МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Л.М. Любчик, О.Б. Ахієзер, О.А. Геляровська,
О.І. Дунаєвська, О.А. Галуза, І.В. Сердюк

ВИЩА МАТЕМАТИКА
«НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. РЯДИ»

(Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання)

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів

Затверджено
редакціоно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 03.02.16 р.

Харьків
НТУ «ХПІ»
2016

УДК 517.1
ББК 22.161
В 93

Рецензенти:
Г. Н. Жолткевич, д-р техн. наук, проф.,
Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

В 93 Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання. Невласні інтеграли. Ряди. Інтегральне числення функцій багатьох змінних : навч. посіб. / / Ахієзер О.Б., Геляровська О.А., Дунаєвська О.І, Галуза О.А., Сердюк І.В.; за ред. проф. Любчик Л.М. – Х. : НТУ «ХПІ», 2016. – 148 с.

ISBN

Посібник входить до серії «Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання» і є третьою частиною сбірника. Містить мінімально необхідну кількість теорії та велику кількість розібраних зразків за темами «Невласні інтеграли», «Подвійний інтеграл», «Криволінійні інтеграли» та «Ряди», що відповідає особливостям самостійного навчання.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

Іл. 35 Бібліогр. 20

УДК 517.1
ББК 22.161

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Останні роки в технічних університетах відбуваються зрушення у методиці викладання вищої математики, яку намагаються наблизити до інженерних дисциплін та ліквідувати відстань між абстрактними математичними теоріями і приладними задачами через тлумачення формальних теорій в категоріях реальних завдань. Особливо гострою є проблема актуалізації складу заочної та дистанційної математичної освіти, де відсутній постійний контакт студента з викладачем. Тому актуальним стало створення нового методичного забезпечення, яке б відповідало цим трендам.

Навчальний посібник входить до складу серії посібників «Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання».

Пропонований посібник містить теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач. Теоретична частина містить необхідні визначення, формулювання теорем, формули. Вона ілюструється розібраними прикладами і вправами, виконання яких сприяє засвоєнню фундаментальних понять вищої математики. Мінімально необхідна кількість теорії та велика кількість прикладів відповідає особливостям самостійного навчання. Досить дрібне розбиття на теми дозволяє використовувати його з різними навчальними програмами та при побудові індивідуальних траєкторій навчання.

ГЛАВА 1. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

При побудуванні інтеграла Рімана функція $f(x)$ припускалася обмеженою на скінченному проміжку $[a,b]$. У подальшому ці обмеження буде знято й інтеграли побудовано на нескінченному проміжку або від необмеженої функції. Такі інтеграли називаються невласними інтегралами першого і другого роду.

§1. Невласні інтеграли першого роду (інтеграли на нескінченному проміжку)

Нехай функція $f(x)$ визначена на нескінченному проміжку $[a,+\infty)$ й інтегровна на будь-якому скінченному проміжку $[a,A]$, де $a<A$, так щоб $\int\limits_a^A f(x)dx$ мало сенс для будь-якого $A>a$. Границю цього інтеграла (скінченну або нескінченну) при $A\to+\infty$ називають *невласним інтегралом першого роду* або *інтегралом на нескінченному проміжку* від функції $f(x)$ від a до $+\infty$ і позначають символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx. \qquad (1.1)$$

У випадку, якщо границя (1.1) існує та є скінченною, кажуть, що невласний інтеграл *збігається*, а функцію $f(x)$ називають *інтегровною на нескінченному проміжку* $[a,+\infty)$. Якщо границя (1.1) є нескінченною або не існує, то кажуть, що інтеграл *розбігається*.

Геометричний зміст невласного інтеграла першого роду полягає в наступному. Нехай $f(x)\ge 0$, $x\in[a,+\infty)$. Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то він дорівнює площі криволінійної трапеції при

$x \in [a, +\infty)$ (рис. 1.1), обмеженої графіком функції $f(x)$ та віссю Ox (асимптотою).

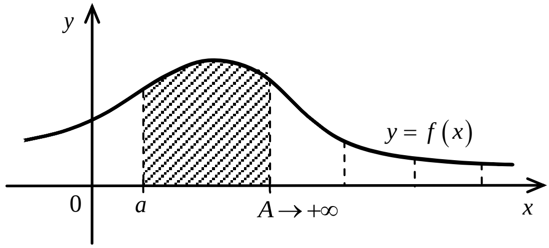

Рисунок 1.1

***Приклад* 1.1.** Обчислити невласний інтеграл першого роду $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ за визначенням.

Розв'язання.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x}dx = \left\| \begin{matrix} (-x)' = -1 \\ d(-x) = -dx \end{matrix} \right\| = -\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x}d(-x) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^A = -\lim_{A\to+\infty} e^{-A} + e^{-0} = \left\| -e^{-\infty} + e^{-0} \right\| = e^0 = 1,$$

отже, за визначенням, інтеграл збігається.

Аналогічно (1.1) визначається інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ (A'<a)}} \int_{A'}^{a} f(x)dx\,. \tag{1.2}$$

Якщо границя (1.2) існує і є скінченною, то інтеграл називається збіжним, а функція $f(x)$ – інтегровною на проміжку $(-\infty, a]$.

Тепер можна визначити інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty,+\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ A\to+\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)\,dx \,. \tag{1.3}$$

Якщо обидві границі при $A\to+\infty$ і $A'\to-\infty$ існують і є скінченними, то інтеграл називається збіжним, а функція $f(x)$ інтегровною на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

***Приклад* 1.2.** Дослідити на збіжність невласний інтеграл першого роду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ A\to+\infty}} \int_{A'}^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ A\to+\infty}} \operatorname{arctg} x\Big|_{A'}^{A} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A - \lim_{A'\to-\infty} \operatorname{arctg} A' = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \,,$$

отже, інтеграл збігається.

***Приклад* 1.3.** Дослідити на збіжність невласний інтеграл першого роду $\int\limits_{a}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ $(a>0)$.

Розв'язання.

1) $\alpha = 1$:

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int_{a}^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln|x|\Big|_{a}^{A} = \lim_{A\to+\infty} \ln A - \ln a =$$

$$= \Big\| \ln(+\infty) - \ln a = +\infty - \ln a \Big\| = +\infty .$$

2) $\alpha \neq 1$:

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_a^A = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \lim_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} + \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \;;$$

якщо $\alpha > 1$, то $1-\alpha < 0$,

$$\lim_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} = \left\| \frac{1}{\infty} \right\| = 0;$$

якщо $\alpha < 1$, то $1-\alpha > 0$,

$$\lim_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} = \infty \;.$$

Таким чином,

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}; \;\; \alpha > 1, \;\; \text{інтеграл збігається;} \\ \infty \;; \;\; \alpha \leq 1, \;\; \text{інтеграл розбігається.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Властивості невласних інтегралів першого роду

1°. Якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, то збігається також інтеграл $\int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx \;\; (A > a)$, і навпаки. При цьому

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{A} f(x)\,dx + \int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx \;. \tag{1.5}$$

2°. У випадку збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ маємо:

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx = 0 \,, \; (A > a) \,. \tag{1.6}$$

3°. Зі збіжності інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} k \cdot f(x)dx$, $(k = \text{const})$, причому

$$\int\limits_{a}^{+\infty} k \cdot f(x)dx = k \cdot \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx. \tag{1.7}$$

4°. Якщо збігаються обидва інтеграли $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$, то збігається також інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \left[f(x) + g(x) \right] dx$:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \left[f(x) + g(x) \right] dx = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx. \tag{1.8}$$

5°. Нехай функція $f(x)$ на проміжку $[a;+\infty)$ має первісну $F(x)$, та існує границя $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$. Тоді

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a). \tag{1.9}$$

6°. Якщо збігається один з інтегралів: $\int\limits_{a}^{+\infty} u(x) \cdot v'(x)dx$ або $\int\limits_{a}^{+\infty} u'(x) \cdot v(x)dx$, та існує границя $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) \cdot v(x) = u(+\infty) \cdot v(+\infty)$, то збігається й інший інтеграл, і є справедливою формула:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_{a}^{+\infty} - \int\limits_{a}^{+\infty} u'(x) \cdot v(x)dx. \tag{1.10}$$

***Приклад* 1.4.** Дослідити на збіжність невласний інтеграл першого роду $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \left\| \begin{array}{l} u = x,\ \ du = dx \\ dv = e^{-x}dx,\ \ v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array} \right\| =$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = -\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} + 0 + \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \left\| +\infty e^{-\infty} = +\infty\cdot 0 \right\| = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \left\| \dfrac{\infty}{e^{+\infty}} = \dfrac{\infty}{\infty} \right\| = \\ = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = \left\| \dfrac{1}{\infty} \right\| = 0 \end{array} \right\| =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\lim_{x\to+\infty} e^{-x} + e^0 = \left\| e^{-\infty} + 1 = 0 + 1 \right\| = 1,$$

інтеграл збігається.

§2. Невласні інтеграли другого роду (інтеграли від необмежених функцій)

Розглянемо функцію $f(x)$, задану на скінченному проміжку $[a,b]$, але необмежену на цьому проміжку. Припустимо більш точно, що для будь-яких $\eta \in (0,\, b-a)$ на проміжку $[a,b-\eta]$ функція є обмеженою й інтегровною, але виявляється необмеженою на кожному проміжку $[b-\eta,b]$, зліва від точки b. Точка $x=b$ носить в цьому випадку назву *особливої точки*.

Границю інтеграла $\int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx$ при $\eta \to 0$ (скінченну або нескінченну) називають *невласним інтегралом другого роду* або *інтегралом від необмеженої функції* $f(x)$ від a до b (де b – особлива точка):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to +0} \int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx\,. \tag{2.1}$$

У випадку, якщо ця границя існує і є скінченною, кажуть, що інтеграл (2.1) збігається, а функцію $f(x)$ називають інтегровною на проміжку $[a,\, b]$. Якщо ж границя (2.1) є нескінченною або цілком не існує, то про інтеграл кажуть, що він розбігається.

Геометричний зміст невласного інтеграла другого роду полягає в наступному. Нехай $f(x) \ge 0$, $x \in [a,\, b]$. Якщо інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається, то він дорівнює площі криволінійної трапеції при $x \in [a,\, b]$

(рис. 2.1), обмеженої графіком функції $f(x)$, віссю Ox та прямими $x=a$, $x=b$.

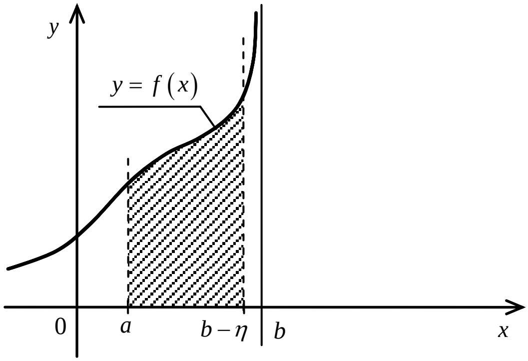

Рисунок 2.1

***Приклад* 2.1.** Дослідити на збіжність невласний інтеграл другого роду $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\| \begin{array}{l} 1-x^2>0 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow |x|<1 \Rightarrow x\in(-1;1). \text{ Звідси,} \\ x=1 - \text{особлива точка функції } f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{\eta\to+0} \int\limits_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to+0} \arcsin x\Big|_0^{1-\eta} = \lim_{\eta\to+0} \arcsin(1-\eta) -$$

$$-\arcsin 0 = \arcsin 1 - 0 = \frac{\pi}{2},$$

отже, інтеграл збігається.

Нехай функція $f(x)$ обмежена й інтегровна на проміжку $[a+\eta', b]$ для будь-яких $\eta'\in(0, b-a)$, але виявляється необмеженою на кожному проміжку $[a,\ a+\eta']$, справа від точки a $(x=a$ – особлива точка функції $f(x))$.

Невласний інтеграл від необмеженої функції $f(x)$ при $x\in[a;b]$, де $x=a$ – особлива точка, визначається рівністю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta'\to+0}\int_{a+\eta'}^b f(x)dx\,. \tag{2.2}$$

Збіжність або розбіжність інтеграла (2.2) визначається у такий же спосіб, як і для інтеграла (2.1).

Нарешті, якщо функція $f(x)$ має особливу точку (необмежена в точці) $x=c$, де $c\in(a,\ b)$, то визначення невласного інтеграла дається рівністю:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\eta\to+0}\int_a^{c-\eta} f(x)dx + \lim_{\eta'\to+0}\int_{c+\eta'}^b f(x)dx\,. \tag{2.3}$$

При цьому інтеграл вигляду (2.3) збігається тоді и тільки тоді, коли збігаються обидва інтеграли $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ або, що те ж саме, коли існують і є скінченними обидві границі $\lim_{\eta\to+0}\int_a^{c-\eta} f(x)dx$ та $\lim_{\eta'\to+0}\int_{c+\eta'}^b f(x)dx$. Розбіжність інтеграла (2.3) має місце, якщо хоча б один з цих інтегралів розбігається, тобто хоча б одна з цих границь не існує або є нескінченною.

***Приклад* 2.2.** Дослідити на збіжність невласний інтеграл другого роду $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$.

Розв'язання.

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2} = \left\| \begin{array}{l} x-2\neq 0,\ \ x\neq 2 \ \ \Rightarrow \ x=2\in(0;\ 3). \\ \text{Звідси } x=2 - \text{особлива точка} \\ \text{функції } f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2} \end{array} \right\| =$$

$$= \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\eta\to+0} \int_0^{2-\eta} \frac{d(x-2)}{(x-2)^2} + \lim_{\eta'\to+0} \int_{2+\eta'}^3 \frac{d(x-2)}{(x-2)^2} =$$

$$= -\lim_{\eta\to+0} \frac{1}{x-2}\Bigg|_0^{2-\eta} - \lim_{\eta'\to+0} \frac{1}{x-2}\Bigg|_{2+\eta'}^3 = -\lim_{\eta\to+0} \frac{1}{-\eta} + \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 + \lim_{\eta'\to+0} \frac{1}{\eta'} =$$

$$= \lim_{\eta\to+0} \frac{1}{\eta} + \lim_{\eta'\to+0} \frac{1}{\eta'} - \frac{3}{2} = \left\| +\infty + \infty - \frac{3}{2} \right\| = +\infty\,,$$

отже, інтеграл розбігається.

***Приклад* 2.3.** Дослідити на збіжність невласні інтеграли другого роду $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$.

Розв'язання.

1) $\alpha = 1$:

$$\int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to+0} \int_\eta^a \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to+0} \ln|x|\Big|_\eta^a = \ln|a| - \lim_{\eta\to+0} \ln\eta =$$

$$= \Big\| \ln a - \ln(+0) = \ln a - (-\infty) \Big\| = +\infty\,,$$

отже, інтеграл розбігається.

2) $\alpha \neq 1$:

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\eta \to +0} \int_\eta^a x^{-\alpha} dx = \lim_{\eta \to +0} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_\eta^a = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim_{\eta \to +0} \frac{\eta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ ;$$

$$\alpha < 1 \Rightarrow 1-\alpha > 0 \Rightarrow \lim_{\eta \to +0} \frac{\eta^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0 \ ;$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow 1-\alpha < 0 \Rightarrow \lim_{\eta \to +0} \frac{\eta^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -\infty \ .$$

Таким чином,

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \infty, & \alpha \geq 1, \text{ інтеграл розбігається;} \\ 0, & \alpha < 1, \text{ інтеграл збігається.} \end{cases} \qquad (2.4)$$

§3. Невласні інтеграли від невід’ємних функцій. Ознаки порівняння

При обчисленні невласних інтегралів значне місце займає дослідження їхньої збіжності. Вказану задачу в багатьох випадках можна розв’язати, не обчислюючи інтеграл. Для дослідження збіжності застосовуються порівняльні ознаки, які основані на зіставлянні заданого інтеграла з інтегралом від деякої еталонної функції (1.4) або (2.4).

Розглянемо наступні твердження.

Якщо $f(x)$ и $g(x)$ – невід’ємні функції при $x \in [a, +\infty)$, і $f(x) \leq g(x) \;\; \forall \;\; x \in [a, +\infty)$, то:

1) зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$;

2) з розбіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$;

3) якщо $f(x)$ и $g(x)$ – невід’ємні функції при $x \in [a, +\infty)$, та існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, то обидва інтеграли: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ – поводяться однаково, одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

Приклад **3.1.** Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Розв'язання.

Оскільки $x \ge 1$, то $x^2 \ge x$, а отже $-x^2 \le -x$. Функція $y = e^t$ є функцією, що зростає, отже $e^{-x^2} \le e^{-x}$. Маємо:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = -\int_1^{+\infty} e^{-x}d\left(-x\right) = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = -\lim_{x\to+\infty} e^{-x} + e^{-1} =$$

$$= \left\| e^{-\infty} + e^{-1} = 0 + \frac{1}{e} \right\| = \frac{1}{e},$$

отже, інтеграл збігається.

У відповідності з ознакою порівняння інтеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ також збігається.

***Приклад* 3.2.** Дослідити невласний інтеграл $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{x\,dx}{9+x^4}$ за ознакою порівняння і обчислити його у випадку збіжності.

Розв'язання.

Підінтегральна функція: $f\left(x\right) = \frac{x}{9+x^4}$, $x \in \left[\sqrt{3};+\infty\right)$, $f\left(x\right) > 0$.

Знайдемо функцію $g\left(x\right) = \frac{1}{x^\alpha}$ таку, що $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \text{const}\left(\ne 0\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{9+x^4}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot x^\alpha}{9+x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot x^\alpha}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^3} = \left\| \alpha = 3 \right\| = 1 \quad \left(\ne 0\right).$$

Таким чином, такою функцією є $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x^3}$. У відповідності з (1.4) інтеграл $\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^3}$ буде збіжним $\left(\alpha=3>1\right)$. За ознакою порівняння інтеграл $\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty}\dfrac{x\,dx}{9+x^4}$ також збігається. Обчислимо його:

$$\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{x\,dx}{9+x^4}=\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{x\,dx}{9+\left(x^2\right)^2}=\left\|\begin{array}{l}\left(x^2\right)'=2x,\;\; d\left(x^2\right)=2x\,dx\\ x\,dx=\dfrac{1}{2}d\left(x^2\right)\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{d\left(x^2\right)}{9+\left(x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{3}\Bigg|_{\sqrt{3}}^{+\infty}=\frac{1}{6}\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{3}-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3}=$$

$$=\left\|\operatorname{arctg}x\underset{x\to+\infty}{\rightarrow}\frac{\pi}{2}\right\|=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{24}.$$

ГЛАВА 2. ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

§1. Задача, що призводить до поняття подвійного інтеграла

Подібно до того, як задача про площу криволінійної трапеції привела нас до поняття визначеного інтеграла, задача про об'єм циліндричного тіла приводить нас до поняття подвійного інтеграла.

Нехай у площині XOY задано область G, що обмежена замкненою кривою L. Нехай в області G задано невід'ємну функцію двох змінних $z = f(x, y)$: $f(x, y) \geq 0 \ \forall (x, y) \in G$, і нехай $f(x, y)$ неперервна в області G. Геометричним образом цієї функції є поверхня в декартовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Через криву L проведемо циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі OZ.

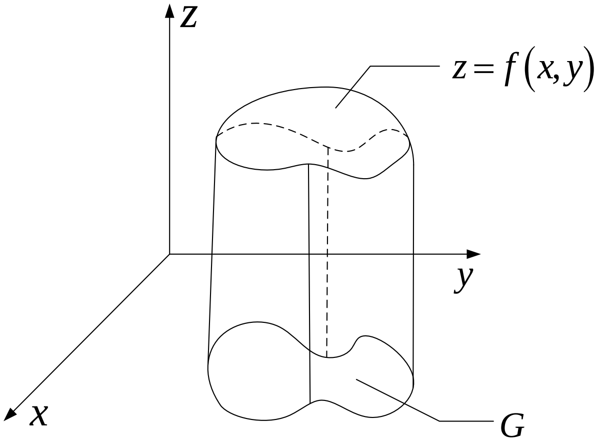

Рисунок 1.1

Розглянемо тіло (V) (рис. 1.1), яке зверху обмежено поверхнею $z = f(x, y)$, з боків – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі OZ, знизу – областю G у площині XOY. Це тіло будемо называти *циліндричним тілом*. Знайдемо об’єм цього тіла.

Якщо основи циліндричного тіла – паралельні площини, то об’єм обчислюється за формулою: $V = S \cdot H$, де S – площа основи, H – висота циліндричного тіла.

В загальному випадку, розіб’ємо область G сіткою довільних кривих на частини $\Delta G_1; \Delta G_2; \ldots; \Delta G_n$ і розглянемо сукупність циліндричних стовбців, які мають своїми основами ці елементарні області й складають дане тіло (рис. 1.2).

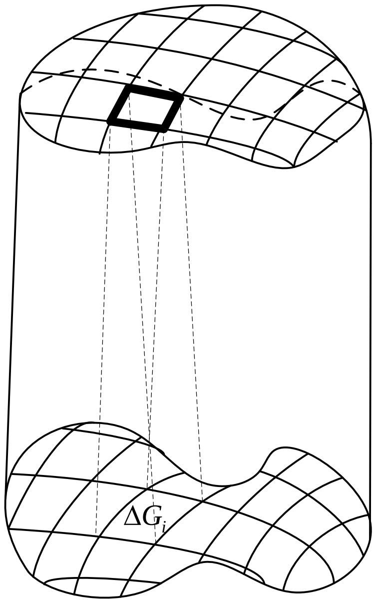

Рисунок 1.2

Нехай площі частин $\Delta G_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ дорівнюють $\Delta S_i \left(i = \overline{1,n}\right)$. Кожен елементарний об’єм являє собою об’єм циліндричного тіла. Оскільки $f\left(x, y\right)$ неперервна в усій області G, а елементарні області

$\Delta G_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ є достатньо малими, то в областях ΔG_i функція $f\left(x,y\right)$ змінюється достатньо мало. Тобто: $\forall M_i\left(\xi_i;\eta_i\right)\in\Delta G_i$: $f\left(x,y\right)\Big|_{\Delta G_i}\approx f\left(\xi_i;\eta_i\right)$. Тоді $\Delta V_i\approx\Delta S_i\cdot f\left(\xi_i;\eta_i\right)$, і об'єм всього тіла ($V$), наближено дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i$, тобто

$$V\approx\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i,\eta_i\right)\cdot\Delta S_i\ . \tag{1.1}$$

§2. Точне визначення подвійного інтеграла

Нехай G – область у площині XOY, функція $f\left(x,y\right)$ задана в області G. Позначимо як P – розбиття області G на частини; $\Delta G_1;\Delta G_2;...;\Delta G_n$ – елементи цього розбиття; $\Delta S_1;\Delta S_2;...;\Delta S_n$ – площі елементарних частин.

Діаметром області ΔG_i називають максимальну відстань між будь-якими точками межі цієї області: $\lambda_i=\operatorname{diam}\Delta G_i$.

Діаметром розбиття λ називають найбільший з діаметрів λ_i: $\lambda=\max\limits_i\left\{\lambda_i\right\}$.

Оберемо в кожній елементарній області ΔG_i точки $M_i\left(\xi_i;\eta_i\right)$. Сукупність цих точок $M=\left\{M_1;M_2;...;M_n\right\}$ називають $M-$ вибором точок.

Означення 2.1. *Інтегральною сумою* для даної функції $f\left(x,y\right)$, заданої в області G, відповідної до даного розбиття P і даного вибору точок M, називають вираз

$$I_n\left(f\left(x,y\right),G,P,M\right)=\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i,\eta_i\right)\cdot\Delta S_i\ . \tag{2.1}$$

Означення 2.2. Якщо існує границя інтегральної суми $I_n\left(f\left(x,y\right),G,P,M\right)$ (2.1) при $\lambda \to 0\left(n\to\infty\right)$, і ця границя не залежить від розбиття P і вибору точок $\left\{M\right\}$, то функція $f\left(x,y\right)$ називається *інтегровною в області* G, а сама границя – *подвійним інтегралом по області* G *від функції* $f\left(x,y\right)$ і позначається

$$\iint\limits_G f\left(x,y\right)dxdy .$$

Таким чином:

$$\iint\limits_G f\left(x,y\right)dxdy = \lim_{\substack{\lambda\to+0\\ \left(n\to\infty\right)}} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta x_i \Delta y_i \; . \qquad (2.2)$$

де $\Delta x_i \Delta y_i = \Delta S_i$.

§3. Властивості подвійного інтеграла

1°. Лінійність.

Якщо функції $f\left(x,y\right)$ і $g\left(x,y\right)$ інтегровни в області G, то інтегровна і сума функцій $f\left(x,y\right)+g\left(x,y\right)$, причому:

$$\iint\limits_G \left[f\left(x,y\right)+g\left(x,y\right)\right]dxdy = \iint\limits_G f\left(x,y\right)dxdy + \iint\limits_G g\left(x,y\right)dxdy \; . \qquad (3.1)$$

Якщо помножити інтегровну в області G функцію $f\left(x,y\right)$ на сталу k, то отримана функція також буде інтегровною, і при цьому:

$$\iint\limits_G k\cdot f\left(x,y\right)dxdy = k\cdot\iint\limits_G f\left(x,y\right)dxdy \; . \qquad (3.2)$$

2°. Адитивність по області інтегрування.

Якщо область G, в якій задано функцію $f\left(x,y\right)$, розбито кривою L на дві області G_1 і G_2 $\left(G=G_1\cup G_2;\, G_1\cap G_2 = L\right)$, то з інтегровності функції $f\left(x,y\right)$ в усій області G випливає її інтегровність в частинних областях G_1 і G_2. Вірно й зворотне: з інтегровності функції $f(x,y)$ в областях G_1 і G_2 випливає її інтегровність в області $G = G_1 \bigcup G_2$. При цьому

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint_{G_2} f(x,y)dxdy . \qquad (3.3)$$

3°. Якщо для інтегровних в області G функцій $f(x,y)$ і $g(x,y)$ виконується нерівність: $g(x,y) \ge f(x,y)$ $\forall (x,y) \in G$, то

$$\iint_G g(x,y)dxdy \ge \iint_G f(x,y)dxdy . \qquad (3.4)$$

4°. Якщо функція $f(x,y)$ інтегровна в області G і $\forall (x,y) \in G: f(x,y) > 0$, то

$$\iint_G f(x,y)dxdy > 0 .$$

5°. Якщо функція $f(x,y)$ інтегровна в області G, то інтегровна і функція $|f(x,y)|$ і має місце нерівність:

$$\left| \iint_G f(x,y)dxdy \right| \le \iint_G |f(x,y)| dxdy .$$

6°. Нехай M і m – відповідно максимальне і мінімальне значення інтегровної в області G функції $f(x,y)$: $M = \max_G f(x,y)$, $m = \min_G f(x,y)$, тобто виконується: $m \le f(x,y) \le M$ $\forall (x,y) \in G$. і нехай S − площа області G. Тоді має наступна нерівність:

$$m \cdot S \le \iint_G f(x,y)dxdy \le M \cdot S .$$

7°. Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в області G. Тоді існує точка $(x_0; y_0) \in G$ така, що

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)\cdot S\,, \tag{3.6}$$

де S − площа області G.

Позначимо $\mu = f(x_0,y_0)$, тоді значення

$$\mu = \frac{1}{S}\iint_G f(x,y)\,dxdy \tag{3.7}$$

називають *середнім значенням функції* $f(x,y)$ в області G.

§4. Ознаки ітегрирування функції

1°. Необхідна ознака ітегровності функції.

Якщо функція $f(x,y)$ інтегровная в області G, то вона обмежена в цій області.

2°. Достатня ознака ітегровності функції.

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області G, то вона інтегровна в цій області.

3°. Якщо функція $f(x,y)$ в області G неперервна всюди, за виключенням скінченної кількості ліній або точок, то вона інтегровна в цій області.

§5. Приведення подвійного інтеграла до повторного

5.1. У випадку прямокутної області

Нехай для функції $f(x,y)$, визначеної в прямокутнику $G=\{a \le x \le b;\ c \le y \le d\}$, існує інтеграл

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy\,, \tag{5.1}$$

і при кожному сталому значенні $x \in [a;b]$ існує визначений інтеграл

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)dy\ . \tag{5.2}$$

Тоді існує також і *повторний інтеграл*

$$\int_a^b I(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy\,, \tag{5.3}$$

и виконується рівність:

$$\iint_G f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy\ . \tag{5.4}$$

Змінюючи порядок змінних x і y та припускаючи, що $\forall y\in[c;d]$ існує інтеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$, отримаємо формулу

$$\iint_G f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx\ . \tag{5.5}$$

Не завжди один порядок повторного інтегрування зумовлює існування іншого порядку повторного інтегрування (хоча й не виключає останнього), оскільки це потребує відповідного розбиття області G на частини, які допускають зміну порядку інтегрування.

5.2. У випадку довільної криволінійної області

Означення 5.2.1. Область G називається *правильною*, якщо будь-яка пряма, яка паралельна осі *OX* (*OY*) перетинає її границю не більше, ніж у двох точках.

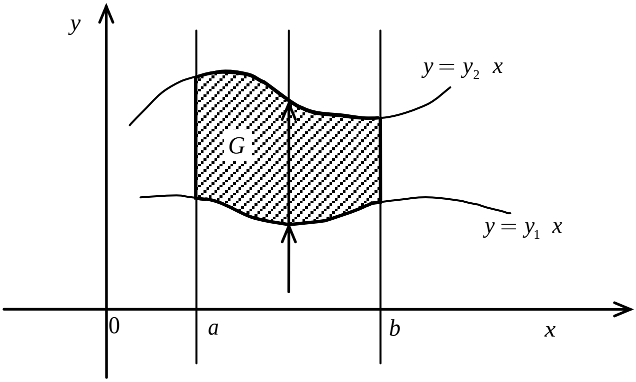

Рисунок 5.1

Якщо для функції $f(x,y)$, визначеної в правильній області G (рис. 5.1), існує подвійний інтеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$, і при кожному сталому значенні $x\in[a;b]$ існує визначений інтеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$, то існує також повторний інтеграл

$$\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,, \qquad (5.6)$$

і виконується рівність

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\ . \qquad (5.7)$$

Якщо проектувати область G на вісь OY (рис. 5.2), то якщо при кожному сталому значенні $y\in[c;d]$ існує визначений інтеграл $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$, аналогічно можна отримати формулу:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \,. \tag{5.8}$$

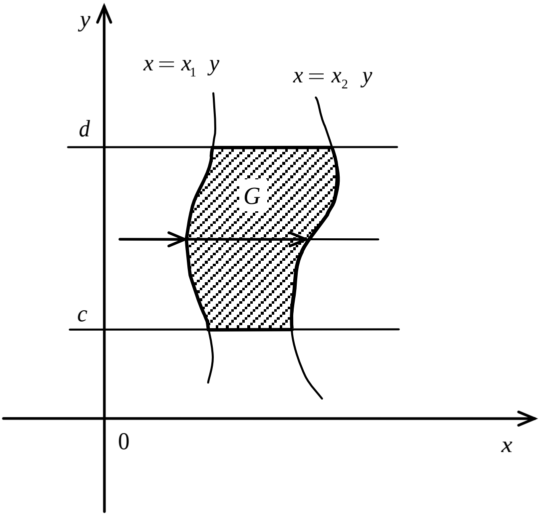

Рисунок 5.2

Якщо область G не є правильною, то її можна розбити на скінченну кількість правильних областей та, враховуючи властивість адитивності, обчислювати інтеграл по кожній з отриманих частин.

Таким чином, щоб розставити межі в подвійному інтегралі по правильній області в декартовій системі координат, потрібно:

- спроектувати область на одну з осей координат, наприклад, на вісь OX . Нехай $[a;b] = \text{пр}_{OX} G$ (рис. 5.3);
- прямі $x = a$ і $x = b$ дотикаються межі області, й точки дотикання A і B розбивають межу області на дві частини: нижню $y = y_1(x)$ та верхню $y = y_2(x)$;

- будь-яка пряма, яка перетинає межу області й паралельна осі OY входить в область при $y = y_1(x)$ і виходить з області при $y = y_2(x)$;
- тоді числа a і b будут межами зовнішнього інтеграла, а функції $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ – межами внутрішнього інтеграла.

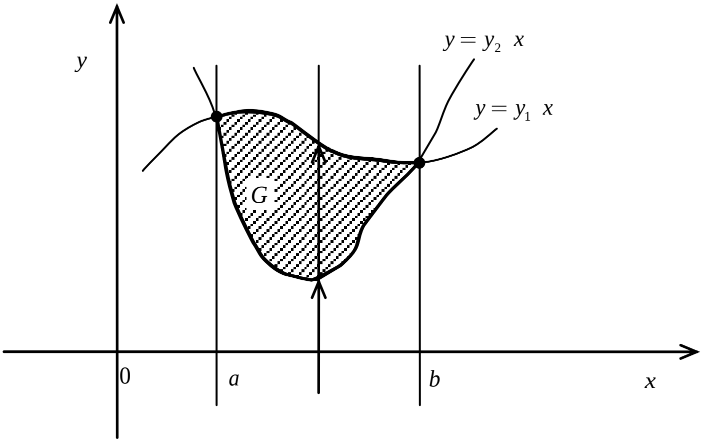

Рисунок 5.3

***Приклад* 5.1.** Змінити порядок інтегрування $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)dx$.

Розв'язання.

З врахуванням меж внутрішнього і зовнішнього інтегралів отримаємо область інтегрування G: $0 \le y \le 1;\ y \le x \le \sqrt{y}$. Побудуємо область G в декартовій системі координат:

$y = x$ – пряма, яка проходить через точки $(0;0)$ і $(1;1)$;

$x = \sqrt{y}$ – вітка параболи $y = x^2$, при $x \ge 0$, $y \ge 0$ (рис. 5.4).

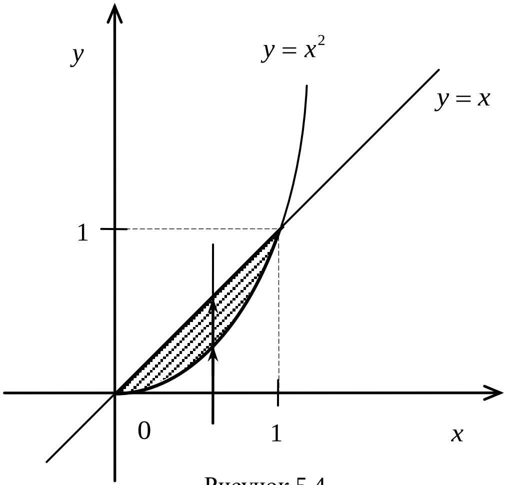

Рисунок 5.4

Для зміни порядка інтегрування спроектуємо область G на вісь OX : $\text{пр}_{OX} G = [0;1]$. Будь-яка пряма, яка паралельна осі OY , входить в область через лінію $y = x^2$ і виходить з області через пряму $y = x$. Тоді маємо:

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x, y) dy .$$

***Приклад* 5.2.** Змінити порядок інтегрування $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy$.

Розв'язання.

Область G в даному випадку обмежена прямими: $x = 0$, $x = 2$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.

Пряма $y = 2x$ проходить через точки $(0;0)$ і $(1;2)$.

Пряма $y = 6 - x$ проходить через точки $(0;6)$ і $(6;0)$.

Будуємо область G в декартовій системі координат (рис. 5.5). При $x = 2 \Rightarrow y = 4$. Точка $(2;4)$ є точкою перетину прямих, оскільки є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ y = 6 - x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - x = 2x, \\ y = 6 - x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 6, \\ y = 6 - x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 4. \end{cases}$$

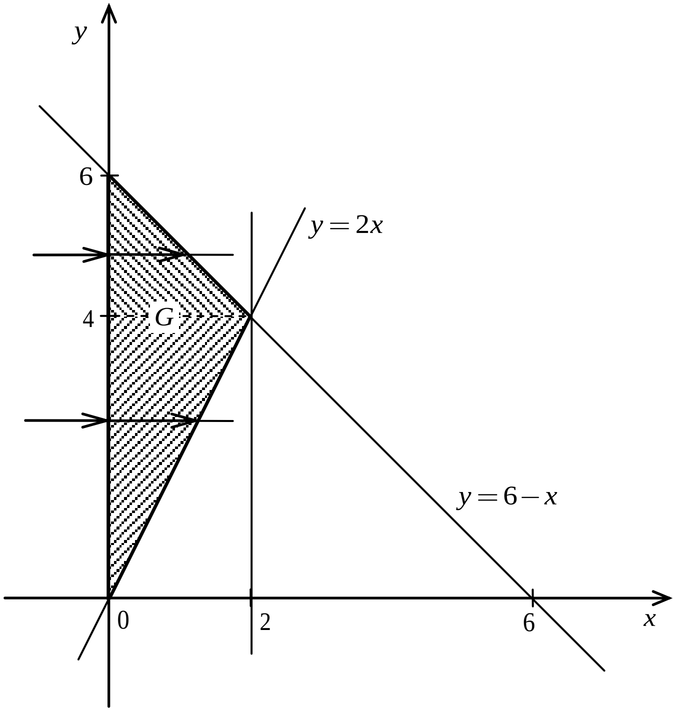

Рисунок 5.5

Спроектуємо область G на вісь OY: $\text{пр}_{OY} G = [0;6]$. При $y \in [0;4]$ прямі, паралельні осі OX входять в область через пряму $x = 0$, а виходять через пряму $y = 2x$. При $y \in [4;6]$ прямі, паралельні осі OX входять в область через пряму $x = 0$, а виходять – через $y = 6 - x$.

Таким чином, область G необхідно розбити на дві правильні області G_1 і G_2:

$$G_1 = \left\{0 \le y \le 4;\ 0 \le x \le \frac{y}{2}\right\};$$

$$G_2 = \left\{4 \le y \le 6;\ 0 \le x \le 6 - y\right\}.$$

Тоді:

$$\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G_1 \cup G_2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy +$$

$$+\iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)\,dx.$$

***Приклад* 5.3.** Змінити порядок інтегрування

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)\,dx.$$

Розв'язання.

Область інтегрування інтеграла $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx$:

$$G_1 = \left\{0 \le y \le 1;\ 0 \le x \le y\right\}.$$

Область інтегрування інтеграла $\int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)\,dx$:

$$G_2 = \left\{1 \le y \le e;\ \ln y \le x \le 1\right\}.$$

Нехай G – об’єднання областей G_1 і G_2, тобто

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{G=G_1\cup G_2} f(x,y)\,dxdy .$$

Побудуємо обидві області в декартовій системі координат (рис. 5.6). Спроектуємо область $G = G_1 \cup G_2$ на вісь OX : пр$_{OX}G = [0;1]$. Тоді прямі, паралельні осі OY , входять в область через пряму $y = x$, а виходять – через лінію $x = \ln y$ ($y = e^x$), отже остаточно маємо:

$$\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{e^x} f(x,y)\,dy .$$

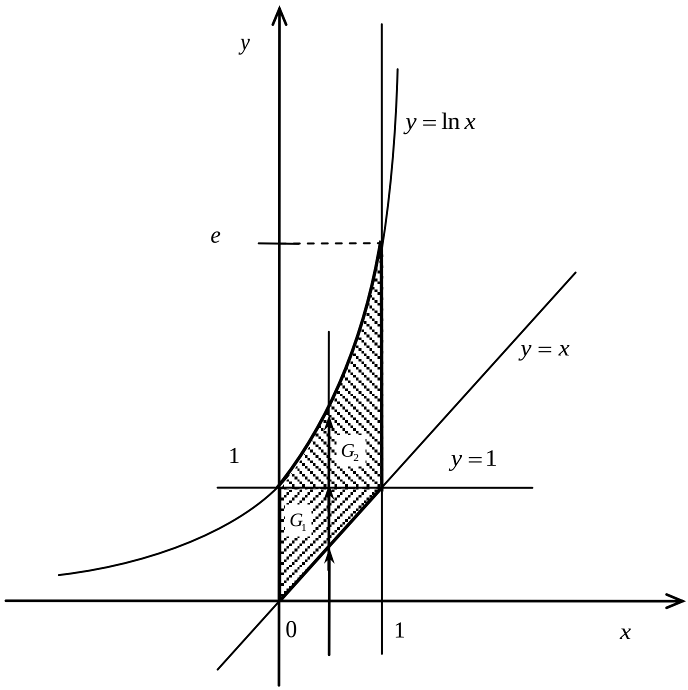

Рисунок 5.6

***Приклад* 5.4.** Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D e^{x+y}dxdy\,,\;\; D=\left\{0\le x\le 1;\; 0\le y\le 1\right\}.$$

Розв'язання.

Побудуємо область D (Рис.5.7)

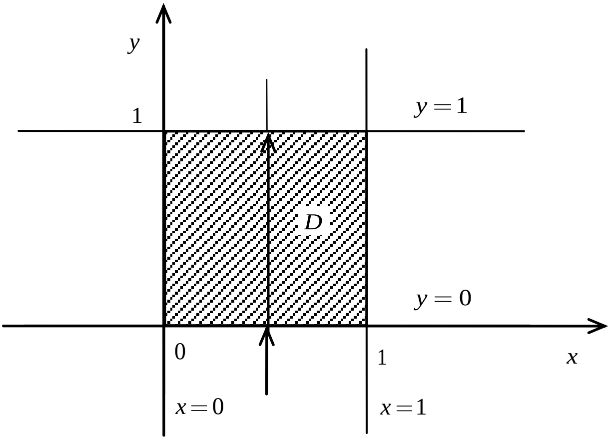

Рисунок 5.7

Оскільки D – квадрат, порядок інтегрування не є суттєвим. Спроектуємо область D на вісь OX : $\text{пр}_{OX}D=\left[0;1\right]$. Тоді всі прямі, паралельні осі OX , розташовані між прямими $x=0$ і $x=1$, входять в область через пряму $y=0$ та виходять через пряму $y=1$. Отже:

$$\iint\limits_D e^{x+y}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 e^{x+y}dy=\int_0^1 dx\int_0^1 e^x\cdot e^y dy=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\text{у внутрішному інтегралі}\\ e^x - \text{сталий множник}\end{matrix}\right\|=\int_0^1 dx\cdot e^x\int_0^1 e^y dy=\int_0^1 e^x dx\cdot e^y\Big|_0^1=$$

$$=\int_0^1\left(e-1\right)e^x dx==\left(e-1\right)\cdot e^x\Big|_0^1=\left(e-1\right)\cdot\left(e-1\right)=\left(e-1\right)^2.$$

***Приклад* 5.5.** Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D \frac{y\,dx\,dy}{\left(11-x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\;\; D=\left\{0\le x\le 1; 0\le y\le 1\right\}.$$

Розв'язання.

Область D – квадрат. Аналогічно попередньому прикладу:

$$\iint\limits_D \frac{y\,dx\,dy}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 \frac{y\,dy}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 \left(1+x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} ydy=$$

$$=\left\|\begin{array}{l} \text{Для внутрішнього інтеграла } 1+x^2=a^2=\text{const, маємо} \\ \int\left(a^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} ydy=\left\|\begin{array}{l} d\left(a^2+y^2\right)=2ydy \\ ydy=\frac{1}{2}d\left(a^2+y^2\right)\end{array}\right\|= \\ =\frac{1}{2}\int\left(a^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(a^2+y^2\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(a^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C= \\ =-\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}+C \end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)\Bigg|_0^1=-\int\limits_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx=$$

$$=-\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}+\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=-\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|\Big|_0^1+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\Big|_0^1=$$

$$=-\ln\left|1+\sqrt{3}\right|+\ln 2+\ln\left|1+\sqrt{2}\right|-\ln 1=\ln\frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{3}}.$$

***Приклад* 5.6.** Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D \left(xy - 9x^5y^3\right)dxdy\,,\ D: x = 1;\ y = \sqrt[3]{x};\ y = -x^2\,.$$

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 5.8):

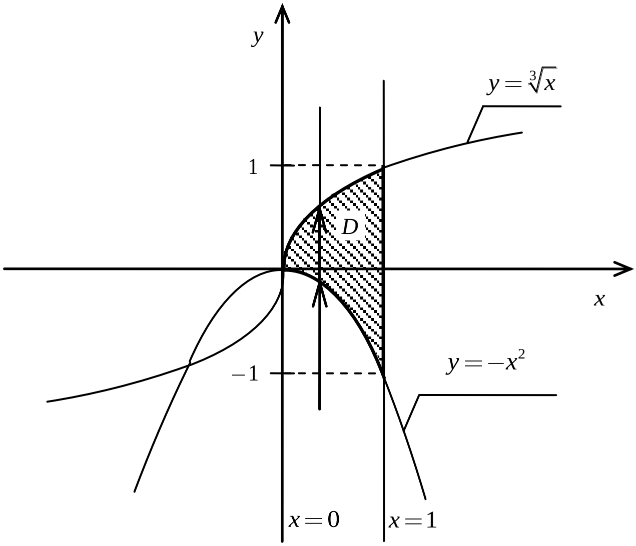

Рисунок 5.8

Якщо область D спроектувати на вісь OY, то прямі, які паралельні осі OX, всередині області під і над віссю OX, мають різні входи в область: при $y < 0$ – через квадратичну параболу $y = -x^2$; при $y > 0$ – через кубічну параболу $y = \sqrt[3]{x}$. Тоді D доведеться розбивати на дві правильні області. Якщо D спроектувати на вісь OX, то прямі, що перетинають відрізок $\left[0;1\right]$, які паралельні осі OY, мають один вход ($y = -x^2$) і один вихід ($y = \sqrt[3]{x}$). Отже, зовнішній інтеграл буде по змінній x, а внутрішній – по змінній y: $0 \le x \le 1;\ -x^2 \le y \le \sqrt[3]{x}$.

Тоді:

$$\iint_D \left(xy-9x^5y^3\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}}\left(xy-9x^5y^3\right)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\left[x\int_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}} ydy-9x^5\int_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}} y^3dy\right]=\int_0^1 dx\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}}-9x^5\cdot\frac{y^4}{4}\Bigg|_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}}\right]=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{x}{2}\left(\sqrt[3]{x^2}-\left(-x^2\right)^2\right)-\frac{9x^5}{4}\left(\sqrt[3]{x^4}-\left(-x^2\right)^4\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}x^5-\frac{9}{4}x^{\frac{19}{3}}+\frac{9}{4}x^{13}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^{\frac{8}{3}}}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^6}{6}-\frac{9}{4}\cdot\frac{3x^{\frac{22}{3}}}{22}+\frac{9}{4}\cdot\frac{x^{14}}{14}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{16}-\frac{1}{12}-\frac{27}{88}+\frac{9}{56}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-\frac{27}{22}+\frac{9}{14}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3\cdot3\cdot7\cdot11-4\cdot7\cdot11-27\cdot2\cdot3\cdot7+9\cdot2\cdot3\cdot11}{3\cdot4\cdot7\cdot11}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{7\cdot11\cdot(3\cdot3-4)-27\cdot2\cdot(3\cdot7-11)}{3\cdot4\cdot7\cdot11}=\frac{1}{4}\cdot\frac{7\cdot11\cdot5-27\cdot2\cdot10}{3\cdot4\cdot7\cdot11}=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{7\cdot11-27\cdot2\cdot2}{3\cdot4\cdot7\cdot11}=\frac{5}{4}\cdot\frac{(-31)}{3\cdot4\cdot7\cdot11}==-\frac{155}{3\cdot7\cdot11\cdot16}=-\frac{155}{3696}\,.$$

***Приклад* 5.7.** Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D y\cos xydxdy\,,\ D: y=\frac{\pi}{2};\ y=\pi;\ x=1;\ x=2\,.$$

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 5.9). Оскільки D – прямокутник, то порядок інтегрування не є суттєвим. Розглянемо підінтегральну функцію $f\left(x,y\right)=y\cos xy$. Якщо внутрішнє інтегрування проводити по зміннійй y, то необхідно застосовувати формулу інтегрування частинами. Якщо ж внутрішнє інтегрування проводити по змінній x, то даний інтеграл може бути приведений до табличного. Тому зовнішнє інтегрування проводимо по змінній y, а внутрішнє – по змінній x.

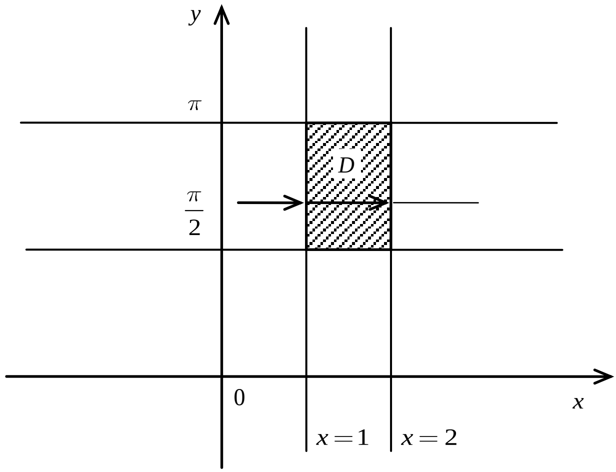

Рисунок 5.9

Таким чином:

$$\iint_D y\cos xydxdy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dy \int_1^2 y\cos xydx = \left\| \begin{array}{l} \int y\cdot\cos xydx = y\int\cos xydx = \\ = \left\| \begin{array}{l} y = const \\ d(xy) = ydx \\ dx = \dfrac{1}{y}d(xy) \end{array} \right\| = \\ = \dfrac{y}{y}\int\cos xyd(xy) = \\ = \sin(xy) + C \end{array} \right\| =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dy\cdot\sin(xy)\Big|_1^2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin 2y - \sin y)dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2ydy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin ydy =$$

$$=\left\|\begin{matrix} d(2y)=2dy \\ dy=\frac{1}{2}d(2y) \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2y d(2y)+\cos y\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{1}{2}\cos 2y\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\cos\pi-$$

$$-\cos\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}\cos 2\pi+\frac{1}{2}\cos\pi-1 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1=-2\,.$$

§6. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Припустимо, що нам дано дві системи координат на площини: декартову (прямокутну), з координатними осями x і y, та іншу − з деякими осями u и v. Розглянемо в цих системах координат дві замкнені області: G – на площині XOY, і D – на площині UOV. Кожна з цих областей може бути необмеженою, зокрема, може охоплювати всю площину. Межами цих областей (якщо вони не охоплюють усієї площини) будемо вважати кусково-гладкі криві: L_G – для області G і L_D – для області D.

Припустимо, що в області D задано систему неперервних функцій

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases} \tag{6.1}$$

яка кожній точці (u,v) в області D ставить у відповідність одну певну точку (x,y) в області G, причому жодну точку $(x,y)\in G$ не буде пропущено, так що кожній точці $(x,y)\in G$ відповідає хоча б одна точка $(u,v)\in D$. Якщо різним точкам (u,v) відповідають різні точки (x,y), так що кожна точка (x,y) відповідає лише одній точці (u,v), то формули (6.1) однозначно можна розв'язати відносно змінних u та v.

Змінні u, v, у свою чергу, є однозначними функціями від змінних x та y в області G:

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y). \end{cases} \tag{6.2}$$

Таким чином, між областями G і D встановлено взаємно однозначну відповідність. Формули (6.1) відтворюють перетворення області D в область G, а формули (6.2) дають обернене перетворення області G в область D.

Якщо означені області заповнюють відповідні площини, то ми маємо справу з перетворенням однієї площини в іншу. У зв'язку з тим, що координатні лінії, взагалі кажучи, будуть кривими лініями, значення u і v називають криволінійними координатами точки.

Визначник

$$I\left(u,v\right)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (6.3)$$

називають *якобіаном переходу* від системи координат XOY до системи координат UOV.

Геометрично він являє собою коефіцієнт розтягу (стиску) елементарної області при зміні системи координат

Таким чином, для елементарних площ маємо:

$$\Delta S_G = \left|I\left(u,v\right)\right|\Delta S_D . \qquad (6.4)$$

Розглянемо подвійний інтеграл (2.2). Замінимо змінні за формулою (6.1) і подамо його у вигляді інтеграла по області D.

Розіб'ємо область D з допомогою деякої сітки кусково-гладких кривих на частини ΔD_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$, тоді область G розіб'ється на області ΔG_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Оберемо точку $\left(x_i, y_i\right)\in\Delta G_i$ і розглянемо інтегральную суму для інтеграла (2.2):

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i , \qquad (6.5)$$

де ΔS_i – площа елементарної області ΔG_i.

За формулою (6.4)

$$\Delta S_i = \left| I\left(u_i, v_i\right) \right| \Delta \tilde{S}_i , \tag{6.6}$$

де $\Delta \tilde{S}_i$ – площа елементарної області ΔD_i, а $\left(u_i, v_i\right)$ – деяка точка області ΔD_i. Тоді:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right) \left| I\left(u_i, v_i\right) \right| \Delta \tilde{S}_i . \tag{6.7}$$

Оскільки точка $\left(x_i, y_i\right)$ – довільна точка області ΔG_i, то, використовуючи це, покладемо

$$\begin{cases} x_i = x\left(u_i, v_i\right), \\ y_i = y\left(u_i, v_i\right), \end{cases}$$

тобто оберемо як точку $\left(x_i, y_i\right)$ таку точку області ΔG_i, яка відповідає точці $\left(u_i, v_i\right)$ в області ΔD_i. Тоді I_n (6.7) приймає вигляд

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x\left(u_i, v_i\right), y\left(u_i, v_i\right)\right) \left| I\left(u_i, v_i\right) \right| \Delta \tilde{S}_i . \tag{6.8}$$

Очевидно, (6.8) є інтегральною сумою для інтеграла

$$\iint\limits_D f\left(x\left(u, v\right), y\left(u, v\right)\right) \left| I\left(u, v\right) \right| dudv . \tag{6.9}$$

Існування інтеграла (6.9) випливає з того, що підінтегральна функція $f\left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right)\right)$ або неперервна, або допускає розриви лише вздовж скінченної кількості кривих, які служать на площині UOV зображеннями кривих розриву функції $f\left(x, y\right)$. Якщо діаметри усіх областей ΔD_i наближаються до нуля, то, з неперервності функції (6.1) випливає, що діаметри усіх областей ΔG_i також будуть наближатися до нуля. Тоді інтегральна сума I_n буде наближатися як до інтеграла (2.2), так і до інтеграла (6.9), і остаточно маємо:

$$\iint\limits_G f\left(x, y\right) dxdy = \iint\limits_D f\left(x\left(u, v\right), y\left(u, v\right)\right) \left| I\left(u, v\right) \right| dudv . \tag{6.10}$$

§7. Перехід до полярної системи координат

Перейдем з декартової системи координат в полярну:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{7.1}$$

Криволінійними осями є: промені $\varphi = const$ і кола $\rho = const$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho < +\infty$.

Тоді якобіан переходу:

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\,.$$

Отже:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \left| \begin{matrix} \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \end{matrix} \right| = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi\,. \tag{7.2}$$

Для того, щоб розставити межі в подвійному інтегралі в полярній системі координат необхідно:

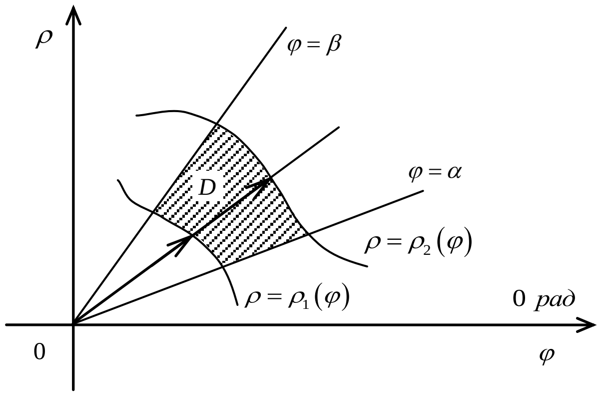

Рисунок 7.1

визначити промені, між якими розташована область (рис. 7.1). Ці промені виходять з початку координат і дотикаються межі області. Числа α і β – межі зовнішнього інтеграла. Функції $\rho_1(\varphi)$ і $\rho_2(\varphi)$ – межі внутрішнього інтеграла, оскільки всі промені, що містяться всередині сектора, входять в область через криву $\rho=\rho_1(\varphi)$, а виходять через криву $\rho=\rho_2(\varphi)$. Таким чином, при заміні змінних x, y на ρ, φ, отримаємо:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho\,. \qquad (7.3)$$

***Приклад* 7.1.** Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_G \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy\,,\ \text{де}\ G:\begin{cases} x^2+y^2\ge 1, & y\ge x,\\ x^2+y^2\le 4, & y\le x\sqrt{3}.\\ (x\ge 0) & \end{cases}$$

Розв'язання.

Зобразимо область G в декартовій системі координат (рис. 7.2). Межі області G: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ – кола з радіусами $R_1=1$ і $R_2=2$ та з центрами в точці $(0;0)$ (полюс полярної системи координат).

Накладемо полярну систему координат на декартову так, щоб їхні точки початку відліку збіглися й напрямок променя полярної системи координат збігся з додатним напрямком осі *OX*. Оскільки область міститься між прямими, що проходять через початок координат, і колами, то в полярній системі координат область G є «прямокутником»:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \\ 1 \le \rho^2 \le 4, \\ 1 \le \rho \le 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y \ge x \Rightarrow \dfrac{y}{x} \ge 1, \\ y \le x\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{y}{x} \le \sqrt{3}, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \le \dfrac{y}{x} \le \sqrt{3}, \\ 1 \le \operatorname{tg}\varphi \le \sqrt{3}, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}. \end{array}$$

(оскільки з рис. 7.2 видно, що $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$).

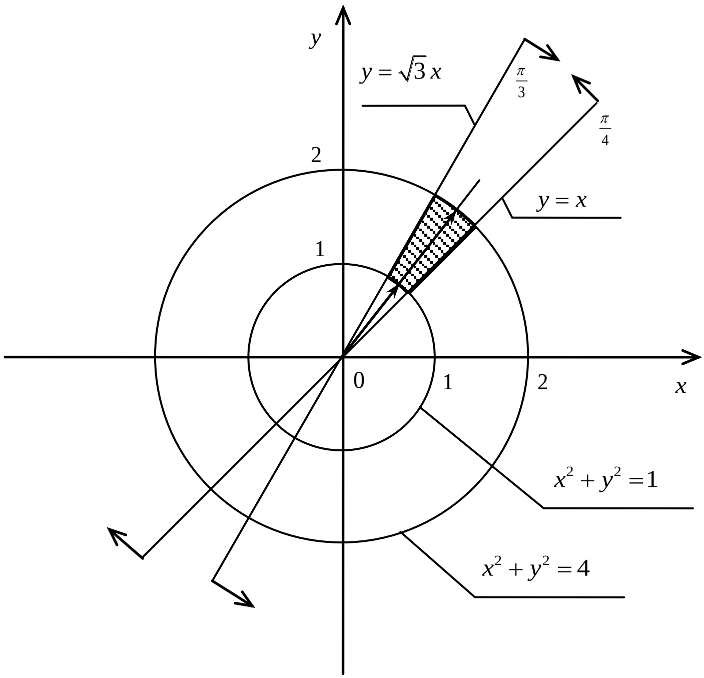

Рисунок 7.2

$$G_{\rho\varphi} = \left\{ 1 \le \rho \le 2;\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \right\}.$$

$$\iint_G \operatorname{arctg}\frac{y}{x} dxdy = \left\| \begin{matrix} \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} & 1 \le \rho \le 2 \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi & \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \iint_{G_{\rho\varphi}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi} \right) \rho d\rho d\varphi = \iint_{G_{\rho\varphi}} \rho \cdot \varphi \cdot d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_1^2 \rho\varphi d\rho =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi \int_1^2 \rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi \cdot \frac{\rho^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{4-1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varphi^2}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{7\pi^2}{9 \cdot 16} = \frac{7\pi^2}{192}.$$

***Приклад* 7.2.** Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_G \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy \text{, де } G : x^2 + y^2 \le Rx.$$

Розв'язання.

Крива, що обмежуєє область G:

$x^2 + y^2 = Rx$,

$x^2 - Rx + y^2 = 0$,

$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{R}{2} + \left(\frac{R}{2} \right)^2 - \left(\frac{R}{2} \right)^2 + y^2 = 0$,

$\left(x - \frac{R}{2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2} \right)^2$ – коло з центром в точці $\left(\frac{R}{2}; 0 \right)$ і радіусом $\frac{R}{2}$.

Зобразимо область G в декартовій системі координат (рис. 7.3).

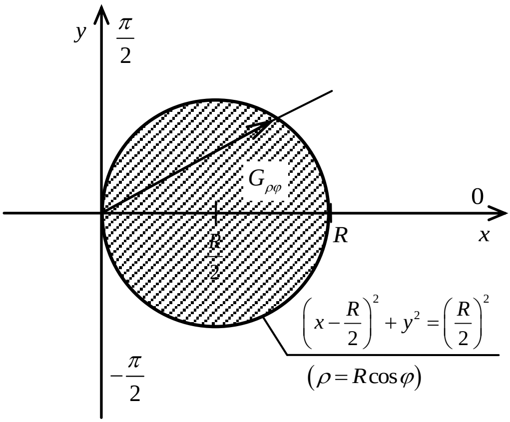

Рисунок 7.3

Перейдемо до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi, \\ y = \rho\cdot\sin\varphi, \end{cases} \quad x^2 + y^2 = Rx \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} \rho^2 = R\rho\cos\varphi, \\ \rho = R\cos\varphi. \end{array}$$

Область $G_{\rho\varphi}$ міститься між променями $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ і $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Найменьша відстань від будь-якої точки області до початку координат $\rho = 0$, і будь-який промінь, проведений з початку координат, входить в область через $\rho = 0$, а виходить через $\rho = R\cos\varphi$. Таким чином, маємо:

$$G_{\rho\varphi} = \left\{-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le \rho \le R\cos\varphi\right\}.$$

$$\iint\limits_G \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \left\| \begin{array}{ll} \begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \end{cases} & dxdy = \rho d\rho d\varphi \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}; & 0 \le \rho \le R\cos\varphi \end{array} \right\| =$$

$$=\iint\limits_{G_{\rho\varphi}}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\int\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho=\int\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\rho\,d\rho=\\ =\left\|\begin{array}{l}\left(R^2-\rho^2\right)'=-2\rho\\ d\left(R^2-\rho^2\right)=-2\rho\,d\rho\\ \rho\,d\rho=-\frac{1}{2}d\left(R^2-\rho^2\right)\end{array}\right\|=-\frac{1}{2}\int\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(R^2-\rho^2\right)=\\ =-\frac{1}{2}\frac{2\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+C=-\frac{1}{3}\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}+C\end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left(-\frac{1}{3}\right)\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{R\cos\varphi}=-\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(R^2-R^2\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}-\left(R^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}R^3\left|\sin\varphi\right|^3d\varphi+\frac{1}{3}R^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}R^3\left|\sin\varphi\right|^3d\varphi=R^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\sin\varphi\right)^3d\varphi+R^3\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi=\\ =-R^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3\varphi\,d\varphi+R^3\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi=\\ =\left\|\begin{array}{l}\int\sin^3\varphi\,d\varphi=\int\sin^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi=-\int\left(1-\cos^2\varphi\right)d\left(\cos\varphi\right)=\\ =-\int d\left(\cos\varphi\right)+\int\cos^2\varphi\,d\left(\cos\varphi\right)=-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}+C\end{array}\right\|=\end{array}\right\|=$$

$$= \left\| \begin{array}{l} = -R^3\left(-\cos\varphi + \dfrac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + R^3\left(-\cos\varphi + \dfrac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \\ = -R^3\left(-1+\dfrac{1}{3}\right) + R^3\left(1-\dfrac{1}{3}\right) = R^3\cdot\dfrac{2}{3} + R^3\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}R^3 \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{4}{9}R^3 + \frac{\pi}{3}R^3 = R^3\,\frac{3\pi-4}{9}.$$

§8. Геометричні застосуввання подвійних інтегралів

8.1. Обчислення об’єму циліндричного тіла

Як уже було показано в §1, для $f(x,y) \geq 0 \ \ \forall (x,y) \in G$:

$$V = \iint_G f(x,y)\,dxdy. \tag{8.1}$$

8.2. Обчислення формули площі області G

Її отримаємо з (8.1) при $f(x,y) \equiv 1$:

$$S = \iint_G dxdy. \tag{8.2}$$

8.3. Обчислення площі поверхні

Якщо поверхня $z = f(x,y)$ однозначно проектується на площину XOY (область G – проекція $z = f(x,y)$ на площину XOY), і функція $f(x,y)$ неперервно диференціовна в області G, то площа поверхні σ може бути обчислена у вигляді подвійного інтеграла:

$$\sigma = \iint_G \sqrt{1 + \left[f'_x(x,y)\right]^2 + \left[f'_y(x,y)\right]}\,dxdy. \tag{8.3}$$

***Приклад* 8.1.** Найти площу фігури, обмеженої заданими лініями

$$G=\left\{y=\frac{\sqrt{x}}{2};\ y=\frac{1}{2x};\ x=16\right\}.$$

Розв'язання.

Будуємо область в декартовій системі координат (рис. 8.1).

Знайдемо точку перетину графиків функції квадратного корня і гіперболи:

$$\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{x}}{2} \\ y=\dfrac{1}{2x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{1}{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}\cdot x=1 \Rightarrow x^{\frac{3}{2}}=1 \Rightarrow x=1.$$

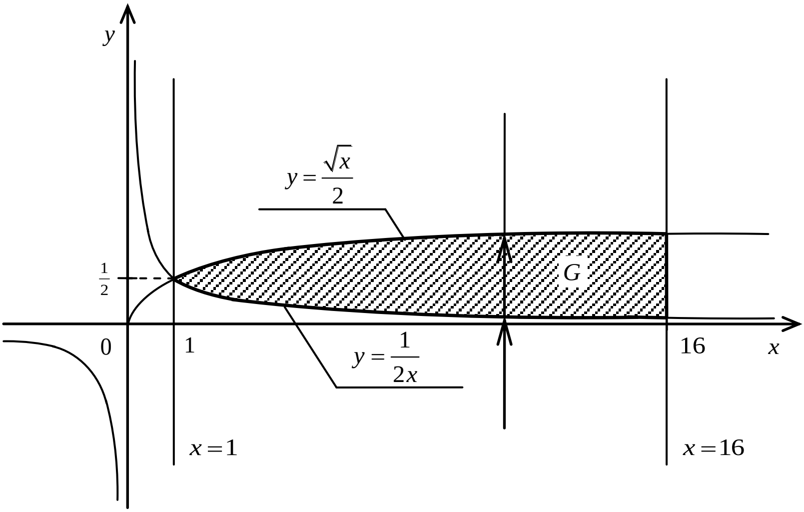

Рисунок 8.1

За формулою (8.2) маємо:

$$S=\iint\limits_{G} dxdy=$$

$$=\left\|\begin{array}{l} 1\le x\le 16 \\ \text{Вхід в область через } y=\dfrac{1}{2x}; \\ \text{вихід з області через } y=\dfrac{\sqrt{x}}{2} \end{array} \Rightarrow \frac{1}{2x}\le y\le \frac{\sqrt{x}}{2}\right\|=$$

$$=\int_{1}^{16}dx\int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{\sqrt{x}}{2}}dy=\int_{1}^{16}dx\cdot y\Big|_{\frac{1}{2x}}^{\frac{\sqrt{x}}{2}}=\int_{1}^{16}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{16}x^{\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{2}\int_{1}^{16}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{1}^{16}-\frac{1}{2}\ln|x|\Big\|_{1}^{16}=\frac{1}{3}\left(16^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{2}\left(\ln 16-\ln 1\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(4^3-1\right)-\frac{1}{2}\ln 16=\frac{63}{3}-\ln\sqrt{16}=21-\ln 4 \text{ (од.кв.)}$$

Приклад **8.2.** Найти площу фігури, обмеженої заданими лініями

$$G=\left\{y^2-2y+x^2\le 0;\ y^2-4y+x^2\le 0;\ y\ge\frac{x}{\sqrt{3}};\ y\le\sqrt{3}\cdot x\right\}.$$

Розв'язання.

Побудуємо криві, що обмежують область G (рис. 8.2).

$y^2-2y+x^2=0$,

$y^2-2\cdot y\cdot 1+1^2-1^2+x^2=0$,

$\left(y-1\right)^2+x^2=1^2$,

$x^2+\left(y-1\right)^2=1^2$ – коло з центром в точці $O_1\left(0;1\right)$ радіуса $R_1=1$.

$y^2-4y+x^2=0$,

$y^2-2\cdot y\cdot 2+2^2-2^2+x^2=0$,

$\left(y-2\right)^2+x^2=2^2$,

$x^2+\left(y-2\right)^2=2^2$ – коло з центром в точці $O_2\left(0;2\right)$ радіуса $R_2=2$.

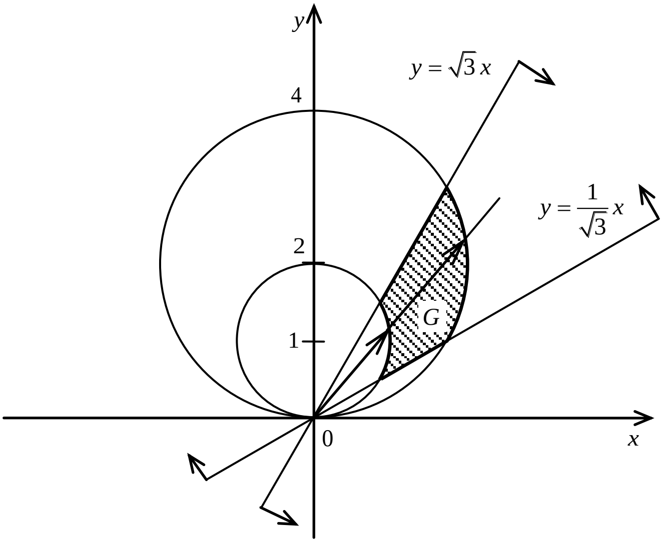

Рисунок 8.2

Побудуємо по двох точках прямі:

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}} \qquad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline y & 0 & \sqrt{3} \end{array};$$

$$y=\sqrt{3}\cdot x \qquad \begin{array}{c|cc} x & 0 & \sqrt{3} \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$$

Оскільки область G міститься між прямими, що проходять через початок координат і колами, то зручно перейти з декартової системи координат $(x;y)$ до полярної системи координат (ρ,φ).

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} x^2+y^2=\rho^2, \\ \dfrac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi. \end{array}$$

Тоді рівняння ліній, що обмежують G приймають вигляд:

$$x^2+y^2-2y=0, \qquad x^2+y^2-4y=0,$$
$$\rho^2-2\rho\cos\varphi=0, \qquad \rho^2-4\rho\cos\varphi=0,$$
$$\rho=2\cos\varphi, \qquad \rho=4\cos\varphi.$$

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6} \left(\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right),$$

$$y=\sqrt{3}\cdot x \Rightarrow \frac{y}{x}=\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3} \left(\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right).$$

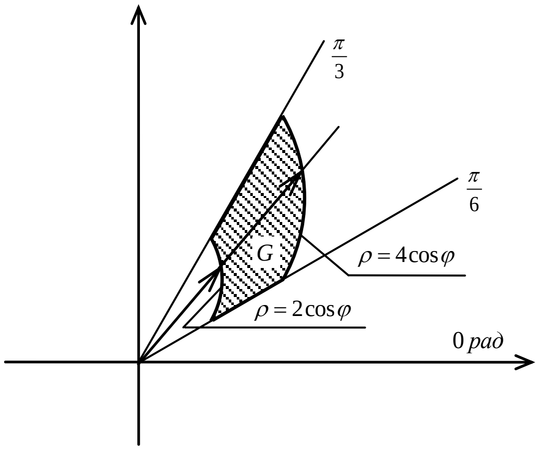

Рисунок 8.3

$$S=\iint\limits_{G_{xy}} dxdy = \left\| \begin{array}{l} \begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}; \quad dxdy=\rho d\rho d\varphi \\ \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{3};\ 2\cos\varphi\le\rho\le4\cos\varphi \end{array} \right\| = \iint\limits_{G_{\rho\varphi}} \rho d\rho d\varphi =$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4^2\cos^2\varphi-2^2\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(16\cos^2\varphi-4\cos^2\varphi\right)d\varphi=\frac{12}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi d\varphi=6\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\left\|\begin{matrix}d\left(2\varphi\right)=2d\varphi\\ d\varphi=\frac{1}{2}d\left(2\varphi\right)\end{matrix}\right\|=3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi+\frac{3}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos2\varphi d\left(2\varphi\right)=3\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\frac{3}{2}\sin2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=3\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=3\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}\ \text{(од.кв.)}$$

***Приклад* 8.3.** Найти площу частини конуса $z^2=x^2+y^2$, яка вирізана параболічним циліндром $z^2=4y$.

Розв'язання.

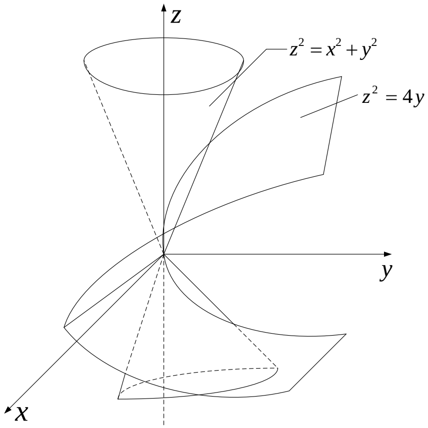

Рисунок 8.4

Оскільки поверхня складається з двох рівних частин (рис. 8.4), то обчислимо площу частини поверхні, яка задовольняє умову $z\geq 0$.

Розглянемо проекцію вирізаної частини поверхні на площину XOY.

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z^2 = 4y, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4y, \\ x^2 + y^2 - 4y &= 0, \\ x^2 + (y-2)^2 &= 2^2. \end{aligned}$$

Вона являє собою коло з центром в точці $(0;2)$ і радіуса $R = 2$ (рис. 8.5).

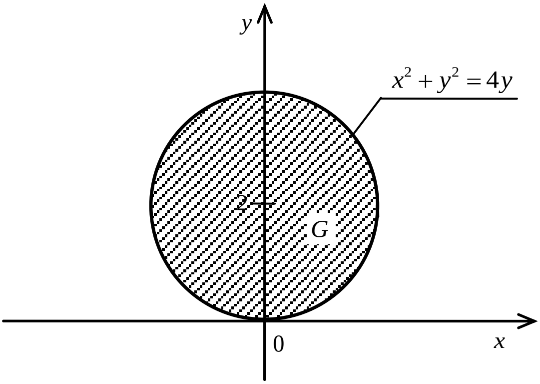

Рисунок 8.5

Скористуємося формулою (8.3).

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (враховуємо, що $z \geq 0$),

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad z'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 4y \right\}.$$

$$\sigma = 2\iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\, dxdy =$$

$$= 2\iint_G \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dxdy = 2\sqrt{2}\iint_G dxdy =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \iint\limits_G dxdy = S_G;\ S_G - \text{площа круга} \\ \text{радіуса } R = 2 \Rightarrow S_G = \pi R^2 = 4\pi \end{array} \right\| = 2\sqrt{2}\cdot 4\pi = 8\sqrt{2}\pi \text{ (од.кв.)}.$$

***Приклад* 8.4.** Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x = 16\sqrt{2y}\,,\ x = \sqrt{2y}\,,\ z + y = 2\,,\ z = 0\,.$$

Розв'язання.

$\left.\begin{array}{l} x = 16\sqrt{2y} \\ x = \sqrt{2y} \end{array}\right.$ – параболічні циліндри;

$\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ z + y = 2 \end{array}\right.$ – площини.

Побудуємо дане тіло в координатному просторі (рис. 8.6).

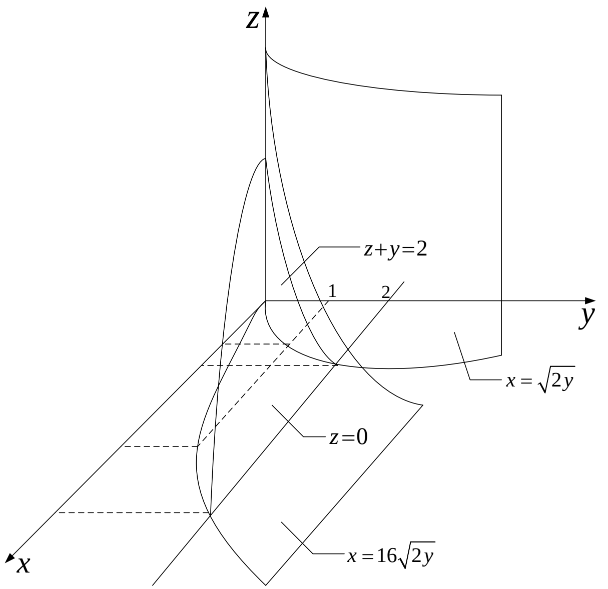

Рисунок 8.6

З рисунка 8.6 видно, що знизу тіло обмежено площиною $z=0$, а зверху – площиною $z+y=2 \Rightarrow z=2-y$.

Зобразимо в координатній площини XOY область D – проекцію даного тіла на площину XOY (рис. 8.7).

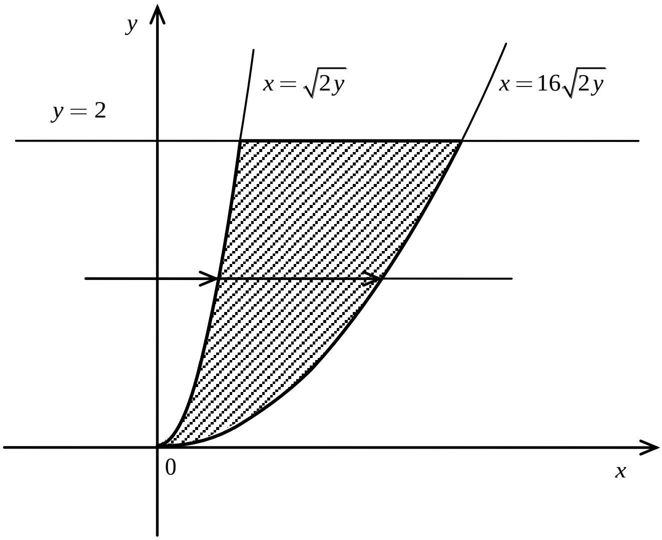

Рисунок 8.7

Таким чином, за формулою (8.1) маємо:

$$V=\iint_D (2-y-0)\,dxdy .$$

З рис. 8.7 видно, що зовнішнім інтегралом при обчисленні об’єму повинен бути інтеграл по змінній y:

$$V=\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{16\sqrt{2y}} (2-y)dx=\int_0^2 dy\cdot(2-y)\int_{\sqrt{2y}}^{16\sqrt{2y}} dx=\int_0^2 (2-y)dy\cdot x\Big|_{\sqrt{2y}}^{16\sqrt{2y}}=$$

$$=\int_0^2 (2-y)\left(16\sqrt{2y}-\sqrt{2y}\right)dy=\int_0^2 (2-y)15\sqrt{2y}dy=$$

$$=15\sqrt{2}\int_0^2\left(2y^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\right)dy=30\sqrt{2}\int_0^2 y^{\frac{1}{2}}dy-15\sqrt{2}\int_0^2 y^{\frac{3}{2}}dy=$$

$$=30\sqrt{2}\left.\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^2-15\sqrt{2}\left.\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^2=$$

$$=\frac{30\cdot\sqrt{2}\cdot 2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-0\right)-\frac{15\cdot\sqrt{2}\cdot 2}{5}\left(2^{\frac{5}{2}}-0\right)=$$

$$=20\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}-6\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=80-48=32 \text{ (од.куб.).}$$

***Приклад* 8.5.** Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x^2+y^2=y,\ x^2+y^2=4y,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0.$$

Розв'язання.

$$\begin{matrix} x^2+y^2=y \\ x^2+y^2=4y \end{matrix}$$ – циліндри, основи яких (у площині XOY) – кола:

$$x^2+y^2=y \Rightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$x^2+y^2=4y \Rightarrow x^2+(y-2)^2=2^2.$$

Оскільки $x^2+y^2-z^2=0$ – конус, то $z=\sqrt{x^2+y^2}$ – частина конуса, що відповідає полупростору $z\geq 0$.

$z=0$ – площина XOY.

Зобразимо тіло в координатному просторі (рис. 8.8).

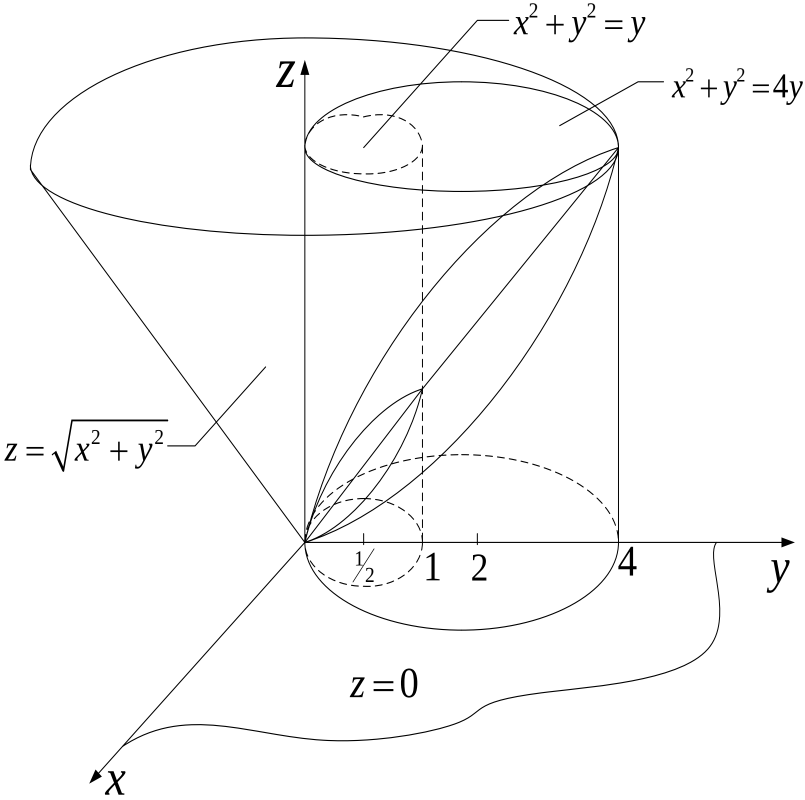

Рисунок 8.8

Зверху тіло обмежено частиною конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вирізаною циліндрами. Знизу – площиною $z=0$. Тоді:

$$V=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\ ,$$

де D – проекція тіла на площину XOY (рис. 8.9)

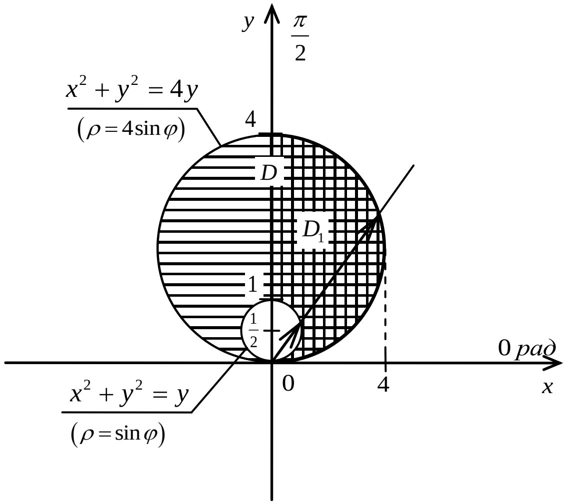

Рисунок 8.9

Оскільки функція $\sqrt{x^2 + y^2}$ – парна по x і y, а область D є симетричною відносно осі OY, то тіло можна розбити на дві рівні частини і обчислити об’єм однієї з них (наприклад, по області D_1):

$$V = 2\iint_{D_1} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy\ . \qquad (*)$$

Для обчислення інтеграла (*) зручно перейти до полярної системи координат: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Тоді $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, а оскільки $y \le x^2 + y^2 \le 4y$, то

$$\rho\sin\varphi \le \rho^2 \le 4\rho\sin\varphi\,,$$

звідки

$$\sin\varphi \le \rho \le 4\sin\varphi\,:$$

$$V=2\iint\limits_{D_{1\rho\varphi}}\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\,\rho\,d\rho\,d\varphi=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{\sin\varphi}^{4\sin\varphi}\rho^2d\rho=$$

$$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cdot\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{\sin\varphi}^{4\sin\varphi}=\frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4^3\sin^3\varphi-\sin^3\varphi\right)d\varphi=\frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}63\sin^3\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{2\cdot 63}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cdot\sin\varphi d\varphi=2\cdot 21\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)\cdot\sin\varphi d\varphi=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\left(\cos\varphi\right)'=-\sin\varphi\\ d\left(\cos\varphi\right)=-\sin\varphi d\varphi\\ \sin\varphi d\varphi=-d\left(\cos\varphi\right)\end{array}\right\|=-42\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\left(\cos\varphi\right)=$$

$$=-42\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\left(\cos\varphi\right)+42\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\left(\cos\varphi\right)=-42\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+42\left.\frac{\cos^3\varphi}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-42\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)+14\left(\cos^3\frac{\pi}{2}-\cos^3 0\right)=-42\cdot\left(-1\right)+14\cdot\left(-1\right)=$$

$=42-14=28$ (ед.куб.).

***Приклад* 8.6.** Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$y=5x^2-2$, $y=-4x^2+7$, $z=4+9x^2+5y^2$, $z=-1+9x^2+5y^2$.

Розв'язання.

$\left.\begin{array}{l}y=5x^2-2\\ y=-4x^2+7\end{array}\right.$ – циліндричні поверхні, твірні яких є параболами.

$\left.\begin{array}{l}z=4+9x^2+5y^2\\ z=-1+9x^2+5y^2\end{array}\right.$ – параболоїди.

$z=4+9x^2+5y^2\Rightarrow 9x^2+5y^2=z-4\Rightarrow z\ge 4$,

$z=-1+9x^2+5y^2\Rightarrow 9x^2+5y^2=z+1\Rightarrow z\ge -1$.

Очевидно, що $-1+9x^2+5y^2 < 4+9x^2+5y^2$, тому $z=-1+9x^2+5y^2$ поверхня, що обмежує тіло знизу, а $z=4+9x^2+5y^2$ − з верху. А циліндри в площині XOY задають область D :

$$D:\left\{(x,y),\ 5x^2-2 \le y \le -4x^2+7\right\}.$$

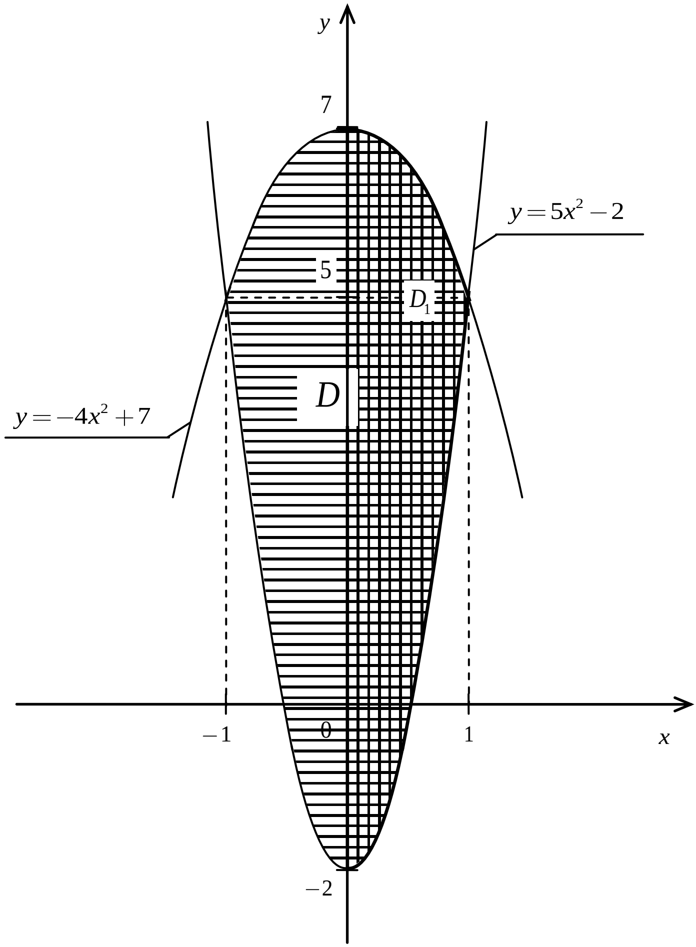

Рисунок 8.10

Знайдемо лінії перетину циліндрів $y=5x^2-2$ і $y=-4x^2+7$:

$$\begin{cases} y=5x^2-2, \\ y=-4x^2+7, \end{cases} \Rightarrow \begin{gathered} 5x^2-2=-4x^2+7, \\ 9x^2=9, \\ x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=5-2=3. \end{gathered}$$

тобто циліндри перетинаються по прямих $\begin{cases} x=1, \\ y=3 \end{cases}$ і $\begin{cases} x=-1, \\ y=3. \end{cases}$

Тоді за формулою (8.1) маємо:

$$V=\iint_D \left[\left(4+9x^2+5y^2\right)-\left(-1+9x^2+5y^2\right)\right]dxdy=$$

$$=\iint_D \left[4+9x^2+5y^2+1-9x^2-5y^2\right]dxdy=5\iint_D dxdy,$$

де D − проекція об'ємного тіла на площині XOY (рис. 8.10).

Область D є симетричною відносно осі OY, тому розглянемо об'єм половини тіла по області D_1:

$$V=2\iint_{D_1} dxdy=2\int_0^1 dx\int_{5x^2-2}^{-4x^2+7} dy=2\int_0^1 dx\cdot y\Big|_{5x^2-2}^{-4x^2+7}=$$

$$=2\int_0^1 dx\cdot\left(-4x^2+7-5x^2+2\right)=2\int_0^1\left(9-9x^2\right)dx=2\left(9x-\frac{9x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=2(9-3)=12 \text{ (од. куб.).}$$

§9. Фізичні застосування подвійних інтегралів

9.1. Обчислення маси неоднорідної пластини

Нехай у площині XOY задана плоску пластину, яка заповнює область G і функцію $\mu(x,y)$, що задає густину в кожній точці пластини. Тоді масса m пластини може бути обчислена за формулою:

$$m = \iint\limits_G \mu(x,y)\,dxdy\,. \qquad (9.1)$$

9.2. Обчислення маси неоднорідної поверхні

Нехай задано поверхню $z = f(x,y)$ з густиною $\mu(x,y)$ в кожній точці поверні. Область G – проекція даної поверхні на площину XOY. Тоді маса поверхні може бути обчислена за формулою:

$$m = \iint\limits_G \mu\big(x,y,f(x,y)\big)\cdot\sqrt{1+\left[f_x'(x,y)\right]^2+\left[f_y'(x,y)\right]^2}\,dxdy\,. \qquad (9.2)$$

9.3. Обчислення статистичних моментів і координат центра ваги

Нехай у площині XOY задано плоску пластину, яка заповнює область G, і функція $\mu(x,y)$ задає густину в кожній точці пластини. Тоді статистичними моментами пластини відносно осей OX і OY відповідно називають наступні величини:

$$M_x = \iint\limits_G y\cdot\mu(x,y)\,dxdy\,, \qquad (9.3)$$

$$M_y = \iint_G x \cdot \mu(x, y)\,dxdy\,. \tag{9.4}$$

Нехай точка $C(x_c, y_c)$ – центр ваги пластини, тоді його координати визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_G x\mu(x, y)\,dxdy}{\iint_G \mu(x, y)\,dxdy}\,, \tag{9.5}$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_G y\mu(x, y)\,dxdy}{\iint_G \mu(x, y)\,dxdy}\,. \tag{9.6}$$

Зокрема, якщо пластина є однорідною, $\mu(x, y) = \text{const}$, тоді:

$$x_c = \frac{\iint_G xdxdy}{S}\,, \qquad y_c = \frac{\iint_G ydxdy}{S}\,, \tag{9.7}$$

де $S = \iint_G dxdy$ – площа даної пластини.

9.4. Обчислення моментів інерції плоскої пластини

Нехай у площині XOY задано плоску пластину, яка заповнює область G, і функція $\mu(x, y)$ задає густину в кожній точці пластини.

Тоді моменти інерції пластини відносно осей OX і OY дорівнюють відповідно:

$$I_x = \iint_G y^2 \cdot \mu(x, y)\,dxdy\,, \tag{9.8}$$

$$I_y = \iint_G x^2 \cdot \mu(x, y)\,dxdy\,. \tag{9.9}$$

Момент інерції пластини відносно початку координат визначається формулою:

$$I_o = I_x + I_y = \iint\limits_G \left(x^2 + y^2\right) \cdot \mu\left(x, y\right) dxdy . \qquad (9.10)$$

***Приклад* 9.1.** Обчислити масу частини кільця, яке заповнює область

$$G: 1 \le x^2 + y^2 \le 16; x \ge 0; y \ge 0 \text{ . Густина } - \mu = \frac{x+y}{x^2+y^2} .$$

Розв'язання.

Згідно з формулою (9.1), маємо: $m = \iint\limits_G \frac{x+y}{x^2+y^2} dxdy$.

Побудуємо область G у площині XOY (рис. 9.1)

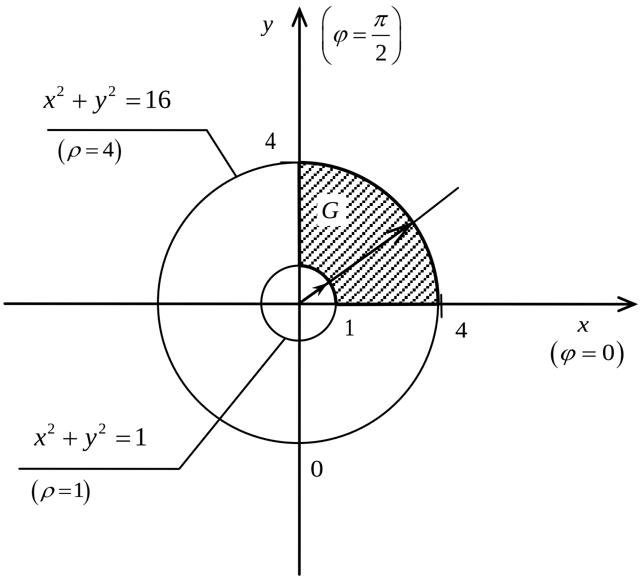

Рисунок 9.1

Оскільки область G обмежена колами та променями, перейдемо до полярних координат.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \quad dxdy = \rho d\rho d\varphi .$$

Тоді рівняння ліній, що обмежують область, приймають вигляд:

$$y = 0 \Rightarrow \varphi = 0, (x \geq 0); \; x = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, (y \geq 0).$$

$1 \leq x^2 + y^2 \leq 16 \Rightarrow 1 \leq \rho^2 \leq 16 \Rightarrow 1 \leq \rho \leq 4$. Отримаємо:

$$m = \iint\limits_{G_{\rho\varphi}} \frac{\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi}{\rho^2}\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^4 \frac{\rho^2(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\rho^2} d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \int\limits_1^4 d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \cdot \rho\Big|_1^4 =$$

$$= (4-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi = 3(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 3\left(\left(\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right) - (\sin 0 - \cos 0)\right) = 3 \cdot 2 = 6 .$$

***Приклад* 9.2.** Знайти координати центра ваги пластини, обме-женої лініями $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$, $y^2 = 2x$ $(y \geq 0)$ з густиною $\mu(x, y) = 4x + 9y^2$.

Розв'язання.

Побудуємо область G у площині XOY (рис. 9.2).

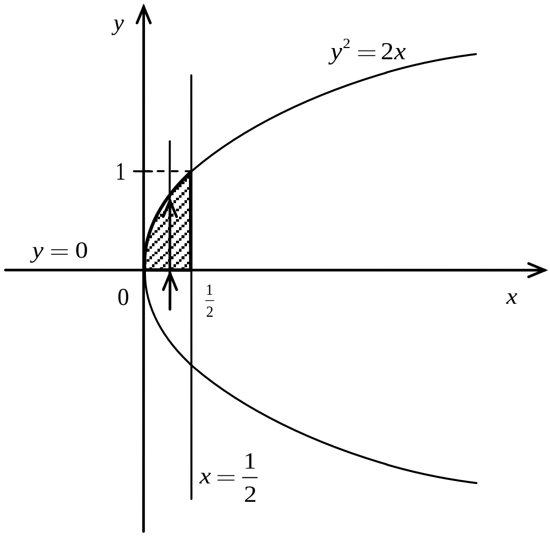

Рисунок 9.2

Враховуючи формулу (9.1), обчислимо масу пластини:

$$m = \iint_G \left(4x + 9y^2\right) dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} \left(4x + 9y^2\right) dy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \cdot \left(4x \cdot y + 9\frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{\sqrt{2x}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(4\sqrt{2} x^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{2^3}\, x^{\frac{3}{2}} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 10\sqrt{2} x^{\frac{3}{2}} dx = 10\sqrt{2} \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 2}{5} \cdot \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 1.$$

Згідно з формулами (9.5) і (9.6) маємо:

$$x_c = \frac{\iint\limits_G x\cdot\left(4x+9y^2\right)dxdy}{m} = \iint\limits_G\left(4x^2+9xy^2\right)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2x}} \left(4x^2+9xy^2\right)dy = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx\cdot\left.\left(4x^2y+9x\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^{\sqrt{2x}} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(4x^2\cdot\sqrt{2}\sqrt{x}+3x\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{x^3}\right)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(4\sqrt{2}x^{\frac{5}{2}}+6\sqrt{2}x^{\frac{5}{2}}\right)dx =$$

$$= 10\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}dx = 10\sqrt{2}\cdot\left.\frac{2\cdot x^{\frac{7}{2}}}{7}\right|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{10\cdot 2\sqrt{2}}{7}\cdot\frac{1}{2^{\frac{7}{2}}} = \frac{10\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{7\cdot 8\cdot\sqrt{2}} = \frac{5}{14},$$

$$y_c = \frac{\iint\limits_G y\cdot\left(4x+9y^2\right)dxdy}{m} = \iint\limits_G\left(4xy+9y^3\right)dxdy = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{2x}}\left(4xy+9y^3\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx\cdot\left.\left(4x\frac{y^2}{2}+9\frac{y^4}{4}\right)\right|_0^{\sqrt{2x}} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(2x\cdot\left(\sqrt{2x}\right)^2+\frac{9}{4}\left(\sqrt{2x}\right)^4\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(4x^2+\frac{9}{4}\cdot 4x^2\right)dx = 13\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^2dx = 13\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{3\cdot 8} = \frac{13}{24}.$$

Отже, центр ваги пластини знаходиться в точці $C\left(\frac{5}{14};\frac{13}{24}\right)$.

ГЛАВА 3. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

§1. Означення криволінійного інтеграла I роду

Нехай задано просторову криву AB. На кривій та в деякому її околі задано функцію трьох змінних $f(x,y,z)$. Нехай P – деяке розбиття кривої AB на частини точками $M_0 = A$, M_1, M_2, …, $M_n = B$, і λ – діаметр розбиття P $(\lambda = \mathrm{diam}P)$. На кожній елементарній дузі $M_i M_{i+1}$ виберемо довільну точку $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і побудуємо суму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta l_i , \tag{1.1}$$

де Δl_i – довжина елементарної дуги $M_i M_{i+1}$.

Сума (1.1) називається *інтегральною сумою* для функції $f(x,y,z)$ вздовж кривої AB.

Означення 1.1. Якщо існує границя інтегральної суми (1.1) при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$ і ця границя не залежить від розбиття P й вибору точок $\{N_i\}_{i=1}^{n}$, то функція $f(x,y,z)$ називається *інтегровною на кривій* AB, а сама границя – *криволінійним інтегралом I роду* (*по довжині дуги* AB)*:*

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dl = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta l_i . \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. Якщо L – кусково-гладка крива скінченної довжини, а функція f є неперервною в кожній точці кривої L, то функція f інтегровна на кривій L.

§2. Властивості криволінійного інтеграла I роду

1°. Властивість лінійності.

Нехай функції $f_1(x,y,z)$ та $f_2(x,y,z)$ є інтегровними на кривій AB, а λ_1 і λ_2 – сталі величини, тоді лінійна комбінація цих функцій: $\lambda_1 f_1(x,y,z)+\lambda_2 f_2(x,y,z)$ – також інтегровна на кривій AB, і є справедливою наступна формула:

$$\int_{AB}\left(\lambda_1 f_1(x,y,z)+\lambda_2 f_2(x,y,z)\right)dl=\lambda_1\int_{AB} f_1(x,y,z)\,dl+$$
$$+\lambda_2\int_{AB} f_2(x,y,z)\,dl. \qquad (2.1)$$

2°. Адитивність відносно шляху інтегрування.

Нехай криві AB і BC не мають спільних внутрішніх точок, і функція $f(x,y,z)$ є інтегровною на кривій $AB\cup BC$, тоді функція f є інтегровною на кожній з кривих AB і BC, і є справедливою наступна формула:

$$\int_{AB\cup BC} f(x,y,z)\,dl=\int_{AB} f(x,y,z)\,dl+\int_{BC} f(x,y,z)\,dl. \qquad (2.2)$$

3°. Якщо функції $f(x,y,z)$ і $\varphi(x,y,z)$ задовольняють нерівність $f(x,y,z)\le\varphi(x,y,z)$ для будь-яких точок (x,y,z) кривої AB, і обидві функції є інтегровними на кривій AB, то є справедливою наступна формула:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dl\le\int_{AB}\varphi(x,y,z)\,dl.$$

4°. Якщо функція $f(x,y,z)$ є інтегровною на кривій AB, то і функція $\left|f(x,y,z)\right|$ також є інтегровною на кривій AB і

$$\left| \int_{AB} f(x,y,z)\,dl \right| \le \int_{AB} \left| f(x,y,z) \right| dl \, .$$

5°. Нехай M – найбільше значення функції $f(x,y,z)$ на кривій AB, а m – найменше значення цієї функції на кривій AB $\left(M = \max\limits_{(x,y,z)\in AB} f(x,y,z);\ m = \min\limits_{(x,y,z)\in AB} f(x,y,z) \right)$, тоді:

$$m \cdot L \le \int_{AB} f(x,y,z)\,dl \le M \cdot L \, ,$$

де L – довжина кривої AB.

§3. Обчислення криволінійного інтеграла I роду

Нехай у просторі $\mathbb{R}^3$ криву AB подано довільними параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \ \alpha \le t \le \beta, \\ z = z(t) \end{cases}$$

які задають функції, неперервні разом зі своїми похідними.

Нехай функція $f(x, y, z)$ є інтегровною на кривій AB. Тоді

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[x(t), y(t), z(t)\right]\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2 + \left[z'(t)\right]^2}dt. \quad (3.1)$$

Якщо AB – плоска крива $\left(AB \in \mathbb{R}^2\right)$, і функція $f(x, y)$ – інтегровна на AB, тоді:

1) якщо криву AB задано явним виразом $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, і функція $y(x)$ неперервна на $[a,b]$ разом зі своєю похідною, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{a}^{b} f\left[x, y(x)\right]\sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}dx; \quad (3.2)$$

2) якщо криву AB задано параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [\alpha, \beta],$$

де функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервні на $[\alpha, \beta]$ разом зі своїми похідними, то:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[x(t), y(t)\right]\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}dt; \quad (3.3)$$

3) якщо криву AB задано в полярній системі координат рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$ ($\rho(\varphi)$ неперервна на $[\alpha,\beta]$ разом зі своєю похідною, тому що перехід від декартової системи координат до полярної задається рівняннями $x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi$), то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi\right]\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi\,. \quad (3.4)$$

***Приклад* 3.1.** Обчислити криволінійні інтеграли I роду

$$\int\limits_L \sqrt{1+\cos^4 x}\,dl\ ,$$

де $L: y=\operatorname{tg}x \ \left(0\le x\le\dfrac{\pi}{4}\right)$

Розв'язання.

Криву задано явно, тому застосуємо формулу (3.2), де

$$dl=\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx\,.$$

Знайдемо y'_x: $y'_x=(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Тоді:

$$dl=\sqrt{1+\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2}dx=\sqrt{1+\frac{1}{\cos^4 x}}dx=\frac{\sqrt{\cos^4 x+1}}{\cos^2 x}dx\,;$$

$$\int\limits_L \sqrt{1+\cos^4 x}\,dl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\cos^4 x}\cdot\frac{\sqrt{1+\cos^4 x}}{\cos^2 x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos^4 x}{\cos^2 x}dx=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\cos^2 x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = tg\frac{\pi}{4}-tg0+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx = 1+\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xd\left(2x\right) = 1+\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1+\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right) =$$

$$=1+\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}+\frac{\pi}{8}=\frac{10+\pi}{8}.$$

***Приклад* 3.2.** Обчислити криволінійні інтеграли І роду

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl,$$

де L – дуга лемніскати $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання.

Криву задано рівнянням в полярних координатах, тому за формулою (3.4), $dl=\sqrt{\rho^2\left(\varphi\right)+\left[\rho'\left(\varphi\right)\right]^2}\,d\varphi$:

$$\rho'\left(\varphi\right) = a\cdot\frac{1}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot\left(-\sin 2\varphi\right)\cdot 2 = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

$$dl=\sqrt{a^2\cos 2\varphi+\frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=\sqrt{a^2\,\frac{\cos^2 2\varphi+\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=$$

$$=\frac{|a|}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi.$$

Тоді:

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \left\| \begin{array}{l} \begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi \end{cases} \\ x^2+y^2 = a^2\cos 2\varphi\cos^2\varphi + a^2\cos 2\varphi\sin^2\varphi = \\ = a^2\cos 2\varphi\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) = a^2\cos 2\varphi \end{array} \right\| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{a^2\cos 2\varphi}\cdot\frac{|a|}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |a|\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\frac{|a|}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi = a^2\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

***Приклад* 3.3.** Обчислити $\int_L y\,dl$, де L – перша арка циклоїди $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$.

Розв'язання.

Криву задано параметрично, використаємо формулу (3.3). Оскільки L – перша арка циклоїди, то параметр приймає значення $t\in[0;2\pi]$.

$$dl = \sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt = \left\| \begin{array}{l} x'(t)=3(1-\cos t) \\ y'(t)=3\sin t \end{array} \right\| =$$

$$= \sqrt{3^2(1-\cos t)^2+3^2\sin^2 t}\,dt = 3\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 3\sqrt{2-2\cos t}\,dt = 3\sqrt{2\cdot(1-\cos t)}\,dt = 3\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= 3\cdot 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = \left\| 0\le t\le 2\pi \Rightarrow 0\le\frac{t}{2}\le\pi \Rightarrow \sin\frac{t}{2}\ge 0 \right\| = 6\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

$$\int_L y\,dl = \int_0^{2\pi} 3(1-\cos t)\cdot 6\sin\frac{t}{2}\,dt = 18\int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\cos t\right)dt =$$

$$=\left\|\sin\frac{t}{2}\cos t=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3t}{2}+\sin\left(-\frac{t}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\right\|=$$

$$=18\int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{3t}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\right)dt=18\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{3t}{2}\right)dt=$$

$$=27\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt-9\int_0^{2\pi}\sin\frac{3t}{2}dt=27\cdot 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right)-9\cdot\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\sin\frac{3t}{2}d\left(\frac{3t}{2}\right)=$$

$$=\left(-54\cos\frac{t}{2}+6\cos\frac{3t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-54\cos\pi+6\cos 3\pi+54\cos 0-6\cos 0=$$

$$=54-6+54-6=108-12=96\,.$$

Приклад **3.4.** Обчислити $\int\limits_L(3x-5y+z+2)dl$, де L – відрізок прямої між точками $A(4;1;6)$ і $B(5;3;8)$.

Розв'язання.

Запишемо параметричні рівняння відрізка AB:

$$\frac{x-4}{5-4}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-6}{8-6}\Rightarrow\frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-6}{2}=t\,;$$

$$\begin{array}{l}\dfrac{x-4}{1}=t,\\ \dfrac{y-1}{2}=t,\\ \dfrac{z-6}{2}=t;\end{array}\Rightarrow\begin{cases}x=t+4,\\ y=2t+1,\\ z=2t+6,\end{cases}\text{, де } 0\le t\le 1.$$

Тоді за формулою (3.1): $dl=\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2+\left[z'(t)\right]^2}dt$.

$x'(t)=1$, $y'(t)=2$, $z'(t)=2$, $dl=\sqrt{1^2+2^2+2^2}dt=3dt$.

Остаточно маємо:

$$\int_L (3x-5y+z+2)\,dl = \int_0^1 \big(3\cdot(t+4)-5\cdot(2t+1)+2t+6+2\big)\cdot 3dt =$$

$$= 3\int_0^1 (3t+12-10t-5+2t+8)dt = 3\int_0^1 (-5t+15)dt = -15\int_0^1 tdt +$$

$$+45\int_0^1 dt = \left(-\frac{15}{2}t^2+45t\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{15}{2}+45 = 37.5\,.$$

***Приклад* 3.5.** Обчислити $\int_L \sqrt{2x^2+y^2}\,dl$, де L – крива перетину сфери та площини: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ z=x. \end{cases}$

Розв'язання.

Складемо параметричні рівняння даної лінії. Для цього в рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$ підставимо рівняння площини $z=x$ і отримаємо рівняння проекції шуканої кривої на площину XOY:

$$x^2+y^2+x^2=a^2 \Rightarrow 2x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2/2}+\frac{y^2}{a^2}=1\,.$$

Таким чином, проекція кривої L – эліпс з напівосями $\frac{a}{\sqrt{2}}$ і a.

Параметричні рівняння эліпса наступні:

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t, \\ y=a\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi\,. \\ z=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t; \end{cases} \tag{3.5}$$

Для обчислення $dl=\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2+\left[z'(t)\right]^2}dt$ знайдемо похідні функцій (3.1):

$$x'(t)=-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t\ ,\ \ y'(t)=a\cos t\ ,\ \ z'(t)=-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t\ .$$

Остаточно маємо: $\int\limits_L\sqrt{2x^2+y^2}dl=$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot\frac{a^2}{2}\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{2}\sin^2 t+a^2\cos^2 t+\frac{a^2}{2}\sin^2 t}dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}|a|\cdot|a|\,dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}dt=a^2\cdot t\Big|_0^{2\pi}=2a^2\pi\ .$$

§4. Застосування криволінійних інтегралів I роду

4.1. Обчислення довжини дуги кривої AB.

$$|L| = \int\limits_{AB} dl\,. \qquad (4.1)$$

4.2. Обчислення маси матеріальної кривої AB, густину якої в кожній точці кривої задано функцією $\mu(x,y,z)$:

$$m = \int\limits_{AB} \mu(x,y,z)\,dl\,. \qquad (4.2)$$

4.3. Обчислення статистичних моментів матеріальної кривої AB, густину якої в кожній точці кривої задано функцією $\mu(x,y,z)$:

$$M_{XOY} = \int\limits_{AB} z\cdot\mu(x,y,z)\,dl\,, \qquad (4.3)$$

$$M_{YOZ} = \int\limits_{AB} x\cdot\mu(x,y,z)\,dl\,, \qquad (4.4)$$

$$M_{XOZ} = \int\limits_{AB} y\cdot\mu(x,y,z)\,dl\,. \qquad (4.5)$$

4.4. Обчислення координат центра ваги матеріальної кривої AB, густину якої в кожній точці кривої задано функцією $\mu(x,y,z)$:

$$x_c = \frac{M_{YOZ}}{m} = \frac{\int\limits_{AB} x\cdot\mu(x,y,z)\,dl}{\int\limits_{AB} \mu(x,y,z)\,dl}\,, \qquad (4.6)$$

$$y_c = \frac{M_{XOZ}}{m} = \frac{\int\limits_{AB} y\cdot\mu(x,y,z)\,dl}{\int\limits_{AB} \mu(x,y,z)\,dl}\,, \qquad (4.7)$$

$$z_c = \frac{M_{XOY}}{m} = \frac{\int\limits_{AB} z\cdot\mu(x,y,z)\,dl}{\int\limits_{AB} \mu(x,y,z)\,dl}\,. \qquad (4.8)$$

4.5. Обчислення момента інерції матеріальної кривої AB, густину якої в кожній точці кривої задано функцією $\mu(x,y,z)$:

1) відносно координатних площин:

$$I_{XOY} = \int\limits_{AB} z^2 \cdot \mu(x,y,z)\,dl, \tag{4.9}$$

$$I_{YOZ} = \int\limits_{AB} x^2 \cdot \mu(x,y,z)\,dl, \tag{4.10}$$

$$I_{XOZ} = \int\limits_{AB} y^2 \cdot \mu(x,y,z)\,dl; \tag{4.11}$$

2) відносно осей координат:

$$I_{OX} = I_{XOY} + I_{XOZ} = \int\limits_{AB} \left(z^2 + y^2\right)\mu(x,y,z)\,dl, \tag{4.12}$$

$$I_{OY} = I_{XOY} + I_{YOZ} = \int\limits_{AB} \left(z^2 + x^2\right)\mu(x,y,z)\,dl, \tag{4.13}$$

$$I_{OZ} = I_{XOZ} + I_{YOZ} = \int\limits_{AB} \left(y^2 + x^2\right)\mu(x,y,z)\,dl; \tag{4.14}$$

3) відносно початку координат:

$$I_o = I_{XOY} + I_{XOZ} + I_{YOZ} = \int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\mu(x,y,z)\,dl. \tag{4.15}$$

***Приклад* 4.1.** Обчислити масу і координати центра ваги дуги плоскої матеріальної кривої $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $0 \le x \le 1$, яка має густину $\mu(x,y) = y \cdot \sqrt{1+x}$.

Розв'язання.

За формулою (4.2), оскільки крива є плоскою, маємо наступну формулу:

$$m=\int_L \mu(x,y)dl=\int_a^b \mu\left[x,y(x)\right]\cdot\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx=$$

$$=\left\| y'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}} \right\|=$$

$$=\int_0^1 \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{x+1}dx=\frac{2}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot(1+x)dx=\frac{2}{3}\int_0^1\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{7/2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{15}+\frac{4}{21}=\frac{28+20}{3\cdot5\cdot7}=\frac{48}{3\cdot5\cdot7}=\frac{16}{35}.$$

$$M_{YO}=\int_{AB} x\cdot\mu(x,y)dl=\left\| \begin{matrix} dl=\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx \\ dl=\sqrt{1+x}dx \end{matrix} \right\|=$$

$$=\int_0^1 x\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}(1+x)dx=\frac{2}{3}\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x^{\frac{7}{2}}}{7/2}+\frac{x^{\frac{9}{2}}}{9/2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{9}\right)=\frac{2\cdot2\cdot(9+7)}{3\cdot7\cdot9}=$$

$$=\frac{4\cdot16}{21\cdot9}=\frac{64}{189}.$$

$$M_{XO}=\int_{AB} y\cdot\mu(x,y)dl=\left\| \begin{matrix} dl=\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx \\ dl=\sqrt{1+x}dx \end{matrix} \right\|=$$

$$=\int_0^1 \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{x+1}dx=\frac{4}{9}\int_0^1 x^3\cdot(1+x)dx=\frac{4}{9}\int_0^1\left(x^3+x^4\right)dx=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{4\cdot5}=\frac{1}{5}.$$

По формулах (4.6) для плоскої кривої маємо:

$$x_c = \frac{M_{OY}}{m} = \frac{64}{189}\Big/\frac{16}{35} = \frac{64 \cdot 35}{189 \cdot 16} = \frac{4 \cdot 5}{27} = \frac{20}{27},$$

$$y_c = \frac{M_{OX}}{m} = \frac{1}{5}\Big/\frac{16}{35} = \frac{35}{5 \cdot 16} = \frac{7}{16}.$$

Таким чином, центр ваги плоскої кривої разтошований у точці $\left(\frac{20}{27}; \frac{7}{16}\right)$.

§5. Криволінійний інтеграл II роду (по орієнтованій кривій)

Нехай задано просторову криву AB, на якій введено певний напрямок, і нехай вздовж неї задано функцію трьох змінних $P(x,y,z)$. Разібъємо криву AB на частини точками:

$$M_0 = A; M_1; M_2; ...; M_i; ...; M_n = B.$$

Виберемо на елементарній дузі $M_i M_{i+1}$ точку $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Обчислимо значення функції $P(N_i) = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і помножимо його на величину проекції цієї дуги на вісь OX, тобто на $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$. Складемо суму:

$$I_n^{(1)} = \sum_{i=0}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i \ . \qquad (5.1)$$

Сума (5.1) називається *інтегральною сумою* для функції $P(x,y,z)$ вздовж дуги AB, що відповідає даному розбиттю й даному вибору точок $\{N_i\}_{i=1}^{n}$.

Означення 5.1. Якщо при $n \to \infty$ інтегральна сума (5.1) має скінченну границю, яка не залежить ані від способу розбиття кривої, ані від вибору точок $\{N_i\}$, то ця границя називається *криволінійним інтегралом II роду від* функції $P(x,y,z)$, по шляху AB і позначається:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i \ . \qquad (5.2)$$

Аналогічно визначаються інтеграли виду:

$$\int_{AB} Q(x,y,z)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i \ , \qquad (5.3)$$

та

$$\int_{AB} R(x,y,z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i \qquad (5.4)$$

де функції $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ задано вздовж кривої AB, а Δy_i и Δz_i – проекції елементарної дуги M_iM_{i+1} на осі OY и OZ відповідно.

І, нарешті, розглянемо інтеграл загального виду:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Q(x,y,z)\Delta y_i + R(x,y,z)\Delta z_i\right].$$

Основні властивості визначеного інтеграла (лінійность та адитивність) переносяться на розглядуваний криволінійний інтеграл. Основною відмінною властивістю криволінійного інтеграла II роду є те, що зі зміною напрямку кривої на протилежне знак інтеграла міняється на протилежний:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= -\int_{BA} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \qquad (5.5)$$

Для обчислення криволінійного інтеграла II роду задамо криву AB параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad (5.6)$$

причому функції (5.6) неперервні, та зі зміною параметра t від α до β крива описує саме напрямок від точки A до точки B (причому не обов'язково $\alpha < \beta$). Функцію $P(x,y,z)$ вздовж кривої AB також будемо припускати неперервною. Також, для інтеграла (5.2) є необхідним існування й неперервність $x'(t)$.

За цих припускань криволінійний інтеграл (5.2) існує, і має місце рівність:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot x'(t)\,dt\,. \tag{5.7}$$

Таким чином, для обчислення криволінійного інтеграла (5.2) треба замінити в подінтегральній функції змінні x, y і z їхніми виразами (5.6) через параметр t, а множник dx – диференціалом змінної x як функції від параметра t.

Порядок розставлення меж в останньому інтегралі відповідає на цей раз вибраному на кривій напрямкові. Переходячи до інтегралів (5.3) і (5.4), можна встановити їх існування та, за умови існування і неперервності $y'(t)$ і $z'(t)$ відповідно, довести формули:

$$\int\limits_{AB} Q(x,y,z)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot y'(t)\,dt\,, \tag{5.8}$$

$$\int\limits_{AB} R(x,y,z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot z'(t)\,dt\,. \tag{5.9}$$

Нарешті, якщо мова йде про інтеграл загального виду, тоді:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \\ &= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big[P\big(x(t);y(t);z(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t);y(t);z(t)\big)\cdot y'(t) + \\ &\qquad + R\big(x(t);y(t);z(t)\big)\cdot z'(t)\Big]dt\,.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Якщо крива AB міститься в площині XOY, тоді

$$\begin{aligned}&\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \\ &= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big[P\big(x(t);y(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t);y(t)\big)\cdot y'(t)\Big]dt\,.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Якщо плоску криву AB задано явним виразом $y = f(x)$, де $x \in [a,b]$, і $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, то:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot y'(x) \right] dx . \qquad (5.12)$$

***Приклад* 5.1.** Обчислити криволінійні інтеграли II роду

$$\int\limits_{AB} ydx + \left(x + z^2\right)dy + \left(x + y + z\right)dz ,$$

де AB – відрізок, який з'єднує точки $A(2;-1;0)$ і $B(1;3;-2)$.

Розв'язання.

Для того, щоб застосувати формулу (5.10), параметризуємо відрізок AB:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{-1-3} = \frac{z+2}{0+2} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = t+1, \\ y = -4t+3, \\ z = 2t-2. \end{cases}$$

Точка A відповідає значенню параметра $t = 1$, а точка B відповідає значенню параметра $t = 0$. Тоді $x'(t) = 1$, $y'(t) = -4$ і $z'(t) = 2$. Остаточно маємо:

$$\int\limits_{AB} ydx + \left(x + z^2\right)dy + \left(x + y + z\right)dz = \int\limits_1^0 \left[\left(-4t+3\right) \cdot 1 + \right.$$

$$\left. + \left(t + 1 + \left(2t-2\right)^2\right) \cdot (-4) + \left(t + 1 - 4t + 3 + 2t - 2\right) \cdot 2 \right] dt =$$

$$= -\int\limits_0^1 \left(-4t + 3 - 4t - 4 - 16t^2 + 32t - 16 - 2t + 4\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(16t^2 - 22t + 13\right) dt = \left. \left(16 \cdot \frac{t^3}{3} - 22 \cdot \frac{t^2}{2} + 13 \cdot t\right) \right|_0^1 = \frac{16}{3} - 11 + 13 = 7\frac{1}{3} .$$

***Приклад* 5.2.** Обчислити криволінійні інтеграли II роду

$$\int\limits_{AB} ydx + xdy ,$$

де AB – дуга астроїди $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$ від точки $A(8;0)$ до точки $B\left(2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

Розв'язання.

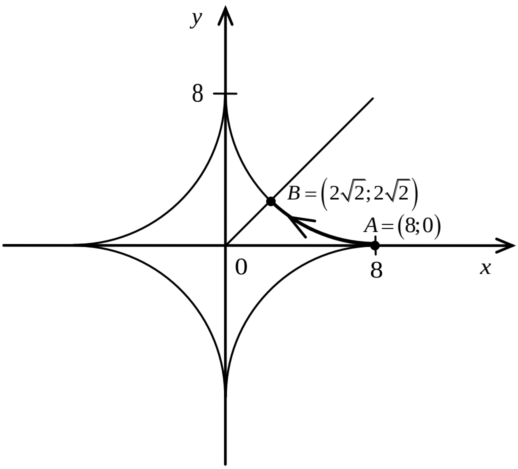

Рисунок 5.1

Дуга астроиди AB (рис. 5.1), задана параметрично. Визначимо межі змінювання параметра t при переході від точки A до точки B, враховуючи, що $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$$A(8;0) \Rightarrow \begin{cases} 8 = 8\cos^3 t, \\ 0 = 8\sin^3 t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = 1, \\ \sin t = 0; \end{cases} \Rightarrow t = 0.$$

$$B\left(2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{2}=8\cos^3 t,\\ 2\sqrt{2}=8\sin^3 t;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos t=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin t=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\end{cases}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}.$$

Тоді за формулою (5.11) маємо:

$$\int\limits_{AB} ydx+xdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[8\sin^3 t\cdot 8\cdot 3\cos^2 t\left(-\sin t\right)+8\cos^3 t\cdot 8\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t\right]dt=$$

$$=64\cdot 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[-\cos^2 t\sin^4 t+\sin^2 t\cos^4 t\right]dt=$$

$$=64\cdot 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)\right]dt=64\cdot 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2t}{4}\cdot\cos 2tdt=$$

$$=48\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\cdot\cos 2tdt=\left\|\begin{matrix}\left(\sin 2t\right)'=2\cos 2t\\ d\left(\sin 2t\right)=2\cos 2tdt\\ \cos 2tdt=\dfrac{1}{2}d\left(\sin 2t\right)\end{matrix}\right\|=\frac{48}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2td\left(\sin 2t\right)=$$

$$=24\cdot\left.\frac{\sin^3 2t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=8\cdot\left(\sin^3\frac{\pi}{2}-\sin^3 0\right)=8.$$

§6. Криволінійний інтеграл II роду по замкненому контуру. Формула Гріна

Нехай L – плоска замкнена крива, яка є межею області D. Додатним напрямком обходу області D, обмеженої кривою L, називається такий напрямок, при якому область D завжди залишається зліва. Крива в цьому випадку називається *орієнтованою*. Замкнена орієнтована крива називається *контуром*.

Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ задано в області D та на її межі L. Для *інтеграла II роду по замкненому контуру* вводиться спеціальне позначення:

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\,. \qquad (6.1)$$

Для інтегралів (6.1) є справедливою формула, яка дає з'вязок між криволінійним інтегралом II роду по замкненому контуру та подвійним інтегралом.

Теорема Грина. Нехай область D обмежена контуром L, а функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – неперервно диференційовані в області D та на її межі L. Тоді є справедливою наступна формула:

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,. \qquad (6.2)$$

Формула (6.2) називається *формулою Гріна*.

Якщо в деякій одноз'вязной області D виконуються умови теореми Гріна, то наступні ствердження є еквівалентними:

1°. $\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, якщо L – довільний замкнений контур всередині області D.

2°. Інтеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ не залежить від шляху інтегрування, який з'єднує точки A і B.

3°. Для всіх точок області виконується рівність:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}.$$

4°. Вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dU(x,y).$$

Якщо виконується ствердження 4, то функцію $U(x,y)$ можна відновити за її повним диференціалом.

Нехай $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dU(x,y)$, тоді інтеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ не залежить від шляху інтегрування. Нехай $A(x_0,y_0)$ і $B(x,y)$ – довільні точки всередині області D, тоді

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dU(x,y)=U(x,y)-U(x_0,y_0). \qquad (6.3)$$

Якщо точки *A*, *B* *і* *C* з’єднані ламаною (рис. 6.1), то можна застосувати властивості адитивності й незалежності інтеграла від шляху інтегрування:

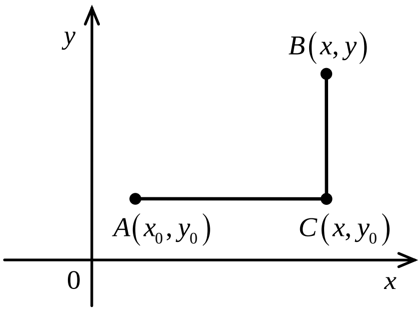

Рисунок 6.1

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=\int\limits_{AC\cup CB} Pdx+Qdy=\int\limits_{AC} Pdx+Qdy+\int\limits_{CB} Pdx+Qdy. \qquad (6.4)$$

Якщо у виразі (6.4) криві задано параметрично, то інтеграл приймає вигляд:

$$\int_{AC} Pdx + Qdy = \left\| AC: \begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 0 \end{matrix} \atop t: x_0 \to x \right\| = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt ,$$

$$\int_{CB} Pdx + Qdy = \left\| CB: \begin{cases} x = x \ (\mathrm{const}) \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix} \atop t: y_0 \to y \right\| = \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\, dt .$$

Враховуючи вираз (6.3), маємо:

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\, dt ,$$

або $$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\, dt + C . \tag{6.5}$$

Аналогічно, якщо

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = dU(x, y, z) ,$$

тоді

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\, dt + C .$$

***Приклад* 6.1.** Обчислити $\oint_L (x + y)dx - (x - y)dy$, L – еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Розв'язання.

Оскільки контур L є замкненим, а функції: $P(x, y) = x + y$, $Q(x, y) = -(x - y)$ – неперервно диференційовні всередині контура й на самому контурі, то є справедливою формула Гріна (6.2):

$$\oint_L (x+y)\,dx-(x-y)\,dy=\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial P}{\partial y}=1\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1\end{matrix}\right\|=\iint_D(-1-1)\,dxdy=-2\iint_D dxdy=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\iint_D dxdy \text{ есть площа } S_D \text{ області } D,\\ \text{так як } D-\text{эліпс, то } S_D=\pi ab\end{matrix}\right\|=-2\cdot\pi ab=-2\pi ab\,.$$

***Приклад* 6.2.** Встановити, що вираз $3x^2e^y dx+\left(x^3e^y+1\right)dy$ є повним диференціалом функції $U(x,y)$ і знайти цю функцію.

Розв'язання.

Перевіримо для даного виразу виконання ствердження 3° $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$:

$$\begin{matrix}P(x,y)=3x^2e^y\\ Q(x,y)=x^3e^y+1\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\dfrac{\partial P}{\partial y}=3x^2e^y\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=3x^2e^y\end{matrix}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}\,.$$

Таким чином , $3x^2e^y dx+\left(x^3e^y+1\right)dy=dU(x,y)$.

Тоді за формулою (6.5) маємо:

$$U(x,y)-U(x_0,y_0)=\int_{x_0}^{x}3t^2e^{y_0}dt+\int_{y_0}^{y}\left(x^3e^t+1\right)dt=3\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_{x_0}^{x}\cdot e^{y_0}+\left.\left(x^3e^t+t\right)\right|_{y_0}^{y}=$$

$$=x^3e^{y_0}-x_0^3e^{y_0}+x^3e^y-x^3e^{y_0}+y-y_0=\left(x^3e^y+y\right)-\left(x_0^3e^{y_0}+y_0\right).$$

Отже, $U(x,y)=x^3e^y+y+C$.

§7. Застосування криволінійного інтеграла II роду

7.1 Обчислення площі області D, обмеженої замкненим контуром L по одній з формул (які випливають з формули Гріна):

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx, \tag{7.1}$$

$$S = \oint\limits_L xdy, \tag{7.2}$$

$$S = -\oint\limits_L ydx. \tag{7.3}$$

7.2. Обчислення роботи W змінної сили $\vec{F}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж деякої кривої AB:

якщо $\vec{F} = \left\{P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\right\}$, то

$$W = \int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \tag{7.4}$$

***Приклад* 7.1.** Обчислити роботу сили

$$\vec{F} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 + y^2\right)\vec{j}$$

по переміщенню матеріальної точки вздовж дуги еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $\left(y \ge 0\right)$ від точки $A(3;0)$ до точки $B(-3;0)$.

Розв'язання.

В даному випадку формула (7.4) приймає вигляд:

$$W = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{7.5}$$

$$P(x,y) = x^2 - y^2,\ Q(x,y) = x^2 + y^2.$$

Рівняння еліпса зручно подати в параметричному вигляді, отже:

$$W=\int_L\left(x^2-y^2\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=$$

$$=\left\|\begin{array}{l} L:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\Rightarrow\begin{cases}x=3\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=-3\sin tdt\\ dy=2\cos tdt\end{cases}\\ A(3;0)\Rightarrow\begin{cases}3=3\cos t\\ 0=2\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos t=1\\ \sin t=0\end{cases}\Rightarrow t=0\\ B(-3;0)\Rightarrow\begin{cases}-3=3\cos t\\ 0=2\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos t=-1\\ \sin t=0\end{cases}\Rightarrow t=\pi\end{array}\right\|=$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\left(9\cos^2 t-4\sin^2 t\right)\left(-3\sin t\right)+\left(9\cos^2 t+4\sin^2 t\right)2\cos t\right]dt=$$

$$=-3\int_0^{\pi}\left(9\cos^2 t-4\left(1-\cos^2 t\right)\right)\sin tdt+2\int_0^{\pi}\left(9\left(1-\sin^2 t\right)+4\sin^2 t\right)\cos tdt=$$

$$=-3\int_0^{\pi}\left(13\cos^2 t-4\right)\sin tdt+2\int_0^{\pi}\left(9-5\sin^2 t\right)\cos tdt=$$

$$=-39\int_0^{\pi}\cos^2 t\cdot\sin tdt+12\int_0^{\pi}\sin tdt+18\int_0^{\pi}\cos tdt-10\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot\cos tdt=$$

$$=\left\|\begin{array}{l} d\left(\cos t\right)=-\sin tdt\\ d\left(\sin t\right)=\cos tdt\end{array}\right\|=39\int_0^{\pi}\cos^2 td\left(\cos t\right)-12\cos t\Big|_0^{\pi}+18\sin t\Big|_0^{\pi}-$$

$$-10\int_0^{\pi}\sin^2 td\left(\sin t\right)=39\cdot\left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\pi}-12\left(\cos\pi-\cos 0\right)+18\left(\sin\pi-\sin 0\right)-$$

$$-10\cdot\left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{\pi}=13\left(-1-1\right)-12\left(-1-1\right)=-26+24=-2\,.$$

ГЛАВА 3. РЯДИ

§1. Числові ряди

Означення. Нехай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числова послідовність. Сума елементів числової послідовності

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

називається *числовим рядом*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1.1)$$

Елемент a_n називається *загальним членом ряду*.

Для того, щоб задати числовий ряд, достатньо знати a_n, наприклад:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ... = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$$

Означення. *Частковою сумою* S_n ряду (1.1) називається сума перших n членів цього ряду:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n . \qquad (1.2)$$

Часткові суми ряду (1.1) утворюють числову послідовність.

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, то числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *збіжним*, а число S – його *сумою*.

Якщо границя $\lim_{n\to+\infty} S_n$ не існує або є нескінченною, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *розбіжним*.

***Приклад* 1.1.** Знайти суму ряду $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{14}{49n^2-28n-45}$.

Розв'язання. Загальний член ряду дорівнює $a_n=\frac{14}{49n^2-28n-45}$.

Розкладемо знаменник на множники, для цього знайдемо його корені:

$$49n^2-28n-45=0,$$

$$D=28^2+4\cdot 49\cdot 45=4^2\cdot 7^2+4\cdot 7^2\cdot 45=$$

$$=4\cdot 7^2(4+45)=(2\cdot 7\cdot 7)^2=98^2,$$

$$n=\frac{28\pm 98}{2\cdot 49}=\left[\begin{array}{l}\frac{-70}{2\cdot 49}=-\frac{5}{7},\\ \frac{126}{2\cdot 49}=\frac{63}{49}=\frac{9}{7},\end{array}\right.$$

$$49n^2-28n-45=49\left(n+\frac{5}{7}\right)\left(n-\frac{9}{7}\right)=(7n+5)(7n-9).$$

Подамо загальний член ряду у вигляді суми двох простих дробів:

$$a_n=\frac{14}{(7n+5)(7n-9)}=\frac{A}{7n+5}+\frac{B}{7n-9}=\frac{A(7n-9)+B(7n+5)}{(7n+5)(7n-9)},$$

$$A(7n-9)+B(7n+5)=14,$$

$$n=-\frac{5}{7}:\quad A(-5-9)=14,$$

$$A(-14)=14,$$

$$A=-1;$$

$$n=\frac{9}{7}:\quad B(9+5)=14,$$

$$B\cdot 14=14,$$

$$B=1;$$

$$a_n = -\frac{1}{7n+5} + \frac{1}{7n-9} = \frac{1}{7n-9} - \frac{1}{7n+5}.$$

Складемо часткову суму S_n:

$$S_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{19}\right)}_{a_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{26}\right)}_{a_3} + \underbrace{\left(\frac{1}{19} - \frac{1}{33}\right)}_{a_4} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{26} - \frac{1}{40}\right)}_{a_5} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{7n-23} - \frac{1}{7n-9}\right)}_{a_{n-2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{7n-16} - \frac{1}{7n-2}\right)}_{a_{n-1}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{7n-9} - \frac{1}{7n+5}\right)}_{a_n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{12} - \frac{1}{7n-2} - \frac{1}{7n+5} = \frac{17}{60} - \frac{1}{7n-2} - \frac{1}{7n+5}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{17}{60} - \frac{1}{7n-2} - \frac{1}{7n+5}\right) = \frac{17}{60} - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{7n-2} -$$

$$- \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{7n+5} = \left\| \frac{17}{60} - \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty} \right\| = \frac{17}{60}.$$

Таким чином, ряд збігається і $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45} = \frac{17}{60}$.

***Приклад* 1.2.** Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$.

Розв'язання. Загальний член ряду дорівнює

$$a_n = \frac{2^n + 5^n}{10^n} = \frac{2^n}{10^n} + \frac{5^n}{10^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Складемо часткову суму S_n:

$$S_n = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) + \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \ldots + \left(\left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) =$$

$$=\left(\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right),$$

яка складається з часткових сум двох спадних геометричних прогресій. Обчислимо їх:

$$S_n^{(1)}=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{5}\right)^n=\left\|\begin{array}{l} b_1=\frac{1}{5};\ q=\frac{1}{5} \\ S_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\end{array}\right\|=\frac{\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{5}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right),$$

$$S_n^{(2)}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left\|\begin{array}{l} b_1=\frac{1}{2} \\ q=\frac{1}{2}\end{array}\right\|=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Таким чином, $S_n=S_n^{(1)}+S_n^{(2)}$.

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{1}{4}+1=1,25.$$

Отже, початковий ряд збігається за означенням, і

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}=1,25.$$

***Приклад* 1.3.** Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$.

Розв'язання. Члени даного ряду утворюють наступну геометричну прогресію:

$$a\,,\ aq\,,\ aq^2\,,\ ...,\ aq^n\,,\ ...\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$$

Складемо часткову суму і скористаємося формулою для суми перших n членів геометричної прогресії:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q},\ |q| \neq 1.$$

Обчислимо границю часткової суми й розглянемо окремо випадки: $|q| < 1$, $|q| > 1$, $q = 1$, $q = -1$.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q| < 1; \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$

При $q = 1$ маємо: $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot 1 = a + a + a + ...$

$$S_n = a + a + a + ... = an\,,\ \lim_{n\to+\infty} a \cdot n = \infty\,,$$

отже, за означенням ряд розбігається.

При $q = -1$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot \left(-1\right)^n = a - a + a - a + ...$$

Для парної кількості членів:

$$S_{2n} = a - a + a - a + ... = 0\,,\ \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = 0\,.$$

Для непарної кількості членів:

$$S_{2n-1} = S_{2n} + a = a\,,\ \lim_{n\to+\infty} S_{2n-1} = a\,.$$

Таким чином, границі послідовності часткових сум S_n не існує, отже, за означенням ряд розбігається. Остаточно маємо:

1) ряд збігається при $|q| < 1$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = \dfrac{a}{1-q}$;
2) ряд розбігається при $|q| \geq 1$.

§2. Основні властивості збіжних рядів

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – числовий ряд.

Означення. *Залишком числового ряду* R_m називають числовий ряд вигляду:

$$R_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k} \,, \qquad (2.1)$$

тобто $R_2 = a_3 + a_4 + \ldots$; $R_3 = a_4 + a_5 + \ldots$, і так далі.

Очевидно, що для збіжного ряду, який має суму S, часткова сума S_n є для неї наближеною величиною, а залишок ряду R_n – похибкою цієї наближеної величини:

$$R_n = S - S_n \,. \qquad (2.2)$$

Теорема 1.1. Якщо збігається ряд (1.1), то збігається і будь-який з його залишків (2.1). Вірно й зворотне: зі збіжності залишку (2.1) випливає збіжність початкового ряду (1.1).

Наслідок 1.1. Відкидання скінченної кількості початкових членів ряду або приєднання на початку його декількох нових членів не відображається на поведінці ряду (у змісті його збіжності або розбіжності).

Наслідок 1.2. Якщо ряд (1.1) збігається, то сума R_m його залишку після m-го члена зі зростанням m наближається до нуля:

$$\lim_{m \to +\infty} R_m = 0 \,. \qquad (2.3)$$

Теорема 1.2. Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$. Тоді:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ збігається і $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B$, тобто, збіжні ряди можна почленно додавати;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$, отриманий зі збіжного ряду множенням його членів на одне і те ж число $k \in \mathbb{R}$, збігається, і його сума дорівнює: $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kA$.

§3. Необхідна ознака збіжності ряду

Теорема 3.1. Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Зворотне твердження, взагалі кажучі, не є вірним, тобто, якщо $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, то стверджувати щось про збіжність ряду неможна.

Для доведення розбіжності ряду часто використовується достатня ознака: якщо $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

***Приклад* 3.1.** Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{13n+1}{5n+7}\right)^3$ розбігається, використовуючи достатню ознаку розбіжності ряду.

Розв'язання. Загальний член ряду: $a_n = \left(\frac{13n+1}{5n+7}\right)^3$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{13n+1}{5n+7}\right)^3 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{13n}{5n}\right)^3 = \left(\frac{13}{5}\right)^3 \neq 0 .$$

Таким чином, ряд розбігається.

Далі розглянемо методи дослідження збіжності рядів з додатними (невід'ємними) членами. Будемо називати їх знакододатними рядами.

§4. Ознаки збіжності знакододатних числових рядів

4.1. Ознака порівняння

Нехай задано два числові ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Якщо для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ виконується умова $a_n \le b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ називається *мажорантним рядом* для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – *мінорантним рядом* для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 4.1 (ознака порівняння). Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – знакододатні числові ряди, і $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \le b_n$. Тоді:

1) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збігається;
2) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ також розбігається.

При використанні даної ознаки досліджуваний ряд зручно порівнювати з деяким «еталонним» рядом. Як такий ряд зазвичай вибирають *узагальнений гармонічний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, який:

1) при $p \le 1$ ряд розбігається;
2) при $p > 1$ ряд збігається.

***Приклад* 4.1.** Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1+(-1)^n}{2} n\right)}{n^3+2}$.

Розв'язання. Загальний член ряду дорівнює

$$a_n = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1+(-1)^n}{2} n\right)}{n^3+2} = \begin{cases} n = 2k\,(\text{парне}), & \frac{\operatorname{arctg}(2k)}{(2k)^3+2} > 0; \\ n = 2k-1\,(\text{непарне}), & \frac{0}{(2k-1)^3+2} = 0, \end{cases}$$

тобто маємо ряд з невід'ємними членами, тому можемо скористуватися теоремою 4.1.

Оцінимо (обмежимо зверху) загальний член ряду:

$$a_n = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1+(-1)^n}{2} n\right)}{n^3+2} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n^3+2} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^3}.$$

Розглянемо мажорантний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Маємо узагальнений гармонічний ряд з показником степеня $p = 3$, тобто мажорантний ряд збігається. Тоді за ознакою порівняння збігається і початковий ряд.

***Приклад* 4.2.** Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$.

Розв'язання. Загальний член ряду:

$a_n = \frac{\arcsin \frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$ $\left(\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}\right.$, тобто входить до області визначення функції арксинус$\left.\right)$.

Оцінимо (обмежимо знизу) загальний член ряду.

$\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ – зростаюча послідовність, отже, згідно з властивостями функції арксинус, $\left\{\arcsin\dfrac{n-1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ – також зростаюча послідовність. Тобто найменше значення $\arcsin\dfrac{n-1}{n}$ буде при $n = 2$.

$$\arcsin\frac{n-1}{n}\bigg|_{n=2} = \arcsin\frac{2-1}{2} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Отже,

$$\frac{\arcsin\frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}} > \frac{\pi}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-3n}} > \frac{\pi}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3}} = \frac{\pi}{6}\frac{1}{n}.$$

Тоді як мінорантний ряд візьмемо ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\pi}{6}\dfrac{1}{n} = \dfrac{\pi}{6}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Це – гармонічний ряд, який розбігається. Отже, за ознакою порівняння початковий ряд розбігається.

4.2. Гранична ознака порівняння

Теорема 4.2 (гранична ознака порівняння). Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ – знакододатні ряди, один з яких, наприклад, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ – строго додатний ряд $(\forall n\in\mathbb{N}\ b_n>0)$. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = l$ $(l\neq 0,\ l\neq\infty)$, то ряди поводяться однаково: або одночасно збігаються, або одночасно разбігаються.

Наслідок 4.1. Якщо $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – нескінченно малі послідовності одного порядку малості: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$ $\left(l \neq 0,\ l \neq \infty\right)$, зокрема, якщо вони є еквівалентними $\left(a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1\right)$, то обидва ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ поводяться однаково (або одночасно збігаються, або одночасно разбігаються).

***Приклад* 4.3.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Загальний член ряду: $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тобто маємо знакододатний ряд. При $n \to \infty$ маємо:

$$\frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким чином, для порівняння з початковим рядом можемо взяти еквівалентний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, який є узагальненим гармонічним рядом з показником $p = \dfrac{3}{2} > 1$ і тому збігається. За граничною ознакою порівняння початковий ряд також збігається.

***Приклад* 4.4.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{n^2+5}{n^2+4}\right)$.

Розв'язання. Загальний член ряду:

$$a_n = \ln\left(\frac{n^2+5}{n^2+4}\right) = \ln\left(1 + \frac{n^2+5}{n^2+4} - 1\right) = \ln\left(1 + \frac{n^2+5-n^2-4}{n^2+4}\right) =$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{n^2+4}\right) > 0$$ (початковий ряд – знакододатний).

$$\ln\left(\frac{n^2+5}{n^2+4}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2+4} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Порівняємо початковий ряд з еквівалентним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ з показником $p = 2 > 1$, тобто, збіжним. За граничною ознакою порівняння початковий ряд збігається.

4.3. Ознака Даламбера

Теорема 4.3. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакододатний числовий ряд та існує границя $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тоді:

1) якщо $l < 1$, то початковий ряд збігається;
2) якщо $l > 1$, то початковий ряд розбігається.

Примітки:

1. Ознака є тільки достатньою.
2. При $l = 1$ ознака не дає відповіді на питання про збіжність ряду.

***Приклад* 4.5.** Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+2)^2}$.

Розв'язання. $a_n = \frac{2^{n+1}}{(n+2)^2} > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$,

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1+1}}{(n+1+2)^2} = \frac{2^{n+2}}{(n+3)^2}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^{n+2}}{(n+3)^2}\right)\Bigg/\left(\frac{2^{n+1}}{(n+2)^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+2}\cdot(n+2)^2}{(n+3)^2\cdot 2^{n+1}} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} (n+2)^2 \underset{n\to\infty}{\sim} n^2 \\ (n+3)^2 \underset{n\to\infty}{\sim} n^2 \end{matrix} \right\| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n \cdot 2^2 \cdot n^2}{n^2 \cdot 2^n \cdot 2^1} = \frac{2^2}{2} = 2 > 1 .$$

За ознакою Даламбера початковий ряд розбігається.

***Приклад* 4.6.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Розв'язання. $a_n = \frac{n!}{n^n} > 0 \ (n \in \mathbb{N})$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+1)n^n}{(n+1)^n (n+1)n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left\| 1^\infty \right\| = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{n}{n+1} - 1 \right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{n-n-1}{n+1} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \left(\frac{-1}{n+1} \right) \right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \left(\frac{-1}{n+1} \right) \right)^{\frac{n+1}{-1}} \right]^{\frac{-1}{n+1}\cdot n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-n}{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-n}{n}} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 .$$

За ознакою Даламбера початковий ряд збігається.

4.4. Радикальна ознака Коші

Теорема 4.4. Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакододатний числовий ряд й існує $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тоді:

1) якщо $l < 1$, то початковий ряд збігається;
2) якщо $l > 1$, то початковий ряд розбігається.

Примітки:

1. Ознака є тільки достатньою.
2. При $l = 1$ ознака не дає відповіді на питання про збіжність ряду.

***Приклад* 4.7.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{4n}$.

Розв'язання. Загальний член ряду:

$$a_n = \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{4n} > 0 \ \left(n \in \mathbb{N}\right).$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{4n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{\frac{4n}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{3n}\right)^{4} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} < 1.$$

За радикальною ознакою Коші початковий ряд збігається.

***Приклад* 4.8.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

Розв'язання. Загальний член ряду:

$$a_n = \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2} > 0 \ \left(n \in \mathbb{N}\right).$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n\to+\infty}2^n = +\infty > 1.$$

За радикальною ознакою Коші початковий ряд розбігається.

***Приклад* 4.9.** Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}$.

Розв'язання. Загальний член ряду:

$$a_n = \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2} > 0 \quad \left(n \in \mathbb{N} \right).$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{3} \cdot e = \frac{e}{3} < 1 .$$

За радикальною ознакою Коші початковий ряд збігається.

4.5. Інтегральна ознака Коші

Нехай додатня на проміжку $\left[1, +\infty\right)$ функція $f\left(x\right)$ $\left(f\left(x\right) > 0 \text{ , } x \in \left[1, +\infty\right) \right)$ є:

1) неперервною при $x \in \left[1, +\infty\right)$;
2) спадною при $x \in \left[1, +\infty\right)$;
3) $\forall n \in \mathbb{N}, \ f\left(n\right) = a_n$.

Тоді невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f\left(x\right) dx$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ поводяться однаково (одночасно збігаються або одночасно розбігаються).

***Приклад* 4.10.** Дослідити збіжність узагальненого гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f\left(x\right)=\frac{1}{x^p}$, $x\in\left[1,+\infty\right)$. Функція є додатною. При $p\le 0$ не виконується необхідна умова збіжності ряду. При $p>0$ функція $f\left(x\right)$ задовольняє всі умови теореми 4.5:

1) $f\left(x\right)=\frac{1}{x^p}$ неперервна при $x\in\left[1,+\infty\right)$;

2) $f\left(x\right)$ спадає при $x\in\left[1,+\infty\right)$: $\frac{1}{x_1^p}<\frac{1}{x_2^p}$ при $x_1>x_2$;

3) $f\left(n\right)=\frac{1}{n^p}=a_n$.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ та інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ поводяться однаково.

Обчислимо інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ при $p=1$:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln\left|x\right|\Big|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left|x\right|-\ln 1=+\infty.$$

Обчислимо інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ при $p\ne 1$:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\int\limits_1^{+\infty}x^{-p}dx=\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{1-p}\lim_{x\to+\infty}x^{-\left(p-1\right)}-\frac{1}{1-p}=$$

$$=\begin{cases}p>1, & \lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\left(p-1\right)}=0;\\ p<1, & \lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\left(p-1\right)}=+\infty;\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{1-p}\cdot 0-\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p-1};\\ +\infty.\end{cases}$$

Таким чином, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$: $\begin{cases}\text{при } p>1 \text{ збігається;}\\ \text{при } p\le 1 \text{ розбігається.}\end{cases}$

***Приклад* 4.11.** Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$.

Розв'язання. Загальний член ряду:

$$a_n=\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}>0\quad (n\in\mathbb{N}).$$

Розглянемо ряд, який складається з $b_n=\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}>0$.

Тоді

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}\Big/\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\ln^2(n+1)}{(2n+1)\ln^2(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Отже, за граничною ознакою порівняння (4.2) ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ поводяться однаково.

Дослідимо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ за допомогою інтегральної ознаки Коші (4.5).

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$, $x\in[1,+\infty)$. Функція є додатною: $\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}>0$ при $x\in[1,+\infty)$, і задовольняє всі умови теореми 4.5:

1) $f(x)$ – неперервна функція при $x\in[1,+\infty)$;
2) $f(x)$ – спадна функція: $\forall x_1,\ x_2\in[1,+\infty),\ x_1>x_2$

$$\frac{1}{(x_1+1)\ln^2(x_1+1)} < \frac{1}{(x_2+1)\ln^2(x_2+1)};$$

3) $f(n) = \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ та інтеграл $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ поводяться однаково.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \left\| \begin{matrix} \left(\ln(x+1)\right)' = \dfrac{1}{x+1} \\ d\left(\ln(x+1)\right) = \dfrac{dx}{x+1} \end{matrix} \right\| = \int_1^{+\infty} \frac{d\left(\ln(x+1)\right)}{\ln^2(x+1)} =$$

$$= -\frac{1}{\ln(x+1)}\bigg|_1^{+\infty} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x+1)} + \frac{1}{\ln 2} =$$

$$= \left\| -\frac{1}{\ln(+\infty)} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\ln 2} = 0 + \frac{1}{\ln 2} \right\| = \frac{1}{\ln 2}.$$

Таким чином, інтеграл збігається. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ збігається та, відповідно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$ також збігається.

§5. Знакозмінні ряди

Означення. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *знакозміннним,* якщо містить нескінченну кількість додатних і нескінченну кількість від'ємних доданків.

Наприклад:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots .$$

Означення. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *знакопереміжним,* якщо знаки двох сусідніх доданків є різними: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Якщо $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то прикладом знакопереміжного ряду є наступний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots .$$

Теорема 5.1 (ознака Лейбніца). Нехай є знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad (a_n > 0)$. Тоді, якщо:

1) послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – спадна, тобто $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$,

то ряд збігається, і його сума додатна й не перевищує a_1.

Наслідок 5.1. Залишок знакопереміжного ряду R_n не перевищує по модулю першого з невідкинутих доданків.

$$|R_n| < \left|(-1)^{n+1} a_{n+1}\right| = |a_{n+1}| = a_{n+1}. \tag{5.1}$$

Це використовується при наближених обчисленнях.

§6. Абсолютна і умовна збіжність

Означення. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд з його абсолютних величин, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – збігається.

Означення. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *умовно збіжним*, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – розбігається.

Теорема 6.1. Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно, то він збігається і у звичайному сенсі:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ збігається } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ – збігається.}$$

Теорема 6.2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно, то його сума не змінюється від переставлення доданків.

Теорема 6.3 (теорема Рімана). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно, і A – будь-яке дійсне число, то існує таке переставлення доданків у ряді, що отриманий після цього переставлення ряд своєю сумою досягаєт числа A. У свою чергу, може існувати таке переставлення елементів ряду, що отриманий ряд буде розбіжним.

***Приклад* 6.1.** Дослідити знакопереміжний ряд на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(n^2+3n+1\right)}{2^n}$.

Розв'язання. Дослідимо ряд з абсолютних величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\left(n^2+3n+1\right)}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+1}{2^n}.$$

$$a_n=\frac{n^2+3n+1}{2^n}>0\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Застосуємо ознаку Даламбера (4.3):

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{2^{n+1}}=\frac{n^2+2n+1+3n+3+1}{2^{n+1}}=\frac{n^2+5n+5}{2^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+5n+5}{2^{n+1}}\bigg/\frac{n^2+3n+1}{2^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(n^2+5n+5\right)2^n}{\left(n^2+3n+1\right)2^{n+1}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l} n^2+5n+5\underset{n\to\infty}{\sim}n^2 \\ n^2+3n+1\underset{n\to\infty}{\sim}n^2\end{array}\right\|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot 2^n}{n^2\cdot 2^n\cdot 2}=\frac{1}{2}<1.$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\left(n^2+3n+1\right)}{2^n}\right|$ збігається. Отже, за теоремою 6.1, початковий ряд також збігається. Тобто, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(n^2+3n+1\right)}{2^n}$ збігається абсолютно.

***Приклад* 6.2.** Дослідити знакопереміжний ряд на збіжність $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)\ln n}$.

Розв'язання. Дослідимо на абсолютну збіжність:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)\ln n}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln n}.$$

$$a_n=\frac{1}{(n+2)\ln n}>0,\ n\neq 1.$$

Розглянемо еквівалентний ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\text{n}\ln n}$, враховуючи, що $\frac{1}{(n+2)\ln n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n\ln n}$. Обидва ряди поводяться однаково (це легко перевірити, застосовуючи граничну ознаку збіжності). Застосуємо до еквівалентного ряду інтегральну ознаку Коші. Функція є додатною: $f(x)=\frac{1}{x\ln x}>0$ і задовольняє теорему 4.5 на проміжку $[2;+\infty)$:

1) $f(x)$ є неперервною;

2) $f(x)$ спадає: якщо $x_1>x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1\ln x_1}<\frac{1}{x_2\ln x_2}$;

3) $f(n)=\frac{1}{n\ln n}$.

Дослідимо на збіжність невласний інтеграл:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\left\|\begin{matrix}(\ln x)'=\frac{1}{x}\\ d(\ln x)=\frac{dx}{x}\end{matrix}\right\|=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln|\ln x|\Big|_2^{+\infty}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left|\ln|x|-\ln|\ln 2|\right|=\left\|+\infty-\ln|\ln 2|\right\|=+\infty,$$

тобто, інтеграл розбігається.

За інтегральною ознакою Коші (4.5), ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}\ln n}$ розбігається. За граничною ознакою порівняння (4.2), розбігається ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln n}$.

Таким чином, ряд з абсолютних величин $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)\ln n}\right|$ є розбіжним.

Перевіримо початковий ряд на збіжність за ознакою Лейбніца:

$$a_n=\frac{1}{(n+2)\ln n}>0,\ n\neq 1:$$

1) послідовність $\left\{\frac{1}{(n+2)\ln n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ є спадною, тому що послідовність обернених величин $\left\{(n+2)\ln n\right\}_{n=2}^{\infty}$ є зростаючою;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+2)\ln n}=\left\|\frac{1}{\infty\ln(+\infty)}=\frac{1}{+\infty\cdot(+\infty)}=\frac{1}{+\infty}\right\|=0$.

За ознакою Лейбніца (5.1) початковий ряд збігається. Оскільки ряд з абсолютних величин розбігається, то початковий ряд збігається умовно.

§7. Функціональні ряди (основні означення)

Нехай $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність, елементами якої є функції $u_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ визначені на множині A (функціональна послідовність).

Означення. Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots + = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{7.1}$$

називається *функціональним рядом*.

Очевидно, що при кожному значенні $x \in A$ з даного функціонального ряду ми отримаємо числовий ряд.

Означення. Точка $x_0 \in A$ називається *точкою збіжності* функціонального ряду, якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ збігається, і *точкою розбіжності*, якщо цей ряд розбігається.

Означення. Множина всіх точок збіжності називається *областю збіжності* (B) функціонального ряду (7.1) $(B \subseteq A)$.

Означення. *Частковою сумою* $S_n(x)$ функціонального ряду (7.1) називається сума $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$.

Якщо послідовність часткових сум $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до граничної функції $S(x)$, то кажуть, що *функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *збігається до функції* $S(x)$, і $S(x)$ називається *сумою функціонального ряду*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x). \tag{7.2}$$

***Приклад* 7.1.** Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot x^{3n} \cdot \sin\frac{3x}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Маємо функціональний ряд, члени якого – функції $u_n(x) = 3^n \cdot x^{3n} \cdot \sin\frac{3x}{\sqrt{n}}$ з областю визначення $x \in \mathbb{R}$.

Очевидно, що при різних $x \in \mathbb{R}$ будемо отримувати знакозмінні числові ряди. Дослідимо даний ряд на абсолютну збіжність. Щоб знайти область збіжності, застосуємо ознаку Даламбера для ряду з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}\left|3^n \cdot x^{3n} \cdot \sin\frac{3x}{\sqrt{n}}\right|$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |l(x)| < 1$.

$$u_{n+1}(x) = 3^{n+1} \cdot x^{3(n+1)} \cdot \sin\frac{3x}{\sqrt{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3^{n+1}\cdot x^{3n+3}\cdot\sin\frac{3x}{\sqrt{n+1}}}{3^n\cdot x^{3n}\cdot\sin\frac{3x}{\sqrt{n}}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3^n\cdot 3\cdot x^{3n}\cdot x^3\cdot\sin\frac{3x}{\sqrt{n+1}}}{3^n\cdot x^{3n}\cdot\sin\frac{3x}{\sqrt{n}}}\right| =$$

$$= \left\|\begin{array}{l}\sin\frac{3x}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3x}{\sqrt{n+1}} \\ \sin\frac{3x}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3x}{\sqrt{n}}\end{array}\right\| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3x^3\cdot 3x\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot 3x}\right| = 3|x|^3\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} =$$

$$= 3|x|^3.$$

$$3|x|^3 < 1 \;\Rightarrow\; |x|^3 < \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Таким чином, функціональний ряд збігається абсолютно всередині інтервалу $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

Дослідимо поведінку ряду на межах отриманої області абсолютної збіжності.

На лівій межі:

$$x=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}:\qquad \sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{3n}\sin\frac{3\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)}{\sqrt{n}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(-1)^{3n}}{3^n}\sin\left(-\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{3n+1}\sin\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}.$$

Отримали знакопереміжний ряд з $a_n=\sin\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}$. Перевіримо на збіжність ряд з абсолютних величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{3n+1}\sin\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}$$

(тому що $\sin\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}>0\quad\forall n\in\mathbb{N}$).

Застосуємо граничну ознаку порівняння: $\sin\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}$. Порівняємо наш ряд з еквівалентнимим узагальненим гармонічним рядом, з членами $b_n=\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}$, показником $p=\frac{1}{2}$, отже, розбіжним.

Таким чином ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{3n+1}\sin\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}\right|$ розбігається.

Застосуємо ознаку Лейбніца до даного ряду. Розглянемо послідовність $\left\{a_n=\sin\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}\right\}_{n-1}^{\infty}$:

1) $\left\{a_n=\sin\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}\right\}_{n-1}^{\infty}$ – спадна послідовність;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}=0$.

Таким чином за ознакою Лейбніца (5.1) ряд є збіжним умовно.

На правій межі:

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}: \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{3n} \cdot \sin \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}.$$

Загальний член ряду $a_n = \sin \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}} > 0 \quad \forall n$. Як показано для $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, за граничною ознакою порівняння, отримаємо, що при $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ числовий ряд також розбігається.

Остаточно маємо: при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ ряд збігається абсолютно, а при $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ряд має умовну збіжність.

§8. Степеневі ряди. Область збіжності степеневого ряду

Означення. *Степеневим рядом* називається ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n \text{, де } \forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n \in \mathbb{R} . \qquad (8.1)$$

В точці $x = x_0$ ряд збігається до числа a_0.

Розглянемо окремий випадок коли $x_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n . \qquad (8.2)$$

Відповідь на питання про область збіжності степеневого ряду дає теорема Абеля:

Теорема Абеля. Нехай задано функціональний ряд (8.2) і точка $x = x_1$ – точка збіжності ряду, тоді для будь-якого $x : |x| < |x_1|$ ряд також збігається, причому абсолютно. Якщо в точці $x = x_2$ ряд розбігається, то він розбігається і для будь-якого $x : |x| > |x_2|$.

Из теореми випливає, що існує таке число R, що $\forall x : \; |x| < R$ – ряд збігається абсолютно, а при $|x| > R$ – ряд розбігається. Це число називається *радіусом збіжності* степеневого ряду. Також, з теореми випливає, що для степеневого ряду (8.2) областю збіжності є інтервал $\left(-R,\, R\right)$, а для ряду (8.1) – інтервал $\left(x_0 - R,\;\, x_0 + R\right)$.

З ознаки збіжності Даламбера і радикальної ознаки Коші маємо:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ або } R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\left| \sqrt[n]{a_n} \right|} . \qquad (8.3)$$

При $|x| = R$ збіжність степеневого ряду перевіряється окремо.

***Приклад* 8.1.** Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}.$$

Розв'язання. Маємо степеневий ряд з коефіцієнтами $a_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$ і $x_0=3$. Знайдемо радіус збіжності R:

$$a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)\cdot 5^{n+1}},$$

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot(n+2)\cdot 5^{n+1}}{(n+1)\cdot 5^n\cdot(-1)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{5^n\cdot 5\cdot(n+2)}{5^n\cdot(n+1)}=5\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}=5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ R=5.$$

$$|x-3|<5\ \Rightarrow\ -5<x-3<5\ \Rightarrow\ 2<x<8,$$

звідси, інтервал $x\in(-2,\,8)$ – область абсолютної збіжності ряду.

При $x=-2$ отримуємо ряд, еквівалентний гармонічному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, який розбігається:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-5)^n}{(n+1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n\cdot 5^n}{(n+1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1},$$

$$\frac{1}{n+1}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n}\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

За граничною ознакою порівняння (4.2), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ також розбігається.

При $x=8$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(8-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^n}{(n+1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Перевіримо на абсолютну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \text{ – розбіжний ряд.}$$

Застосуємо ознаку Лейбніца для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$:

1) перевіримо, що послідовність $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ – спадна.

Розглянемо різницю $a_{n+1}-a_n$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+2},$$

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n+1-n-2}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= -\frac{1}{(n+2)(n+1)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; a_{n+1} < a_n,$$

тобто послідовність $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ спадає.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = \left\|\frac{1}{\infty}\right\| = 0$.

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ є збіжним і ця збіжність – умовна. Отже, при $x\in[-2, 8)$ початковий функціональний ряд абсолютно збігається, а при $x=8$ – збігається умовно.

§9. Ряди Тейлора і Маклорена

Якщо функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ є n раз диференційовна, то за формулою Тейлора вона може бути представлена у вигляді:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \tag{9.1}$$

де $R_n(x)$ – залишок ряду, який може бути

у формі Пеано:

$$R_n(x) = 0\left((x - x_0)^n\right); \tag{9.2}$$

у формі Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \ \theta \in (0, 1). \tag{9.3}$$

Якщо функція нескінченну кількість раз диференційовна в точці M, то їй у відповідність можна поставити степеневий ряд:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{9.4}$$

Означення. Степеневий ряд (9.4) називається *рядом Тейлора для функції* $f(x)$, коефіцієнти цього ряду $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ називаються *коефіцієнтами Тейлора для даної функції.*

Виникає питання: за яких умов цей ряд збігається до функції $f\left(x\right)$? Використовуючи формулу Тейлора (9.1), подамо нашу функцію у вигляді:

$$f\left(x\right)=S_n\left(x\right)+R_n\left(x\right), \qquad (9.5)$$

де $S_n\left(x\right)$ – часткова сума ряду Тейлора (9.4), $R_n\left(x\right)$ – залишковий член у формулі Тейлора. Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n\left(x\right)=f\left(x\right)$ тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n\left(x\right)=0$. Якщо ж $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n\left(x\right)\neq 0$, то ряд не зображає даної функції, хоча й може збігаєтися (до іншої функції). Неважко показати, що, якщо всі похідні обмежені $\Big($тобто $\left|f^{(k)}\left(x\right)\right|\le c^k$, $c>0$, $k=1,2,...\Big)$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n\left(x\right)=0$.

При $x_0=0$ отримаємо окремиий випадок ряду Тейлора, який називають рядом Маклорена:

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+\frac{f^{(1)}\left(0\right)}{1!}x+\frac{f^{(2)}\left(0\right)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}\left(0\right)}{3!}x^3+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n. \qquad (9.6)$$

Розглянемо розклади в ряд Маклорена основних елементарних функцій:

1. $f\left(x\right)=\cos x$, $x_0=0$.

$$f^{(n)}\left(x\right)=\left(\cos x\right)^n=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),$$

$$f^{(n)}\left(0\right)=\cos\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & n=2k-1;\\ \left(-1\right)^k, & n=2k,\end{cases}$$

$$\left|\cos^{(n)} x\right|=\left|\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\right|\le 1,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Отже, за формулою (9.6):

1. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \ x \in \mathbb{R}.$ (9.7)

Коефіцієнти ряду $c_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, тоді радіус збіжності обчислимо за формулою (8.2):

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)^n (2n+2)!}{(2n)!(-1)^{n+1}} \right| = \infty .$$

Таким чином, область збіжності ряду (9.7) є $\mathbb{R}$, тобто ряд збігається на всій числовій осі.

Аналогічно отримуємо розклади решти елементарних функцій та їхні області збіжності:

2. $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \ x \in \mathbb{R}.$ (9.8)

3. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \ x \in \mathbb{R}.$ (9.9)

4. $(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_m^n \cdot x^n =$

$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-3)}{3!} x^3 + .., \ |x| < 1.$ (9.10)

5. Наслідки формули (9.10) при $m = -1$:

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \ |x| < 1;$ (9.11)

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \ |x| < 1.$ (9.12)

6. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \ |x| < 1$ (9.13)

(при $x = 1$ ряд збігається умовно).

7. Наслідки формули (9.13):

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots, \quad |x| < 1 \tag{9.14}$$

(при $x = -1$ ряд збігається умовно);

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right), \quad |x| < 1. \tag{9.15}$$

***Приклад* 9.1.** Розкласти в ряд Маклорена (за степенями x) функцію $f(x) = \dfrac{5}{6 + x - x^2}$.

Розв'язання. Розкладання функції за степенями x означає, що $x_0 = 0$. Розкладемо дріб $\dfrac{5}{6 + x - x^2}$ на суму простих дробів:

$$-x^2 + x + 6 = 0, \qquad x^2 - x - 6 = 0;$$
$$D = 1 + 24 = 25,$$
$$x = \frac{1 \pm 5}{2} = \left[\begin{array}{l} 3, \\ -2; \end{array}\right.$$
$$6 + x - x^2 = -(x-3)(x+2) = (3-x)(x+2).$$

Тоді

$$\frac{5}{6 + x - x^2} = \frac{5}{(3-x)(x+2)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(3-x)}{(3-x)(x+2)},$$
$$A(x+2) + B(3-x) = 5;$$
$$x = 3: \quad A \cdot 5 = 5 \ \Rightarrow \ A = 1,$$
$$x = -2: \ B \cdot 5 = 5 \ \Rightarrow \ B = 1.$$

Таким чином,

$$\frac{5}{6 + x - x^2} = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{x+2}.$$

Застосуємо формули (9.11) і (9.12), попередньо перетворивши отримані дроби:

$$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\left\|\begin{array}{l}\text{при } x_0=0\\ \frac{x_0}{3}=0\end{array}\right\|=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}.$$

Область збіжності ряду:

$$\left|\frac{x}{3}\right|<1 \;\Rightarrow\; |x|<3 \;\Rightarrow\; -3<x<3 \;\Rightarrow\; x\in(-3,\,3).$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^n}{2^{n+1}}.$$

Область збіжності ряду:

$$\left|\frac{x}{2}\right|<1 \;\Rightarrow\; |x|<2 \;\Rightarrow\; -2<x<2 \;\Rightarrow\; x\in(-2,\,2).$$

Таким чином, початкова функція розкладається в ряд:

$$\frac{5}{6+x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)\cdot x^n.$$

Областю збіжності початкового ряду є переріз областей $\{|x|<2\}$ і $\{|x|<3\}$:

$$\begin{cases}|x|<2,\\ |x|<3,\end{cases} \Rightarrow\; |x|<\min\{2,\,3\} \;\Rightarrow\; |x|<2 \;\Rightarrow\; x\in(-2,\,2).$$

За допомогою рядів Тейлора знаходять наближені значення так званих «інтегралов які не беруться». Використовуються також властивості степеневих рядів, що дозволяють їх почленне диференціювання та інтегрування.

***Приклад* 9.2.** Обчисліть інтеграл $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$.

Розв'язання. З початку розкладемо підінтегральну функцію в ряд, заміняючи x на $\left(-x^2\right)$ в розкладі функції e^x (9.9):

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots.$$

Інтегруючи цю рівність, отримуємо:

$$\int\limits_0^x e^{-t^2}dt=\int\limits_0^x\left(1-\frac{t^2}{1!}+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{t^{2n}}{n!}+\ldots\right)dt=$$

$$=\left.\left(t-\frac{t^3}{3\cdot 1!}+\frac{t^5}{5\cdot 2!}-\frac{t^7}{7\cdot 3!}+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{t^{2n+1}}{\left(2n+1\right)\cdot n!}+\ldots\right)\right|_0^x=$$

$$=x-\frac{x^3}{3\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)\cdot n!}+\ldots. \qquad (9.16)$$

Таким чином, з допомогою (9.16) можна обчислити значення даного інтеграла для будь-якого x з будь-яким ступенем точності.

***Приклад* 9.3.** Обчислити наближено з точністю до 10^{-3} інтеграл $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральну функцію:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{256+x^4}}=\frac{1}{4\left(1+\left(\frac{x}{4}\right)^4\right)^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{x}{4}\right)^4\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Виконаємо заміну $t=\frac{x}{4}$, тоді $dt=\frac{dx}{4}$, і межами проміжка интегрування будуть: $t_{\text{верхнє}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $t_{\text{нижнє}}=\frac{0}{4}=0$.

Тоді маємо:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}} = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(1+\left(\frac{x}{4}\right)^4\right)^{-\frac{1}{4}} dx = \int_0^{0,5} \left(1+t^4\right)^{-\frac{1}{4}} dt =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \left(1+t^4\right)^{-\frac{1}{4}} = 1-\frac{1}{4}t^4 + \frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)}{2!}t^8 + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}-1\right)\left(-\frac{1}{4}-2\right)}{3!}t^{12} + \\ +\ldots = 1-\frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{4^2\cdot 2!}t^8 - \frac{45}{64\cdot 3!}t^{12} + \ldots \end{array} \right\| =$$

$$= \int_0^{0,5} \left(1-\frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{4^2\cdot 2!}t^8 - \frac{45}{64\cdot 3!}t^{12} + \ldots\right) dt =$$

$$= \left(t - \frac{1}{4}\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{5}{32}\cdot\frac{t^9}{9} - \frac{15}{128}\cdot\frac{t^{13}}{13} + \ldots\right)\Bigg|_0^{0,5} =$$

= ‖ Отримали знакозмінний ряд, збіжність якого легко перевіряється за ознакою Лейбніца. Тому, використовуючи наслідок з теореми $(5,1)$, для досягнення точності, відкидаємо члени ряду, починаючи з того, який менший за 0,001 (з третього за рахунком). ‖ =

$$= 0,5 - \frac{0,5^5}{20} + \frac{5}{32\cdot 9}\cdot 0,5^9 - \frac{15}{128\cdot 13}\cdot 0,5^{13} + \ldots \approx$$

$$\approx 0,5 - 0,002 + 0,000\ldots \approx 0,498\,.$$

§10. Ряди Фур'є

В попередніх розділах розглядалося зображення функції у вигляді степеневого ряду. Тут ми познайомимося з розкладанням періодичної функції в тригонометричний ряд, тобто ряд, елементами якого є тригонометричні функції.

Розглянемо функціональні ряди, суми яких, на відміну від степеневих рядів, мають точки розриву в області задання.

Означення. Функція $f(x)$, називається *кусково-неперервною* на відрізку $[a,b]$, якщо вона є неперервною всюди на цьому відрізку, окрім скінченної кількості точок розриву першого роду.

Означення. Функція $f(x)$ називається *кусково-диференційовною* на відрізку $[a,b]$, якщо похідна $f'(x)$ є кусково-неперервною на відрізку $[a,b]$.

Означення. Функціональний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{10.1}$$

де a_0, a_n, b_n обчислюються відповідно по формулах (10.2) – (10.4), називається *рядом Фур'є* періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π, визначеної на відрізку $[-\pi,\pi]$. Коефіцієнти a_0, a_n, b_n називаються *коефіцієнтами Фур'є*:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, \tag{10.2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, \tag{10.3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx. \tag{10.4}$$

Якщо ряд Фур'є (10.1) збігається, то його сума $S(x)$ є періодичної, з періодом 2π, функцієй.

Розглянемо, за яких умов функціональний ряд (10.1) збігається, як він збігається, і якою є його сума. Розглянемо необхідні умови збіжності ряду Фур'є.

Теорема 10.1. Для кусково-неперервної функції $f(x)$ коефіцієнти ряду Фур'є наближаються до нуля: $a_n \to 0$ і $b_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Оскільки для всіх $x \in [-\pi, \pi]$ загальні члени ряду Фур'є $a_n \cdot \cos nx$ і $b_n \cdot \sin nx$ при нескінченно малих a_n і b_n також є нескінченно малими, то для ряду Фур'є виконано необхідну умову збіжності.

Наступна теорема дає достатню умову збіжності ряду Фур'є.

Теорема 10.2 (теорема Діріхлє). Нехай функція $f(x)$ – періодична з періодом $T = 2\pi$ і на відрізку $[-\pi, \pi]$ є кусково-неперервною і має кусково-неперервну похідну. Тоді:

1) якщо x – точка неперервності функції $f(x)$, сума $S(x)$ її ряду Фур'є дорівнює значенню цієї функції: $S(x) = f(x)$;

2) якщо x_0 – точка розриву функції $f(x)$, сума $S(x)$ її ряду Фур'є дорівнює полусумі однобічних границь (лівого і правого значень) функції $f(x)$:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}. \qquad (10.5)$$

Розглянемо деякі окремі випадки ряду Фур'є.

1. Нехай функція $f(x)$ – парна $\left(f(-x) = f(x)\right)$ при $x \in [-\pi, \pi]$. Тоді $f(x) \cdot \sin nx$ буде непарною функцією, тому:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx, \qquad (10.6)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \qquad (10.7)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx = 0, \qquad (10.8)$$

і ряд (10.1) приймає вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx. \qquad (10.9)$$

2. Якщо функція $f(x)$ – непарна $\left(f(-x)=-f(x)\right)$ при $x\in[-\pi,\,\pi]$, тоді

$$a_0=0, \qquad (10.10)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0, \qquad (10.11)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \qquad (10.12)$$

Отже:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin nx. \qquad (10.13)$$

Нехай періодичну функцію $f(x)$ (яка є кусково-неперервною і має кусково-неперервну похідну) задано на відрізку $[-l,\,l]$ довільної довжини $2l$ (період $T=2l$). Тоді отримаємо розкладання заданої функції $f(x)$ в тригонометричний ряд дещо зміненого типу:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad (10.14)$$

де

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \qquad (10.15)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx, \qquad (10.16)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx. \qquad (10.17)$$

Для такої функції може бути сформульовано теорему, аналогічну теоремі 10.2.

Відрізок $[-l,\,l]$ може бути замінений будь-яким іншим відрізком довжини $2l$, зокрема, відрізком $[0,2l]$, тоді

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\,dx, \qquad (10.18)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx, \qquad (10.19)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx. \qquad (10.20)$$

***Приклад* 10.1.** Розкладіть функцію $f(x) = x^2$ в ряд Фур'є на проміжку $[-\pi, \pi]$.

Розв'язання. Розкладемо функцію $f(x) = x^2$ в ряд Фур'є на проміжку $[-\pi, \pi]$.

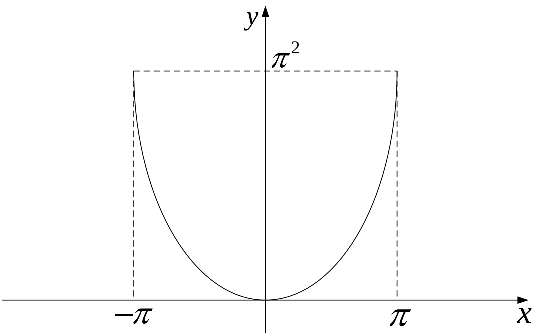

Рисунок 10.1. Графік функції $f(x) = x^2$

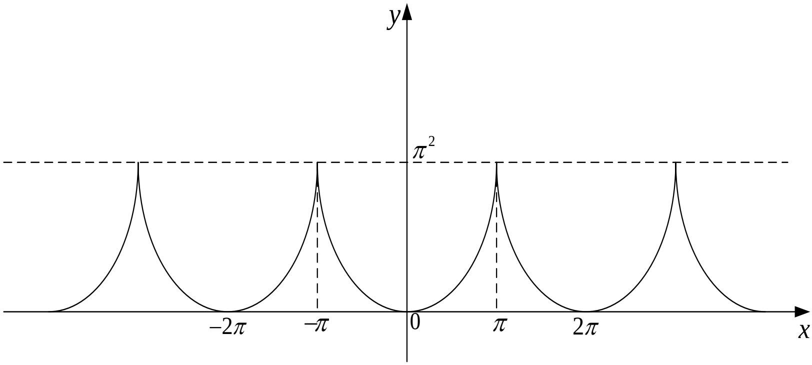

Рисунок 10.2. Графік ряду Фур'є для функції $f(x) = x^2$

Оскільки $\left(-x\right)^2 = x^2$, тобто $f\left(x\right)$ – парна функція, то $b_n = 0$, а a_0 і a_n знайдемо по формулах (10.7):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \left\| \begin{array}{l} u = x^2,\ du = 2x\,dx; \\ dv = \cos nx\, dx,\ v = \int \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx \right) = -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx; \\ dv = \sin nx\, dx,\ v = \int \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx\, dx \right) = \frac{4}{n^2}\cos \pi n - \frac{4}{\pi n^2}\,\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{n^2}\cdot\left(-1\right)^n.$$

Отже, ряд Фур'є для функції x^2 збігається до початкової функції: $S(x) = f(x) = x^2$ у всіх точках, оскільки $f(x)$ є неперервною функцією.

Тому:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n \frac{4\cdot\cos nx}{n^2},\ x \in \left(-\pi,\ \pi\right).$$

Для точок $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$f\left(\pi+0\right) = f\left(\pi-0\right) = f\left(\pi\right) = \pi^2 \Rightarrow S(\pi + 2\pi n) = \frac{\pi^2 + \pi^2}{2} = \pi^2.$$

***Приклад* 10.2.** Розкладіть функцію $f(x)=x$ в ряд Фур'є на проміжку $(-\pi,\,\pi)$.

Розв'язання. Розкладемо в ряд Фур'є функцію $f(x)=x$ на проміжку $(-\pi,\,\pi)$. Функція $f(x)$ – непарна: $f(-x)=-x=-f(x)$, тому з формул (10.12) отримаємо:

$$a_0=0 \text{ і } a_n=0 \ \ (n\in\mathbb{N}),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=$$

$$=\left\|\begin{matrix} u=x,\ \ du=dx; \\ dv=\sin nx\,dx,\ \ v=\int\sin nx\,dx=-\dfrac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{n}\cos\pi n+\frac{2}{\pi n}\cdot\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=$$

$$=-\frac{2}{n}\cos\pi n+\frac{2}{\pi n^2}\cdot\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Тоді

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

При $x=\pi+2\pi n \ \ (n\in\mathbb{Z})$:

$$f(\pi+0)=f(-\pi+0)=-\pi,$$

$$f(-\pi-0)=f(\pi-0)=\pi,$$

$$S\left(\pi + 2\pi n\right) = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0 .$$

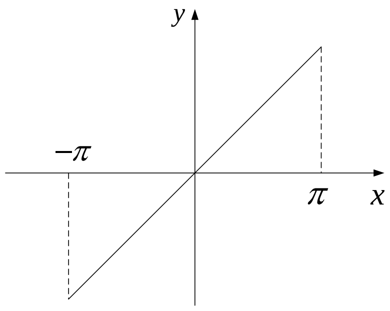

Рисунок 10.3. Графік функції $f\left(x\right) = x$

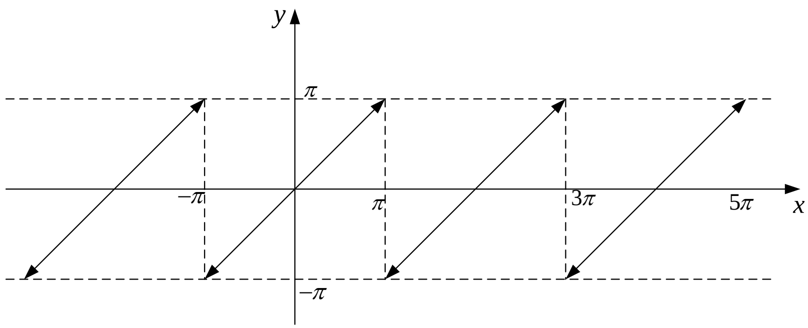

Рисунок 10.4. Графік ряду Фур'є для функції $f\left(x\right) = x$

Відмітимо, що, виходячи з їхніх особливостей, ряди Фур'є застосовуються в задачах апроксимації, тобто наближення функцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособ. для вузов / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 384 с.

2. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 1. / / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 343 с.

3. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 2. / / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 336 с.

4. Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. I. / / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. – М. : Наука, 1971. – 600 с.

5. Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. II. / / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. – М. : Наука, 1973. – 448 с.

6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 1. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 712 с.

7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 2. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 576 с.

8. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 3. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1989. – 352 с.

9. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1984. – 592 с.

10. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. Функции нескольких переменных / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1986. – 528 с.

11. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. Интегралы. Ряды / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1994. – 496 с.

12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1990. – 270 с.

13. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1991. – 352 с.

14. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 3. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1991. – 288 с.

15. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : у 2 ч. Ч. I. / Ю. М. Сенчук. – Х. : НТУ «ХПІ», 2004. – 408 с.

16. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : у 2 ч. Ч. II. / Ю. М. Сенчук. – Х. : НТУ «ХПІ», 2006. – 408 с.

17. Заболоцький М. В. Математичний аналіз / М. В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. – К. : Знання, 2008. – 421 с.

18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 1. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1966. – 608 с.

19. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 2. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1988. – 800 с.

20. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 3. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – 653 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Любчик Леонід Михайлович, **Ахієзер** Олена Борисівна,
Геляровська Оксана Анатоліївна, **Дунаєвська** Ольга Ігорівна,
Галуза Олексій Анатолійович, **Сердюк** Ірина Василівна

Вища математика.
Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання.
Невласні інтеграли. Інтегральне числення функцій багатьох змінних. Ряди

Навчальний посібник
для студентів усіх спеціальностей
вищих технічних навчальних закладів

За загальною редакцією **Любчик** Леонід Михайлович

Роботу до видання рекомендував М.І. Безменов

Редактор М. П. Єфремова

План 2016 р., поз. 33

Підп.до друку 03.02.2016 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 8,6
Наклад 50 прим. Зам. №   Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.