МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи за темою

«ГРАНИЦЯ ТА ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ»

з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
заочної та скороченої форм навчання

Харків
НТУ «ХПІ»
2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи за темою

«ГРАНИЦЯ ТА ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ»

з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
заочної та скороченої форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 30.10.2020 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2021

Методичні вказівки для самостійної роботи за темою «Границя та похідна функції однієї змінної» з курсу «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей заочної та скороченої форм навчання / уклад. Г. Б. Лінник, І. О. Морачковська, Г. В. Руднєва. – Харків : НТУ «ХПІ». – 40 с.

Укладачі: Г. Б. Лінник, І. О. Морачковська, Г. В. Руднєва

Рецензент доц. С. М. Решетнікова

Кафедра прикладної математики

ВСТУП

Методичні вказівки відповідають навчальним (робочим) програмам з дисципліни “Вища математика” ННІ МІТ. Їх мета допомогти студентам заочної та скороченої форм навчання у розв’язанні задач за темами «Границя функції», «Похідна функції та її застосування».

У роботі викладено у мінімально необхідному обсязі базові теоретичні відомості. Розв’язані приклади. Також розібрані зразки виконання індивідуальних завдань, наведено по 30 варіантів індивідуальних завдань з кожної теми.

1. ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

1.1. Визначення границі функції

Визначення функції. Якщо кожному значенню змінної x, що належить деякій області її змінювання X ($x \in X$), за деяким правилом або законом поставлено у відповідність одне визначене значення $y \in Y$, то вважають, що на множині X задано функцію $y = f(x)$. Множина X називається **областю визначення** функції; множина Y − **областю значень** функції. При цьому x називається незалежною змінною, або аргументом, y – функцією.

Число A називається **границею функції** $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що $\forall x$, які задовольняють нерівності $0 < |x - a| < \delta$,то справедлива нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Розглянемо декілька типів найпростіших границь:

0-й тип. До цього типу включено границі, які не потребують спеціальних методів для обчислення, тому що в них немає невизначеності. Розглянемо декілька прикладів:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-7}{5-2x} = \left\|\dfrac{3\cdot 2-7}{5-2\cdot 2}\right\| = \left\|\dfrac{-1}{1}\right\| = -1;$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+1}{x^3+2} = \left\|\dfrac{\cos 0+1}{0^3+2}\right\| = \left\|\dfrac{1+1}{0+2}\right\| = 1;$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+2} = \left\|\dfrac{\sin 0}{0^3+2}\right\| = \left\|\dfrac{0}{0+2}\right\| = 0;$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-6}{x^3-1} = \left\|\dfrac{1-6}{1^3-1}\right\| = \left\|\dfrac{-5}{0}\right\| = \infty.$

Пояснимо останній приклад. З курсу елементарної математики відомо, що ділити на 0 неможливо. Звісно це так, але коли розглядається границя, змінна тільки прямує до 1 та ніколи не дорівнює їй. Тобто ми ділимо не на 0, а на величину, що тільки прямує до 0. Проілюструємо це за допомогою таблиці.

x	1	0,1	0,01	0,05	0,001	0,0001	…
$\dfrac{1}{x}$	1	10	100	500	1000	10000	…

Проаналізуємо результати таблиці: чим ближче до 0 стає значення змінної x, тим більше стає значення $\frac{1}{x}$. Звідси випливає, що $\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\to} \infty$, або $\left\|\frac{1}{0}\right\| = \infty$.

1-й тип. Розберемо випадок, коли в чисельнику та знаменнику дробу знаходяться поліноми $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^4 - x^2 + 3}{3x^4 + 8x^2 - x} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^4}{3x^4} = \frac{7}{3}$.

Пояснення: оскільки x прямує до нескінченності ($x \to \infty$), то головна частина полінома дорівнює x в максимальному степені зі своїм коефіцієнтом.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8x^3 - x^2 + 3x}{9x^4 - 7x^2 - 5} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{8x^3}{9x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{8}{9x} = \left\|\frac{8}{\infty}\right\| = 0$.

Пояснення: якщо сталу величину поділити на нескінченно велику, одержимо нескінченно малу.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^6 + x^5 - 3}{x^4 + 7x^2 - x} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^6}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2}{1} = \infty$.

Оскільки нескінченність знаходиться у чисельнику, а знаменник – стала величина, то одержимо нескінченність у відповіді.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{12x^5 - x^2 + 7}{7x^4 - 8x^5 + 9} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{12x^5}{-8x^5} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$.

Будьте обережними з коефіцієнтом при змінній, знак коефіцієнта потрібно брати до уваги.

2-й тип. У попередніх типах розглянуто приклади, коли змінна прямує до нескінченності. Але для функції змінна може прямувати і до скінчених значень.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 3} = \left\|\frac{1-1}{2+1-3}\right\| = \left\|\frac{0}{0}\right\|$.

Одержали нову невизначеність. Пам’ятаємо, що ми ділимо не нулі, а нескінченно малі значення. Розкладемо на множники чисельник та знаменник. Для цього нам потрібні деякі формули з елементарної математики.

Формули скороченого множення:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,

$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$,

$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$.

Розкладання квадратного тричлена на множники:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1, x_2 – корені відповідного квадратного рівняння.

Розв'язання квадратного рівняння:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ D=b^2-4ac.$$

Чисельник розкладемо за першою формулою: $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

Знаменник – за останньою, для цього спочатку знайдемо корені квадратного рівняння:

$$2x^2+x-3=0 \Rightarrow D=1-4\cdot 2\cdot(-3)=25,\ x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{4}\Rightarrow x_1=1, x_2=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}.$$

Після цього за формулою маємо:

$$2x^2+x-3=2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right).$$

Потрібно пам'ятати про коефіцієнт $a=2$. Підставимо усі одержанні розкладання в наш приклад:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{2x+3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}.$$

На другому кроці ми можемо скоротити дріб, і наша невизначеність зникає.

2. $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^3+8}=\left\|\frac{4-2-2}{-8+8}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x-1)}{(x^2-2x+4)}=\left\|\frac{(-2-1)}{(4+4+4)}\right\|=-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}.$$

У цьому прикладі ми знову повинні розкласти чисельник та знаменник на множники за вказаними вище формулами. В знаменнику формула суми кубів. В чисельнику корені: $x_1=1, x_2=-2$.

3-й тип.

1. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x}-3}{x^2-9}=\left\|\frac{3-3}{9-9}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{3x}-3\right)\cdot\left(\sqrt{3x}+3\right)}{(x-3)\cdot(x+3)\cdot\left(\sqrt{3x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3x-9}{(x-3)\cdot(3+3)\cdot\left(\sqrt{3\cdot 3}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)}{(x-3)\cdot 6\cdot 6}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

У цьому прикладі ми позбавляємося ірраціональності в чисельнику. Для цього необхідно помножити на спряжений вираз $\left(\sqrt{3x}+3\right)$ чисельник та знаменник водночас. Після цього одержимо формулу: різниця квадратів. Також зауважимо, що множники, які прямують до ненульових чисел можна замінювати їхніми границями, що й зроблено у знаменнику $\left(x+3\right)\underset{x\to 3}{\to}6$, $\left(\sqrt{3x}+3\right)\underset{x\to 3}{\to}6$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{3-\sqrt{x+7}}=\left\|\dfrac{2-2}{3-3}\right\|=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x+2\right)-2^2}{\left(3-\sqrt{x+7}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=.$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{\left(3^2-\left(x+7\right)\right)\cdot\left(2+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)\left(3+3\right)}{\left(2-x\right)\cdot 4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}.$$

У цьому прикладі потрібно помножити на спряжене і чисельник, і знаменник.

1.2. Перша важлива границя

Перша важлива (видатна, особлива, чудова) границя має такий вигляд:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=1}.$$

Зауваження. Ця формула залишається правильною, якщо замість змінної x під знаком синусу та в знаменнику стоїть деяка функція від x, головне, щоб аргумент синусу та знаменник співпадали та прямували до 0.

Дві нескінченно малі функції $f\left(x\right)$ та $g\left(x\right)$ називаються **еквівалентними** при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=1$.

Отже, за означенням еквівалентних замість першої важливої границі можна написати $\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x$.

Висновки першої важливої границі

Висновки першої важливої границі сформулюємо у вигляді **таблиці еквівалентних нескінченно малих при** $x\to 0$.

1. $\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x$; 2. $\operatorname{tg}x\underset{x\to 0}{\sim}x$; 3. $\arcsin x\underset{x\to 0}{\sim}x$;	4. $\operatorname{arctg}x\underset{x\to 0}{\sim}x$; 5. $1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$.

Спочатку доцільно ознайомитися з прикладами заміни нескінченно малих функцій еквівалентними величинами:

$$\sin 7x \underset{\substack{x\to 0\\ 7x\to 0}}{\sim} 7x; \qquad 1-\cos 3x \underset{\substack{x\to 0\\ 3x\to 0}}{\sim} \frac{(3x)^2}{2} = \frac{9x^2}{2}; \qquad \arcsin\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

Зауваження: не має значення, до чого прямує змінна x, головне, щоб аргумент функції прямував до 0.

Розглянемо приклади обчислення границь за допомогою першої важливої границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{arctg} 6x} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{6x} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{\cos x - 1} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3x)^2\cdot 2}{-x^2} = \dfrac{18}{-1} = -18.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot \operatorname{arctg} 4x}{\cos x - \cos 2x} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 4x}{-2\sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{-x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{-2\cdot\dfrac{3x}{2}\cdot\dfrac{-x}{2}} = \dfrac{4\cdot 2}{3} = \dfrac{8}{3}.$

В останньому прикладі скористались формулою з тригонометрії.

1.3. Друга важлива границя

Друга важлива границя дозволяє розкривати невизначеності виду одиниця в степені нескінченність $\left\|1^\infty\right\|$. Ця границя має такий вигляд:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}, \tag{1}$$

де «e» – експонента. Число e ірраціональне. Приблизне значення цього числа таке: $e \approx 2{,}718281828459045$.

Якщо зробити заміну $t = \dfrac{1}{x}$, то формулу (1) можна переписати в такому вигляді:

$$\boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e}. \tag{2}$$

Зауважимо, що як і для першої видатної границі, не має значення, який вираз стоїть замість змінної x у формулі (1) або замість змінної t – у формулі (2). Головне, щоб:

- ✓ Основа степеня (тобто вираз у дужках формул (1) і (2)) прямував до одиниці

✓ Показник степеня (тобто x у формулі (1) або $\frac{1}{t}$ – у формулі (2)) прямував до нескінченності ($x \to \infty$, $\frac{1}{t} \to \infty$).

Розглянемо приклади:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{5x-2}$.

Зауважимо, що основа степеня (тобто $\frac{2x+1}{2x-3}$) прямує до одиниці

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=1.$$

Показник степеня (тобто $5x-2$) прямує до нескінченності:

$$5x-2\to\infty.$$

Таким чином, основа степеня прямує до одиниці, показник степеня – до нескінченності, тобто маємо невизначеність $\left\|1^{\infty}\right\|$. Скористаємося формулою (1) для розкриття невизначеності.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{5x-2}=\left\|1^{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x-3}-1\right)^{5x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{5x-2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right]^{\frac{4}{2x-3}(5x-2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(5x-2)}{2x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x}{2x}}=e^{10}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+1}{5x^2-4}\right)^{2x}=\left\|1^{\infty}\right\|=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x^2+1}{5x^2-4}-1\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x^2+1-5x^2+4}{5x^2-4}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{5x^2-4}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5x^2-4}{5}}\right)^{\frac{5x^2-4}{5}}\right]^{\frac{5\cdot 2x}{5x^2-4}}==e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x}{5x^2-4}}=e^{0}=1.$$

Висновки другої важливої границі

Висновки другої важливої границі сформулюємо у вигляді **таблиці еквівалентних нескінченно малих при** $x \to 0$.

1. $e^x - 1 \sim x$	4. $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$
2. $a^x - 1 \sim x \ln a$	5. $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$
3. $\ln(1+x) \sim x$	6. $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

Спочатку доцільно ознайомитися з прикладами заміни нескінченно малих функцій еквівалентними величинами:

$$\log_2(1+5x) \underset{\substack{x\to 0 \\ 5x \to 0}}{\sim} \frac{5x}{\ln 2}; \qquad e^{x^2} - 1 \underset{\substack{x\to 0 \\ x^2 \to 0}}{\sim} x^2;$$

$$\ln(1-3x) \underset{\substack{x\to 0 \\ (-3x) \to 0}}{\sim} -3x; \qquad \sqrt[3]{1-2x} - 1 \underset{\substack{x\to 0 \\ (-2x) \to 0}}{\sim} \frac{1}{3}(-2x) = -\frac{2}{3}x;$$

Надамо приклади використання таблиці.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{3x} - 1}{\ln(1+2x)} = \left\| \dfrac{0}{0} \right\|.$

Розглянемо чисельник. Скористаємося формулою 2 таблиці. Маємо $2^{3x} - 1 \underset{\substack{x\to 0 \\ 3x \to 0}}{\sim} 3x \ln 2$.

Розглянемо знаменник. Скористаємося формулою 3 таблиці. Маємо $\ln(1+2x) \underset{\substack{x\to 0 \\ 3x \to 0}}{\sim} 2x$.

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{3x} - 1}{\ln(1+2x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x \ln 2}{2x} = \dfrac{3}{2} \ln 2$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x - 3^x}{\log_3(1+7x)} = \left\| \dfrac{0}{0} \right\|.$

Розглянемо чисельник. Спочатку винесемо множник 3^x за дужки, щоб привести вираз до табличного виду. Скористаємося формулою 2 таблиці. Маємо

$$5^x - 3^x = 3^x \left(\left(\frac{5}{3} \right)^x - 1 \right) \underset{x\to 0}{\sim} x \ln \frac{5}{3}.$$

Розглянемо знаменник. Скористаємося формулою 3 таблиці. Маємо $\log_3(1+7x) \underset{\substack{x\to 0\\ 7x\to 0}}{\sim} \dfrac{7x}{\ln 3}$.

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-3^x}{\log_3(1+7x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\frac{5}{3}}{\frac{7x}{\ln 3}}=\dfrac{1}{7}\cdot\ln 3\cdot\ln\dfrac{5}{3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+2x}-1}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$.

Розглянемо чисельник. Скористаємося формулою 6 таблиці. Маємо $1-\sqrt{1-x^2}=-\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)\underset{\substack{x\to 0\\ x^2\to 0}}{\sim}-\dfrac{1}{2}\left(-x^2\right)=\dfrac{x^2}{2}$.

Розглянемо знаменник та скористаємося формулою 6 таблиці. Маємо $\sqrt[3]{1+2x}-1\underset{\substack{x\to 0\\ 2x\to 0}}{\sim}\dfrac{2x}{3}$.

Таким чином,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{2x}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot 3}{2\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4}=0.$$

1.4. Розкриття невизначеності $\left\|1^\infty\right\|$ за формулою $\lim\limits_{x\to x_0} u^v=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)v}$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} u^v=\left\|1^\infty\right\|=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)v}} \qquad (3)$$

Розглянемо приклади:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$.

$$\lim_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}=\left\|1^\infty\right\|=e^{\lim\limits_{x\to 1}(4-3x-1)\cdot\frac{x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(3-3x)x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3(x-1)x}{(x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}(-3x)}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{5x^2-4}\right)^{2x}$.

Ця границя вже була розглянута раніше. Отримана відповідь 1. Тепер обчислимо цю границю за формулою (3).

В даному прикладі $u=\dfrac{5x^2+1}{5x^2-4}$, $v=2x$. Отже, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+1}{5x^2-4}\right)^{2x}=\left\|1^{\infty}\right\|=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+1}{5x^2-4}-1\right)\cdot 2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+1-5x^2+4}{5x^2-4}\right)\cdot 2x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5\cdot 2x}{5x^2-4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x}{5x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=e^{0}=1.$$

Таким чином, відповідь співпадає з одержаною раніше.

1.5. Неперервність функції

Однобічні границі. Розглянемо рис. 1. Якщо наближатися вздовж осі OX до точки x_0 зліва $(\rightarrow)$, значення функції наближатимуться до y_0 $(\uparrow)$. Цей факт можна записати таким чином:

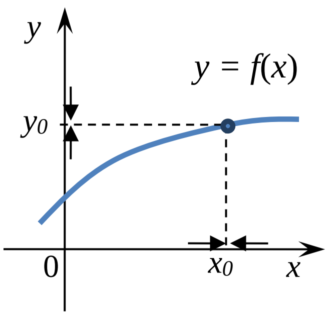

Рисунок 1

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=y_0.$$

«Доданок» «– 0» («мінус нуль») символізує нескінченно мале від’ємне число, що й означає, що ми наближаємося до числа x_0 з лівого боку.

Так само, якщо наближатися до x_0 справа $(\leftarrow)$, то значення функції наближаються до числа y_0 $(\downarrow)$. Запишемо це так:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=y_0.$$

«Доданок» «+0» («плюс нуль») символізує нескінченно мале додатне число, з цього випливає, що ми наближаємося до числа x_0 з правого боку.

Якщо однобічні границі рівні між собою (як у нашому випадку)

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

то це означає, що існує границя функції $f(x)$ в точці x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0.$$

Функція $f(x)$ називається **неперервною** в точці $x = x_0$, якщо границя функції при $x \to x_0$ дорівнює значенню функції в цій точці $x = x_0$, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

або

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Означення неперервності функції можна сформулювати більш докладніше.

1. Функція визначена в точці x_0, тобто існує значення $f(x_0)$.

2. Існує границя функції $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Мається на увазі існування і рівність однобічних границь: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

3. Границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в точці x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо не виконується хоча б одна з зазначених умов, точка x_0 називається **точкою розриву** функції $y = f(x)$.

Розглянемо деяку функцію $y = f(x)$, неперервну на всій числовій осі (рис. 2). Очевидно, що графік неперервної функції – суцільна лінія. Розглянемо іншу функцію (рис. 3). Ця функція визначена на всій числовій осі, але має розрив у точці $x = 1$. Графік цієї функції не є суцільною лінією.

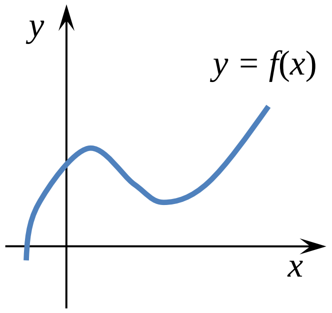

Рисунок 2

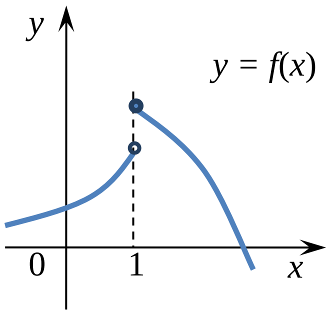

Рисунок 3

Точки розриву функції можна поділити на дві групи: розриви I роду (кінцеві розриви) і розриви II роду (нескінченні розриви).

Класифікацію точок розриву представимо у вигляді такої схеми (рис. 4).

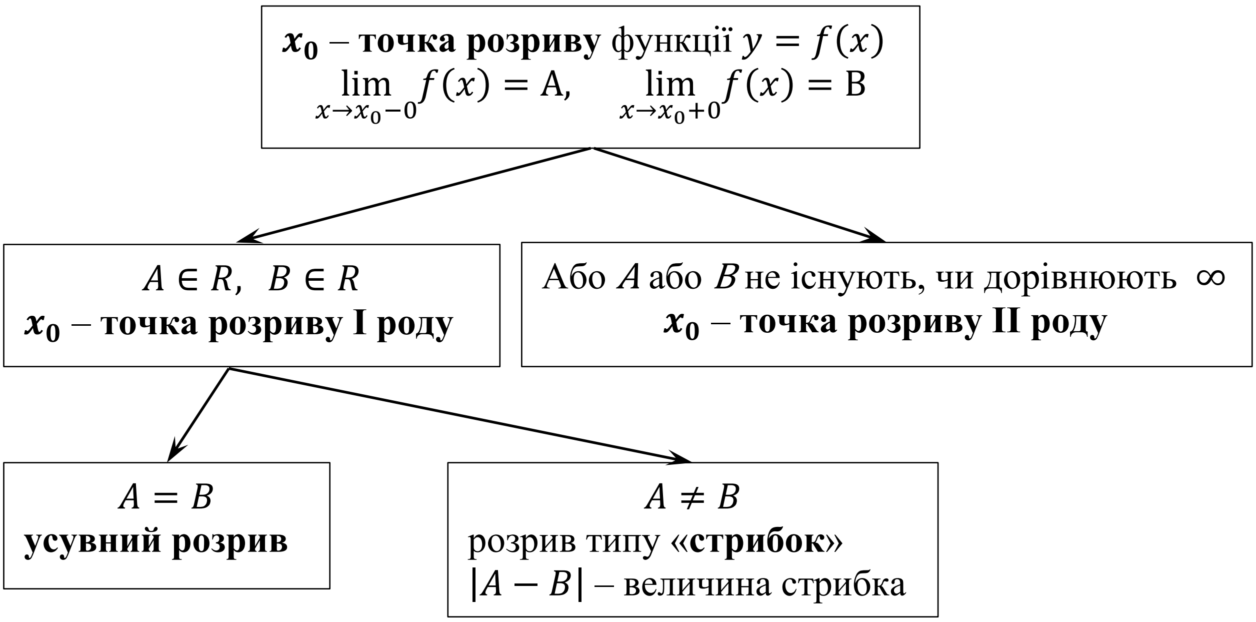

Рисунок 4

Розглянемо приклади.

1. Дослідити функцію на неперервність. Визначити типи точок розриву функції, якщо вони існують:

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 1 \\ (x-1)^2; & 1 \le x \le 2 \\ 3 - x; & x > 2 \end{cases}$$

Функція неперервна на інтервалах $(-\infty; 1)$; $[1; 2]$; $(2; +\infty)$. Розрив може мати місце на кінцях інтервалів, тобто в точках, в яких функція змінює аналітичний вираз. Це точки $x = 1$ і $x = 2$.

Знайдемо однобічні границі функції в цих точках.

$$\lim_{x \to 1-0} x^2 = \left\|(1-0)^2\right\| = 1;$$

$$\lim_{x \to 1+0} (x-1)^2 = \left\|(1+0-1)^2\right\| = 0.$$

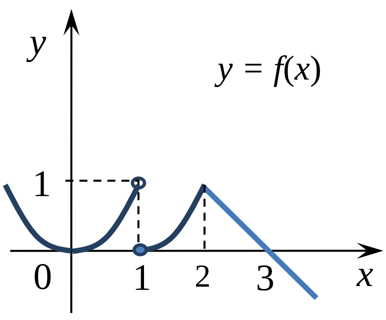

Рисунок 5

Однобічні границі існують, але їх значення різні, отже, $x = 1$ – точка розриву I роду – стрибок.

$$\lim_{x \to 2-0} (x-1)^2 = \left\|(2-0-1)^2 = (1-0)^2\right\| = 1;$$

$$\lim_{x \to 2+0} 3 - x = \|3 - (2+0) = 1 - 0\| = 1.$$

Однобічні границі рівні. Визначимо значення функції в точці $x = 2$.

$$f(2) = (2-1)^2 = 1.$$

Однобічні границі дорівнюють значенню функції в точці $x=2$, отже, у точці $x=2$ функція неперервна. Графік функції в околі особливих точок зображено на рисунку 5.

2. Дослідити функцію на неперервність. Визначити типи точок розриву функції, якщо вони існують.

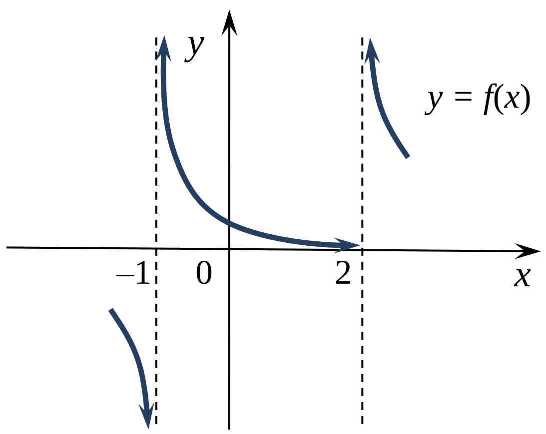

Рисунок 6

$$f(x)=\frac{5^{\frac{1}{x-2}}}{x+1}.$$

Функція невизначена, якщо $x-2=0$ або $x+1=0$, тому що ці вирази знаходяться у знаменнику, тобто точки можливого розриву функції $x=2$ і $x=-1$.

Обчислимо однобічні границі у точці $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{5^{\frac{1}{x-2}}}{x+1}=\left\|\frac{5^{\frac{1}{-1-0-2}}}{-1-0+1}=\frac{5^{\frac{1}{-3-0}}}{-0}=\frac{5^{-\frac{1}{3}}}{-0}\left(5^{-\frac{1}{3}}>0\right)\right\|=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{5^{\frac{1}{x-2}}}{x+1}=\left\|\frac{5^{\frac{1}{-1+0-2}}}{-1+0+1}=\frac{5^{-\frac{1}{3}}}{+0}\right\|=+\infty.$$

Отже, у точці $x=-1$ розрив II роду.

Обчислимо однобічні границі у точці $x=2$:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{5^{\frac{1}{x-2}}}{x+1}=\left\|\frac{5^{\frac{1}{2-0-2}}}{2-0+1}=\frac{5^{\frac{1}{-0}}}{3}=\frac{5^{-\infty}}{3}=\frac{1}{3\cdot 5^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}\right\|=0;$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{5^{\frac{1}{x-2}}}{x+1}=\left\|\frac{5^{\frac{1}{2+0-2}}}{2+0+1}=\frac{5^{\frac{1}{+0}}}{3}=\frac{5^{+\infty}}{3}\right\|=+\infty.$$

Отже, у точці $x=2$ розрив II роду. Графік функції в околі особливих точок зображено на рисунку 6.

3. Дослідити функцію на неперервність. Визначити типи точок розриву функції, якщо вони існують.

$$f(x)=\frac{2x^2-32}{x-4}.$$

Задана функція невизначена, якщо $x-4=0$, тому що цей вираз знаходиться у знаменнику. Отже, $x=4$ – точка можливого розриву функції. Розкладемо чисельник функції на множники:

$$2x^2-32=2\left(x^2-16\right)=2(x-4)(x+4).$$

Маємо

$$f(x)=\frac{2(x-4)(x+4)}{(x-4)}=2x+8.$$

Обчислимо однобічні границі функції при $x\to 4$:

$$\lim_{x\to 4-0} 2x+8=\|2(4-0)+8\|=16;$$

$$\lim_{x\to 4+0} 2x+8=\|2(4+0)+8\|=16.$$

Однобічні границі рівні, але функція не визначена при $x=4$. Отже, точка $x=4$ – точка розриву I роду (усувний розрив). Графік функції зображено на рисунку 7, а). Усунемо розрив. Для цього визначимо функцію таким чином:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-32}{x-4}, x\neq 4\\ 16, \qquad x=4.\end{cases}$$

Ця функція буде неперервною на всій числовій осі. Графік функції зображено на рисунку 7, б).

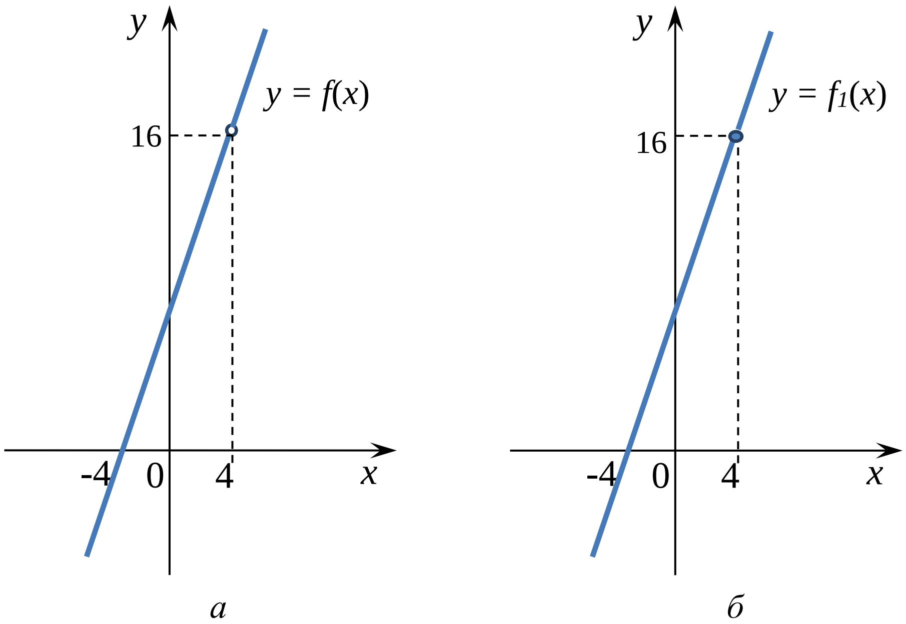

Рисунок 7

3. Дослідити функцію на неперервність. Визначити типи точок розриву функції, якщо вони існують.

$$f(x)=\frac{x-4}{2x^2-32}.$$

Розкладемо знаменник на множники:

$$f(x)=\frac{(x-4)}{2(x-4)(x+4)}=\frac{1}{2(x+4)}..$$

Ця функція невизначена, якщо $x+4=0$ і $x-4=0$. Отже $x=-4$ і $x=4$ – точки можливого розриву.

Обчислимо однобічні границі:

$$\lim_{x\to-4-0}\frac{1}{2(x+4)}=\left\|\frac{1}{2(-4-0+4)}=\frac{1}{2(-0)}=\frac{1}{-0}\right\|=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-4+0}\frac{1}{2(x+4)}=\left\|\frac{1}{2(-4+0+4)}=\frac{1}{2(+0)}=\frac{1}{+0}\right\|=+\infty.$$

Отже, точка $x=-4$ – точка розриву II роду.

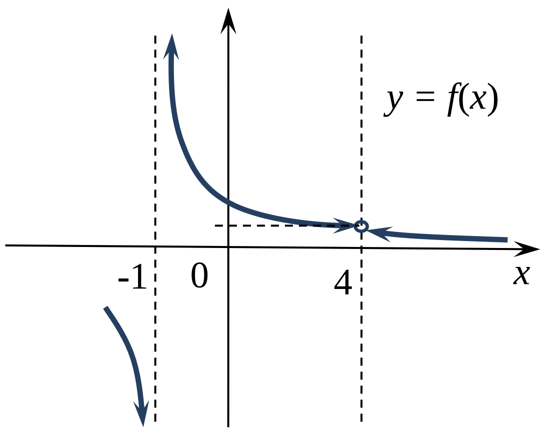

Рисунок 8

$$\lim_{x\to4-0}\frac{1}{2(x+4)}=\left\|\frac{1}{2(4-0+4)}\right\|=\frac{1}{16};$$

$$\lim_{x\to4+0}\frac{1}{2(x+4)}=\left\|\frac{1}{2(4+0+4)}\right\|=\frac{1}{16}.$$

У точці $x=4$ однобічні границі рівні, але функція невизначена.

Отже, $x=4$ – точка усувного розриву I роду. Графік функції в околі особливих точок зображено на рисунку 8.

1.6. Приклад розв’язання типового варіанта

Завдання 1. Знайти зазначені границі:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x+1}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x+1}=\left\|\frac{3^2-4\cdot 3+3}{2\cdot 3+1}=\frac{0}{7}\right\|=0.$$

Невизначеності немає, отже, границю знайдено.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x+4}{8x^3+x^2-3}$.

При підстановці граничного значення змінної x в умову маємо невизначеність $\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|$. В даному випадку будемо виділяти головні частини чисельника та знаменника.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x+4}{8x^3+x^2-3}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{8x^3}=\frac{3}{8}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+x-10}$.

Після підстановки граничного значення змінної x в умову маємо невизначеність $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$. В даному випадку будемо розкладати чисельник та знаменник на множники.

$$x^2-3x+2=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2},\ \Rightarrow\ x_1=1,\ x_2=2.$$

Отже, $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

$$2x^2+x-10=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{4}=\frac{-1\pm 9}{4},\ \Rightarrow\ x_1=-\frac{5}{2},\ x_2=2.$$

Отже, $x^2-3x+2=2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)(x-2)=(2x+5)(x-2)$.

Остаточно маємо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+x-10}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(2x+5)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(2x+5)}=\frac{1}{9}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\arcsin 2x}$.

Після підстановки граничного значення змінної x в умову маємо невизначеність $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$**.** В даному випадку скористаємося висновками з першої важливої границі.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x^2}{\arcsin^2 5x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{(5x)^2}=\frac{3}{25}.$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x\cdot\log_4(1-5x)\cdot\ln 4}$.

Після підстановки граничного значення змінної x в умову маємо невизначеність $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$. В даному випадку скористаємося висновками з другої важливої границі.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x\cdot\log_4(1-5x)\cdot\ln 4}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{x\cdot\frac{(-5x)}{\ln 4}\cdot\ln 4}=-\frac{1}{15}.$$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-3}\right)^{3x-1}$.

Після підстановки граничного значення змінної x в умову маємо невизначеність $\left\|1^{\infty}\right\|$. В даному випадку будемо зводити надану границю до другої видатної границі.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-3}\right)^{3x-1}=\left\|1^{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x+2}{5x-3}-1\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x+2-5x+3}{5x-3}\right)^{3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{5x-3}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{5x-3}\right)^{\frac{5x-3}{5}}\right]^{\frac{5}{5x-3}(3x-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{5(3x)}{5x}}=e^3.$$

Також для обчислення даної границі можна скористатися формулою $\lim\limits_{x\to x_0}u^v=\left\|1^{\infty}\right\|=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)v}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-3}\right)^{3x-1}=\left\|1^{\infty}\right\|=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-3}-1\right)(3x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2-5x+3}{5x-3}\right)(3x-1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{5x-3}\right)(3x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5(3x)}{5x}}=e^3.$$

Завдання 2. Дослідити функцію $f(x) = e^{\frac{x-4}{x-6}}$ на неперервність. Визначити типи точок розриву функції, якщо вони існують.

Функція невизначена, якщо $x - 6 = 0$, тому що цей вираз знаходяться у знаменнику, тобто $x = 6$ – точка розриву функції.

Обчислимо однобічні границі у точці $x = 6$.

$$\lim_{x\to 6-0} e^{\frac{x-4}{x-6}} = \left\| e^{\frac{6-0-4}{6-0-6}} = e^{\frac{2}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} \right\| = 0,$$

$$\lim_{x\to 6+0} e^{\frac{x-4}{x-6}} = \left\| e^{\frac{6+0-4}{6+0-6}} = e^{\frac{2}{+0}} = e^{+\infty} \right\| = +\infty.$$

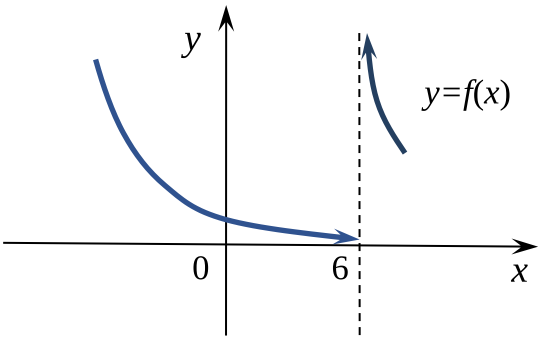

Рисунок 9

Одна з однобічних границь є нескінченою, тому маємо розрив II роду.

Графік функції в околі точки розриву зображено на рисунку 9.

1.7. Варіанти індивідуальних завдань за темою «Границя функції»

Завдання 1. Знайти зазначені границі:

1. а) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{3x^2-4x-10}{2x+1}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+14}{7x^3+2x^2-3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\arcsin 2x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2\ln(1-x)}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{x-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(9-4x)(6+x)}{x-2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+5x-3}{2x^3+4x^2+5}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin 3x}{tg 4x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{4x-3}\right)^{x+1}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to -1}(2x-3)(x+2)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-2}{5x^2+3x-1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin x}{\mathrm{arctg}\, 2x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x+2}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to -4}(x-6)\left(\dfrac{1}{3}x+8\right)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+18x-3}{3x^3+5x+10}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{\mathrm{tg}^2\, 2x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{\sqrt{1+8x}-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x+2}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x-5)(3x-4)}{x+2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+4x+3}{10x^3+5x^2-1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}^2\, 3x}{\sin 5x^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-6x}-1}{x}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{5x-2}\right)^{x-2}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 4}(3x^2-2x+5)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3+4x+3}{2x^3+5x^2-1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, 3x}{\sin 5x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{5x}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to -2}(x-3)(2x+5)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+8x^2+1}{12x^3-9x+5}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{1-\cos 5x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{5x}}{(1+5x)^6-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)^{3x+2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+5}{x^2+3x+3}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^5+6x-1}{5x^4-4x^3+3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\arcsin x^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln(1+3x)}{\sqrt{1+8x^2}-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x^2-9)(x-3)}{x+5}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5+6x-3}{5x^5-4x^2-1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\,\mathrm{arctg}\,2x}{\sin 4x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x-1}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(-x^2+2x-\dfrac{1}{6}\right)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6-3}{5x^5+4x^2-1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}^2\,2x}{x\cdot\sin 3x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+8x}-1}{e^{2x}-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)(x-5)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+5x^2-4}{3x^4+6x+11}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x^3}{x(1-\cos x)}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{e^{3x}-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{3x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x^2-4)(x+2)}{3x-4}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5+7x^4-12}{3x^5+6x^3-13x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\mathrm{tg}\,x}{(1-\cos 4x)}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{2^x-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x+3}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 5}(x-10)(x+7)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5+x^4-19}{12x^3+10x+2}$; **в)**
$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,3x}{2\sin 6x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-6x}-1}{3^x-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-2x-3)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3+7x^2+5}{23x^4-17x+8}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin x}{\arcsin 5x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+6x}-1}{\log_3(1-x)}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 5}(x-10)(x+7)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^4-19}{12x^3+10x+2}$; **в)**
$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+7x-15}{x^2-6x-27}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{\arcsin^2 5x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\lg(1+4x)}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-6}\right)^{7x+1}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{(x-4)(2x+7)}{x-6}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+17x^2+9}{5x^4+6x-3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{\ln(1+4x)}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2x+1}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x-3\right)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x^2+5}{6x^3+3x-4}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{4\sin x^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{e^{5x}-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^{2x+1}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 1}(x+4)(3x-6)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x-3}{6x^3+5x+100}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,3x}{\sin x^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{e^{-3x}-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(x^2-27\right)}{x+8}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-7x+8}{5x^3-x^2-10}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\,\mathrm{tg}\,2x}{\sin 3x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^2-2x+4\right)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-4x+7}{6x^7+2x-10}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\,\mathrm{tg}\,2x}{1-\cos 3x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{3x^2}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to -3}(x+4)(2x-7)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x+10}{2x^3+15x+21}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(3x)}{x^2+2x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{-x}}{\ln(1-3x)}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{3x^2}\right)^{x^2-1}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(2x+3)(4-x)}{x-1}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x^3-6x^2-3}{3x^2-x+10}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\mathrm{arctg}\,2x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{2^x-1}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2+1}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 2}(5-x^2-2x)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+4x-7}{5x^2+6x+3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{1-\cos 2x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x\ln(1+2x)}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2}\right)^x$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 11}(x-1)(x+6)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-5x+4}{3x^4+2x-2}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\arcsin 3x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-1}{\ln(1-3x)}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2}\right)^x$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{(4x+80)(x-5)}{2x-10}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+7x+2}{8x^2-2x+5}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 2x}{\sin x^3}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{2\ln(1+x)}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2}x+5\right)(3-x)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+5x^4-3}{3x^3+5x+4}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x^2}{1-\cos 3x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^x}{5x}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x-3}\right)^{x+5}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2}x^2-5x-6\right)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+5}{2x^2+4x-3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin x}{(1-\cos 3x)}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\log_3(1+x)}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{x+2}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2+5x-4}{x+7}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+4x^4-2}{7x^3-2x+5}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin x}{(1-\cos 3x)}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{3^{2x}-1}$ **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{x+3}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3+3x^2-1}{7x+12}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+5}{2x^2+3x^2+3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-3x^2+2x+8}{x^3-8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{(1-\cos 5x)\operatorname{tg}2x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^2-1}{\ln(1-x)}$ **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^x$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-3x+4)$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+4}{2x^3-4x^2+3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x\operatorname{tg}3x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1+5x)}$ **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

Завдання 2. Дослідити функцію на неперервність. Визначити типи точок розриву функції, якщо вони існують.

1. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1, \\ x-1, & x>1. \end{cases}$

2. $f(x)=2^{\frac{3}{3-x}}$.

3. $f(x)=\begin{cases} 4-x, & x\le 0, \\ -2x, & x>0. \end{cases}$

4. $f(x)=3^{\frac{2x}{x-1}}$.

5. $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2, & x\le 0, \\ \cos x, & x>0. \end{cases}$

6. $f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$.

7. $f(x)=\begin{cases} \sin x, x<0, \\ 2x, x\ge 0. \end{cases}$

8. $f(x)=5^{\frac{x-1}{x}}$.

9. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$.

10. $f(x)=\dfrac{3x}{x-5}$.

11. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

12. $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{3x}$.

12. $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$.

13. $f(x)=\dfrac{2(x+1)}{x^3+1}$.

15. $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x}$.

16. $f(x)=\dfrac{2x}{9-x^2}$.

17. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+1}$.

18. $f(x)=8^{\frac{2x}{x+6}}$.

19. $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2, x\le 0, \\ 3x, x>0. \end{cases}$

20. $f(x)=e^{\frac{2x}{x+6}}$.

21. $f(x)=\begin{cases} x^2, \ x\le 1, \\ (x+1)^3, \ x>1. \end{cases}$

22. $f(x)=2^{\frac{x-3}{x+2}}$.

23. $f(x)=\begin{cases} x^2+7, \ x\le 1, \\ (x+1)^3, \ x>1. \end{cases}$

24. $f(x)=e^{\frac{2x-3}{x}}$.

25. $f(x)=\begin{cases} x-7, \ x<4, \\ 2x-4, \ x\ge 4. \end{cases}$

26. $f(x)=3^{\frac{x}{x-5}}$.

27. $f(x)=\begin{cases} x-3, \ x\le 2, \\ x^3, \ x>2. \end{cases}$

28. $f(x)=4^{\frac{2x+5}{x-1}}$.

29. $f(x)=\begin{cases} x^2, \ x\le 1, \\ (x+1)^3, \ x>1. \end{cases}$

30. $f(x)=5^{\frac{3-x^2}{x-2}}$.

2. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Похідна функції – одне з основних понять математичного аналізу. Процес знаходження похідної називається *диференціюванням* функції. Похідна функції у деякій точці характеризує швидкість змінення функції в цієї точці.

2.1. Визначення похідної, правила диференціювання та таблиця похідних

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Похідна функції $f(x)$ в точці x_0 визначається за формулою

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для похідної використовуються такі позначення:

$$f'(x) = y'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Зазвичай при знаходженні похідних використовують правила диференціювання та таблицю похідних елементарних функцій.

Правила диференціювання

Нехай $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – диференційовані функції.

1. *Правило диференціювання суми (різниці) функцій* $\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$.
2. *Правило диференціювання добутку функцій* $\boxed{(u \cdot v)' = u'v + uv'}$.
3. *Константу можна виносити за знак похідної* $\boxed{(C \cdot u)' = C \cdot u'}$.
4. *Правило диференціювання частки функцій* $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$.
5. *Правило диференціювання складної функції* $\boxed{(f(u))' = f'(u) \cdot u'}$
6. Якщо функцію *задано параметрично* $\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t), \end{cases}$ то $\boxed{y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}}$.

Таблиця похідних

1. $\boxed{(C)' = 0}$, де C – константа.
2. Степенева функція $\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$.

Розглянемо деякі випадки, які доцільно запам’ятати:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ тобто } \boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \text{ тобто } \boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}.$$

3. Показникові функції:

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \qquad \boxed{\left(e^x\right)' = e^x}.$$

4. Логарифмічні функції:

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}, \qquad \boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}.$$

5. Тригонометричні функції

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}, \quad \boxed{(\cos x)' = -\sin x}, \quad \boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}, \quad \boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

6. Обернені тригонометричні функції:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}, \quad \boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}},$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}, \quad \boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}}.$$

7. Гіперболічні функції:

$$\boxed{(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x}, \quad \boxed{(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x}, \quad \boxed{(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}, \quad \boxed{(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}}.$$

2.2. Геометричний сенс похідної. Рівняння дотичної і нормалі

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в даній точці x_0. У цьому полягає геометричний сенс похідної.

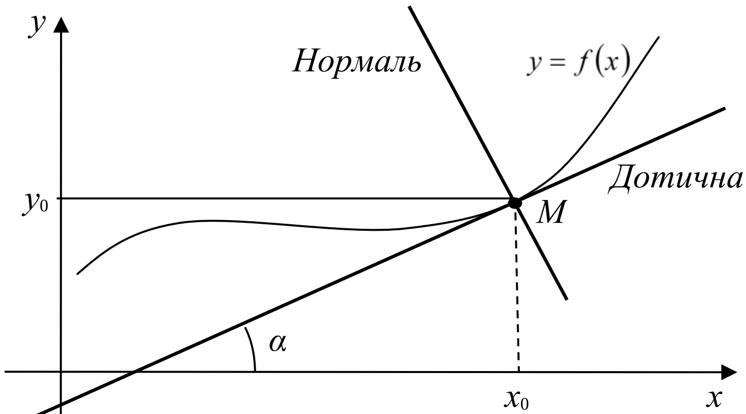

Рисунок 10

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = k_{\text{дот}},$$

де $k_{\text{дот}}$ – кутовий коефіцієнт дотичної.

Рівняння дотичної має вигляд:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)}.$$

Нормаллю до графіка функції $y = f(x)$ називається пряма, перпендикулярна дотичній і проведена через точку дотику x_0.

Кутовий коефіцієнт $k_{\text{дот}} = -\dfrac{1}{k_{\text{норм}}}$. Отже, рівняння нормалі має вигляд:

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)}.$$

2.3. Застосування похідної до дослідження графіка функції

Зростання та спадання функції

Функція $f(x)$ називається **монотонно зростаючою** $\left(f(x)\uparrow\right)$ на $[a,b]$, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in [a,b]$ з того, що $x_2 > x_1$ випливає $f(x_2) > f(x_1)$.

Функція $f(x)$ називається **монотонно спадаючою** $\left(f(x)\downarrow\right)$ на $[a,b]$, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in [a,b]$ з того, що $x_2 > x_1$ випливає $f(x_2) < f(x_1)$.

Теорема 1 (*необхідна і достатня умови зростання (спадання) функції)*.

Нехай $f(x)$ визначена и диференційована на $[a,b]$. Для того щоб $f(x)\uparrow$, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \geq 0$; і для того щоб $f(x)\downarrow$, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \leq 0$.

Екстремум функції

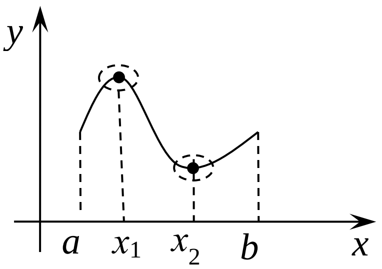

Рисунок 11.

Точка $x = x_1$ називається **точкою максимуму** функції $f(x)$, якщо існує окіл x_0, що для всіх точок цього околу $f(x_0) \geq f(x)$ (рис. 11).

Точка $x = x_2$ називається **точкою мінімуму** функції $f(x)$, якщо існує окіл x_0, що для всіх точок цього околу $f(x_0) \leq f(x)$ (рис. 11).

Поняття максимуму і мінімуму локальні. Функція може мати кілька максимумів і мінімумів.

Мінімум і максимум мають загальну назву: **екстремум** (**extr**).

Теорема 2 (*необхідна ознака існування екстремуму*).

Якщо в даній точці функція має екстремум, то її похідна в цій точці або дорівнює нулю, або не існує.

Протилежне твердження невірно, тобто з рівності нулю похідної або її відсутності, взагалі кажучи, не випливає наявність екстремуму.

Теорема 3 (*достатня умова існування екстремуму*).

Для того щоб функція мала в даній точці екстремум достатньо, щоб її похідна при переході через цю точку змінювала знак з «+» на «–» у випадку максимуму та з «–» на «+» у випадку мінімуму.

Приклад. Дослідимо на екстремум функцію $y = \frac{3}{8}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1$.

Маємо: $y' = \frac{3}{2}x^3 - 6x^2 + 6x = \frac{3}{2}x\left(x^2 - 4x + 4\right) = \frac{3}{2}x(x-2)^2$.

Отже, похідна дорівнює нулю в двох точках: $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$. Це точки можливого екстремуму (стаціонарні точки).

Точки, в яких $f'(x) = 0$, називаються **стаціонарними точками** цієї функції.

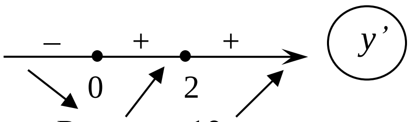

Рисунок 12

Визначимо знак похідної при переході через точки $x = 0$ та $x = 2$ (рис. 12).

Отже, точка $x = 0$ – точка мінімуму, в точці $x = 2$ екстремуму немає (рис. 13).

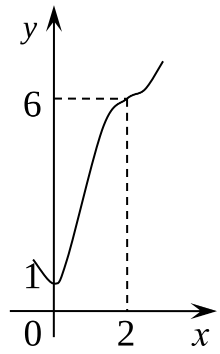

Рисунок 13

Опуклість і увігнутість ліній. Точки перегину

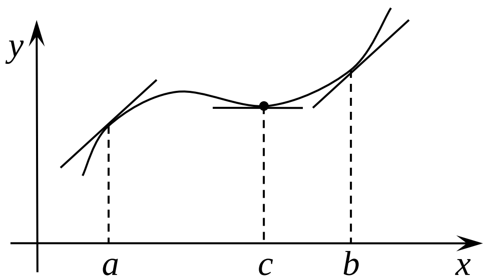

Рисунок 14

Графік диференційованої функції називається **опуклим**, якщо він розташований нижче будь-якої своєї дотичної, і **увігнутим**, якщо розташований вище будь-якої своєї дотичної (рис.14).

Точка графіка неперервної функції, яка відокремлює її опуклу частину від увігнутої, називається **точкою перегину**.

Інтервали опуклості та угнутості функції визначаються за допомогою такої теореми.

Теорема 4 (*необхідна і достатня ознака опуклості, угнутості функції*).

Якщо функція $y = f(x)$ в усіх точках інтервалу $[a,b]$ має від'ємну другу похідну $f''(x) < 0$, то графік функції опуклий на цьому інтервалі.

Якщо функція $y = f(x)$ в усіх точках інтервалу $[a,b]$ має додатну другу похідну $f''(x) > 0$, то графік увігнутий на цьому інтервалі.

Для знаходження точок перегину графіка функції використовуються наступні теореми.

Теорема 5 (*необхідна умова існування точки перегину*).

Якщо $M_0(x, y)$ – точка перегину, то $f''(x)|_M = 0$ або не існує.

Теорема 6. (*достатній ознака існування точки перегину*).

якщо $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то x_0 – точка перегину.

Приклад. Дослідити на опуклість (увігнутість) і визначити точки перегину функції $y = x^5 - x + 5$.

$$y' = 5x^4 - 1, \qquad y'' = 20x^3.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Отже, друга похідна дорівнює нулю в точці $x = 0$. Визначимо знак похідної при переході через цю точку (рис. 15).

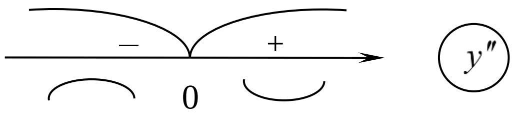

Рисунок 15

$y(0) = 5$, $M(0,5)$ – точка перегину.

План дослідження функції та побудова її графіка

1. Знаходження області визначення функції.
2. Знаходження точок перетину графіка з осями координат.
3. Дослідження функції на періодичність.
4. Дослідження функції на парність (непарність).
5. Дослідження функції на наявність асимптот.
6. Знаходження екстремальних точок та інтервалів монотонності функції.
7. Знаходження точок перегину та інтервалів опуклості (вгнутості) функції.
8. Побудова графіка функції згідно з проведеним дослідженням.

2.4. Приклад розв’язання типового варіанта

Завдання 1. Знайти похідні функцій:

а) $y = tg\left(5x^4 + 3x\right) + 7x^2$.

Для знаходження похідної будемо використовувати правила диференціювання суми функцій та складної функції, формули для обчислення похідних від тригонометричних функцій та від степеневої функції.

$$y' = \frac{20x^3 + 3}{\cos^2\left(5x^4 + 3x\right)} + 14x.$$

б) $y = \sin(5x) \cdot e^{3x}$.

Для знаходження похідної будемо використовувати правила диференціювання добутку функцій та складної функції, формули для обчислення похідних від тригонометричних функцій та від показникової функції.

$$y' = 5\cos(5x) \cdot e^{3x} + \sin(5x) \cdot 3e^{3x}.$$

в) $y = \dfrac{\log_3 x}{2x^4 - x^3 + 3}$.

Для знаходження похідної будемо використовувати правила диференціювання частки та суми функцій, формули для обчислення похідних від логарифмічних функцій та від степеневої функції.

$$y' = \frac{\frac{1}{x\ln 3} \cdot \left(2x^4 - x^3 + 3\right) - \log_3 x \cdot \left(8x^2 - 3x^2\right)}{\left(2x^4 - x^3 + 3\right)^2}.$$

Завдання 2. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ від функції $\begin{cases} x = \cos t^2, \\ y = \sin^3(t-5). \end{cases}$

Функцію задано параметрично. Знайдемо похідні від функцій $x(t)$ та $y(t)$:

$x' = -2t\sin t^2$,

$y' = 3\sin^2(t-5)\cos(t-5)$.

Скористаємося формулою $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$. Маємо:

$$y'(x) = \frac{3\sin^2(t-5)\cos(t-5)}{-2t\sin t^2}.$$

Завдання 3. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = \sqrt[3]{x+2}$ у точці з абсцисою $x = 6$.

Знаходимо значення функції в заданій точці $x_0 = 6$:

$$y_0 = \sqrt[3]{x_0 + 2} = \sqrt[3]{6+2} = 2.$$

Знаходимо похідну від заданої функції:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x+2}\right)' = \left((x+2)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(x+2)^{-2/3} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2}.$$

Обчислюємо значення похідної у точці $x_0 = 6$:

$$y_0' = f'(x_0) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x_0+2}\right)^2} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{6+2}\right)^2} = \frac{1}{12}.$$

Отже, маємо: $k_{\text{дот}} = f'(x_0) = \frac{1}{12}$, $k_{\text{норм}} = -\frac{1}{f'(x_0)} = -12$.

Запишемо рівняння дотичної:

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

$$y - 2 = \frac{1}{12}\cdot(x-6) \Rightarrow 12y - 24 = x - 6 \Rightarrow x - 12y + 18 = 0.$$

Запишемо рівняння нормалі:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0),$$

$$y - 2 = -12\cdot(x-6) \Rightarrow y - 2 = -12x + 72 \Rightarrow 12x + y - 74 = 0.$$

Остаточно маємо:

$x - 12y + 18 = 0$ – рівняння дотичної,

$12x + y - 74 = 0$ – рівняння нормалі.

Завдання 4. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^2/(x-2)$ на інтервалі $[3; 6]$.

Найбільше та найменше значення функція досягає у стаціонарних точках або у граничних точках інтервалу.

Знайдемо стаціонарні точки функції.

$$y' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2},$$

$$y' = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4.$$

До заданого інтервалу $[3; 6]$ належить тільки одна стаціонарна точка $x_2 = 4$.
Знаходимо значення функції у граничних точках інтервалу, та у точці $x = 4$:

$y(3) = 9,$

$y(4) = \frac{16}{2} = 8,$

$y(6) = \frac{36}{4} = 9.$

Серед отриманих значень обираємо найбільше та найменше. Отже, функція досягає найменшого значення $y = 8$ у стаціонарній точці $x = 4$, а найбільшого $y = 9$ – на кінцях інтервалу, тобто в точках $x = 3$, $x = 6$.

2.5. Варіанти індивідуальних завдань за темою «Похідна функції»

Завдання 1. Знайти похідні від заданих функцій:

1. а) $y = 2\sin\left(3x^2 + 5x\right) + 7x$; **б)** $y = \cos(x+1)\cdot e^{3x}$; **в)** $y = \dfrac{\mathrm{tg}(2x)}{7x^3 + 2x^2 - 3}$.

2. а) $y = \mathrm{tg}(3x-1) + 5x^3$; **б)** $y = \sin(1-x)\cdot 4^x$; **в)** $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{7\ln x}$.

3. а) $y = 3x^2 - \ln^2(x+2)$; **б)** $y = \mathrm{tg}(7x)\cdot e^{(x-2)}$; **в)** $y = \dfrac{\cos(5x)}{2x^5 - 3}$.

4. а) $y = 5 - \sin^4(2x-3)$; **б)** $y = \ln(x+2)\cdot\cos 5x$; **в)** $y = \dfrac{\sin(5-x)}{2x - 3x^4}$.

5. а) $y = \mathrm{tg}^3(x-1) - x^4$; **б)** $y = \sin\left(x^2\right)\cdot e^{5x}$; **в)** $y = \dfrac{2x^2 + x - 7}{\ln x}$.

6. а) $y = \sin^3(5x) - 6x^2$; **б)** $y = \cos(2x)\cdot 4^{x+1}$; **в)** $y = \dfrac{\mathrm{ctg}(2x)}{x^3 + 3x^2 - 1}$.

7. а) $y = \mathrm{ctg}\left(3\sqrt{x}\right) - x^3$; **б)** $y = \arcsin x\cdot e^{3x}$; **в)** $y = \dfrac{x^5 - 7x^2 + 1}{3\ln x}$.

8. а) $y = 4x - \ln^5(3x-2)$; **б)** $y = \mathrm{arctg}(7x)\cdot x^4$; **в)** $y = \dfrac{\cos(5+x)}{2x^5 - 3x + 2}$.

9. а) $y = 5 - \sin^2\left(x^3 - 3\right)$; **б)** $y = \ln(x-1)\cdot\sqrt{x}$; **в)** $y = \dfrac{\sin(5x)}{2x - 6x^2}$.

10. а) $y = \mathrm{tg}^2\left(\sqrt{x-1}\right) - 3$; **б)** $y = \sin\left(x^3\right)\cdot e^{x-2}$; **в)** $y = \dfrac{x^2 - x - 7}{\log_3 x}$.

11. а) $y = \sin^4\left(3x^2\right) + 7$; **б)** $y = \arccos(2x)\cdot e^{4x}$; **в)** $y = \dfrac{3 + \mathrm{tg}(2+x)}{7x^2 - x + 3}$.

12. а) $y = \mathrm{tg}^5(3-x) + x$; **б)** $y = \sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot 2^x$; **в)** $y = \dfrac{x^3 + 2x^5 + 1}{\ln(x+3)}$.

13. а) $y = x^2 - \ln^7\left(\sqrt{x} + 2\right)$; **б)** $y = \mathrm{tg}\left(x^3\right)\cdot e^{\left(x + 2x^2\right)}$; **в)** $y = \dfrac{\cos(5x) - 4}{2x^3 - 7}$.

14. а) $y = 5 + \mathrm{ctg}^2(2-3x)$; **б)** $y = \ln(3x+2)\cdot\mathrm{tg}\,5x$; **в)** $y = \dfrac{2 - \sin(5x)}{2x - 3x^6 + 2}$.

15. а) $y = \mathrm{arctg}^3\left(x^2 - 6\right)$; **б)** $y = \arcsin\left(\sqrt{x}\right)\cdot e^{2x}$; **в)** $y = \dfrac{2x^3 + 3x - 7}{\ln x}$.

16. а) $y=\arcsin^3(5x)-3x^2$; **б)** $y=\cos(2x)\cdot 3^{\sin x}$; **в)** $y=\dfrac{\operatorname{ctg}(2-x)}{2x^3+x^2-1}$.

17. а) $y=\operatorname{arcctg}(2x)-7x^3$; **б)** $y=\sin(5x)\cdot e^{\operatorname{tg} x}$; **в)** $y=\dfrac{x^5-3x^2+2}{2+\ln x}$.

18. а) $y=4-\ln^7(3\sin x)$; **б)** $y=\operatorname{ctg}(2x)\cdot e^{4x^2}$; **в)** $y=\dfrac{\cos(3x)-5}{2x^5-3}$.

19. а) $y=5\sin^4\left(x^2-3x\right)$; **б)** $y=\log_3(x)\cdot\sqrt{x-2}$; **в)** $y=\dfrac{\sin(5x)+4x}{1-6x^2}$.

20. а) $y=\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{x}+2\right)$; **б)** $y=\sin\left(3x^2\right)\cdot e^{5x-2}$; **в)** $y=\dfrac{x^2-5x-1}{4+\log_2 x}$.

21. а) $y=\sin^2\left(3-x^5\right)+x$; **б)** $y=\arccos(3x)\cdot 6^{4x}$; **в)** $y=\dfrac{5-\operatorname{tg}(2x)}{7x^2+3}$.

22. а) $y=\ln^5(3-x)+2\tilde{o}$; **б)** $y=4\sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot 2^{x-1}$; **в)** $y=\dfrac{x^3+2x^5+1}{\operatorname{tg}(3x)}$.

23. а) $y=\cos^7(5x+2)-3$; **б)** $y=\operatorname{tg}(7x)\cdot\left(x^3-5x\right)$; **в)** $y=\dfrac{\sin(5+x)}{\ln x+5}$.

24. а) $y=\operatorname{ctg}^3(2x)+6x$; **б)** $y=\ln(x+2)\cdot\cos 5x$; **в)** $y=\dfrac{1-\sin(3x)}{2x+8}$.

25. а) $y=\operatorname{arctg}^5\left(x^3-x\right)$; **б)** $y=\sin(4x)\cdot 3^{2-x}$; **в)** $y=\dfrac{2x^3+x^2-7}{5\ln x}$.

26. а) $y=\arcsin^5(2x-1)$; **б)** $y=\sin(2+x)\cdot 6^{\cos x}$; **в)** $y=\dfrac{\operatorname{ctg}(2-3x)}{2x^3+x^2}$.

27. а) $y=\operatorname{tg}^4(8x)-x^2$; **б)** $y=\sin(3x)\cdot e^{7+2x}$; **в)** $y=\dfrac{2x^5-x^3+2}{2-\ln x}$.

28. а) $y=1+\ln^3(\sin x)$; **б)** $y=\operatorname{ctg}(3x)\cdot\left(5^x-7\right)$; **в)** $y=\dfrac{\cos(4x)+3}{2x^4-3x+1}$.

29. а) $y=4\sin^3\left(x^2-3\right)$; **б)** $y=\ln(x+5)\cdot\sqrt{x-1}$; **в)** $y=\dfrac{\cos(3x)+4x^2}{1-6x}$.

30. а) $y=\operatorname{tg}^5\left(\sqrt{x+3}\right)$; **б)** $y=\sin\left(2x^3\right)\cdot e^{5x}$; **в)** $y=\dfrac{x^4-5x^3-x}{\log_2 x+6}$.

Завдання 2. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ від функції, що задана параметрично:

1. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t - t^2}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = a(\cos t + \sin t), \\ y = a(\sin t - \cos t). \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\sin t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{2}t^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{1-t}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$

13 $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \sin 2t + 2\cos 2t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \operatorname{arctgt} 3t, \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{t}\cos t. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y = \left(\frac{2}{3}\sqrt{t} + 1\right)t, \\ x = \sqrt{t}e^{\sqrt{t}}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = 3\sin t - \sin 3t, \\ y = 2\cos t + \cos 2t. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = ae^{\frac{t}{\sqrt{2}}} + be^{\frac{t}{\sqrt{2}}}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = e^{-t^2}, \\ y = \operatorname{arctg}(2t + 1). \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 1 + e^{at}, \\ y = at + e^{-at}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \sin 3t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

Завдання 3. Скласти рівняння нормалі (варіанти 2.1–2.14) або рівняння дотичної (варіанти 2.15–2.30) до даної кривої в точці з абсцисою x_0:

1. $y=\left(4x-x^2\right)/4,\quad x_0=2.$

2. $y=2x^2+3x-1,\quad x_0=-2.$

3. $y=x-x^3,\quad x_0=-1.$

4. $y=x^2+8\sqrt{x}-32,\quad x_0=4.$

5. $y=x+\sqrt{x^3},\quad x_0=1.$

6. $y=\sqrt[3]{x^2}-20,\quad x_0=-8.$

7. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},\quad x_0=4.$

8. $y=8\sqrt[4]{x}-70,\quad x_0=16.$

9. $y=2x^2-3x+1,\quad x_0=1.$

10. $y=\left(x^2-3x+6\right)/x^2,\quad x_0=3.$

11. $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x},\quad x_0=64.$

12. $y=\left(x^3+2\right)/\left(x^3-2\right),\quad x_0=2.$

13. $y=\sqrt{x+4},\ x_0=-3.$

14 $y=x^3-5x^2+7x-2,\ x_0=1.$

15. $y=2x^2+3,\quad x_0=-1.$

16. $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1},\quad x_0=1.$

17. $y=2x+\dfrac{1}{x},\quad x_0=1.$

18. $y=-2\left(x^8+2\right)/\left(3\left(x^4+1\right)\right),\quad x_0=1.$

19. $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1},\quad x_0=1.$

20. $y=\dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2},\quad x_0=1.$

21. $y=3\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}\right),\quad x_0=1.$

22. $y=1/\left(3x+2\right),\quad x_0=2.$

23. $y=x/\left(x^2+1\right),\quad x_0=-2.$

24. $y=\left(x^2-3x+3\right)/3,\quad x_0=3.$

25. $y=2x/\left(x^2+1\right),\quad x_0=1.$

26. $y=-2\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right),\quad x_0=1.$

27. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2},\quad x_0=1.$

28. $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2,\quad x_0=1.$

29. $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x},\quad x_0=1.$

30. $y=\left(3x-2x^3\right)/3,\quad x_0=1.$

Завдання 4.

1. Знайти екстремуми функції $y = \frac{(x^2 - 5)^3}{125}$.

2. Знайти інтервали монотонності функції $y = \frac{x^5 - 8}{x^4}$.

3. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = 3x/(x^2 + 1)$ на відрізку $[0; 5]$.

4. Знайти екстремуми функції $y = 32x^2(x^2 - 1)^3$.

5. Знайти інтервали монотонності функції $y = \frac{x^3}{x^3 + 1}$.

6. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = (2x - 1)/(x - 1)^2$ на відрізку $[-1/2; 0]$.

7. Знайти точки перегину функції $y = \frac{x}{x^3 + 2}$.

8. Знайти екстремуми функції $y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$.

9. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = x^3/(x^2 - x + 1)$ на відрізку $[-1; 1]$.

10. Знайти інтервали монотонності функції $y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}$.

11. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = \left((x + 1)/x\right)^3$ на відрізку $[1;\ \ 2]$.

12. Знайти точки перегину функції $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$.

13. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = \sqrt{x - x^3}$ на відрізку $[-2; 2]$.

14. Знайти екстремуми функції $y = \frac{1}{x^2 + 3}$.

15. Знайти інтервали монотонності функції $y = \frac{e^x}{x}$.

16. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = (x^3 + 4)/x^2$ на відрізку $[1; 2]$.

17. Знайти екстремуми функції $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$.

18. Знайти точки перегину функції $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

19. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = x/(9 - x^2)$ на відрізку $[-2; 2]$.

20. Знайти екстремуми функції $y = \dfrac{5x^2 + 2x - 1}{x^2}$.

21. Знайти інтервали монотонності функції $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$.

22. Знайти точки перегину функції $y = \dfrac{x^3}{x^4 - 1}$.

23. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = (x^5 - 8)/x^4$ на відрізку $[-3;\ -1]$

24. Знайти екстремуми функції $y = \dfrac{x - 3}{\sqrt{1 + x^2}}$.

25. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = \left(e^{2x} + 1\right)/e^x$ на відрізку $[-1; 2]$.

26. Знайти інтервали монотонності функції $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

27. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = x^3 e^{x+1}$ на відрізку $[-4; 0]$.

28. Знайти точки перегину функції $y = \dfrac{2 - x^3}{2x}$.

29. Знайти екстремуми функції $y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$.

30. Знайти інтервали монотонності функції $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. у 2-х томах. Т. 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г Б. Лінник [та ін.] ; за ред. Л. В. Курпи. – Харків : НТУ “ХПІ”, 2009. – 532 с.

2. Сборник задач по высшей математике. / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 7-е изд. – Москва : Айрис-прес, 2011. – 592 с.

3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие в 3 ч. Ч.1. / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Минск : Выш. шк., 1990. – 271 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для самостійної роботи за темою
«Границя та похідна функції однієї змінної»
з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
заочної та скороченої форм навчання

Укладачі: ЛІННИК Ганна Борисівна,
МОРАЧКОВСЬКА Ірина Олегівна
РУДНЄВА Гаяне Валериківна

Відповідальний за випуск проф. Лідія КУРПА
Роботу до видання рекомендував проф. Дмитро БРЕСЛАВСЬКИЙ

Редактор Марія ЄФРЕМОВА

План 2020 р., поз. 306

Підп. до друку 16.03.2021. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк.1,5____.
Наклад 50 прим. Зам. № ______. Ціна договірна.

Видавець
Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Виготовлювач
Надруковано ФОП Секішова Т.Є.
Свідоцтво про державну реєстрацію за №2 480 000 0000 079758 від
21.05.2007 р. м.Харків, вул. Тобольська, 42-а, 067-709-71-16.
u2print.com.ua