  $q=20$  кН/м;  $F=40$  кН;  $[\sigma] = 200$  МПа;  $a = 1$  м;  
 $b = 2$  м;  $c = 1$  м.

Побудувати епюри  $Q_Y$  і  $M_X$  для навантаженої балки (рис.13) та виконати підбір перерізів балки різної форми: прямокутний  $\frac{h}{b} = \beta$  та  $\frac{h}{b} = \frac{1}{\beta}$ ; круглий; кільцевий  $\frac{d}{D} = \alpha$ ; двотавровий.

Необхідно:

- усі перерізи відобразити в одному масштабі;
- співставити величини площ різних перерізів;
- для обраного двотаврового перерізу побудувати в масштабі 1 см - 40 МПа епюри розподілу нормальних напружень в перерізі, де  $M_X = M_{max}$ , і дотичних напружень в перерізі, де  $Q_Y = Q_{max}$ .

Насамперед, визначимо опорні реакції

$$\Sigma M_A = 0; F \cdot a - q \cdot \frac{b^2}{2} - M + R_B \cdot (a + b + c) = 0; R_B = 10 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0; F \cdot (a + b + c) - R_A \cdot (b + c) + q \cdot b \cdot \left(c + \frac{b}{2}\right) = 0; R_A = 50 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\Sigma F_Y = 0; R_A + R_B - F - q \cdot b = 50 + 10 - 20 - 40 = 0.$$

Балка має три ділянки.

У довільних перерізах будь-якої з них записуємо вирази для  $Q_Y$  і  $M_X$ , перевіряючи при цьому, чи виконується рівність  $Q_Y = dM_X/dz$ , і обчислюємо  $Q_Y$  і  $M_X$  у характерних перерізах.

$$(0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м})$$

$$Q_Y(z_1) = -F; \quad M_X(z_1) = -F \cdot z_1;$$

$$\text{при } z_1 = 0: Q_Y = -20 \text{ кН}; \quad M_X = 0;$$

$$\text{при } z_1 = 1: Q_Y = -20 \text{ кН}; \quad M_X = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$(1 \leq z_2 \leq 3 \text{ м})$$

$$Q_Y(z_2) = -F + R_A - q \cdot (z_2 - 1);$$

$$M_X(z_2) = -F \cdot z_2 - \frac{q \cdot (z_2 - 1)^2}{2} + R_A(z_2 - 1)$$

$$\text{при } z_2 = 1: Q_Y = -20 + 50 = 30 \text{ кН}; \quad M_X = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z_2 = 3: Q_Y = -20 + 50 - 20 \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$M_X = -20 \cdot 3 + 50 \cdot 2 - \frac{20 \cdot 2^2}{2} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$(0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м})$$

$$Q_Y(z_3) = -R_B; \quad M_X(z_3) = -R_B \cdot z_3$$

$$\text{при } z_3 = 0: Q_Y = -10 \text{ кН}; \quad M_X = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z_3 = 1: Q_Y = -10 \text{ кН}; \quad M_X = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Побудувавши за цими даними епюру  $Q_Y$ , бачимо, що в деякому перерізі  $z_0$  на ділянці ( $1 \leq z_2 \leq 3 \text{ м}$ ) зусилля  $Q_Y$  дорівнює нулю, а отже, там дотична до епюри  $M_X$  буде горизонтальною. Для побудови епюри  $M_X$  необхідно ще обчислити ординату  $M_X(z_0)$ .

Скориставшись виразом  $Q_Y(z)$  на ділянці ( $1 \leq z_2 \leq 3 \text{ м}$ ), знаходимо  $z_0$  з умови

$$Q_Y(z_0) = -F + R_A - q \cdot (z_0 - 1) = 0.$$

Звідки

$$z_0 = \frac{-20 + 50}{20} + 1 = 2,5 \text{ м.}$$

Тоді

$$M_X(z_0) = -20 \cdot 2,5 + 50 \cdot 1,5 - \frac{20 \cdot 1,5^2}{2} = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

За отриманими даними будуємо епюру  $Q_Y$  і  $M_X$  (Рис.13).

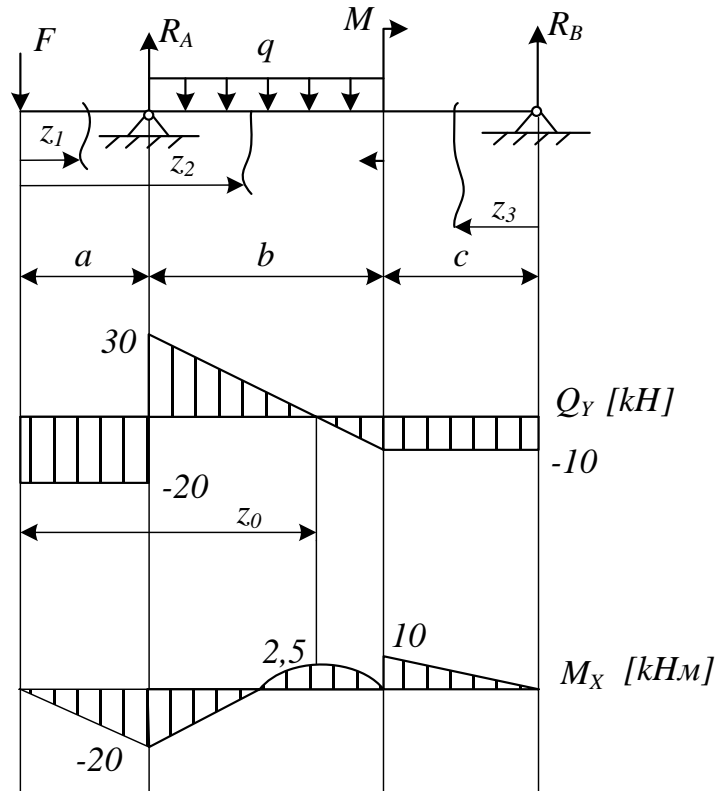


Рис. 13. Епюри  $Q_Y$  і  $M_X$  балки 3

Підбір перерізів виконується з умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{Xmax}}{W_X} \leq [\sigma]$$

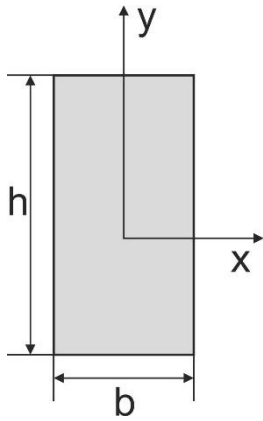
Обчислимо розрахункове значення моменту опору

$$W_X \geq \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^6} = 100 \text{ см}^3.$$

За розрахунковим значенням моменту опору приймаємо згідно з ДОДАТКОМ двотавр № 16 з наступними геометричними характеристиками:

$$I_x = 873 \text{ см}^4, W_x = 109 \text{ см}^3; A = 20,2 \text{ см}^2.$$

$$S_{Xmax} = 623 \text{ см}^3, h = 16 \text{ см}; d = 5 \text{ мм}; t = 7,8 \text{ мм}; b = 81 \text{ мм},$$



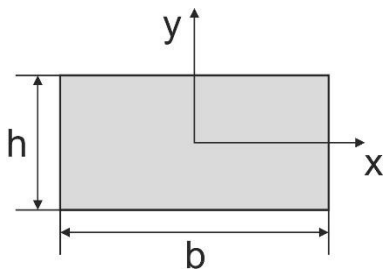
Для прямокутного перерізу, який показаний на

рисунку:  $W_X = \frac{b \cdot h^2}{6}$  ;

якщо  $\frac{h}{b} = 2$ , тоді  $W_X = \frac{\frac{h}{2} \cdot h^2}{6} = 100 \text{ см}^3$  і

$h = \sqrt[3]{12 \cdot 100} = 10,6 \text{ см}$ ,

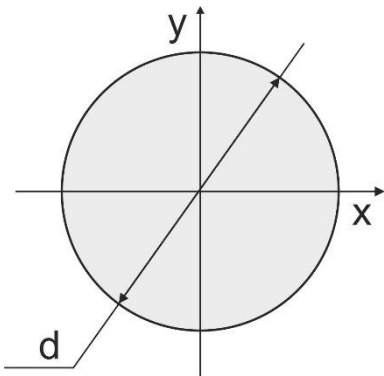
Приймаємо  $h = 11 \text{ см}$ , тоді  $b = 5,5 \text{ см}$ .  
і  $A = b \times h = 60,5 \text{ см}^2$ .



При  $\frac{h}{b} = \frac{1}{2}$ ,  $W_X = \frac{2h \cdot h^2}{6} = 100 \text{ см}^3$ ,

$h = \sqrt[3]{3 \cdot 100} = 6,7 \text{ см}$ ,  $b = 13,4 \text{ см}$ .

$A = b \times h = 90 \text{ см}^2$ .

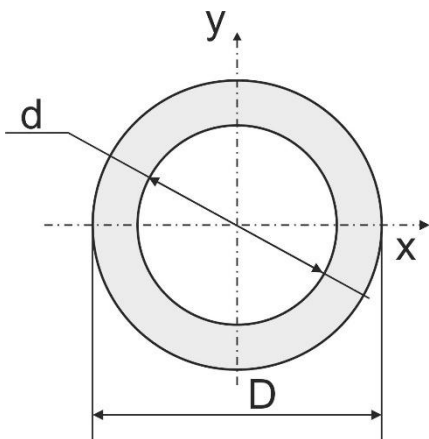


Для кола:

$W_X = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3 = 100 \text{ см}^3$ ,

$d = \sqrt[3]{10 \cdot 100} = 10 \text{ см}$ .

$A = \pi d^2 / 4 = 78,5 \text{ см}^2$ .



Для кільцевого перерізу:

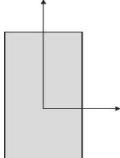
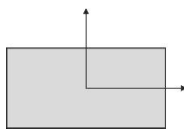
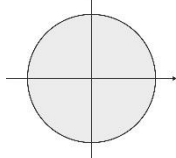
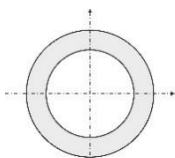
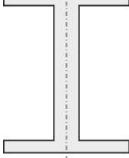
$W_X = \frac{\pi \cdot D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D^3 (1 - \alpha^4) = 100 \text{ см}^3$

$D = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 100}{(1 - 0,8^4)}} = 12 \text{ см}$ ,

$d = \alpha D = 0,8 \cdot 12 = 9,6 \text{ см}$ .

$A = \frac{\pi D^2 (1 - \alpha^2)}{4} = 40 \text{ см}^2$ .

Виконаємо порівняльний аналіз раціональності підібраних перерізів:

					
$A, \text{ см}^2$	60,5	90	78,5	40	20,2
$A_i/A_5$	3	4,45	3,9	1,98	1

Із порівняння видно, що раціональною формою перерізу балки є двотавровий переріз.

Визначимо нормальні та дотичні напруження для балки двотаврового перерізу

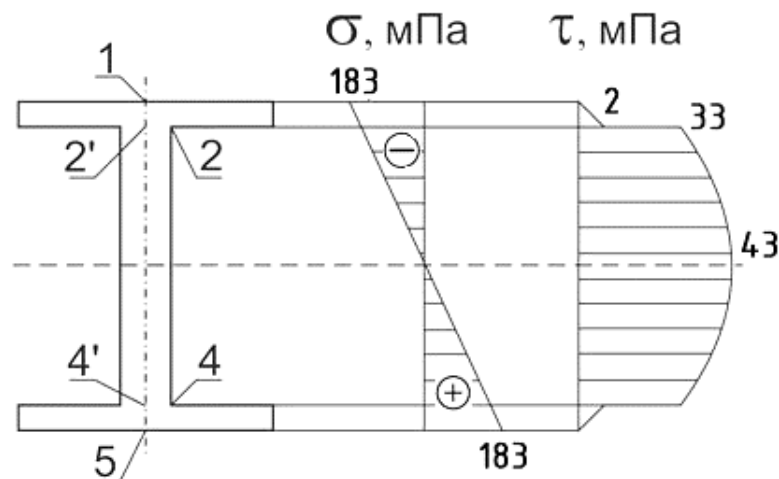


Рис.14 Епюри нормальних і дотичних напружень у двотавровій балці.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{Xmax}}{W_X} = \frac{20 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6} = 183 \text{ МПа};$$

$$\tau_{1,5} = 0;$$

$$\tau_{2,4} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 10^{-3} \cdot 7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 7,51 \cdot 10^{-2}}{81 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{2',4'} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 10^{-3} \cdot 7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 7,51 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 33 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 62,3 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6} = 43 \text{ МПа}.$$

## Приклад 6. «Складна деформація»: спільна дія згину з крученням

Під час розрахунку на міцність у разі спільної дії згину з крученням (Табл.5 рис.5): для вала постійного круглого поперечного перерізу з трьома насадженими прямозубими циліндричними колесами діаметрами  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  (рис.15, а) необхідно:

1) Побудувати епюри згинальних моментів від зусиль, що діють у горизонтальній і вертикальній площинах, а також епюру сумарних згинальних моментів.

2) Побудувати епюру крутних моментів.

3) В небезпечному перерізі визначити еквівалентний момент за IV-ою теорією міцності та підібрати діаметр вала за умови, що межа плинності матеріалу  $\sigma_T = 240$  МПа, коефіцієнт запасу  $n_T = 2$ .

Вихідні дані:

$$F_1 = 20 \text{ кН}; \quad F_2 = 10 \text{ кН}; \quad F_3 = 30 \text{ кН}; \quad F_4 = 10 \text{ кН};$$

$$F_5 = 15 \text{ кН}; \quad F_6 = 40 \text{ кН}; \quad \ell_1 = 10 \text{ см}; \quad \ell_2 = 30 \text{ см}; \quad \ell_3 = 20 \text{ см}; \quad \ell_4 = 15 \text{ см};$$

$$D_1 = 6 \text{ см}; \quad D_2 = 12 \text{ см}; \quad D_3 = 6 \text{ см}.$$

### Згин у вертикальній площині (YOZ) (рис. 15, б)

Визначення реакцій в опорах:

$$\sum M_A = 0;$$

$$F_1 \ell_1 + F_4 \ell_2 + F_6 (\ell_2 + \ell_3 + \ell_4) - R_B^Y (\ell_2 + \ell_3) = 0;$$

$$R_B^Y = \frac{F_1 \ell_1 + F_4 \ell_2 + F_6 (\ell_2 + \ell_3 + \ell_4)}{\ell_2 + \ell_3} = \frac{20 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,3 + 40 \cdot 0,65}{0,5} = 62 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$F_1 (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) - F_4 \ell_3 + F_6 \ell_4 - R_A^Y (\ell_2 + \ell_3) = 0;$$

$$R_A^Y = \frac{F_1 (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) - F_4 \ell_3 + F_6 \ell_4}{\ell_2 + \ell_3} = \frac{20 \cdot 0,6 - 10 \cdot 0,2 + 40 \cdot 0,15}{0,5} = 32 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевірка: } \sum Y = 0; \quad -F_1 + R_A^Y + F_4 - R_B^Y + F_6 = -20 + 32 + 10 - 62 + 40 = 0$$

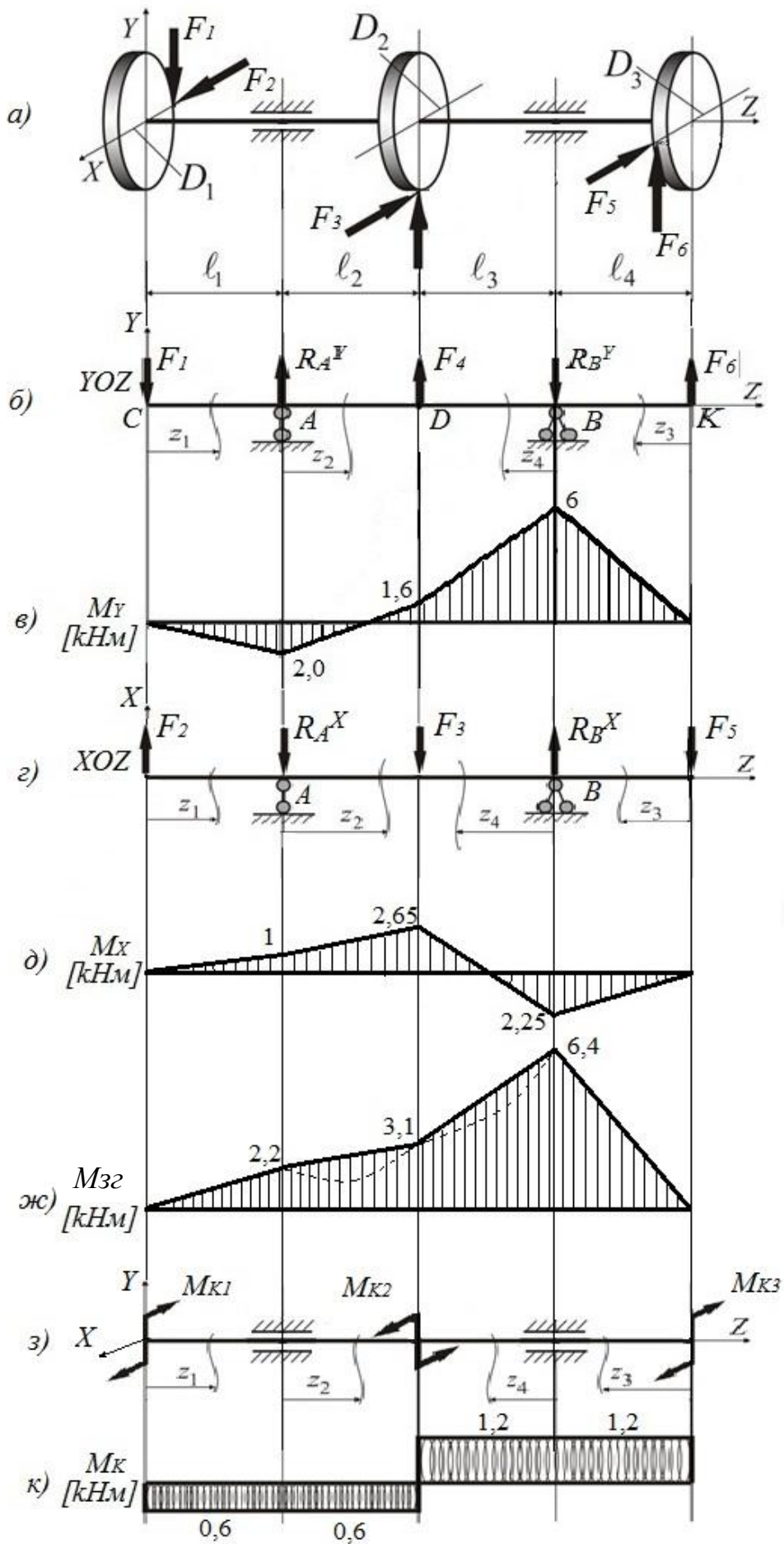


Рис. 15. Епюри балки

**Побудова епюри згинальних моментів  $M_Y$  (рис. 15, в):**

$$0 \leq z_1 \leq \ell_1$$

$$M_Y(z_1) = -F_1 z_1;$$

$$M_Y(0) = 0; \quad M_Y(\ell_1) = -F_1 \ell_1 = -20 \cdot 0,1 = -2,0 \text{ кНм};$$

$$0 \leq z_2 \leq \ell_2$$

$$M_Y(z_2) = -F_1(\ell_1 + z_2) + R_A^Y z_2;$$

$$M_Y(0) = -F_1 \ell_1 = -2,0 \text{ кНм};$$

$$M_Y(\ell_2) = -F_1(\ell_1 + \ell_2) + R_A^Y \ell_2 = -20 \cdot 0,4 + 32 \cdot 0,3 = 1,6 \text{ кНм};$$

$$0 \leq z_3 \leq \ell_4$$

$$M_Y(z_3) = F_6 z_3;$$

$$M_Y(0) = 0; \quad M_Y(\ell_4) = F_6 \ell_4 = 40 \cdot 0,15 = 6 \text{ кНм};$$

$$0 \leq z_4 \leq \ell_3$$

$$M_Y(z_4) = F_6(\ell_4 + z_4) - R_B^Y z_4;$$

$$M_Y(0) = F_6 \ell_4 = 6 \text{ кНм};$$

$$M_Y(\ell_3) = F_6(\ell_4 + \ell_3) - R_B^Y \ell_3 = 40 \cdot 0,35 - 62 \cdot 0,2 = 1,6 \text{ кНм};$$

**Згин у горизонтальній площині ( $XOZ$ ) (рис. 15, г)**

Визначення реакцій в опорах:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-F_2 \ell_1 - F_3 \ell_2 - F_5(\ell_2 + \ell_3 + \ell_4) + R_B^X(\ell_2 + \ell_3) = 0;$$

$$R_B^X = \frac{F_2 \ell_1 + F_3 \ell_2 + F_5(\ell_2 + \ell_3 + \ell_4)}{\ell_2 + \ell_3} = \frac{10 \cdot 0,1 + 30 \cdot 0,3 + 15 \cdot 0,65}{0,5} = 39,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$-F_2(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) + F_3 \ell_3 - F_5 \ell_4 + R_A^X(\ell_2 + \ell_3) = 0;$$

$$R_A^X = \frac{F_2(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) - F_3 \ell_3 + F_5 \ell_4}{\ell_2 + \ell_3} = \frac{10 \cdot 0,6 - 30 \cdot 0,2 + 15 \cdot 0,15}{0,5} = 4,5 \text{ кН}$$

$$\text{Перевірка: } \sum X = 0; F_2 - R_A^X - F_3 + R_B^X - F_5 = 10 - 4,5 - 30 + 39,5 - 15 = 0$$

**Побудова епюри згинальних моментів  $M_X$  (рис. 15, д):**

$$0 \leq z_1 \leq \ell_1$$

$$M_X(z_1) = F_2 z_1;$$

$$M_X(0) = 0;$$

$$M_X(\ell_1) = F_2 \ell_1 = 10 \cdot 0,1 = 1 \text{ кНм.}$$

$$0 \leq z_2 \leq \ell_2$$

$$M_X(z_2) = F_2(\ell_1 + z_2) - R_A^X z_2;$$

$$M_X(0) = F_2 \ell_1 = 1 \text{ кНм;}$$

$$M_X(\ell_2) = F_2(\ell_1 + \ell_2) - R_A^X \ell_2 = 10 \cdot 0,4 - 4,5 \cdot 0,3 = 2,65 \text{ кНм.}$$

$$0 \leq z_3 \leq \ell_4$$

$$M_X(z_3) = -F_5 z_3;$$

$$M_X(0) = 0;$$

$$M_X(\ell_4) = -F_5 \ell_4 = -15 \cdot 0,15 = -2,25 \text{ кНм.}$$

$$0 \leq z_4 \leq \ell_3$$

$$M_X(z_4) = -F_5(\ell_4 + z_3) + R_B^X z_4;$$

$$M_X(0) = -F_5 \ell_4 = -2,25 \text{ кНм;}$$

$$M_X(\ell_3) = -F_5(\ell_4 + \ell_3) + R_B^X \ell_3 = -15 \cdot 0,35 + 39,5 \cdot 0,2 = 2,65 \text{ кНм.}$$

**Побудова епюри сумарних згинальних моментів (рис. 15, ж):**

$$M_{32} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}$$

$$M_{II}(C) = 0;$$

$$M_{32}(A) = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2} = 2,2 \text{ кНм;}$$

$$M_{32}(D) = \sqrt{(1,6)^2 + (2,65)^2} = 3,1 \text{ кНм;}$$

$$M_{32}(B) = \sqrt{(6)^2 + (-2,25)^2} = 6,4 \text{ кНм;}$$

$$M_{3z}(K) = 0.$$

На ділянках де  $M_X$  и  $M_Y$  змінюються за різними законами епюра згинальних моментів не лінійна. Для спрощення побудови епюри моменти обчислюються в окремих характерних точках, і ділянки епюр між цими точками апроксимуються прямолінійними відрізками.

### Кручення (рис. 15, з)

Приведення сил до крутних моментів:

$$M_{K1} = F_1 \frac{D_1}{2} = 20 \cdot 0,03 = 0,6 \text{ кНм}$$

$$M_{K2} = F_3 \frac{D_2}{2} = 30 \cdot 0,06 = 1,8 \text{ кНм}$$

$$M_{K3} = F_6 \frac{D_3}{2} = 40 \cdot 0,03 = 1,2 \text{ кНм}$$

Перевірка рівноваги вала:

$$\sum M_Z = 0; \quad -M_{K1} + M_{K2} - M_{K3} = -0,6 + 1,8 - 1,2 = 0$$

Побудова епюри крутних моментів  $M_K$  (рис. 15, к):

$$0 \leq z_1 \leq \ell_1 \quad M_K(z_1) = -M_{K1} = -0,6 \text{ кНм};$$

$$0 \leq z_2 \leq \ell_2 \quad M_K(z_2) = -M_{K1} = -0,6 \text{ кНм};$$

$$0 \leq z_3 \leq \ell_4 \quad M_K(z_3) = M_{K3} = 1,2 \text{ кНм};$$

$$0 \leq z_4 \leq \ell_3 \quad M_K(z_4) = M_{K3} = 1,2 \text{ кНм}.$$

### Визначення небезпечного перерізу вала:

Еквівалентні моменти в перерізах за IV-ою теорією міцності:

$$M_{екв}^{IV} = \sqrt{M_H^2 + 0,75M_K^2}$$

$$M_{екв}^{IV}(C) = \sqrt{0,75 \cdot 0,6^2} = 0,52 \text{ кНм};$$

$$M_{екв}^{IV}(A) = \sqrt{2,2^2 + 0,75 \cdot 0,6^2} = 2,26 \text{ кНм};$$

$$M_{екв}^{IV}(D) = \sqrt{3,1^2 + 0,75 \cdot 1,2^2} = 3,27 \text{ кНм}.$$

$$M_{екв}^{IV}(B) = \sqrt{6,4^2 + 0,75 \cdot 1,2^2} = 6,48 \text{ кНм.}$$

$$M_{екв}^{IV}(K) = \sqrt{0,75 \cdot 1,2^2} = 1,04 \text{ кНм.}$$

$M_{екв}^{IV} \text{ max} = M_{екв}^{IV}(B) = 6,48 \text{ кНм}$  – небезпечний переріз  $B$ .

### Визначення діаметра вала з умови міцності:

Допустиме напруження:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{2,0} = 120 \text{ МПа.}$$

Умова міцності згідно з IV теорією має вигляд:

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_{32}^2 + 3\tau_K^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{32}}{W_X}\right)^2 + 3\left(\frac{M_K}{W_P}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{32}^2 + 0,75M_K^2}}{W_X} = \frac{M_{екв}^{IV} \text{ max}}{W_X[\sigma]} \leq [\sigma]$$

Необхідний діаметр вала знаходимо за формулою:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{екв}^{IV} \text{ max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6,48 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 120 \cdot 10^6}} = 0,0819 \text{ м}$$

Найближче стандартне значення –  $d = 85 \text{ мм}$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Писаренко, Г.С. Опір матеріалів : підручник / Г.С.Писаренко, О.Л.Квітка, Е.С. Уманський.-К. : Вища школа, 2004. 655 с.
2. Музикін Ю.Д. Основи розрахунків на міцність. Ч.2 : конспект лекцій з прикладної механіки для студ. немашинобудівних спец / Ю.Д. Музикін, В.В. Клітної, О.І. Наумов. – Харків: НТУ "ХПІ", 2016. – 75 с.
3. Клітної В. В. Прикладна механіка. Основи теорії та розрахунків: навчальний посібник / В. В. Клітної, Ю. Д. Музикін, Д. Ю. Бородін, С. В. Бобрицький. - Харків: НТУ «ХПІ», 2024. - 232 с.

## ДОДАТОК

Сортамент прокатної сталі відповідно до ДСТУ 8768:2018

Номер двотавра	Розміри, мм				Площа перерізу, см <sup>2</sup>	Маса 1 м, кг	Довідкові величини для вісі $x - x$		
	$h$	$b$	$s$	$t$			$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$S_x$ , см <sup>3</sup>
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	23,0
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	33,7
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	46,8
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	62,3
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1290	143,0	81,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	1430	159,0	89,8
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1840	184,0	104,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70	2030	203,0	114,0
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00	2550	232,0	131,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	2790	254,0	143,0
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3460	289,0	163,0
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	3800	317,0	178,0
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5010	371,0	210,0
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90	5500	407,0	229,0
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7080	472,0	268,0
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	39,20	7780	518,0	292,0
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9840	597,0	339,0
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13380	743,0	423,0
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19062	953,0	545,0
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27696	1231,0	708,0
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39727	1589,0	919,0
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55962	2035,0	1181,0
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,00	76806	2560,0	1491,0

Навчальне видання

Методичні вказівки  
до виконання практичних робіт  
«Визначення напружень та переміщень  
при простих та складних деформаціях»  
з дисциплін «Прикладна механіка» та «Технічна механіка»  
для студентів денної та заочної форм навчання немеханічних спеціальностей

Укладачі:

КЛІТНОЙ Володимир Вікторович  
БОБРИЦЬКИЙ Сергій Владиславович  
ПАВЛЮЧЕНКОВ Михайло Васильович  
КЛІТНОЙ Віктор Володимирович

Відповідальний за випуск проф. Гайдамака А В.  
Роботу до видання рекомендував проф. Гайдамака А В.

В авторській редакції

План 2025 р., поз. 659

---

Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк.

Видавничий центр НТУ «ХП».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.  
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

---

Електронне видання