

**ІНТЕГРУВАННЯ
У ТЕХНІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ
ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ
З ВИКОРИСТАННЯМ
КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ**

навчальний посібник

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. М. Дубініна, Б. Г. Любарський, Б. Х. Єрціян, Є. С. Рябов

**ІНТЕГРУВАННЯ У ТЕХНІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ ТРАНСПОРТНИХ
СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Навчальний посібник

для студентів вищих технічних навчальних закладів

Рекомендовано Вченою радою НТУ «ХПІ»

Харків

2020

УДК 517.3

I 73

Рецензенти: С. Г. Буряковський, доктор технічних наук, професор, директор науково-дослідного та проектно-конструкторського інституту «Молнія» Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»; О. М. Петренко, доктор технічних наук, доцент, Харківський національний технічний університет міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано Вченою радою Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», як навчальний посібник для студентів спеціальностей 273 «Залізничний транспорт», 275 «Транспортні технології», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 122 «Комп'ютерні науки» та 123 – «Комп'ютерна інженерія» протокол № *** від **.**.2019 року.

Дубініна О. М.

I 73 Інтегрування у технічних розрахунках транспортних систем з використанням комп'ютерної математики: навчально-методичний посібник / О. М. Дубініна, Б. Г. Любарський, Б. Х. Єрціян, Є. С. Рябов. – Харків: НТУ «ХПІ», 2020. – 230 с.

ISBN

Навчально-методичний посібник містить теоретичні відомості, докладно розібрані приклади, задачі для аудиторного та самостійного розв'язку, а також 30 варіантів типових індивідуальних домашніх завдань.

Призначено насамперед для студентів, що здобувають вищу освіту у галузі знань транспорту, може бути корисним студентам і викладачам усіх технічних спеціальностей.

Лл. 92. Табл. 1. Бібліогр. назв. 24

УДК 517.3

ISBN

© О. М. Дубініна, Б. Г. Любарський,
Б. Х. Єрціян, Є. С. Рябов, 2020

ЗМІСТ

Передмова.....	4
1. Загальні положення про визначений інтеграл.....	6
1.1. Поняття визначеного інтеграла, суми Дарбу, інтеграл із змінною границею.....	6
1.2. Теорема-формула Ньютона-Лейбніца, деякі властивості визначеного інтеграла.....	11
1.3. Заміна змінної та інтегрування по частинах.....	14
2. Геометричне застосування визначеного інтеграла.....	17
2.1. Обчислення площі плоскої фігури.....	19
2.2. Обчислення довжини дуги.....	33
2.3. Знаходження об'єму тіла.....	35
2.4. Площа поверхні обертання.....	49
3. Застосування визначеного інтеграла у розв'язанні фізичних задач.....	55
3.1. Маса: неоднорідного стрижня, дуги, плоскої фігури.....	55
3.2. Статичні моменти і моменти інерції плоских фігур і дуг.....	63
3.3. Координати центра ваги.....	69
3.4. Робота змінної сили, кінетична та потенційна енергія.....	75
3.5. Тиск рідини, час витікання через малий отвір.....	104
3.6. Рух тіла, матеріальної точки.....	111
4. Обчислення границь нескінченних сум.....	115
5. Знаходження середнього інтегрального значення функції, оцінка визначеного інтеграла.....	118
6. Невласні інтеграли першого та другого роду.....	121
6.1. Властивості та правила обчислення невластних інтегралів.....	122
6.2. Достатні ознаки збіжності невластних інтегралів у граничній формі.....	133
7. Використання середовища MathCad.....	135
Індивідуальні домашні завдання.....	157
Список використаних джерел.....	217
Додатки.....	219

ПЕРЕДМОВА

Даний посібник призначений для студентів першого року навчання, які здобувають вищу освіту у галузі знань «Транспорт» та «Електрична інженерія» (постанова Кабінету Міністрів України від 29 квітня 2015 р. № 266) зі спеціальностей 273 «Залізничний транспорт», 275 «Транспортні технології (за видами)» та 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» а також може бути корисним студентам інших технічних спеціальностей. Методичний посібник написаний на основі лекцій, що читаються на факультеті Комп'ютерних наук і програмної інженерії та навчально-науковому інституті Енергетики, електроніки та електромеханіки у Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут».

Навчально-методичний посібник містить всю основну інформацію, що відноситься до важливого розділу інтегрального числення, стосовно наступних тем: визначений інтеграл і його властивості, невластні інтеграли першого та другого роду, теореми порівняння, абсолютна і умовна збіжність невластних інтегралів. Велику увагу приділено застосуванню визначеного і невластного інтеграла до вирішення різного роду завдань математичного аналізу, а також геометричних і фізичних задач. Тому наведений у посібнику матеріал надає можливість широкого його використання студентами: на практичних заняттях; для самостійного вивчення матеріалу; для виконання індивідуального завдання; для підготовки до заліку чи контрольної роботи; для підготовки до іспиту чи тестування та інше.

Оскільки посібник спрямований на підвищення продуктивності та ефективності самостійної роботи студентів з певної теми, то він містить індивідуальні завдання по кожному розділу. У посібнику також наведені необхідні теоретичні відомості і досить великий ряд прикладів із рішеннями, які допоможуть студентам у роботі над індивідуальними завданнями. Посібник носить не тільки методичний характер, а й довідковий. Новий навчальний матеріал засвоюється студентами легше, особливо тими, що мають прогалини у довузівській підготовці, якщо він супроводжується великою кількістю прикладів, які його не тільки ілюструють, але й мають

коментарі з елементарної математики. Тому у методичному посібнику теоретичний матеріал викладено коротко і доступно, а приклади розглянуто більш докладно. Виклад матеріалу ведеться доступною, але науковою строгою математичною мовою.

Змістовне навантаження деяких завдань, що пропонуються студентам для самостійної роботи більше, ніж передбачає навчальна програма. Це дозволяє викладачеві варіювати кількістю і складністю завдань для практичних занять і індивідуальної домашньої роботи.

Відмінністю пропонованого посібника від аналогічних видань є наявність розділу, у якому надається короткий опис роботи над визначеним інтегралом у системі комп'ютерної математики MathCad, включаючи приклади. При цьому звіт студентів про виконання індивідуального розрахунково-графічного завдання додатково передбачає наявність матеріалу про лабораторну роботу у середовищі MathCad. Серед великої кількості систем комп'ютерної математики було обрано MathCad, як найзручніший додаток для математичних і інженерних обчислень, оскільки документи цього середовища представляють розрахунки у вигляді, дуже близькому до стандартної математичної мови, що спрощує постановку і вирішення завдань. До того ж, MathCad містить текстовий і формульний редактор, обчислювач, засоби наукової і ділової графіки, а також величезну базу довідкової інформації, як математичної, так і інженерної.

При оформленні звітів з лабораторної роботи студенти повинні дотримуватися наступних правил: 1) звіт необхідно оформити засобами MathCad і роздрукувати; 2) звіт повинен містити прізвище виконавця, групу та бути розташований наприкінці зошита для індивідуальних завдань; 3) зміст звіту має включати розрахункові формули з коментарями, необхідні висновки результатів і графіки.

Захист студентом індивідуального завдання обов'язково передбачає обізнаність у наведених розрахунках, вміння їх пояснити, знання відповідей на всі контрольні питання, список яких наведено у додатку 2.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ПРО ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Поняття визначеного інтеграла, суми Дарбу, інтеграл із змінною границею

Поняття «*визначений інтеграл*» було введено в математиці для вирішення певного класу задач, що призводять до необхідності обчислення інтегральних сум та їх границь. Відомості про визначений інтеграл мають досить глибоке коріння – понад 2000 років тому. Але широкого застосування він довго не мав, оскільки безпосереднє знаходження границь інтегральних сум є досить складним навіть у найпростіших випадках. Відкриття невизначеного інтегралу і зручних способів його обчислення відбулося значно пізніше. Однак, подальше – у XVII столітті встановлення зв'язка між визначеним і невизначеним інтегралами дозволило значно розширити сфери застосування інтегрального числення.

Нехай на проміжку $[a; b]$ визначено функцію $f(x)$ (рис. 1). Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n частин довільним чином точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$ та обчислимо довжину кожного з n дрібних сегментів: $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{k-1}; x_k], \dots, [x_{n-1}; x_n]$, а саме – $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$. У кожному малому сегменті оберемо довільну точку $\xi_k, k = \overline{1, n}: x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$. Ці точки називаємо точками пунктуації при даному способі розбиття відрізка $[a; b]$ на частини. Складаємо з усіх отриманих добутків $f(\xi_k) \cdot \Delta_k x$, так звану, інтегральну суму, яка очевидно залежить від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на дрібні частини та від обрання точок пунктуації: $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta_k x$.

Якщо існує границя, яка не залежить від способу розбиття та вибору точок пунктуації, то вона називається *визначеним інтегралом* від $f(x)$ на проміжку $[a; b]$, при умові, що $\max \Delta_k x \rightarrow 0$.

Таким чином,
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Числа a і b називаються відповідно нижньою і верхньою границями інтегрування, $f(x)$ – підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтегрування, відрізок $[a; b]$ – областю інтегрування. Позначимо далі, що $\lambda = \max_{1 < i < n} \{\Delta x_i\}$ – це довжина найбільшого відрізка розбиття. Якщо $\lambda \rightarrow 0$, то вочевидь число відрізків розбиття – n для проміжку $[a; b]$ має прагнути до нескінченності.

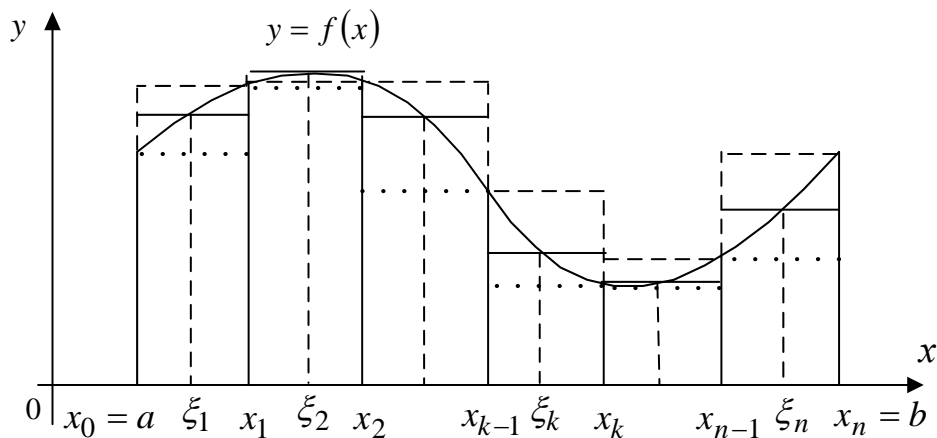


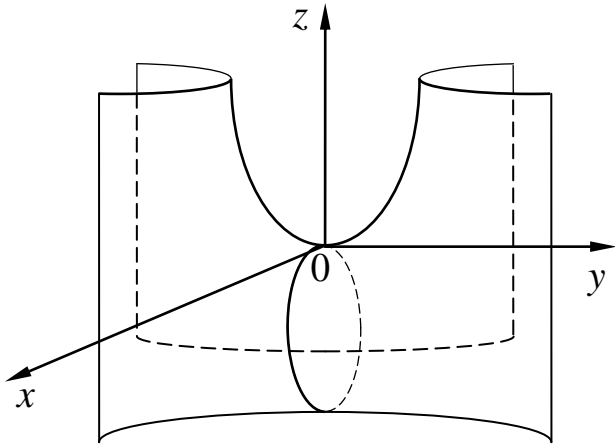
Рис. 1 Графік функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$

Функція $y = f(x)$, для якої на відрізку $[a; b]$ існує кінцевий $\int_a^b f(x)dx$,

називається інтегрованою на проміжку $[a; b]$, при цьому границя інтегральної суми не залежить ні від способу розбиття сегмента $[a; b]$ на частини, ні від вибору точок ξ_k у кожній з дрібних частин.

У теоремі про існування визначеного інтеграла вказується на те, що будь-яка безперервна на проміжку $[a; b]$ функція $f(x)$ є інтегрованою на ньому. Відтак, надалі підінтегральну функцію будемо вважати безперервною.

У теорії визначеного інтеграла фундаментальне значення мають так звані *суми Дарбу*. Вони вводяться для з'ясування умов інтегрованості $f(x)$ і існування визначеного інтеграла.

Схематичне зображення поверхні другого порядку	Рівняння у декартовій системі координат, визначення
<p style="text-align: center;">Гіперболічний параболоїд</p> 	<p><i>Гіперболічний параболоїд</i> – необмежена нецентральна поверхня другого порядку, яка утворюється шляхом поступального переміщення у просторі вершини однієї параболі вздовж іншої нерухомої параболі таким чином, що площина та вісь рухомої параболі залишаються увесь час паралельними самі собі. При цьому параболі розташовані увігнутістю у різні боки, а поверхня має вигляд сідла.</p> <p>У прямокутній системі координат, якщо вершина параболоїда знаходиться у її центрі: $(0; 0; 0)$, вісь Oz є віссю симетрії, площини xOz та yOz є площинами симетрії параболоїда, то:</p> $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0).$ <p>Перерізи параболоїда площинами xOz та yOz – це параболі, а площинами паралельними площині xOy – це гіперболи (при $z = 0$ – пара прямих, що перетинаються).</p> <p>Через кожену точку гіперболічного параболоїда проходять дві прямі, які повністю належать його поверхні, – прямолінійні твірні.</p>

Навчальне видання

ДУБІНІНА Оксана Миколаївна
ЛЮБАРСЬКИЙ Борис Григорович
ЄРІЦЯН Багіш Хачикович
РЯБОВ Євген Сергійович

ІНТЕГРУВАННЯ У ТЕХНІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

для студентів спеціальностей 273 «Залізничний транспорт», 275
«Транспортні технології», 141 «Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка», 122 «Комп'ютерні науки» та 123 – «Комп'ютерна
інженерія»

Відповідальний за випуск проф. Любарський Б. Г.
Роботу до видання рекомендував проф. Волонцевич Д.О.

Редактор *****

План 2020 р. / п. ***

Підписано до друку **.12.2020 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Гарнітура – Times New Roman. Ум. друк. арк. – 9,3.
Наклад 350 прим. Зам № . Ціна договірна.

Видавець: Видавничий центр НТУ «ХПІ». Харків – 1, вул. Кирпичова, 2

Виготовлювач: ТОВ «ДРУКАРНЯ МАДРИД»

61024, Харків, вул. Максиміліанівська, 11

Тел.: (057) 756-53-25

www.madrid.in.ua info@madrid.in.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 4399 від 27.08.2012 року



Дубініна Оксана Миколаївна

Професор кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних факультету комп'ютерних наук і програмної інженерії НТУ «ХП». Сфера наукових інтересів: інженерний математичний апарат, дидактичний простір математики у технічній освіті, математичне моделювання, математична культура. Кандидат технічних наук зі спеціальності електричні машини та апарати, доктор педагогічних наук з професійної освіти. Автор понад 80 наукових і науково-методичних праць.



Борис Григорович Любарський

Завідувач кафедри Електричного транспорту та тепловозобудування. Докт. техн. наук (2014), професор (2016).

Тема докторської дисертації: «Теоретичні основи для вибору і оцінки перспективних систем електромеханічного перетворення енергії електрорухомого складу». Автор понад 170 наукових публікацій, з яких 2 навчальних посібника. Напрямок наукових досліджень: електромеханічні перетворювачі енергії рухомого складу транспортних засобів.



Рябов Євген Сергійович

Доцент кафедри електричного транспорту та тепловозобудування. Канд. техн. наук (2011), старший науковий співробітник (2015). Тема кандидатської дисертації: «Безредукторний тяговий привод на основі реактивного індукторного двигуна з аксіальним магнітним потоком для швидкісного електрорухомого складу». Автор понад 30 наукових публікацій. Напрямок наукових досліджень: тягові електродвигуни рухомого складу транспортних засобів.



Багіш Хачикович Єріцян

Доцент кафедри електричного транспорту та тепловозобудування НТУ «ХП». Кандидат технічних наук (2016). Тема дисертації: «Синтез комбінованої системи нахилу кузова швидкісного електричного рухомого складу». Автор понад 20 наукових публікацій. Напрямок наукових досліджень: ходові частини швидкісного рухомого складу з системами нахилу кузова.

