**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ УКРАИНЫ**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»**

В.М. Адашевский, Г.О. Анищенко, Ю.Л. Тарсис

ОБЩИЙ КУРС
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ХАРЬКОВ 2004

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ НИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

В.М. Адашевский, Г.О. Анищенко, Ю.Л. Тарсис

ОБЩИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол № 3 от 08.10.2004 г.

Харьков НТУ «ХПИ» 2004

ББК 22.21
А 28
УДК 531/534

Рецензенти: *В.П. Ольшанський*, д-р фіз.-мат. наук, професор, Академія пожежної безпеки Україны
Л.Г. Романенко, канд. техн. наук, доцент, Харьківський національний автомобільно-дорожній університет

А 28 Адашевський В.М., Аніщенко Г.О., Тарсіс Ю.Л. Общий курс теоретической механіки. Навчальний посібник для студентів. – Харків: НТУ «ХПІ», 2004. – 112 с. – Рос. мовою.

В полном объеме учебной программы представлены материалы, необходимые для самостоятельного изучения курса теоретической механики. Материал систематизирован по трем основным разделам дисциплины: кинематике, статике, динамике и включает примеры по основным темам каждого раздела.

Пособие предназначено для студентов технических университетов.

У повному обсягу навчальної програми надані матеріали, необхідні для самостійного вивчення курсу теоретичної механіки студентами. Матеріал систематизований за трьома основними розділами дисципліни: кінематиці, статиці, динаміці і містить приклади з основніх тем кожного розділу.

Посібник призначений для студентів технічних університетів.

Іл. 42. Табл. 4. Бібліогр. найм. 4.

ББК 22.21

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем учебном пособии представлен общий курс теоретической механики, который охватывает в основном все темы, представленные без доказательств, но с достаточной для понимания строгостью. Рассмотрены примеры, дающие возможность студентам приобрести необходимые навыки для решения конкретных задач в различных отраслях техники. В пособии имеются ссылки на рекомендуемую литературу, из которой студенты очного обучения могут получить более объемные знания по интересующим их вопросам.

Теоретическая механика имеет большое значение для качественной подготовки инженерных кадров в различных отраслях техники, так как является фундаментальной наукой для многих специальных технических дисциплин. Она построена на законах И. Ньютона, а также на ряде аксиом, справедливость которых проверена многовековой практической деятельностью человека в области механики.

Теоретическая механика – наука, которая изучает общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел, т.е. изменение с течением времени положения тел в пространстве, которое принимают трехмерным евклидовым. Для изучения движения вводится система отсчета (тело), относительно которой рассматривается движение изучаемых тел. С этим телом связывают систему координат и время.

В теоретической механике в качестве основной используют гелиоцентрическую инерциальную систему отсчета, связанную с Солнцем. Однако при решении многих практических задач применяют и систему отсчета, связанную с Землей.

Следует отметить, что состояние покоя является частным случаем механического движения, поэтому в теоретической механике изучают также равновесие материальных объектов. Под механическим взаимодействием понимают действие материальных тел друг на друга, в результате которого изменяется характер их механического движения или форма. Основной мерой взаимодействия тел является сила, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия.

В теоретической механике изучают тела, представляющие собой системы материальных точек. Системой материальных точек (механической системой) называют совокупность материальных точек, движения и положения которых взаимосвязаны. Если расстояния между двумя любыми точками в такой системе неизменны, то тела называют абсолютно твердыми. Материальное тело можно считать материальной точкой, если его размерами в конкретных условиях пренебрегают.

Общий курс теоретической механики включает три раздела: «Кинематика», «Статика», «Динамика».

Кинематика – раздел механики, в котором изучают геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

Статика – раздел механики, в котором излагают общее учение о силах, изучают методы преобразования систем сил в эквивалентные им системы, а также равновесие материальных твердых тел под действием сил.

Динамика – раздел, в котором изучают движение материальных объектов под действием приложенных к ним сил.

Знания, полученные при изучении настоящего курса, помогут будущим инженерам решать разнообразные технические задачи, необходимые в их профессиональной деятельности.

Раздел «Кинематика» подготовлен проф. Тарсисом Ю.Л., раздел «Статика» – доц. Анищенко Г.О., раздел «Динамика» – проф. Адашевским В.М.

1. КИНЕМАТИКА

1.1. Основные понятия и задачи кинематики

Кинематикой называют раздел механики, в котором изучают геометрические свойства движения тел без учёта их инертности (массы) и действующих на них сил. Движение в кинематике рассматривают как изменение положения тела в пространстве с течением времени в выбранной системе отсчета.

Система отсчета включает тело отсчета (движение тела всегда изучают по отношению к какому-либо другому телу, которое считают неподвижным), связанную с ним систему координат и часы для измерения времени. Кинематику разделяют на кинематику точки и кинематику абсолютно твердого тела.

При рассмотрении абсолютно твердого тела считают, что вещество, из которого оно состоит, заключено в некотором объеме, не изменяющем свою форму при движении тела. Поэтому ***абсолютно твердым телом*** называют такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого при его движении не изменяются. Если при изучении движения тела его размерами можно пренебречь, то такое тело называют ***точкой*** и отождествляют с геометрической точкой.

Пространство, в котором изучают движение тел, считают абсолютным, евклидовым, однородным и изотропным. Свойства пространства не зависят от времени, движущихся в нем тел и одинаковы во всех точках и направлениях. Время является непрерывно изменяющейся скалярной величиной, направлено от настоящего к будущему и протекает одинаково во всех системах отсчета.

Основными задачами кинематики являются описание движения точки и тела, определение их кинематических характеристик по заданному движению. Для точки такие характеристики представляют собой ***траекторию, скорость*** и ***ускорение.*** Для абсолютно твердого тела необходимо по заданному его движению определить *угловую скорость* и *угловое ускорение* самого тела, а также *траекторию, скорость* и *ускорение* любой его точки.

В кинематике не используют какие-либо законы механики, полученные из опыта. Все ее изложение опирается на известные аксиомы евклидовой геометрии. Для изучения кинематики необходимы знания математики в рамках аналитической геометрии, математического анализа и векторной алгебры.

1.2. Кинематика точки

Точкой в механике называют тело, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь. Основная задача кинематики точки состоит в определении кинематических характеристик ее движения по *заданному движению*. Эти характеристики включают *траекторию, скорость и ускорение точки*.

1.2.1. Способы задания движения точки. Траектория

Движение точки задано, когда в любой момент времени однозначно можно определить ее положение в пространстве относительно заданной системы отсчета. *Траектория точки* – непрерывная пространственная кривая, которую описывает точка в процессе движения. В кинематике используют три основных способа задания движения точки: *векторный, координатный* и *естественный*.

1) ***Векторный способ***. С телом отсчета связывают точку – центр O. Положение движущейся точки по отношению к точке O определяют с помощью ее радиус-вектора (рис. 1.1). Чтобы задать движение векторным способом, необходимо определить векторную функцию времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1.1}$$

Начало радиус-вектора движущейся точки находится в точке O, а конец его перемещается по траектории вместе с точкой M.

2) ***Координатный способ***. С телом отсчета связывают прямоугольную систему декартовых координат, а положение точки определяют ее координатами, которые являются скалярными функциями времени (рис. 1.2):

$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Уравнения движения точки (1.2) являются параметрическими уравнениями траектории точки. Исключив из этих уравнений параметр – время, можно получить уравнение траектории.

3) ***Естественный способ***. Этот способ используют в случаях, когда заранее известна траектория точки. Траектория – неподвижная кривая в пространстве – является в этом случае системой отсчета. На

траектории выбирают точку O (начало отсчета) – положительное и отрицательное направления отсчета расстояний точки от начала отсчета (рис. 1.3). Движение точки определяют зависимостью криволинейной координаты s точки относительно точки O от времени:

$$s = s(t). \tag{1.3}$$

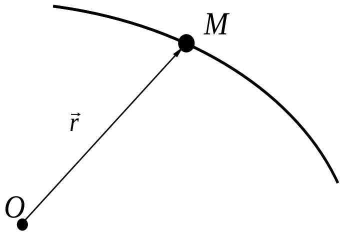


Рисунок 1.1

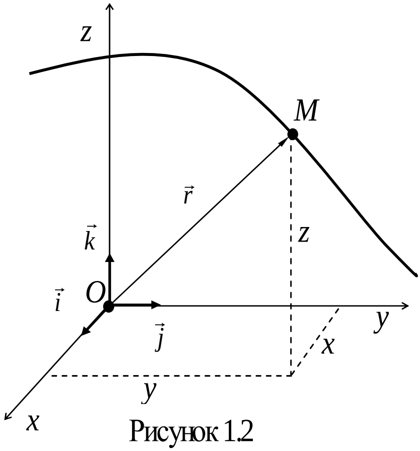


Рисунок 1.2

1.2.2. Скорость точки

Скорость точки является векторной мерой интенсивности ее движения. По определению, при векторном способе задания движения скорость точки – векторная величина, равная первой производной по времени от радиус-вектора точки

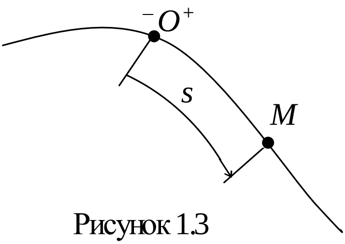


Рисунок 1.3

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \tag{1.4}$$

где точка над функцией в теоретической механике означает первую производную по времени, а две точки – вторую производную по времени. Производные по другим переменным записывают обычным образом. Вектор скорости точки приложен в самой точке и направлен по касательной к ее траектории в сторону движения.

При координатном способе задания движения точки вектор ее скорости определяют через проекции на оси координат:

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad z_x = \dot{z}. \tag{1.5}$$

Если известны проекции скорости на оси координат, то модуль вектора скорости и его направляющие косинусы находят по формулам:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad \cos\alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}; \quad \cos\beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}; \quad \cos\gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}, \tag{1.6}$$

где α, β, γ – углы между вектором скорости и осями координат.

При естественном способе задания движения точки вектор ее скорости определяют по формуле

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} = v_\tau \vec{\tau}, \tag{1.7}$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории в данной точке, направленный всегда в сторону положительного отсчета расстояний; $\dot{s} = v_\tau$ – проекция вектора скорости на касательную к траектории или алгебраическая скорость точки (рис. 1.4). Если $\dot{s} > 0$, то вектор скорости совпадает по направлению с вектором $\vec{\tau}$, а в противном случае он направлен в противоположную сторону. На рисунке O_1 означает центр кривизны траектории, а ρ – радиус кривизны траектории в точке M.

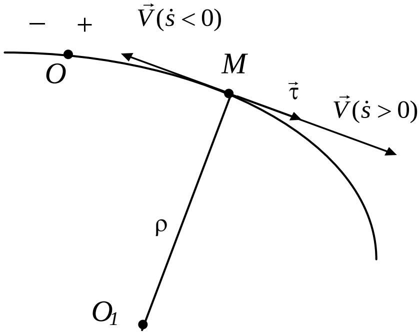


Рисунок 1.4.

1.2.3. Ускорение точки

Ускорение точки является векторной мерой изменения ее скорости, как по величине, так и по направлению. По определению, при векторном способе задания движения ускорение точки – это векторная величина, равная второй производной по времени от радиус-вектора точки или первой производной по времени от вектора скорости точки

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}. \tag{1.8}$$

Вектор ускорения приложен к движущейся точке, лежит в соприкасающейся плоскости к траектории в данной точке и направлен в общем случае в сторону вогнутости траектории.

При координатном способе задания движения точки вектор ее ускорения определяют через проекции на оси координат:

$$a_x = \ddot{x}\,, \quad a_y = \ddot{y}\,, \quad a_x = \ddot{z}\,. \tag{1.9}$$

Если известны проекции ускорения на оси координат, то модуль вектора ускорения и его направляющие косинусы находят по формулам:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad \cos\alpha_1 = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta_1 = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{|\vec{a}|}\,, \tag{1.10}$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – углы между вектором ускорения и осями координат.

При естественном способе задания движения с движущейся точкой связывают естественную систему координат (рис. 1.5). Естественный трехгранник составляется из трех пересекающихся взаимно перпендикулярных плоскостей: 1 – *соприкасающейся*, 2 – *нормальной* и 3 – *спрямляющей*. Линии пересечения плоскостей образуют правую систему естественных осей координат: τ, n и b, определяемых единичными векторами $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$, которые называются, соответственно, единичными векторами касательной нормали, главной нормали и бинормали. Вектор ускорения точки в естественной системе определяют по формулам:

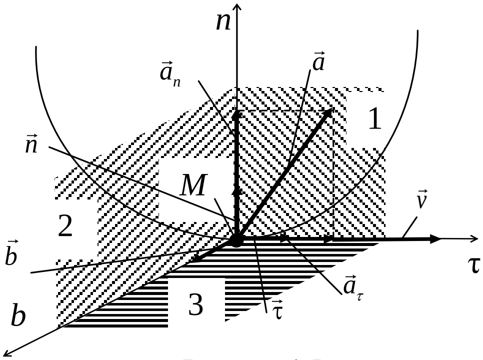


Рисунок 1.5

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n; \quad \vec{a}_\tau = \ddot{s}\vec{\tau} = \dot{v}_\tau \vec{\tau};$$

$$\vec{a}_n = \frac{(\dot{s})^2}{\rho}\vec{n} = \frac{v_\tau^2}{\rho}\vec{n}; \tag{1.11}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_\tau|^2 + |\vec{a}_n|^2}; \quad \vec{a}_b = 0.$$

Здесь $\vec{a}_\tau$ – *касательное* или *тангенциальное* ускорение точки; $\vec{a}_n$ – *нормальное* ускорение. Поскольку вектор ускорения точки лежит в соприкасающейся плоскости, то его проекция на бинормаль $\vec{a}_b$ равна нулю.

1.2.4. Связь между способами задания движения точки

Между способами задания движения точки имеется связь. Так, если начало декартовой системы координат совпадает с центром, из которого проводится радиус-вектор точки при векторном способе изучения ее движения (см. рис. 1.2), то координаты точки равны проекциям на соответствующие оси радиус-вектора точки, т.е.

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты координатных осей. Связь между координатным и естественным способами может быть определена выражением

$$s = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt + C,$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий. Кроме того, касательное ускорение точки по известным проекциям ее скорости на оси координат и заданному координатным способом движению можно определить по формуле

$$a_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{|\vec{v}|}.$$

1.2.5. Частные случаи движения точки

К частным случаям движения точки относят *равномерное* и *равнопеременное* движения. ***Равномерным*** называют движение, при котором модуль скорости точки не изменяется, т.е. $|\vec{v}| = \text{const}$ или $v_\tau = \dot{s} = \text{const}$. Тогда получим:

при криволинейном движении точки

$$s = s_0 + v_\tau t; \quad a_\tau = \dot{v}_\tau = 0; \quad a_n = \frac{(v_\tau)^2}{\rho}; \tag{1.12}$$

при прямолинейном движении (например, вдоль оси x)

$$x = x_0 + \dot{x}t; \quad \ddot{x} = 0; \quad a_\tau = \ddot{x} = 0; \quad a_n = 0; \quad \rho = \infty. \tag{1.13}$$

Равнопеременным называют движение, при котором касательное ускорение точки не изменяется, т.е. $a_\tau = \ddot{s} =$ const. Тогда получим:

при криволинейном движении точки

$$v_\tau = v_{\tau 0} + a_\tau t; \quad s = s_0 + v_{\tau 0} t + a_\tau \frac{t^2}{2}; \quad a_n = \frac{(v_\tau)^2}{\rho}, \tag{1.14}$$

при прямолинейном движении

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \ddot{x}t; \quad x = x_0 + \dot{x}_0 t + \ddot{x}\frac{t^2}{2}; \quad a_\tau = \ddot{x}; \quad a_n = 0. \tag{1.15}$$

Пример. Движение снаряда в вертикальной плоскости (рис. 1.6) описывается уравнениями: $x = 300t$, м; $y = 400t - 5t^2$, м, где t, c – время.

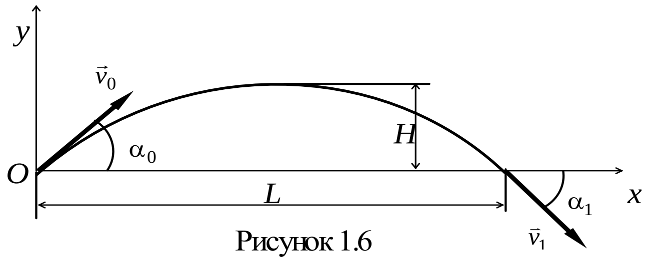


Рисунок 1.6

Определить:

– траекторию, скорость и ускорение снаряда в начальный и конечный моменты времени;

– высоту подъема снаряда над уровнем горизонта H и дальность обстрела L;

– радиус кривизны траектории в ее начальной, конечной и наивысшей точках.

Решение

Найдем уравнение траектории, исключив из 2-го уравнения время. Сначала из 1-го уравнения определим $t = \dfrac{x}{300}$. Теперь из 2-го уравнения имеем $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{18000}x^2$. Траекторией снаряда в координатах x, y вертикальной плоскости является парабола.

Найдем проекции скорости и ускорения снаряда на координатные оси:

$$v_x = \dot{x} = 300 \text{ м/с}; \;\; v_y = \dot{y} = 400 - 10t \text{ м/с}; \;\; a_x = \ddot{x} = 0; \;\; a_y = \ddot{y} = -10 \text{ м/с}^2;$$

Определим их значения в начальный момент времени $t = 0$:

$$v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 \text{ м/с};$$

$$a_0 = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-10)^2} = 10 \text{ м/с}^2.$$

Высоту подъема снаряда над уровнем горизонта можно определить, исследовав на экстремум функции $y(t)$ по переменной t. Это означает, что с точки зрения кинематики проекция скорости точки на ось y в рассматриваемый момент времени должна быть равна нулю. Тогда $\dot{y} = 400 - 10\tau_1 = 0$, где τ_1 – время подъёма снаряда на максимальную высоту, $\tau_1 = 40$ с. Подставляя данное значение времени в выражение для y, получим: $y_{max} = H = y(40) = 8$ км. Дальность обстрела определяем из условия, что в момент падения снаряда $y(t)$ принимает нулевое значение: $y(\tau_2) = 400\tau_2 - 5\tau_2^2 = 0$, где τ_2 время полета снаряда. Корень этого квадратного уравнения, соответствующий падению снаряда на землю $\tau_2 = 80$ с, откуда дальность полета $x_{max} = x(80) = 24$ км.

Теперь, зная время полета снаряда, можно определить его скорость и ускорение в конце полета. Подставляя τ_2 в выражение для проекции скорости снаряда на ось y, имеем $v_{1y} = -400$ м/с. Проекции скорости и ускорения на ось x не зависят от времени и постоянны в течение полета. Таким образом, снаряд движется с постоянным ускорением, равным 10 м/с^2 и направленным вертикально вниз, а его скорость в конце полета равна по модулю скорости в начале полета $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_0| = 500$ м/с и составляют с осью x одинаковые углы $|\alpha_1| = |\alpha_0|$.

Для определения радиуса кривизны перейдем к кинематическим характеристикам движения снаряда в естественной системе отсчета. Вначале определим касательное ускорение по формуле

$$a_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{|\vec{v}|},$$

которое для начального момента времени

$$a_{0\tau} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{|\vec{v}|} = \frac{300 \cdot 0 + 400 \cdot (-10)}{500} = -8 \text{ см/с}^2,$$

а для конечного

$$a_{1\tau} = \frac{300 \cdot 0 + (-400) \cdot (-10)}{500} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Теперь можно определить нормальное ускорение по формуле $a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - |\vec{a}_\tau|^2}$, а затем и $a_{0n} = a_{1n} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ см/с^2. Поскольку радиус кривизны траектории входит в формулу

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \text{ то } \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{500^2}{6} = 41.667 \text{ км.}$$

Радиусы кривизны траектории в начале и в конце полета одинаковы. В наивысшей точке

$$a_\tau = \frac{300 \cdot 0 + 0 \cdot (-10)}{500} = 0; \quad a_n = 10 \text{ см/с}^2; \quad |\vec{v}| = 300 \text{ см/с}; \quad \rho = \frac{300^2}{10} = 9 \text{ км.}$$

Как видно из приведенного примера, уравнения движения точки содержат все необходимое для исследования всех характеристик ее движения в любой момент времени.

1.3. Кинематика твердого тела

Твердым или ***абсолютно твердым*** телом называют такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого при его движении не изменяются. В задачу кинематики твердого тела входит установление способа задания движения, а также определение кинематических характеристик самого тела и принадлежащих ему точек.

1.3.1. Простейшие движения твердого тела

К простейшим движениям твердого тела относят *поступательное движение* и *вращение тела вокруг неподвижной оси*.

Поступательным движением твердого тела называют такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается при его движении параллельной своему первоначальному направлению. Так, например, при смещении стержней равной длины в плоскости (рис. 1.7) все точки тела, шарнирно прикрепленного к стержням, будут иметь траекториями окружности, а любая прямая, в частности AB, в любой момент движения тела будет параллельной первоначальному (горизонтальному) направлению ($A_1B_1 \parallel AB$).

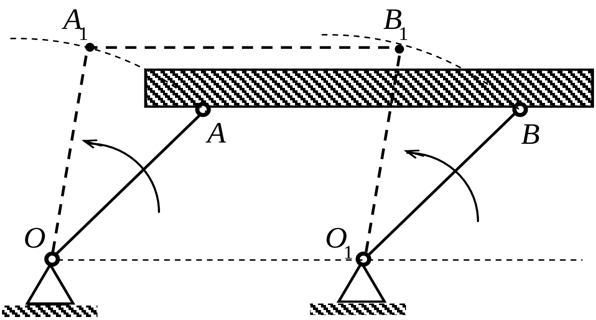


Рисунок 1.7

Задача кинематики поступательного движения сводится к задаче кинематики любой его точки с помощью следующей теоремы: «***При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (совпадающие при наложении) траектории и имеют равные по модулю и направлению скорости и ускорения***».

Из приведенной теоремы следует, что поступательное движение тела вполне определяется движением какой-нибудь его точки, а его изучение сводится к уже рассмотренной задаче кинематики точки.

1.3.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращением вокруг неподвижной оси называют такое движение твердого тела, при котором две какие-либо точки, принадлежащие телу или жестко с ним связанные, остаются все время движения неподвижными**.** Прямую, проходящую через эти точки, называют ***осью вращения*** тела. Все точки, лежащие на оси вращения, неподвижны. Положение тела в любой момент времени можно определить, если в качестве системы отсчета выбрать неподвижную плоскость, проходящую через ось вращения тела, а с движущимся телом связать жестко подвижную плоскость, пересекающуюся с неподвижной на оси вращения. Тогда положение тела в любой момент времени полностью определяется плоским углом φ между этими плоскостями (рис. 1.8), который называют ***углом поворота тела*** и измеряют в радианах.

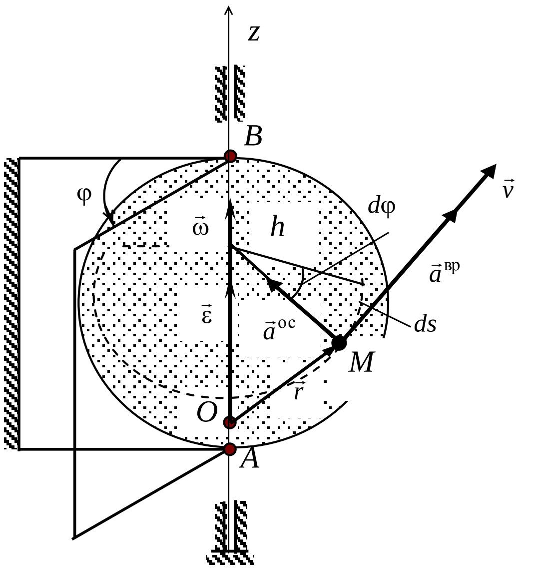


Рисунок 1.8

Ось вращения направляют так, чтобы с ее вершины поворот тела на положительный угол наблюдался с ее вершины происходящим против хода стрелки часов. Таким образом, движение тела считается заданным, если задан угол поворота тела как функция времени

$$\varphi = \varphi(t). \quad (1.16)$$

Кинематическими характеристиками тела в целом являются угловая скорость и угловое ускорение. Угловая скорость тела характеризует интенсивность и направление вращения его. Она равна первой производной по времени от угла поворота тела

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (1.17)$$

Размерность угловой скорости – рад/с. Угловое ускорение тела характеризует интенсивность изменения угловой скорости и равно первой производной по времени от угловой скорости тела или второй производной по времени от угла поворота тела

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}. \quad (1.18)$$

Размерность углового ускорения – рад/с^2. Число оборотов тела N и число оборотов в минуту n связаны с углом поворота $\varphi(t)$ и угловой скоростью $\omega_z(t)$ следующими зависимостями: $\varphi = 2\pi N$ рад, $\omega_z = \dfrac{2\pi n}{60}$ рад/с.

Траекториями точек тела при его движении являются окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения и радиусы которых равны расстояниям от этих точек до оси вращения. Применяя естественный способ задания движения точки тела, и учитывая, что $ds = h \cdot d\varphi$, где h – расстояние от точки до оси вращения тела (см. рис. 1.8), для скорости и ускорений точки имеем:

$$v = h\dot{\varphi} = h\omega_z; \qquad (1.19)$$

$$a^{\text{вр}} = h\ddot{\varphi} = h\dot{\omega}_z = h\varepsilon_z; \qquad (1.20)$$

$$a^{\text{ос}} = h\dot{\varphi}^2 = h\dot{\omega}_z^2, \qquad (1.21)$$

где v – алгебраическое значение скорости точки M; $a^{\text{вр}}$ и $a^{\text{ос}}$ – алгебраические значения составляющих ускорения этой точки. Заметим, что величины $a^{\text{вр}}$ и $a^{\text{ос}}$ соответствуют касательному и нормальному ускорениям точки, однако при рассмотрении кинематических характеристик точек тела принято обозначать их так, как приведено. Величину $a^{\text{вр}}$ называют ***вращательным ускорением***, а $a^{\text{ос}}$ – ***осестремительным*** или ***центростремительным ускорением*** точки. В последнем случае применяют обозначение $a^{\text{ц}}$. Модуль ускорения точки определяют по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a^{\text{вр}})^2 + (a^{\text{ос}})^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (1.22)$$

Из приведенных формул видно, что скорости, составляющие ускорения и ускорение точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, пропорциональны расстояниям от точек до оси вращения тела.

Приведем также векторные формулы, описывающие кинематические характеристики тела и его точек (см. рис. 1.8), для чего введем векторы угловой скорости и углового ускорения

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} = \omega_z\vec{k}; \quad \vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\vec{k} = \varepsilon_z\vec{k}, \qquad (1.23)$$

где $\vec{k}$ – единичный вектор оси, совпадающий по направлению с положительным направлением оси вращения тела; ω_z и ε_z – величины, имеющие смысл проекций векторов угловой скорости и углового ускорения на ось вращения тела. Таким образом, вектор угловой скорости располагается на оси вращения и направлен так, что с его вершины вращение тела наблюдается против стрелки часов. Вектор углового ускорения тоже располагается на оси вращения. При совпадении знаков $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ он направлен так же, как и вектор угловой скорости (вращение ускоренное), а в противном случае – противоположно вектору угловой скорости (вращение замедленное).

Скорость и ускорение точки тела определим по формулам:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}; \quad \vec{a}^{\text{вр}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}; \quad \vec{a}^{\text{ос}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \tag{1.24}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, проведенный из любой точки на оси вращения тела, а знак «$\times$» означает векторное произведение.

Пример. Колесо 1 (рис. 1.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 2t^2+4$ (рад) и приводит в движение механизм подъёма груза 4. Механизм состоит из двух ступенчатых колес 2 и 3, соединенных ременной передачей и вращающихся вокруг неподвижных осей.

Определить скорость и ускорение тела 4 в момент времени $t = 3$ с, если $R_1 = 40$ см, $R_2 = 15$ см, $r_2 = 10$ см, $R_3 = 25$ см, $r_3 = 20$ см.

Решение

Определим угловую скорость зубчатого колеса $\omega_1 = \dot{\varphi} = 4t$ с$^{-1}$. Точка контакта колес 1 и 2 является в данный момент времени их общей точкой и ее скорость $v_A = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$, откуда $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{R_1}{R_2}$. Далее, приравнивая скорости точек B и B', принадлежащих в данный момент времени колесам 2 и 3, получим связь между угловыми скоростями этих колес $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$, откуда $\omega_3 = \omega_2 \dfrac{r_2}{R_3} = \omega_1 \dfrac{R_1}{R_2} \cdot \dfrac{r_2}{R_3}$. Подставляя выражение для ω_1 и значения радиусов колес, получим $\omega_3 = 4t \dfrac{40}{15} \cdot \dfrac{10}{25} = 4.267t$. Скорости груза 4 и точки M: $v_M = \omega_3 r_3$; $v_4 = v_M = 4.267 \cdot 3 \cdot 20 = 256$ см/с при $t = 3$ с. Ускорение груза 4 равно вращательному ускорению точки M

$$a_4 = a_M^{\text{вр}} = \varepsilon_3 r_3 = \dot{\omega}_3 r_3 = 4.267 \cdot 20 = 85.34 \text{ см/с}^2 .$$

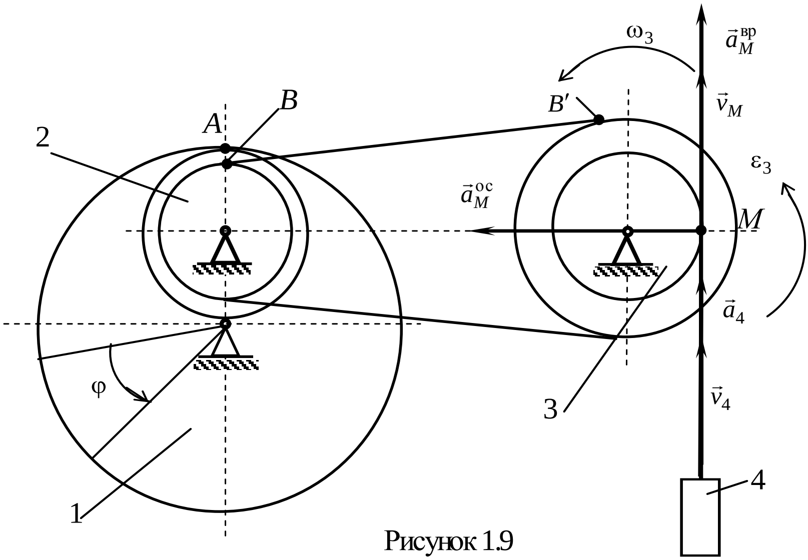


Рисунок 1.9

1.4. Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным (или ***плоским***) называют такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

1.4.1.Уравнения плоскопараллельного движения. Разложение движения на поступательное и вращательное

Если провести в теле прямую, перпендикулярную неподвижной плоскости (рис. 1.10,а), то все точки, лежащие на этой прямой, будут иметь одинаковые траектории, скорости и ускорения, так как она движется поступательно. Поэтому для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется сечение *S* тела, параллельное неподвижной плоскости.

Положение сечения в любой момент времени полностью определяется положением отрезка *AB* (см. рис. 1.10,б), которое, в свою очередь, можно задать тремя величинами:

$$x_A = f_1(t);\ y_A = f_2(t);\ \ \varphi = f_3(t)\,. \tag{1.25}$$

Эти зависимости называют уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

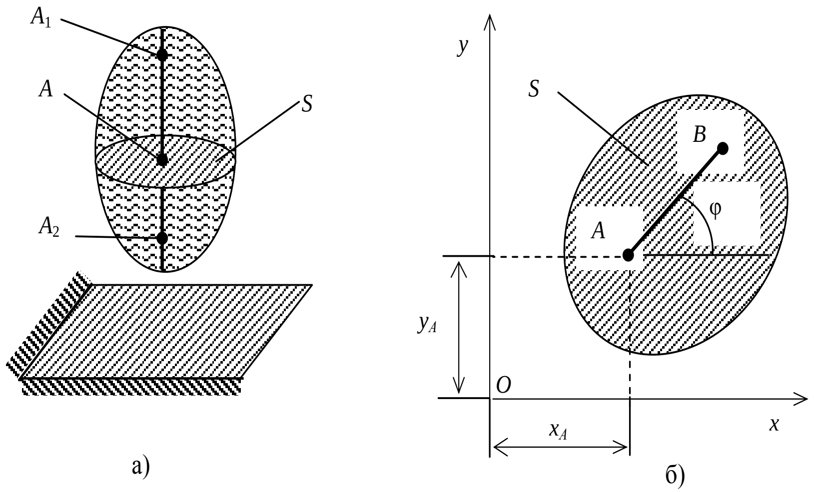


Рисунок 1.10

Движение плоской фигуры S слагается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся также, как полюс A (в качестве полюса может быть выбрана любая точка тела), и вращения тела вокруг оси, проходящей через полюс и перпендикулярной плоскости фигуры. Поступательное движение описывается двумя 1-ми зависимостями (1.25), а вращательное – 3-й зависимостью. Кинематическими характеристиками поступательной части движения являются скорость и ускорение полюса:

$$\left|\vec{v}_A\right| = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2};\quad \left|\vec{a}_A\right| = \sqrt{\ddot{x}_A^2 + \ddot{y}_A^2}, \tag{1.26}$$

а вращательной – угловая скорость и угловое ускорение фигуры

$$\omega = \dot{\varphi};\quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}\,. \tag{1.27}$$

Заметим, что кинематические характеристики поступательной части движения зависят от выбора полюса, а вращательной – не зависят.

1.4.2. Определение скоростей и ускорений точек тела

Скорость любой точки тела равна геометрической (векторной) сумме скорости полюса и скорости точки, приобретаемой ею при вращении тела вокруг полюса (рис. 1.11,а)

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}; \quad \vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}, \qquad (1.28)$$

где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости, введенный также, как и при рассмотрении вращения тела вокруг неподвижной оси (здесь этот вектор располагается на оси, проведенной через полюс перпендикулярно плоскости движения); $\overrightarrow{AM}$ – радиус-вектор точки *M*, проведенный из точки *A*. Модуль вектора $\vec{v}_{MA}$: $|\vec{v}_{MA}| = \omega \cdot AM,$ он направлен перпендикулярно отрезку *AM* в сторону вращения тела.

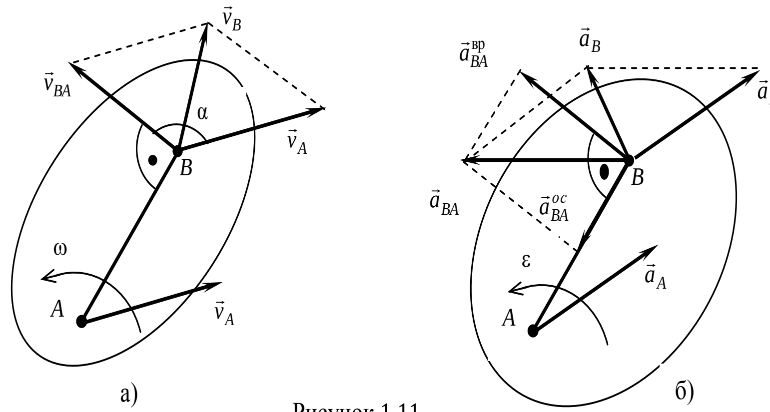


Рисунок 1.11

Численное значение скорости точки можно найти с помощью теоремы косинусов $|\vec{v}_B| = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 + 2v_A \cdot v_{BA} \cos\alpha}$ или разложения на оси произвольно выбранной системы координат. Для определения скоростей точек тела при плоскопараллельном движении важную роль играет следующая теорема: «***Проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, равны***». Заметим, что эта теорема справедлива для любого вида движения абсолютно твердого тела.

Ускорение любой точки тела равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения точки, приобретаемого ею при вращении тела вокруг полюса (см. рис. 1.11,б):

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}; \quad \vec{a}_{MA} = \vec{a}_{MA}^{\text{вр}} + \vec{a}_{MA}^{\text{ос}} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}), \qquad (1.29)$$

где $\vec{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения, введенный так же, как и при рассмотрении вращения тела вокруг неподвижной оси. Модули векторов $\vec{a}_{MA}^{\text{вр}}$ и $\vec{a}_{MA}^{\text{ос}}$:

$$\left|\vec{a}_{MA}^{\text{вр}}\right| = \varepsilon \cdot AB; \quad \left|\vec{a}_{MA}^{\text{ос}}\right| = \omega^2 \cdot AB,$$

причем 1-й из них направлен перпендикулярно отрезку *AB* в сторону углового ускорения, а 2-й – к полюсу *A*. Определять модуль вектора ускорения точки *B* целесообразно аналитически с помощью разложения слагаемых векторов на оси выбранной системы координат.

1.4.3. Мгновенный центр скоростей

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называют точку подвижной плоскости, в которой расположено рассматриваемое сечение и скорость которой в данный момент времени равна нулю. Доказана теорема о том, что если тело движется не поступательно, то МЦС существует, и притом единственный. Из определения следует, что в общем случае в каждый момент времени МЦС находится в различных точках. Частным случаем является вращение тела вокруг неподвижной оси. Здесь МЦС расположен в любой момент времени на оси вращения. Если тело движется поступательно или мгновенно поступательно (скорости всех точек тела в данный момент времени равны по величине и направлению), то МЦС находится на бесконечно большом расстоянии от любой точки тела. Из векторной формулы (1.28) при определении скоростей любой точки плоской фигуры следует, что если в качестве полюса принять МЦС, т.е. $\vec{v}_A = \vec{v}_P = 0$, то $\vec{v}_M = \vec{v}_{MP}$ и скорость любой точки тела находится так, как если бы тело в данный момент времени вращалось вокруг неподвижной оси, проходящей через МЦС. Отсюда видно, что скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до МЦС и перпендикулярны отрезкам, соединяющим эти точки с МЦС.

1.4.4. Способы определения положения мгновенного центра скоростей

1) Если известны направления скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ двух точек A и B плоской фигуры, то МЦС ее P определяется как точка пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, проведенных из этих точек (рис. 1.12,а).

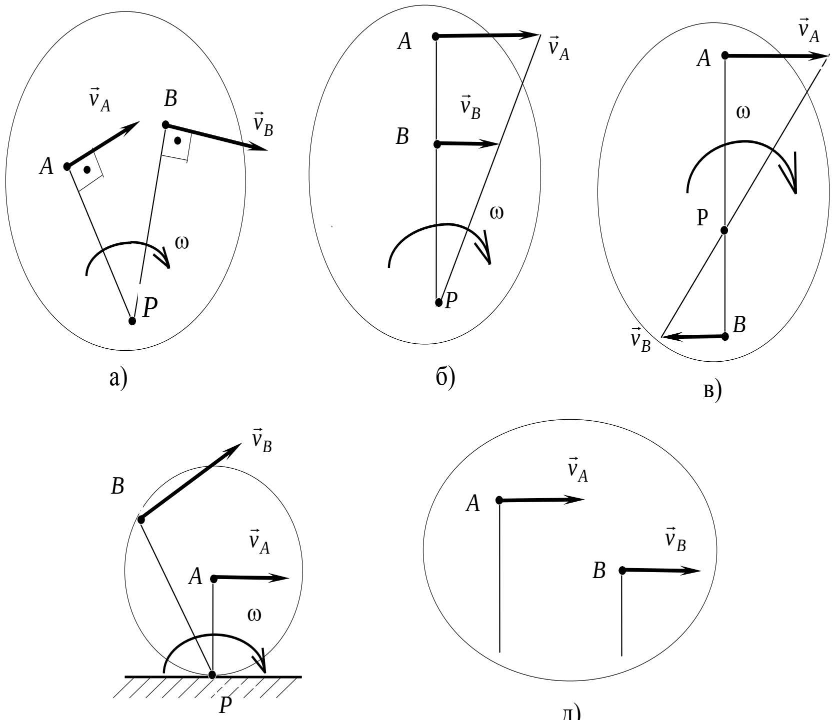


Рисунок 1.12

2) Если $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ и точки A и B лежат на общем перпендикуляре к скоростям этих точек, то МЦС P находится в точке пересечения прямой AB с линией, соединяющей концы векторов скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ (см. рис. 1.12,б,в).

3) При качении без скольжения плоской фигуры по неподвижному контуру МЦС находится в точке соприкосновения контуров (см. рис. 1.12,г).

4) Если скорости двух точек А и В тела $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ параллельны, а перпендикуляры к их скоростям не совпадают, то скорости всех точек тела равны, а МЦС P находится в бесконечном удалении от этих точек и движение тела является мгновенно поступательным. Угловая скорость тела в данный момент времени равна нулю.

<u>Пример 1.</u> Колесо катится прямо без скольжения по неподвижной поверхности. Скорость точки O постоянна и равна 100 см/с (рис. 1.13,а).

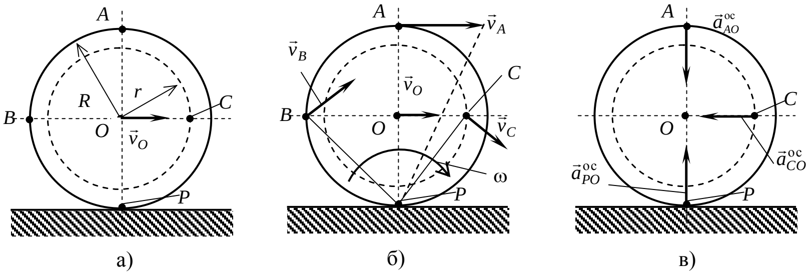


Рисунок 1.13

Определить угловую скорость колеса, скорости точек A, B, C и ускорения точек A, C, P, если радиусы R = 50 см и r = 40 см.

<u>Решение</u>

Определим угловую скорость колеса. Точка P является МЦС, поэтому $\omega = \dfrac{v_O}{OP} = \dfrac{100}{50} = 2$ рад/с. Теперь, зная расстояния от точек A, B и C до МЦС, можно определить величины их скоростей:

$$v_A = \omega \cdot PA = 2 \cdot 100 = 200 \text{ см/с}; \quad v_B = \omega \cdot PB = 2\sqrt{50^2 + 50^2} = 141.42 \text{ см/с};$$

$$v_C = \omega \cdot PC = 2 \cdot \sqrt{50^2 + 40^2} = 128.06 \text{ см/с}.$$

Определив угловую скорость колеса, можно вычислить скорости точек и по формуле (1.28). Например, скорость точки B: $\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{v}_{BO}$,

$\vec{v}_{BO} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB}$, $|\vec{v}_{BO}| = \omega \cdot OB = 2 \cdot 50 = 100$ см/с. Направлен этот вектор вертикально вверх и перпендикулярно вектору $\vec{v}_O$. Вычисляя модуль вектора $\vec{v}_B$, получим $|\vec{v}_B| = \sqrt{100^2 + 100^2} = 141.42$ см/с. Векторы скоростей точек колеса направлены перпендикулярно отрезкам, соединяющим их с МЦС (см. рис. 1.13,б). И, наконец, в соответствии с теоремой о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, убеждаемся в правильности полученных результатов. Так, для точки B имеем, что $v_B \cos 45^0 = 141.42 \cdot 0.7071 = 100$ см/с $= v_O$.

Перейдем к определению ускорений, для чего воспользуемся формулами (1.29). В качестве полюса выбираем точку O. Ускорение полюса равно нулю, так как эта точка движется равномерно и прямолинейно. Тогда ускорения точек будут равны их ускорениям во вращательном движении вокруг полюса, например, для точки A:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AO}; \quad \vec{a}_{AO} = \vec{a}_{AO}^{\text{вр}} + \vec{a}_{AO}^{\text{ос}} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AO} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AO}).$$

Дифференцируя по времени выражение $\omega = \dfrac{v_O}{OP}$ и учитывая, что OP = const и v_O = const, получим $\varepsilon = 0$. Таким образом, ускорения всех точек, включая МЦС, состоят из осестремительных ускорений во вращении вокруг полюса O:

$a_A = a_{AO}^{\text{ос}} = \omega^2 AO = 4 \cdot 50 = 200$ см/с^2; $a_C = a_{CO}^{\text{ос}} = \omega^2 CO = 4 \cdot 40 = 160$ см/с^2; $a_P = a_A = 200$ см/с^2 и направлены к полюсу (см. рис 1.13,в).

Пример 2. Колесо 1 вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с и угловым ускорением $\varepsilon_1 = 4$ рад/с^2 (рис. 1.14), а по его ободу перекатывается без скольжения колесо 2, ось которого приводится в движение кривошипом OA. Угловая скорость кривошипа OA $\omega_{OA} = 4$ рад/с, а его угловое ускорение $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2.

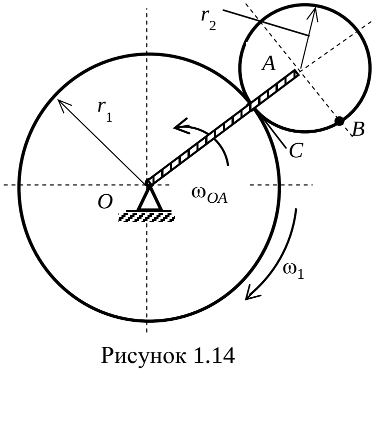


Рисунок 1.14

Определить угловую скорость и угловое ускорение колеса 2, а также скорость и ускорение точки *B*, если радиусы колес соответственно r_1.= 50 см, r_2 .= 10 см.

Решение

Определим угловую скорость колеса. Вначале найдем скорость точки *A* кривошипа

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_{OA}(r_1 + r_2) = 4 \cdot 60 = 240 \text{ см/с.}$$

Затем определим скорость точки контакта *C* колес

$$v_C = \omega_1 r_1 = 2 \cdot 50 = 100 \text{ см/с.}$$

Эти две точки принадлежат колесу 2, их скорости направлены в противоположные стороны перпендикулярно кривошипу *OA*. Не определяя положения МЦС, воспользуемся законом распределения скоростей тела при плоскопараллельном движении (см. рис. 1.12,в) и найдем угловую скорость колеса 2

$$\omega_2 = \frac{v_A + v_C}{r_2} = \frac{240 + 100}{10} = 34 \text{ рад/с.}$$

Для нахождения углового ускорения колеса 2 учтем, что в процессе движения расстояния *OA*, *OC* и *AC* не изменяются. Поэтому, дифференцируя по времени, выражение для угловой скорости колеса 2 найдем его угловое ускорение

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{v}_A + \dot{v}_C}{r_2} = \frac{\varepsilon_{OA} OA + \varepsilon_1 \cdot r_1}{10} = \frac{2 \cdot 60 + 4 \cdot 50}{10} = 32 \text{ рад/с}^2.$$

Для нахождения ускорения точки *B* воспользуемся векторным равенством

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\text{вр}} + \vec{a}_A^{\text{ос}} + \vec{a}_{BA}^{\text{вр}} + \vec{a}_{BA}^{\text{ос}}.$$

Здесь в качестве полюса выбрана точка *A*. Далее вычислим величины:

$$a_A^{\text{вр}} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 60 = 120 \text{ см/с}^2; \quad a_A^{\text{ос}} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 16 \cdot 60 = 960 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{BA}^{\text{вр}} = \varepsilon_2 \cdot AB = 32 \cdot 10 = 320 \text{ см/с}^2; \quad a_{BA}^{\text{ос}} = \omega_2^2 \cdot AB = 1024 \cdot 10 = 10240 \text{ см/с}^2;$$

$$a_B = \sqrt{(a_A^{\text{ос}} - a_{BA}^{\text{вр}})^2 + (a_A^{вр} + a_{BA}^{\text{ос}})^2} =$$
$$= \sqrt{(960 - 320)^2 + (120 + 10240)^2} = 10390.8 \text{ см/с}^2.$$

Векторы скоростей и ускорений показаны на рис. 1.15.

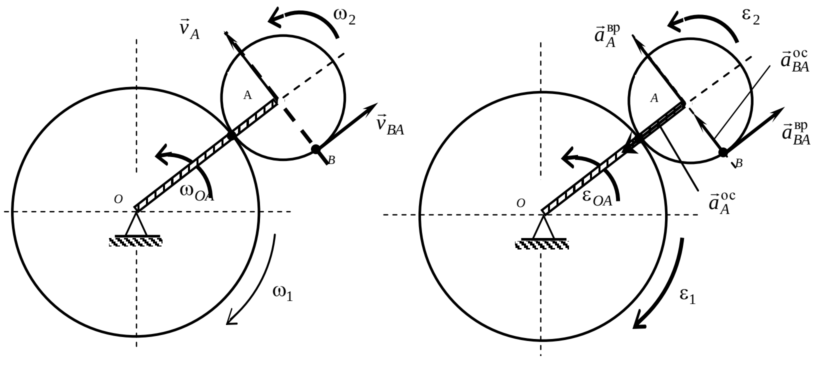


Рисунок 1.15

<u>Пример 3.</u> Кривошип кривошипно-ползунного механизма, приведенного на рис. 1.16, вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\omega_{OA} = 10$ рад/с и угловым ускорением $\varepsilon_{OA} = 20$ рад/с^2. Положение механизма определяется углом $\phi = 30^0$.

Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна *AB*, а также скорость и ускорение точки *B*, если радиус *r* кривошипа *OA* равен 10 см, а длина *L* шатуна *AB* – 30 см.

<u>Решение</u>

Вначале определяем скорость точки *A* кривошипа

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 10 \cdot 10 = 100 \text{ см/с}.$$

Затем, зная направления скоростей точек *A* и *B*, найдем положение МЦС на пересечении перпендикуляров к скоростям этих точек – точку *P*. Для определения угловой скорости шатуна ω_{AB} и скорости точки *B* находим длины отрезков, соединяющих точки *A* и *B* с МЦС. Из теоремы синусов следует, что

$$\sin\psi = \frac{r\cdot\sin\varphi}{L} = \frac{10\cdot 0.5}{30} = 0.167.$$

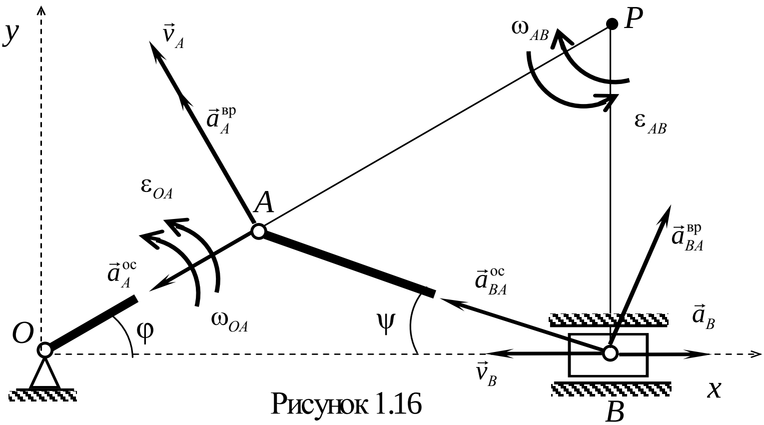


Рисунок 1.16

Длины отрезков:

$$OB = r\cos\varphi + L\cos\psi = 10\cdot 0.866 + 30\cdot\sqrt{1-0.167^2} = 38.239 \text{ см};$$

$$BP = OB\cdot tg\varphi = 38.239\cdot 0.577 = 22.078 \text{ см};$$

$$AP = \frac{OB}{\cos\varphi} - r = \frac{38.239}{0.866} - 10 = 34.156 \text{ см}.$$

Теперь найдем искомые величины:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{100}{34.156} = 2.928 \text{ рад/с};$$

$$v_B = \omega_{AB}\cdot BP = 2.928\cdot 22.078 = 64.639 \text{ см/с}.$$

Определим ускорение точки *B* и угловое ускорение шатуна *AB*. Здесь надо иметь в виду, что расстояние от точки *A* до МЦС не является постоянным и зависит от положения механизма, т.е. от времени. Поэтому продифференцировать по времени угловую скорость не представляется возможным. Поступим следующим образом. Для нахождения ускорения точки *B* воспользуемся векторным равенством (1.29)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\text{вр}} + \vec{a}_A^{\text{ос}} + \vec{a}_{BA}^{\text{вр}} + \vec{a}_{BA}^{\text{ос}}$$

и спроецируем на оси координат xOy (см. рис. 1.16). При этом учтем, что вектор $\vec{a}_B$ лежит на прямой OB, т.к. точка B движется прямолинейно, вектор $\vec{a}_{BA}^{oc}$ направлен к полюсу A, а вектор $\vec{a}_{BA}^{вр}$ ему перпендикулярен. Получим два алгебраических уравнения для определения величин и направлений ускорений $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BA}^{вр}$ (вначале направляем искомые векторы произвольно):

$$a_B = -a_A^{\text{вр}} \cdot \sin\varphi - a_A^{\text{ос}} \cdot \cos\varphi + a_{BA}^{\text{вр}} \cdot \sin\psi - a_{BA}^{\text{ос}} \cdot \cos\psi\,;$$

$$0 = a_A^{\text{вр}} \cdot \cos\varphi - a_A^{\text{ос}} \cdot \sin\varphi + a_{BA}^{\text{вр}} \cdot \cos\psi + a_{BA}^{\text{ос}} \cdot \sin\psi\,.$$

Предварительно вычислим ускорения:

$$a_A^{вр} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 20 \cdot 10 = 200 \text{ см/с}^2; \quad a_A^{oc} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{BA}^{\text{ос}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2.928^2 \cdot 30 = 257.196 \text{ см/с}^2; \quad \cos\psi = \sqrt{1 - 0.167^2} = 0.986.$$

Далее определим:

– из 2-го уравнения

$$a_{BA}^{\text{вр}} = \frac{-a_A^{\text{вр}} \cdot \cos\varphi + a_A^{\text{ос}} \cdot \sin\varphi - a_{BA}^{\text{ос}} \cdot \sin\psi}{\cos\psi} =$$

$$= \frac{-200 \cdot 0.866 + 1000 \cdot 0.5 - 257.196 \cdot 0.167}{0.986} = 287.879 \text{ см/с}^2;$$

– из 1-го уравнения

$$a_B = -200 \cdot 0.5 - 1000 \cdot 0.866 + 287.879 \cdot 0.167 - 257.196 \cdot 0.986 =$$

$$= -1171.519 \text{ см/с}^2.$$

Знаки показывают, что направление ускорения $\vec{a}_{BA}^{\text{вр}}$ совпадает с принятым, а направление $\vec{a}_B$ – противоположно ему. Зная ускорение $a_{BA}^{\text{вр}}$, можно найти угловое ускорение шатуна

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\text{вр}}}{AB} = \frac{287.879}{30} = 9.596 \text{ рад/с}.$$

1.5. Движение тела с одной неподвижной точкой

Движение твердого тела с одной неподвижной точкой принято называть ***вращательным*** или ***сферическим***. Поскольку расстояние от неподвижной точки до любой точки тела в процессе его движения остается неизменным, то траектории всех точек располагаются на поверхностях сфер с радиусами, равными расстояниям от этих точек до неподвижной точки.

1.5.1. Уравнения движения. Угловая скорость и угловое ускорение тела

Тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы. Для описания движения такого тела необходимо задать три независимых параметра, однозначно определяющих в любой момент времени его положение в выбранной системе отсчета. В теоретической механике наибольшее распространение получили углы Эйлера, которые вводятся, как показано на рис. 1.17.

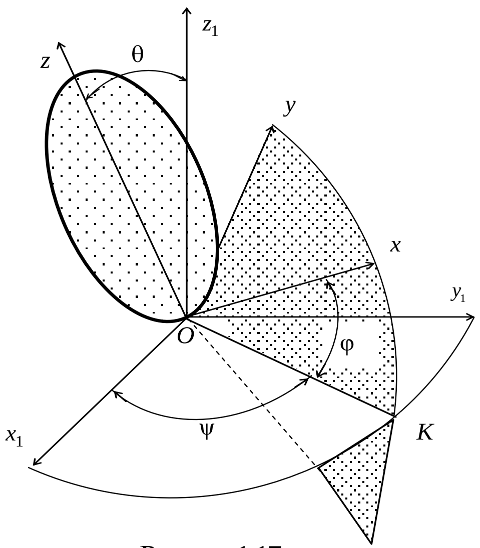


Рисунок 1.17

С телом, движение которого изучается в неподвижной системе координат $Ox_1y_1z_1$, жестко связывают подвижную систему координат $Oxyz$. Плоскость xOy подвижной системы пересекается с плоскостью x_1Oy_1 неподвижной по линии OK, которую называют ***линией узлов***. Положение подвижной системы относительно неподвижной оси определяют углами Эйлера:

ψ – *угол прецессии*, определяющий вращение тела вокруг неподвижной оси;

φ – *угол собственного вращения*, определяющий вращение тела вокруг оси собственного вращения;

θ – *угол нутации*, определяющий вращение тела вокруг линии узлов.

В любой момент времени эти три функции

$$\psi = \psi(t); \quad \varphi = \varphi(t); \quad \theta = \theta(t) \tag{1.30}$$

характеризуют положение тела в пространстве и являются *уравнениями движения тела с одной неподвижной точкой.* Оно может быть сведено к вращательному движению с помощью теоремы Эйлера-Даламбера, согласно которой «***Любое элементарное перемещение тела, имеющего неподвижную точку, представляет собой элементарный поворот вокруг некоторой мгновенной оси вращения, проходящей через эту точку***».

Различие между рассматриваемым движением и вращением вокруг неподвижной оси состоит в том, что мгновенная ось вращения является неподвижной в данный момент времени, т.е. в каждый момент времени это уже другая ось. Иными словами, мгновенная ось вращения с течением времени меняет направление в пространстве и описывает в процессе движения тела коническую поверхность с образующей, проходящей через неподвижную точку.

Для описания движения тела вводятся векторы угловой скорости и углового ускорения. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ расположен на мгновенной оси вращения и направлен так, что с его вершины вращение наблюдается против хода стрелки часов. Начало вектора расположено в неподвижной точке. Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ определяется формулой

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.31}$$

Здесь вектор углового ускорения характеризует изменение вектора угловой скорости как по величине, так и по направлению и поэтому не находится с ее вектором на одной прямой. Он направлен по касательной к траектории, описываемой концом вектора угловой скорости, так же как и вектор скорости точки (см. п. 1.2).

1.5.2. Скорости и ускорения точек тела

Скорость и ускорение точки тела определяют по формулам:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}; \quad \vec{a} = \vec{a}^{\text{вр}} + \vec{a}^{\text{ос}}; \quad a^{\text{вр}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}; \quad \vec{a}^{\text{ос}} = \vec{\omega} \times \vec{v}\,, \qquad (1.32)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, проведенный из неподвижной точки. Заметим, что вектор осестремительного ускорения направлен к мгновенной оси вращения тела и перпендикулярен вектору скорости так же, как и при вращении тела вокруг неподвижной оси. Вектор вращательного ускорения не лежит на одной прямой с вектором скорости, т.е. на касательной к траектории точки и не тождествен ее касательному ускорению.

Пример. Ось подвижного конуса (бегунка) *Ox* вращается вокруг неподвижной оси Oz_1 с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ (рис. 1.18). При этом подвижный конус катится без скольжения по боковой поверхности неподвижного конуса.

Определить скорости точек *P*, *A*, *B* и угловую скорость подвижного конуса, а также ускорение точки *B*, если ω_1 = 1 рад/с, *OA* = 50 см, $\alpha = 30^0$.

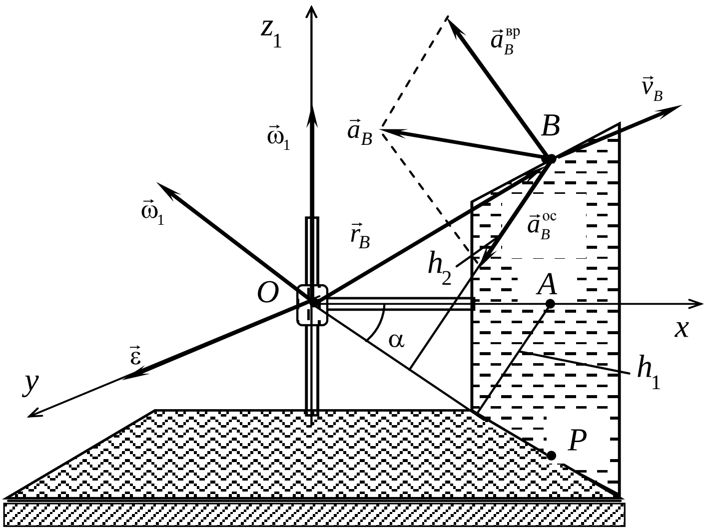


Рисунок 1.18

Решение

Вначале установим положение мгновенной оси вращения тела. Так как качение подвижного конуса по неподвижному происходит без скольжения, то все точки подвижного конуса, включая точку *P*, в данный момент времени совпадают с точками неподвижного конуса. Следовательно, скорости этих точек равны нулю. Отсюда следует, во-первых, что мгновенная ось вращения тела в данный момент времени расположена на прямой *OP*, и, во-вторых, что скорость точки *P* равна нулю.

Определим скорость точки *A*, которая лежит на оси *Ox*, $v_A = \omega_1 \cdot OA = 1 \cdot 50 = 50$ см/с . Теперь найдем угловую скорость тела:

$$\omega = \frac{v_A}{h_1} = \frac{v_A}{OA \cdot \sin\alpha} = \frac{50}{50 \cdot 0.5} = 2 \text{ рад/с},$$

где h_1 – расстояние от точки *A* до мгновенной оси вращения. Далее определим скорость точки *B*: $v_B = \omega \cdot h_2 = \omega \cdot 2h_1 = 2v_A = 100$ см/с . Направлена она параллельно оси *y*, перпендикулярной осям z_1 и *x*.

Определим ускорение точки *B*. Вектор $\vec{\omega}$ вращается вокруг неподвижной оси Oz_1, а поскольку угловая скорость его вращения $\vec{\omega}_1$ постоянна по модулю, то модуль вектора $\vec{\omega}$ также постоянен

$$\omega = \omega_1 \cdot \frac{OA}{OA \cdot \sin\alpha} = 2 \text{ рад/с} = \text{const}.$$

Следовательно, его производную по времени, т.е. вектор $\vec{\varepsilon}$, определим по формуле $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}$. Этот вектор направлен по оси *y*, перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}$. Его модуль:

$$\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 \cdot 2 \cdot 0.866 = 1.732 \text{ рад/с}^2.$$

Проведем из неподвижной точки радиус-вектор точки *B* (см. рис. 1.18) и определим составляющие вектора ее ускорения:

$$r_B = OB = OA / \cos\alpha = 50 / 0.866 = 57.74 \text{ см};$$

$$\vec{a}_B^{\text{вр}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{\text{B}}; \quad a_B^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot O\text{B} = 1.732 \cdot 57.74 = 100 \text{ см/с}^2;$$

$$\vec{a}_B^{\text{ос}} = \vec{\omega} \times \vec{v}_B; \quad a_B^{\text{ос}} = \omega \cdot v_B = 2 \cdot 100 = 200 \text{ см/с}^2.$$

По теореме косинусов, поскольку угол между векторами $\vec{a}_B^{\text{вр}}$ и $\vec{a}_B^{\text{ос}}$ равен 120^0, найдем модуль ускорения точки:

$$a_B = \sqrt{(a_B^{\text{вр}})^2 + (a_B^{\text{ос}})^2 + 2 \cdot a_B^{\text{вр}} \cdot a_B^{\text{ос}} \cdot \cos 120^0} =$$

$$= \sqrt{100^2 + 200^2 - 2 \cdot 100 \cdot 200 \cdot 0.5} = 173.21 \, \text{см/с}^2.$$

Следует отметить, что вектор вращательного ускорения не лежит на одной прямой с вектором скорости, а перпендикулярен ему.

1.6. Движение свободного твердого тела

Свободным называют такое движение тела, при котором на его положение в пространстве не наложено никаких ограничений. В этом случае тело имеет 6 степеней свободы. Для описания движения его введем в рассмотрение три системы координат (рис. 1.19): 1-я $O_2x_2y_2z_2$ – неподвижная, относительно которой изучается движение; 2-я $Ox_1y_1z_1$ – подвижная, оси которой движутся поступательно вместе с началом координат (точкой *O*); 3-я $Oxyz$ – подвижная, жестко скрепленная с телом. Движение тела слагается из поступательного вместе с точкой *O*, являющейся полюсом, и движения относительно точки *O*. Последнее является движением тела с одной неподвижной точкой в системе координат $Ox_1y_1z_1$.

Таким образом, *движение свободного твердого тела в общем случае слагается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как произвольно выбранный полюс O, и из сферического движения, определяемого углами Эйлера.* Дополнительные сведения об общем случае движения можно найти в рекомендуемой литературе.

Все перемещения являются независимыми и поэтому уравнениями движения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} &x_{2O} = f_1(t); \quad y_{2O} = f_2(t); \quad z_{2O} = f_3(t); \\ &\psi = f_4(t); \qquad \varphi = f_5(t); \qquad \theta = f_6(t). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Первые три зависимости соответствуют поступательному движению, а вторые три – сферическому.

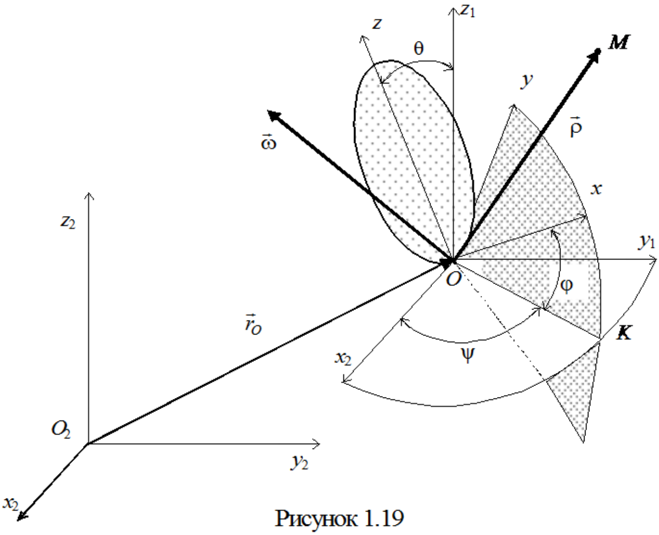


Рисунок 1.19

Поскольку сферическое движение может быть представлено серией элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих в данном случае через полюс O, то скорость и ускорение любой точки тела будут равны геометрическим суммам скорости и ускорения, соответственно, поступательного движения, т.е. полюса, а также скорости и ускорения точки при движении относительно полюса. Приведем формулы для определения скорости и ускорения свободного твердого тела:

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}; \quad \vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}). \tag{1.34}$$

Здесь $\vec{v}$ и $\vec{a}$ – скорость и ускорение точки M тела; $\vec{v}_O$ и $\vec{a}_O$ – скорость и ускорение полюса O; $\vec{\omega}$ – угловая скорость тела; $\vec{\rho}$ радиус-вектор точки M в подвижной системе координат $Oxyz$.

1.7. Сложное движение точки

Часто приходится рассматривать движение точки по отношению к двум системам отсчета, причем одна из них считается неподвижной, а другая – движется по отношению к неподвижной произвольным образом. В частности, груз, сброшенный с самолета, по отношению к наблюдателю, находящемуся в самолете, движется прямолинейно вниз. Наблюдатель, находящийся на земле, видит другое движение, траектория которого представляет собой параболу. В таких случаях вводят понятие *сложного движения точки*.

1.7.1. Виды движений

Сложным или ***абсолютным*** называют движение точки по отношению к неподвижной системе отсчета. Кинематическими характеристиками движения точки являются абсолютная траектория, абсолютная скорость и абсолютное ускорение, обозначаемые, соответственно, как $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{a}_{\text{абс}}$.

Относительным называют движение точки относительно подвижной системы отсчета. Кинематическими характеристиками движения точки являются относительная траектория, относительная скорость и относительное ускорение точки, обозначаемые, соответственно, как $\vec{v}_{\text{отн}}$ и $\vec{a}_{\text{отн}}$.

Переносным называют движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Кинематическими характеристиками движения точки являются переносная скорость и переносное ускорение точки, обозначаемые, соответственно, как $\vec{v}_{\text{пер}}$ и $\vec{a}_{\text{пер}}$. При этом переносной скоростью точки является скорость той, неизменно связанной с подвижными осями, точки, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка, а переносным ускорением – ускорение этой точки. Заметим, что вместо указанных могут встретиться и такие обозначения:

$$\vec{v}_{\text{авс}} \leftrightarrow \vec{v}\,; \quad \vec{a}_{\text{абс}} \leftrightarrow \vec{a}\,; \quad \vec{v}_{\text{отн}} \leftrightarrow \vec{v}_r\,; \quad \vec{a}_{\text{отн}} \leftrightarrow \vec{a}_r\,;$$

$$\vec{v}_{\text{пер}} \leftrightarrow \vec{v}_e\,; \quad \vec{a}_{\text{пер}} \leftrightarrow \vec{a}_{\text{е}}\,; \quad \vec{a}_{\text{кор}} \leftrightarrow \vec{a}_c\,.$$

В дальнейшем будем использовать последние обозначения.

1.7.2. Теоремы о сложении скоростей и ускорений точки при сложном движении

Основной задачей кинематики сложного движения точки является определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения ее, если известно движение точки в подвижной системе отсчета, а также движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Решение этой задачи может быть получено на основании теорем, доказанных в кинематике, о сложении скоростей и ускорений точки при сложном движении.

Теорема о сложении скоростей: «***При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей***»

$$\vec{v} = \vec{v}_{\mathrm{e}} + \vec{v}_{\mathrm{r}}\,. \tag{1.35}$$

Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса): «***При сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и ускорения Кориолиса***»

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c\,. \tag{1.36}$$

Ускорение Кориолиса определим по формуле

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathrm{e}} \times \vec{v}_r\,. \tag{1.37}$$

Относительную скорость и относительное ускорение точки определяют обычным образом. При их вычислении считают, что наблюдатель находится в подвижной системе отсчета и движется вместе с ней относительно неподвижной. Другими словами, необходимо мысленно зафиксировать подвижную систему отсчета и рассматривать только относительное движение. Переносную скорость и переносное ускорение точки также определяют обычным образом. При их вычислении необходимо зафиксировать точку в подвижной системе отсчета, т.е. рассматривать движение той точки подвижной системы, с которой изучаемая точка в данный момент времени совпадает. Для этого в данный момент времени вначале нужно найти положение точки на относительной траектории.

Рассмотрим, как определяют ускорение Кориолиса по величине и направлению. Исходя из формулы (1.36), вычислим модуль вектора $\vec{a}_c$ как модуль векторного произведения

$$|\vec{a}_c| = 2 \cdot |\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{v}_r| \cdot \sin(\alpha), \tag{1.38}$$

где α – угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$. Сам вектор направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены перемножаемые векторы, в сторону, с которой поворот наблюдается от вектора $\vec{\omega}_e$ к вектору $\vec{v}_r$ на меньший угол α против хода стрелки часов (рис. 1.20).

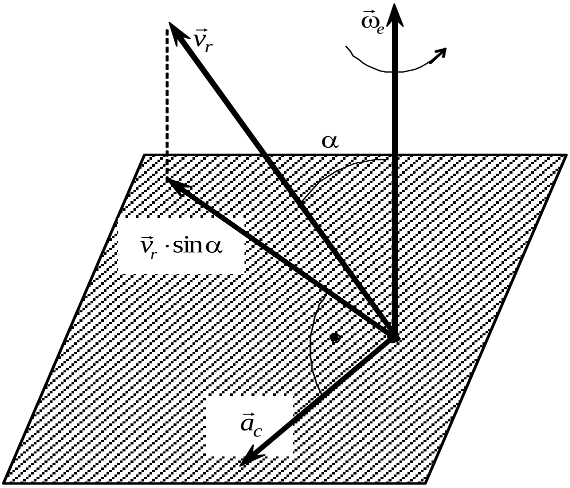


Рисунок 1.20

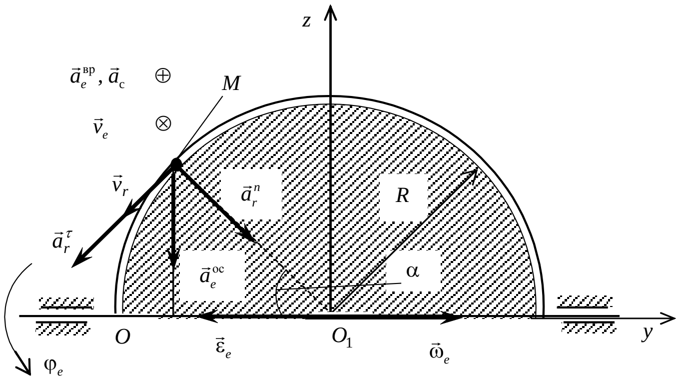
Кроме того, можно определить направление вектора $\vec{a}_c$ по правилу Жуковского. Для этого (см. рис. 1.20) необходимо провести плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{\omega}_e$ и найти проекцию на эту плоскость вектора $\vec{v}_r$, т.е. вектор $\vec{v}_r \cdot \sin\alpha$. Затем следует повернуть этот вектор в указанной плоскости на угол 90^0 в сторону вращения подвижной системы координат.

Поскольку в выражение для модуля вектора ускорения Кориолиса входит произведение трех величин, являющихся функциями времени, то в те моменты времени, когда одна из этих величин обращается в нуль, ускорение Кориолиса тоже равно нулю. В частности, оно равно нулю, если векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$ параллельны друг другу или коллинеарны. В одном из важных случаев, если оси подвижной системы координат движутся поступательно, ускорение Кориолиса равно нулю в любой момент времени. Тогда переносное движение является поступательным и угловая скорость такого движения равна нулю.

Пример 1. По цилиндрической полости на ободе тела *D*, вращающегося вокруг неподвижной оси по закону $\varphi_e = 4t - t^2$, рад (рис. 1.21) движется точка, дуговая координата которой изменяется по закону

$$OM = S_r = 20\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right), \text{ см}.$$

Определить в момент времени t = 1 с абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M*, если *R* = 40 см.



Примечание. Для удобства векторы, перпендикулярные плоскости рисунка, помечены значками: ⊗ – если вектор направлен к читателю: ⊕ – если вектор направлен в противоположную сторону.

Рисунок 1.21

Решение

В данный момент времени вначале установим положение точки *M* по отношению к телу. Для этого подставим значение времени в выражение для дуговой координаты S_r и получим, что $S_r = 10\pi$, см. Далее найдем угол α, который и определяет положение точки *M*, $\alpha = \dfrac{10\pi}{R} = \dfrac{\pi}{4}$, рад.

Рассмотрим относительное движение точки *M* и определим кинематические характеристики относительного движения. Относительным является движение точки по отношению к телу, которое в этом случае считается неподвижным. Определим относительную скорость

$$v_r = \dot{S}_r = -20 \cdot \frac{\pi^2}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right),$$

что после подстановки значения времени дает $v_r = -56.979$ см/с. С учетом знака вектор относительной скорости направлен так, как показано на рис.1.21. Далее определим касательную и нормальную составляющие относительного ускорения:

$$a_r^\tau = \ddot{S}_r = -20 \cdot \frac{\pi^3}{9} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right), \quad a_r^n = \frac{\dot{S}_r^2}{R},$$

что после подстановки времени дает:

$$a_r^\tau = -34.451 \text{ см/с}^2, \quad a_r^n = 81.165 \text{ см/с}^2.$$

Направления этих векторов показаны на рис. 1.21.

Теперь рассмотрим переносное движение, для чего зафиксируем точку *M* на теле, и определим ее кинематические характеристики, как точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Вычислим расстояние точки до оси вращения тела – это $h = R \cdot \sin\alpha = 28.284$см. Далее найдем угловую скорость и угловое ускорение переносного движения – кинематические характеристики тела: $\omega_e = \dot{\varphi}_e = 4 - 2t; \quad \varepsilon_e = \dot{\omega}_e = -2$, что после подстановки времени t дает $\omega_e = 2$ рад/с; $\varepsilon_e = -2$ рад/с^2. Переносная скорость: $v_e = \omega_e \cdot h = 56.568$ см/с, составляющие переносного ускорения: : $a_e^{вр} = \varepsilon_e \cdot h = -56.568$ см/с^2, $a_e^{oc} = \omega_e^2 \cdot h = 113.136$ см/с^2. Все векторы показаны на рис.1.21.

Вычислим ускорение Кориолиса. Сначала определим направление вектора $\vec{a}_c$ в соответствии с формулой (1.37) и направлениями векторов $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$ (см. рис. 1.21). Если спроецировать вектор относительной скорости $\vec{v}_r$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{\omega}_e$, т.е. на плоскость xO_1z, а затем повернуть в этой плоскости в сторону вращения тела, то, в соответствии с правилом Жуковского. убедимся в правильности определения направления вектора $\vec{a}_c$. Модуль этого вектора вычислим по формуле (1.38)

$$\left|\vec{a}_c\right| = 2\cdot\left|\vec{\omega}_e\right|\cdot\left|\vec{v}_r\right|\cdot\sin(\pi-\alpha) = 2\cdot 2\cdot 56.979\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 161.159 \text{ см/с}^2 .$$

После определения всех кинематических характеристик точки в относительном и переносном движениях, а также ускорения Кориолиса, найдем абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки по формулам (1.35) и (1.36). Поскольку векторы $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$ взаимно перпендикулярны, то численное значение абсолютной скорости можно найти так

$$v = \sqrt{(v_e)^2 + (v_e)^2} = 80.29 \text{ см/с} .$$

Для определения абсолютного ускорения точки необходимо сложить пять векторов, что удобно выполнить аналитически – путем проецирования векторного равенства на оси выбранной системы координат xO_1yz (см. рис. 1.21). Это равенство имеет вид: $\vec{a} = \vec{a}_e^{\text{вр}} + \vec{a}_e^{\text{ос}} + \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_c$. Проецирование на оси координат с учетом направлений указанных векторов дает:

$$a_x = -a_e^{\text{вр}} - a_c = -217.727 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = -a_r^{\tau}\cdot\sin\alpha + a_r^{n}\cdot\cos\alpha = 33.031 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = -a_e^{\text{ос}} - a_r^{\tau}\cdot\cos\alpha - a_r^{n}\cdot\sin\alpha = -194.888 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения определяем по формуле

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2} = 294.107 \text{ см/с}^2 .$$

<u>Пример 2.</u> Тело *D* шарнирно прикреплено к двум параллельным стержням одинаковой длины, которые вращаются вокруг осей, перпендикулярных плоскости рис. 1.22, по закону $\varphi = \pi\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ рад . По желобу, вырезанному в теле, движется относительно тела точка в соответствии с законом $OM = S_r = 10t^2 - 4t^3$ см .

Определить для момента времени $t = 1$ с абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки, если $O_1A = O_2O = L = 3$ см; $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

<u>Решение</u>

Рассмотрим относительное движение точки M и определим кинематические характеристики относительного движения. Относительным является прямолинейное движение точки по желобу. Относительная скорость для заданного момента времени:

$$v_r = \dot{S}_r = 20 \cdot t - 12 \cdot t^2 = 8 \text{ см/с} .$$

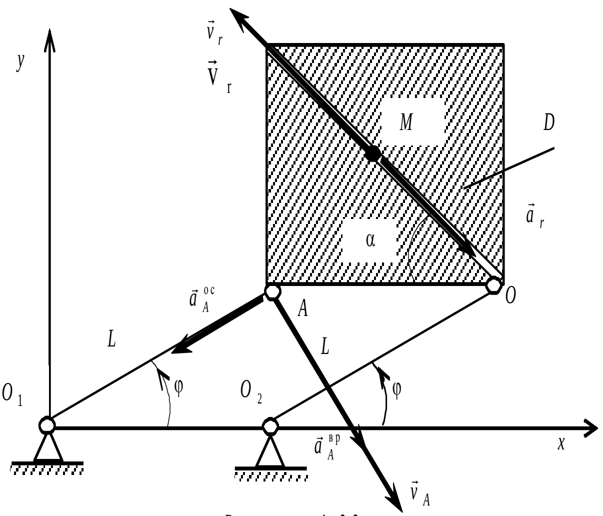


Рисунок 1.22

Вектор ее направлен так, как показано на рис. 1.22. Относительное ускорение также для заданного момента времени:

$$a_r = \ddot{S}_r = 20 - 24 \cdot t = -4 \text{ см/с}^2 .$$

Направление вектора относительного ускорения противоположно направлению вектора относительной скорости.

Теперь рассмотрим переносное движение, для чего зафиксируем точку M на теле, и определим ее кинематические характеристик, как точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Нетрудно заметить, что тело D совершает в данном случае поступательное движение, а, следовательно, все его точки имеют одинаковые по величине и направлению скорости и ускорения. Поэтому для определения кинематических характеристик точки M при переносном движении достаточно вычислить, например, скорость и ускорение точки A, которая одновременно принадлежит и телу, и вращающемуся стержню. Определим переносную скорость точки M для заданного момента времени

$$v_e = v_A = \dot{\varphi} \cdot L = -\frac{\pi^2}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \cdot L = -8.54 \text{ см/с} .$$

Составляющие переносного ускорения для заданного момента времени найдем по формулам:

$$a_e^{\text{вр}} = a_A^{\text{вр}} = \ddot{\varphi} \cdot L = -\frac{\pi^3}{9} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \cdot L = -5.16 \text{ см/с}^2 ;$$

$$a_e^{\text{ос}} = a_A^{\text{ос}} = \dot{\varphi}^2 \cdot L = 24.3 \text{ см/с}^2 .$$

Направления всех векторов, характеризующих кинематические характеристики переносного движения, показаны на рис. 1.22.

Поскольку переносное движение в рассматриваемом примере является поступательным (тело D не вращается и его угловая скорость равна нулю), то ускорение Кориолиса равно нулю. Определим абсолютную скорость точки по формуле (1.34). Предварительно найдем значение угла φ для заданного момента времени: $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Проецируя векторное равенство на оси координат (см. рис. 1.22), получим

$$v_x = v_e \cdot \sin\varphi - v_r \cdot \cos\alpha = 8.54 - 8 \cdot 0.707 = 2.88 \text{ см/с} ;$$

$$v_y = -v_e \cdot \cos\varphi + v_r \cdot \sin\alpha = 8 \cdot 0.707 = 5.66 \text{ см/с} ;$$

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = 6.35 \text{ см/с} .$$

Определим абсолютное ускорение по формуле $\vec{a} = \vec{a}_e^{\text{вр}} + \vec{a}_e^{\text{ос}} + \vec{a}_r$. Проецируя это векторное равенство на оси координат, найдем проекции абсолютного ускорения на оси:

$$a_x = a_e^{\text{вр}} \cdot \sin\varphi - a_e^{\text{ос}} \cdot \cos\varphi + a_r \cdot \cos\alpha = 7.99 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = -a_e^{\text{вр}} \cdot \cos\varphi - a_e^{\text{ос}} \cdot \sin\varphi - a_r \cdot \sin\alpha = 27.13 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения вычислим по формуле

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = 28.28 \text{ см/с}^2 .$$

1.8. Сложение вращений вокруг параллельных осей

Во многих случаях твердое тело совершает сложное движение, состоящее из двух вращений, причем и переносным и относительным движениями являются вращения вокруг параллельных осей. Тогда результирующим движением будет вращение вокруг мгновенной оси. Исключение составляет пара вращений, когда результирующее движение поступательное.

1.8.1. Вращения, направленные в одну сторону

Рассмотрим случай, когда угловые скорости переносного и относительного вращений направлены в одну сторону (рис. 1.23,а)

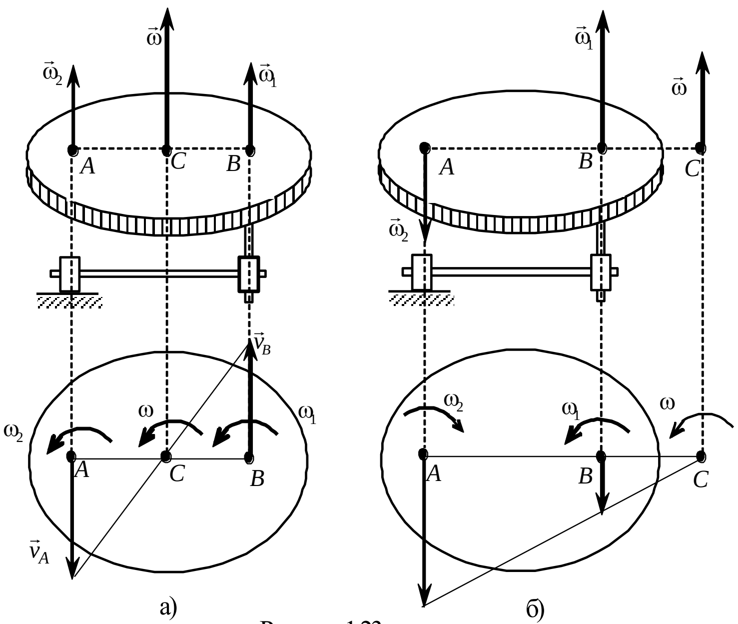


Рисунок 1.23

Как видно, движение тела является в результате плоскопараллельным и оно может быть сведено к вращению вокруг мгновенной оси, описывающей в общем случае цилиндрическую поверхность. Мгновенная ось проходит через точку *C*. Приведем формулы, определяющие угловую скорость результирующего движения и положение мгновенной оси вращения:

$$v_A = \omega_1 \cdot AB; \quad v_B = \omega_2 \cdot AB;$$

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A + v_B}{AB} = \omega_1 + \omega_2; \quad \frac{BC}{AC} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Таким образом, если вращения вокруг параллельных осей направлены в одну сторону, то результирующее движение является мгновенным вращением с угловой скоростью $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, а точка *C*, через которую проходит мгновенная ось вращения, делит расстояние между осями внутренним образом на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям составляющих вращений.

1.8.2. Вращения, направленные в противоположные стороны

Рассмотрим случай, когда угловые скорости переносного и относительного вращений направлены в противоположные стороны (см. рис. 1.23,б), при этом угловые скорости не равны (пусть $\omega_1 > \omega_2$). Здесь движение тела в результате также является плоскопараллельным и может быть сведено к вращению вокруг мгновенной оси, проходящей через точку *C*. Приведем формулы, определяющие угловую скорость результирующего движения и положение мгновенной оси вращения:

$$v_A = \omega_1 \cdot AB; \quad v_B = \omega_2 \cdot AB;$$

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A - v_B}{AB} = \omega_1 - \omega_2; \quad \frac{BC}{AC} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Таким образом, если вращения вокруг параллельных осей направлены в противоположные стороны, то результирующее движение также является мгновенным вращением с угловой скоростью $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, а точка *C*, через которую проходит мгновенная ось вращения, делит расстояние между осями внешним образом на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям составляющих вращений.

1.8.3. Пара вращений

Пусть вращения вокруг параллельных осей направлены в противоположные стороны, а угловые скорости этих вращений равны. Как видно из рис. 1.23,б, скорости точек A и B одинаковы, мгновенный центр скоростей (точка C) находится в бесконечном удалении от этих точек, а угловая скорость результирующего движения равна нулю. Таким образом, тело движется поступательно (или мгновенно поступательно). Скорости всех точек тела одинаковы: $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{BA} = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB} = \vec{M}$. Величину $\vec{M}$, определяющую скорости точек тела, называют ***моментом пары вращений***. Примером пары вращений является движение педали велосипеда (рис. 1.24).

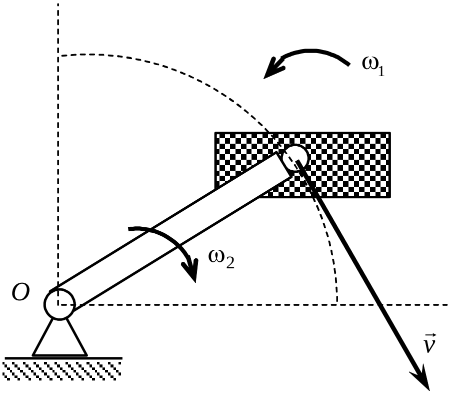


Рисунок 1.24

Пример. Определить угловую скорость колеса 2 (см. п. 1.4, пример 2, рис. 1.14). Колесо 2 участвует в двух вращениях, из которых переносное – вращение кривошипа OA, а относительное – вращение вокруг точки A. Колесо 1 также можно считать участвующим в двух вращениях, из которых переносное это тоже вращение кривошипа, а относительное – по отношению к кривошипу. Другими словами, если рассматривать только относительные вращения, то оба колеса вращаются с относительными угловыми скоростями вокруг неподвижных осей. Тогда между их относительными угловыми скоростями имеется следующая связь: $\omega_1^r \cdot r_1 = -\omega_2^r \cdot r_2$, где $\omega_1^r = -\omega_1 - \omega_{OA}$, $\omega_{21}^r = \omega_2 - \omega_{OA}$. Здесь применено правило знаков: направление вращения против часовой стрелки считается положительным, а по часовой – отрицательным. Подставляя выражения для относительных угловых скоростей в связывающие их зависимости, получим, что $(-\omega_1 - \omega_{OA}) \cdot r_1 = -(\omega_2 - \omega_{OA}) \cdot r_2$, откуда находим искомую угловую скорость

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \cdot r_1 + \omega_{OA} \cdot (r_1 + r_2)}{r_2} = \frac{2 \cdot 50 + 4 \cdot (50 + 10)}{10} = 34 \text{ рад/с}.$$

Рассмотренный метод называют ***методом Виллиса*** или ***методом остановки кривошипа*** и используют при расчетах планетарных и дифференциальных передач.

1.9. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Если переносное и относительное вращения твердого тела происходят вокруг пересекающихся осей (рис. 1.25,а), то результирующее движение также является вращением вокруг мгновенной оси, которая проходит через точку пересечения этих осей, т.е. является сферическим.

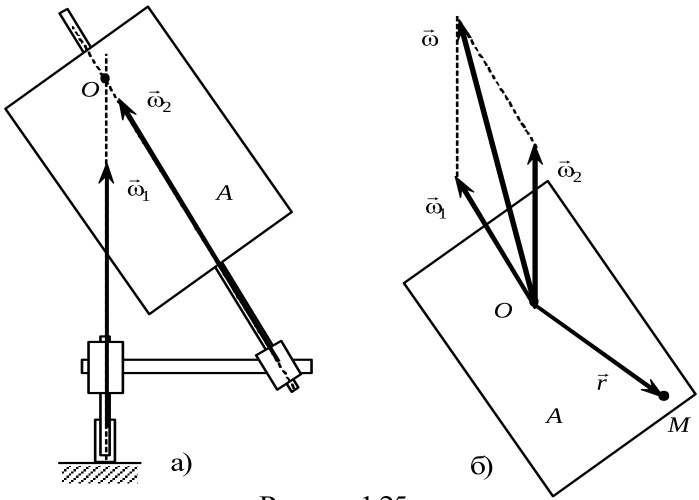


Рисунок 1.25

Так, поскольку точка M (см. рис. 1.25,б) участвует в сложном движении, ее скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей, т.е. $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}$. С другой стороны, поскольку результирующее движение также является вращательным вокруг неподвижной точки O, то $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, откуда следует, что $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$. Таким образом, при сложении вращений вокруг двух пересекающихся осей результирующее движение будет вращением вокруг мгновенной оси, проходящей через точку их пересечения, а угловая скорость результирующего движения равна геометрической сумме переносной и относительной угловых скоростей.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В чем заключаются задачи кинематики точки и абсолютно твердого тела?
2. Какие способы применяют для задания движения точки?
3. Как определяют скорость точки при различных способах задания ее движения?
4. Как определяют ускорение точки при различных способах задания ее движения?
5. Какое движение твердого тела называют поступательным?
6. Чему равны скорости и ускорения точек тела при поступательном движении и каковы их траектории?
7. Какое движение твердого тела называют вращением вокруг неподвижной оси?
8. Какая кинематическая характеристика описывает движение тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
9. Как определяют угловую скорость и угловое ускорение тела при вращении вокруг неподвижной оси?
10. Как определяют скорости и ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
11. Какое движение твердого тела называют плоскопараллельным?
12. На какие простейшие движения можно разложить плоскопараллельное движение?
13. Какие уравнения описывают плоскопараллельное движение?
14. По каким формулам можно определить скорости и ускорения точек тела, совершающего плоскопараллельное движение?

15. Что называют мгновенным центром скоростей и какие существуют способы его определения?

16. Какими параметрами описывают движение тела, имеющего одну неподвижную точку, к какому движению оно может быть сведено?

17. Что называют мгновенной осью вращения тела, имеющего одну неподвижную точку, и какую поверхность она описывает при движении тела?

18. Сколькими параметрами описывают движение свободного твердого тела, как определяют скорости и ускорения его точек?

19. Что называют сложным, относительным и переносным движениями точки и как определяют их абсолютные скорости и абсолютные ускорения?

20. По какой формуле вычисляют ускорение Кориолиса и как определяют его направление?

21. Как определяют направление вектора ускорения Кориолиса с помощью правила Жуковского?

22. В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?

23. При каком виде переносного движения ускорение Кориолиса равно нулю на протяжении всего времени движения точки?

24. К чему сводят и как складывают вращения твердого тела относительно параллельных осей?

25. Как определяют угловую скорость тела, участвующего в двух вращениях относительно параллельных осей, с помощью метода Виллиса?

26. В каком случае движение твердого тела называют парой вращения и как определяют скорости его точек?

27. К чему сводят и как складывают вращения твердого тела относительно пересекающихся осей?

2. СТАТИКА

2.1. Основные понятия статики

Статика – это раздел теоретической механики, в котором излагают общее учение о силах, изучают методы преобразования систем сил в эквивалентные системы, а также определяют условия равновесия материальных твердых тел под действием сил. Под равновесием в статике понимают сохранение исследуемым телом состояния относительного покоя по отношению к другим телам (например, по отношению к системе отсчета, жестко связанной с Землей) или состояния равномерного прямолинейного движения по инерции.

Реальные тела под действием внешних воздействий изменяют свои первоначальные размеры и форму, т.е. деформируются. В теоретической механике при изучении условий равновесия пренебрегают малыми деформациями твердых тел и рассматривают эти тела как абсолютно твердые. ***Абсолютно твердым телом*** называют тело, расстояние между любыми двумя точками которого все время остается постоянным.

Состояние равновесия или движения тела зависит от характера его механических взаимодействий с другими телами. Природа таких взаимодействий различна, они могут возникать при условии непосредственного соприкосновения тел, т.е. при контакте (например, давление моста на опоры, трение между скользящим телом и шероховатой поверхностью). В других случаях тела взаимодействуют бесконтактно (например, взаимное тяготение небесных тел, влияние силы магнитного поля и так далее).

Сила – основная количественная мера механического взаимодействия между материальными телами. Природу сил в теоретической механике не изучают, а рассматривают лишь механический эффект, производимый при действии силы на тело. Сила – это векторная величина $\vec{F}$. Действие силы на тело характеризуется тремя элементами (рис. 2.1):

- ■ точкой приложения – точкой A,
- ■ численным значением или модулем $\left|\vec{F}\right| = AB$,
- ■ направлением.

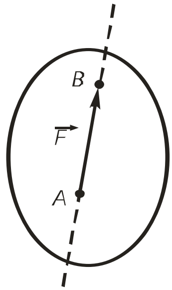


Рисунок 2.1

При изменении направления действия силы и точки ее приложения изменяется и механический эффект, который сила оказывает на тело. Точка приложения силы и ее направление определяют линию действия силы. Прямую, вдоль которой направлена сила, называют ***линией действия силы***. Единицей измерения силы в системе СИ является Ньютон:

$$\left[\vec{F}\right] = 1\text{Н} = 1\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Системой сил называют совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело. Если линии действия системы сил лежат в одной плоскости, такую систему сил называют ***плоской***, а если не лежат в одной плоскости, – ***пространственной***. Если линии действия системы сил пересекаются в одной точке, то такую систему называют ***сходящейся***, если же они параллельны друг другу, – ***параллельной***.

Свободным твердым телом называют такое тело, на перемещения которого в пространстве не наложено никаких ограничений (например, воздушный шарик, самолет). Тело, на перемещения движений которого в каком-либо направлении наложены ограничения, называют ***несвободным.***

Если одну систему сил, действующую на свободное тело, можно заменить другой, и при этом состояние покоя или движения тела не изменится, то такие две системы сил называют ***эквивалентными***: $(\vec{F}_1,\ldots,\vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1,\ldots,\vec{P}_k)$. Эквивалентные системы сил оказывают на тело одинаковый механический эффект, т.е. вызывают одинаковое кинематическое состояние тела.

Систему сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое, называют ***уравновешенной*** или ***эквивалентной*** нулю: $(\vec{F}_1,\ldots,\vec{F}_n) \sim 0$. Если данная система сил эквивалентна одной силе, то такую силу называют ***равнодействующей*** данной системе сил: $\vec{R} \sim (\vec{F}_1,\ldots,\vec{F}_n)$. Силу, равную равнодействующей по модулю, прямо противоположную ей по направлению и действующую вдоль той же прямой, называют ***уравновешивающей*** силой – $\vec{R}' = -\vec{R}$.

Силы, действующие на данное тело или систему тел, можно разделить на внешние и внутренние. ***Внешними*** называют силы, которые действуют на тело со стороны других тел, а ***внутренними*** – силы, с которыми части данного тела взаимодействуют друг с другом.

Силы, действующие на тела, могут быть как ***сосредоточенными***, так и ***распределенными***. Силу, приложенную к телу в одной его точке, называют сосредоточенной. Различают силы, распределенные по линии, по поверхности и по объему тела. Распределенные силы задают их интенсивностью q, которую измеряют в $\text{н/м}, \text{н/м}^2, \text{н/м}^3$. Например, сила тяжести человека представляет собой равнодействующую сил тяжести, действующих на его частицы. Линия действия этой силы проходит через центр тяжести тела.

2.2. Аксиомы статики

Все теоремы и уравнения статики выводят из аксиом статики – небольшого числа исходных положений, которые получены на основании опытов и наблюдений за равновесием и движением тел. В аксиомах статики излагают свойства сил, которые установлены значительным количеством непосредственных наблюдений, а также опытной проверкой следствий, логически вытекающих из аксиом.

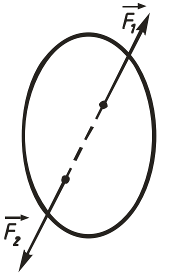


Рисунок 2.2

<u>Аксиома 1</u> (о равновесии системы двух сил). Если на абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 2.2):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2; \quad (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0.$$

<u>Аксиома 2</u> (о добавлении или отбрасывании уравновешенной системы сил). Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или отнять уравновешенную систе-

му сил, т.е. полученная система сил будет эквивалентна исходной (рис. 2.3): $(\vec{P}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{P})$, где $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$.

Следствие. Действие силы на твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль линии ее действия в любую другую точку тела, не изменяя при этом направление силы в пространстве.

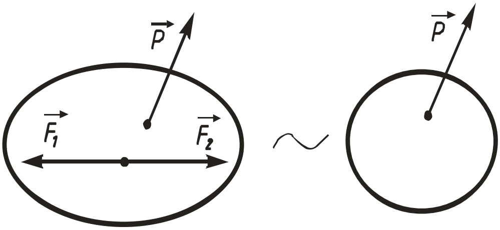
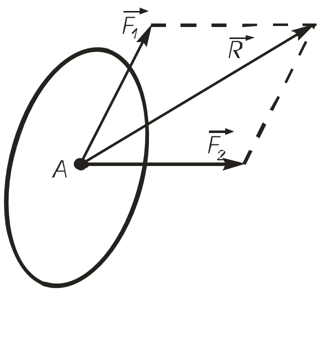


Рисунок 2.3

Таким образом, сила, приложенная к абсолютно твердому телу, является *скользящим вектором*. Для деформирующихся тел нельзя точку приложения силы переносить в другую точку тела вдоль линии ее действия, так как неправильно будут определены внутренние усилия.

Аксиома 3 (о векторном сложении сил – закон параллелограмма сил). Равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, приложена в той же точке и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 2.4):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$



Это – геометрическая сумма векторов сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$; $\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. Данная аксиома устанавливает равнодействующую двух сходящихся сил и дает правило ее определения:

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha} ,$$

где

Рисунок 2.4

$$\alpha = (\vec{F}_1,\ \vec{F}_2) . \qquad (2.1)$$

Аксиома 4 (о равенстве сил действия и противодействия). Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны: $\vec{P} = -\vec{F}$.

Силы взаимодействия двух тел формально удовлетворяют аксиоме 1, кроме одного – они приложены к разным телам, следовательно, не образуют уравновешенную систему сил. Следствием этой аксиомы является *свойство внутренних сил*: в твердом теле все его внутренние силы образуют уравновешенную систему сил. Таким образом, при изучении условий равновесия необходимо учитывать только внешние силы.

Аксиома 5 (принцип отвердевания). Равновесие деформируемого тела не нарушится, если тело считать отвердевшим, т.е. абсолютно твердым. Из аксиомы следует, что условия равновесия сил, приложенных к твердому телу, являются необходимыми, но не достаточными для равновесия деформируемого тела. Принцип отвердевания устанавливает связь между условиями равновесия сил, приложенных к твердому и деформируемому телам. Этот принцип широко используется в инженерных расчетах. Он позволяет при составлении условий равновесия рассматривать любое изменяемое тело (ремень, трос, цепь), как абсолютно твердое и применять к нему методы статики твердого тела.

Аксиома 6 (принцип освобождаемости от связей). Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить наложенные на тело связи и заменить их действие реакциями связей.

2.3. Связи и реакции связей

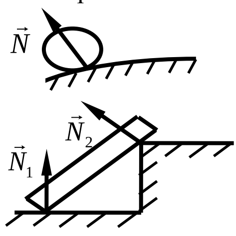
Рассматриваемые в статике тела условно делят на свободные и несвободные. Свободному твердому телу можно сообщить любое перемещение в пространстве. Твердое тело, на перемещения которого наложены ограничения, называют ***несвободным***. Тела, ограничивающие перемещения такого тела, называют ***связями***. Например, стул, стоящий на полу – несвободное тело, связью для него является пол.

Связи и тело, на которое эти связи наложены, взаимодействуют друг с другом при действии на рассматриваемое тело внешних сил. В этом случае тело действует на связь с *силой давления*. Одновременно, согласно закону о равенстве сил действия и противодействия, связь будет действовать на тело с такой же по модулю силой, но противоположно направленной. Силу, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называют ***реакцией связи***.

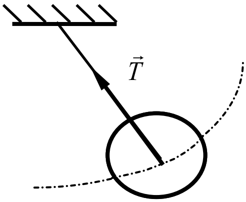
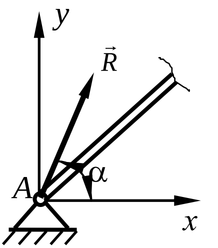
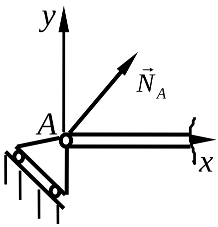
Внешние силы, не зависящие от наложенных на тело связей, называют ***активными*** или ***заданными*** (например, сила тяжести). При этом реакции связей называют ***пассивными*** силами, так как они возникают лишь при действии на тело активных сил.

В общем случае реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу, и всегда приложена к этому телу. Особенность реакций связей состоит в том, что их численная величина зависит от всех действующих сил и заранее неизвестна. Правильное определение направлений реакций связей играет при решении задач статики важную роль. В табл. 2.1 приведены наиболее типичные идеализированные виды связей и указаны направления их реакций.

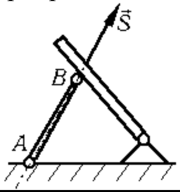
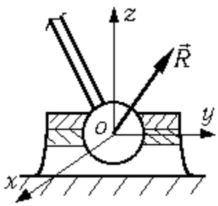
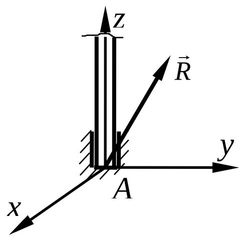
Таблица 2.1

Вид связи и ее условное обозначение	Направление реакции	Изображение реакций при решении задач
Гладкая поверхность или опора  	Реакция $\vec{N}$ гладкой опоры или поверхности направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания	Реакция соответствует ее условному обозначению

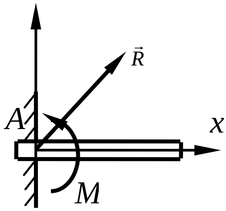
Продолжение табл. 2.1

Вид связи и ее условное обозначение	Направление реакции	Изображение реакций при решении задач
Нить или гибкая связь 	Реакция $\vec{T}$ натянутой нити направлена вдоль нити к точке подвеса	Реакция соответствует ее условному обозначению
Цилиндрический шарнир (подшипник) 	Реакция $\vec{R}$ цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира, т.е. в плоскости xAy	Реакцию представляют в виде геометрической суммы ее проекций на координатные оси $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$
Подвижная шарнирная опора 	Реакция подвижной шарнирной опоры $\vec{N}_A$ направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки	Реакция соответствует ее условному обозначению

Продолжение табл. 2.1

Вид связи и ее условное обозначение	Направление реакции	Изображение реакций при решении задач
Невесомый стержень с шарнирами на концах 	Реакция $\vec{S}$ стержня направлена вдоль оси стержня	Реакция соответствует ее условному обозначению
Шаровой шарнир 	Реакция $\vec{R}$ шарового шарнира может иметь любое направление в пространстве	Реакцию представляют в виде геометрической суммы ее проекций на координатные оси $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z$
Подпятник, радиально-упорный подшипник 	Реакция $\vec{R}$ шарового шарнира может иметь любое направление в пространстве	Реакцию представляют в виде геометрической суммы ее проекций на координатные оси $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z$

Продолжение табл. 2.1

Вид связи и ее условное обозначение	Направление реакции	Изображение реакций при решении задач
Неподвижная защемлённая опора или жёсткая заделка 	Реакция состоит из силы $\vec{R}$ и пары сил, момент которой M	Силу $\vec{R}$ представляют в виде геометрической суммы ее проекций на координатные оси $\vec{R} = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$

2.4. Система сходящихся сил. Условие равновесия системы сходящихся сил

Систему сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называют ***сходящейся***.

<u>Теорема:</u> «***Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме этих сил и приложенную в точке пересечения их линий действия***»

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \, , \qquad (2.2)$$

где $\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$.

Геометрический способ сложения сил удобен и основан на построении силового многоугольника, замыкающая сторона которого и является равнодействующей данной системы сил.

Аналитический способ определения равнодействующей заключается в вычислении ее проекций на оси декартовой системы координат. Спроецируем векторное равенство (2.2) на оси *x*, *y*, *z* и воспользуемся теоремой, согласно которой проекция вектора суммы на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось. Отсюда проекции равнодействующей сходящейся системы сил на координатные оси запишем виде:

$$\vec{R}_x = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kx} \ ; \quad \vec{R}_y = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ky} \ ; \quad \vec{R}_z = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kz} \ , \tag{2.3}$$

при этом модуль равнодействующей

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \ . \tag{2.4}$$

Ее направляющие косинусы находим по формулам:

$$\cos(\vec{R}, \vec{i}\,) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \vec{j}\,) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \vec{k}\,) = \frac{R_z}{R} \ . \tag{2.5}$$

Формулы (2.3)-(2.5) позволяют решить задачу о сложении сил аналитически.

Так как система сходящихся сил имеет равнодействующую, то для равновесия рассматриваемой системы необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая была равна нулю

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0 \ . \tag{2.6}$$

В этом случае силовой многоугольник оказывается замкнутым, откуда следует *геометрическое условие равновесия сходящейся системы сил*: «***Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут***». Иными словами, начало 1-го вектора системы сил $\vec{F}_1$ является концом последнего вектора системы сил $\vec{F}_n$.

Аналитические условия равновесия сходящейся системы сил следуют из выражения (2.6). Вместо одного векторного равенства (2.6) получаем три скалярных равенства, выражающие условия равновесия в аналитическом виде:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \ . \tag{2.7}$$

Таким образом, для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил системы на каждую из трех координатных осей были равны нулю. В случае плоской системы сходящихся сил используют два из трех равенств уравнений равновесия (2.7).

2. 5. Решение задач статики

В разделе статики, как правило, решают задачи, в которых известно, что тело находится в равновесии и нужно найти, чему при этом равны действующие на него как активные силы, так и реакции наложенных связей.

Решение задач статики производят по следующему плану:

1) выбрать объект равновесия, т.е. тело (или отдельную точку), равновесие которого будет рассмотрено далее;

2) освободить это тело от связей и изобразить действующие на него активные силы и реакции отброшенных связей;

3) записать условия равновесия для полученной системы сил, выбрать систему координат, заполнить вспомогательную таблицу;

4) решить систему алгебраических уравнений равновесия для определения искомых величин, проверить правильность решения и проанализировать полученные результаты.

Пример. Груз *Q* весом 1 кН подвешен в точке *D*, как показано на рис.2.5. Крепления стержней в точках *A, B, D* – шарнирные.

Определить реакции опор *A, B, C.*

Решение

1) Объект равновесия – точка *D.*

2) Груз *Q* действует на точку *D* с силой $\vec{Q}$. Реакции отброшенных стержней: $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$, $\vec{R}_C$.

3) Точка *D* находится под действием системы пространственной сходящейся системы сил, аналитические условия равновесия которой:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0.$$

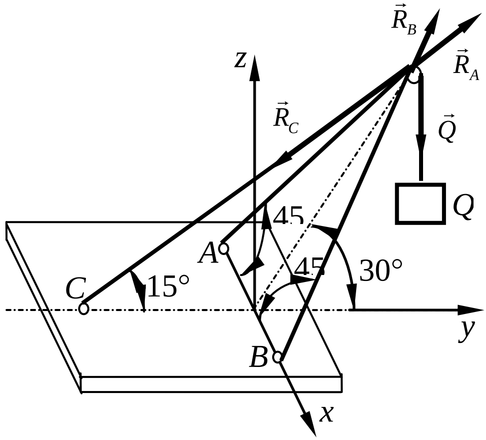


Рисунок 2.5

Составим вспомогательную табл. 2.2.

Таблица 2.2

$\vec{P}_k$	$\vec{Q}$	$\vec{R}_A$	$\vec{R}_B$	$\vec{R}_C$
P_{kx}	0	$R_A\cos45°$	$R_B\cos45°$	0
P_{ky}	0	$R_A\cos45°\cos30°$	$R_B\cos45°\cos30°$	$R_C\cos15°$
P_{kz}	$-Q$	$R_A\cos45°\cos60°$	$R_B\cos45°\cos60°$	$R_C\sin15°$

4) Запишем систему алгебраических уравнений равновесия:

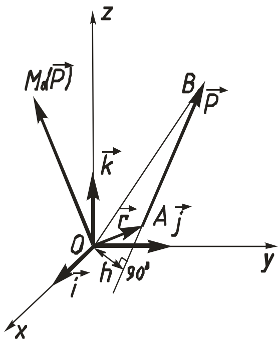
$$\begin{cases} R_A\dfrac{\sqrt{2}}{2} - R_A\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0; \\ R_A\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + R_B\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - R_C\cdot 0,966 = 0; \\ R_A\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} + R_B\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} - R_C\cdot 0,259 = 0; \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим, что

$$R_A = R_B = 2{,}64 \text{ кН}; \quad R_C = 3{,}35 \text{ кН}.$$

2.6. Момент силы относительно центра

Опыт показывает, что под действием силы твердое тело может, наряду с поступательным перемещением, совершать вращение вокруг того или иного центра. Для характеристики вращательного эффекта силы введем понятие *момента силы относительно центра*. Если под действием приложенной к твердому телу в точке A силы $\vec{P}$ оно может совершать вращение вокруг некоего центра O, то момент силы $\vec{P}$ относительно этого центра будет характеризовать вращательный эффект силы. Из центра O опустим перпендикуляр на линию действия силы. Длину h этого перпендикуляра называют ***плечом силы*** $\vec{P}$ относительно центра O – это кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы.



На рис. 2.6 приняты обозначения:

■ треугольник OAB – плоскость поворота силы $\vec{P}$;

■ h – плечо силы относительно центра O;

■ $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы.

Рисунок 2.6

Так как точку приложения силы можно произвольно перемещать вдоль линии ее действия, то, очевидно, вращательный эффект силы будет зависеть от следующих факторов:

– модуля силы $|\vec{P}|$ и длины плеча h;

– положения плоскости поворота OAB;

– направления поворота под действием силы в этой плоскости.

В случае действия на тело плоской системы сил плоскость поворота для всех сил является общей и в дополнительном задании не нуждается. Поэтому для количественного измерения вращательного эффекта вводится понятие *алгебраического момента силы*, как скалярной величины. Алгебраический момент силы $\vec{P}$ относительно центра O равен произведению модуля силы на ее плечо, взятому с соответствующим знаком:

$$m_0(\vec{P}) = \pm P \cdot h \,. \tag{2.8}$$

При этом в правой системе координат, принятой в механике, момент считают *положительным*, когда сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и *отрицательным* – по ходу часовой стрелки. Размерность момента силы [m_0] = Н·м.

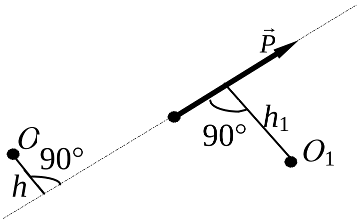


Рисунок 2.7

Например, определим моменты силы $\vec{P}$ относительно центров O и O_1 (рис. 2.7)

$$M_O\left(\vec{P}\right) = P \cdot h; \quad M_{O_1}\left(\vec{P}\right) = -P \cdot h_1.$$

В случае системы сил, произвольно расположенных в пространстве, плоскости поворота у разных сил будут разными и должны задаваться дополнительно. Из геометрии известно, что положение плоскости в пространстве определяется направлением нормали (перпендикуляра) к этой плоскости.

Таким образом, момент силы относительно центра характеризуется не только его алгебраическим значением, но и направлением в пространстве, т.е. является векторной величиной. Положение плоскости поворота OAB в пространстве можно задать вектором, перпендикулярным к этой плоскости. Если же модуль данного вектора выбрать равным модулю момента силы и направить так, чтобы его направление определяло направление поворота силы, то такой вектор полностью определит все три элемента, характеризующие момент данной силы относительно центра O.

Итак, момент силы $\vec{P}$ относительно центра O – это вектор $\vec{m}_0(\vec{P})$, приложенный в центре O, равный по модулю произведению модуля силы $\vec{F}$ на плечо h, перпендикулярный плоскости поворота OAB и направленный в ту же сторону, откуда поворот, совершаемый силой, виден происходящим против хода часовой стрелки.

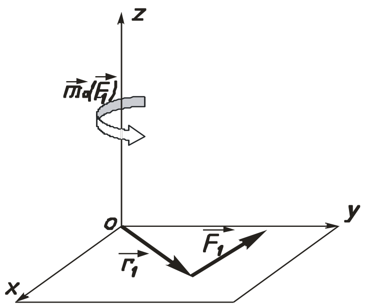
Момент силы $\vec{F}$ относительно центра O равен векторному произведению радиус-вектора $\vec{r} = O\vec{A}$, соединяющего центр O с точкой приложения силы, на саму силу:

$$\vec{m}_0(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P}\ . \qquad (2.10)$$

Отметим следующие свойства момента силы:

1) момент силы относительно центра не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия;

2) момент силы относительно центра равен нулю, когда сила равна нулю, либо, когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).



Найдем, например, вектор-момент силы $\vec{F}_1$ относительно точки O (рис.2.8):

$$\vec{F}_1 \ \in \ xoy\,;$$

$$\vec{m}_0(\vec{F}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1\,;$$

$$\vec{m}_0(\vec{F}_1) \perp xoy\,.$$

Рисунок 2.8

Аналитически момент силы относительно точки можно представить в следующем виде:

$$\vec{M}_o\left(\vec{P}\right) = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} \qquad (2.11)$$

или

$$\vec{M}_o\left(\vec{P}\right)=\vec{i}\,(y\,P_z-z\,P_y)+\vec{j}(x\,P_z-z\,P_x)+\vec{k}(x\,P_y-y\,P_x)\,, \qquad (2.12)$$

где коэффициенты, стоящие при ортах координатных осей $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ равны проекциям вектора-момента силы на соответствующие оси:

$$M_{Ox}=y\,P_z-z\,P_y;$$

$$M_{Oy}=x\,P_z-z\,P_x; \qquad (2.13)$$

$$M_{Oz}=x\,P_y-y\,P_x\,.$$

2.7. Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси. Если рассмотреть тело, которое может вращаться вокруг некоторой оси z, то можно убедиться в том, что весь вращательный эффект, создаваемый силой $\vec{P}$, будет совпадать с вращательным эффектом ее составляющей $\vec{P}_{xy}$ (рис.2.9).

Моментом силы относительно оси называют скалярную величину, равную моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью

$$M_z(\vec{P})=M_O(\vec{P}_{xy})=\pm P_{xy}\cdot h\,, \qquad (2.14)$$

где P_{xy} - величина проекции силы $\vec{P}$ на плоскость *xOy*; *h* – плечо силы $\vec{P}_{xy}$ относительно точки *O*.

Чтобы найти момент силы относительно оси в соответствии с выражением (2.14), необходимо:

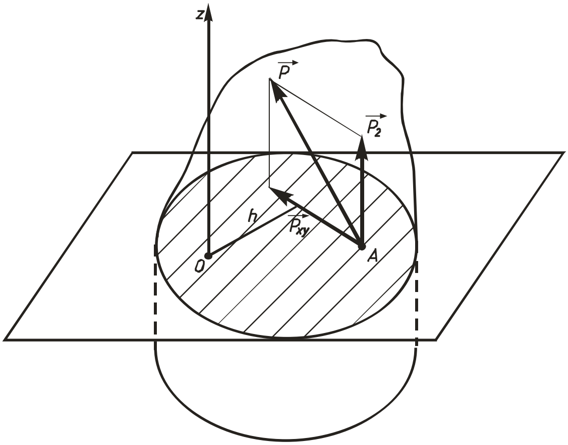


Рисунок 2.9

1) провести плоскость, перпендикулярную оси;

2) спроецировать силу на эту плоскость и вычислить величину проекции;

3) опустить из точки пересечения оси с плоскостью перпендикуляр на направление проекции и определить его длину h;

4) вычислить произведение модуля проекции на величину h;

5) определить знак момента в соответствии с правилом знаков.

Момент считается *положительным*, если с положительного конца оси поворот, производимый силой, виден происходящим против хода часовой стрелки. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось принадлежат одной плоскости. Тогда либо сила параллельна оси z (P_{xy}), либо линия действия силы пересекает ось (h = 0).

Аналитические выражения для моментов силы относительно координатных осей представим в виде:

$$
\begin{aligned}
M_x\left(\vec{P}\right) &= y\,P_z - z\,P_y;\\
M_y\left(\vec{P}\right) &= z\,P_x - x\,P_z;\\
M_z\left(\vec{P}\right) &= x\,P_y - z\,P_x.
\end{aligned}
\qquad (2.15)
$$

С помощью формул (2.15) можно вычислять моменты силы относительно координатных осей, зная проекции силы на эти оси и координаты точки ее приложения. Сравнивая выражения (2.13) и (2.15), можно найти связь между моментами силы относительно оси и относительно центра, лежащего на этой оси:

$$\begin{cases} M_x(\vec{P}) = (\vec{M}_0(\vec{P}))_x; \\ M_y(\vec{P}) = (\vec{M}_0(\vec{P}))_y; . \\ M_z(\vec{P}) = (\vec{M}_0(\vec{P}))_z. \end{cases} \qquad (2.16)$$

Таким образом, ***момент силы относительно оси*** – это скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора-момента силы относительно произвольной точки оси.

2.8. Пара сил и момент пары сил

Парой сил называют систему двух сил, которые равны по модулю, параллельны, направлены в противоположные стороны, и действуют на абсолютно твердое тело (рис.2.10). Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называют ***плоскостью действия пары***.

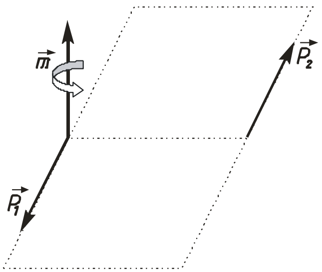


Рисунок 2.10

Кратчайшее расстояние d между линиями действия сил пары называют ***плечом пары.*** Система сил, образующих пару, очевидно, не находится в равновесии, так как силы пары не направлены вдоль одной прямой. В то же время пара сил не имеет равнодействующей. Как видно из рис. 2.10, $\vec{P}_1 = - \vec{P}_2$.

Пара сил, как и сила, является самостоятельным силовым фактором, поэтому свойства пары сил, как особой меры механического действия, должны быть изучены отдельно. Пара сил оказывает на тело вращательное воздействие, которое зависит от следующих факторов:

- модуля одной из сил пары $|\vec{P}|$ и длины плеча d;
- положения плоскости действия пары сил;
- направления поворота в этой плоскости.

Для количественной характеристики вращательного эффекта, к которому сводится действие пары сил на твердое тело, вводится понятие *момента пары сил*. Для пар сил, лежащих в одной плоскости, достаточно *алгебраического момента пары сил*, который равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее плечо:

$$m(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = \pm P \cdot d \ . \tag{2.17}$$

Правило знаков здесь такое же, как и для момента силы.

При рассмотрении пар сил, не лежащих в одной плоскости, необходимо задать плоскость действия пары сил. Это возможно, если изображать момент пары сил вектором, направленным перпендикулярно заданной плоскости.

Момент пары сил – вектор $\vec{m}$, равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на плечо, направленный перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда поворот пары виден происходящим против хода часовой стрелки. Следует заметить, что момент пары сил равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы. Также нетрудно показать, что момент пары сил равен сумме моментов сил пары относительно любого центра и может быть приложен в любой точке.

Теорема: «***Момент пары сил равен геометрической сумме моментов сил, образующих пару, относительно любого центра***»:

$$\vec{m}(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = \vec{m}_0(\vec{P}_1) \ + \ \vec{m}_0(\vec{P}_2) \ . \tag{2.18}$$

Таким образом, сумма моментов сил пары относительно центра не зависит от выбора этого центра и равна моменту пары сил. Так как выбор центра O произволен, то вектор-момент пары сил можно считать приложенным в любой точке, т.е. это так называемый *свободный вектор* (см. рис. 2.10).

Понятие момента пары сил не следует смешивать с понятием момента силы относительно центра. В отличие от момента силы, который зависит от выбора центра и приложен к этому центру, момент пары сил определяется только ее силами и плечом, а приложен он может быть в любой точке. Итак, основной характеристикой пары сил – количественной мерой ее механического действия на твердое тело является момент пары сил. Из выражения (2.18) следует, что две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны друг другу, т.е. оказывают на тело одинаковое механическое действие:

если $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{m}(\vec{P}, \vec{P}')$, то $(\vec{F}, \vec{F}') \sim (\vec{P}, \vec{P}')$.

Иными словами, две пары сил, независимо от места их расположения в данной плоскости (или параллельных плоскостях) и от того, чему равны в отдельности модули сил пар и их плечи, будут эквивалентны, если моменты этих пар сил имеют одно и то же значение $\vec{m}$.

Свойства пары сил описывают следующими теоремами об эквивалентности пар сил:

■ действие пары сил на твердое тело не изменится, если пару перенести в любое место плоскости ее действия;

■ действие пары сил на твердое тело не изменится, если изменить модули сил и длину плеча так, чтобы момент пары не изменился;

■ действие пары сил на твердое тело не изменится, если пару сил перенести из плоскости ее действия в любую другую параллельную плоскость.

Отсюда следует теорема об эквивалентности пар сил: «***Две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны друг другу, так как путем изменения плеча, модуля сил и перемещения пары сил в плоскости ее действия или переноса этой пары в параллельную плоскость, пары сил с одинаковыми моментами могут быть преобразованы одна в другую***».

На расчетных схемах обычно вместо пары сил изображают векторный момент $\vec{m}$, полностью характеризующий ее, при этом модуль $\left|\vec{m}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot d$. Направление вектора определяет плоскость действия пары и направление поворота в этой плоскости. Чтобы задать пары сил, лежащих в одной плоскости, достаточно обозначить их круговой стрелкой, учитывающей направление поворота, и не изображать сами силы.

Сложение пар сил сводится к теореме о сложении пар: «***Система пар сил, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна одной паре, момент которой равен геометрической сумме моментов слагаемых пар***»:

$$\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \ldots + \vec{m}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k \, . \qquad (2.19)$$

Из приведенной теоремы вытекает *условие равновесия системы пар сил,* согласно которому для равновесия системы пар сил, действующих на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы момент результирующей пары был равен нулю

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k = 0 . \tag{2.20}$$

Действительно, либо силы результирующей пары равны нулю, либо плечо этой пары равно нулю. В последнем случае силы пары направлены вдоль одной прямой и в соответствии с 1-й аксиомой статики образуют уравновешенную систему сил.

Проецируя векторное равенство (2.20) на координатные оси, получим *аналитические условия равновесия системы пар сил:*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} m_{ky} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} m_{kz} = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

В частном случае действия на твердое тело системы пар сил, расположенных в одной плоскости, моменты этих пар, направленные по одной прямой, складываются алгебраически. Тогда <u>теорему о сложении пар сил</u> формулируют следующим образом: «***Система пар сил, лежащих в одной плоскости, эквивалентна одной паре сил, лежащей в той же плоскости и имеющей алгебраический момент, равный алгебраической сумме моментов слагаемых пар***»:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} \pm \left| F_k \right| \cdot d_k . \tag{2.22}$$

<u>Условия равновесия плоской системы пар сил</u>: «*Для равновесия плоской системы пар сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов этих пар была равна нулю*»

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} \pm F_k \cdot d_k = 0 \,. \tag{2.23}$$

2.9. Привидение произвольной системы сил к данному центру и условия ее равновесия

Из следствия 2-й аксиомы вытекает, что точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия, а теорема о параллельном переносе силы устанавливает правило эквивалентного переноса силы в любую другую точку тела, не лежащую на линии действия переносимой силы. Силу, приложенную к твердому телу, не изменяя оказываемого ею действия, можно переносить параллельно самой себе из данной точки тела в любую другую точку, добавляя при этом пару сил, момент которой равен моменту переносимой силы относительно той точки, куда сила переносится.

Рассмотрим задачу о замене произвольной системы сил на эквивалентную, более простую, систему сил. Введем для произвольной системы сил два определения.

Главным вектором системы сил называют вектор, равный геометрической сумме всех сил системы:

$$\vec{V} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \,. \tag{2.24}$$

Главным моментом системы сил относительного центра *O* называют вектор, равный геометрической сумме моментов всех сил системы относительно этого же центра:

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) \,. \tag{2.25}$$

<u>Основная теорема статистики</u> (теорема Пуансо): «***Любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру О заменяется (эквивалентна) одной силой $\vec{V}$, равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения О, и одной парой сил, момент которой $\vec{M}_O$,***

***равен главному моменту системы сил относительно выбранного центра*».**

Следовательно, основная теорема статики устанавливает закон эквивалентной замены произвольной системы сил более простой системой, состоящей из одной силы и одной пары сил (рис. 2.11). Здесь главный вектор $\vec{V}$ не является равнодействующей исходной системы сил, так как заменяет эту систему сил вместе с парой сил.

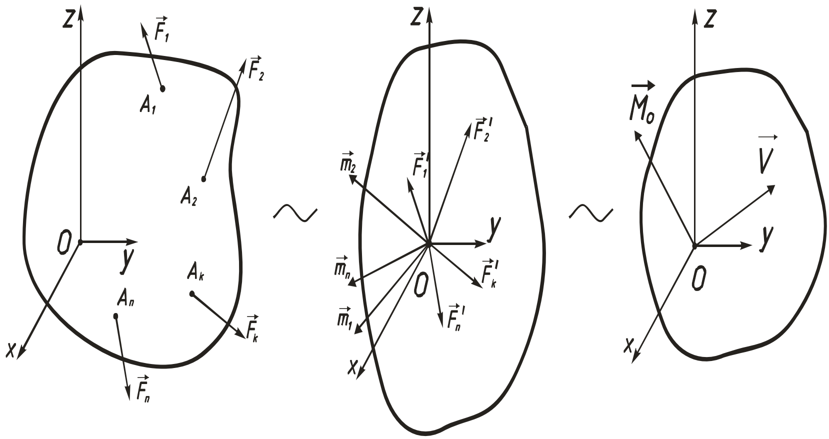


Рисунок 2.11

Следствием этой теоремы является *условие эквивалентности систем сил*, согласно которому две системы сил, имеющие одинаковые главный вектор $\vec{V}$ и главный момент $\vec{M}_0$ относительно одного и того же центра, эквивалентны. Отметим, что главный вектор $\vec{V}$ является *статическим инвариантом*, так как модуль и направление его не зависят от выбора центра приведения. При этом значение главного момента $\vec{M}_0$ в общем случае изменится вследствие изменения моментов отдельных сил, входящих в систему.

<u>Условие равновесия произвольной системы сил</u>: «***Для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю***»:

$$\begin{cases} \vec{V} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0; \\ \vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_0(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \qquad (2.26)$$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: «***Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра О или любой оси равен сумме моментов сил системы относительно этого же центра***»:

$$\vec{m}_0(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_0(\vec{F}_k)\,. \qquad (2.24)$$

Этой теоремой удобно пользоваться при вычислении моментов.

2.10. Условие равновесия плоской системы сил

Систему сил, линии, действия которой лежат в одной плоскости, называют ***плоской***. Пусть эта плоскость совпадает с координатной плоскостью *xOy*, тогда векторы моментов сил относительно любой точки плоскости и векторы моментов пар сил перпендикулярны плоскости действия сил и полностью определяются своими алгебраическими значениями. Плоская система сил также приводится к одной силе, равной главному вектору $\vec{V}$ и приложенной в центре приведения *O*, и к паре сил, момент которой M_0 равен главному алгебраическому моменту. При этом сила и пара сил лежат в одной плоскости – в плоскости действия сил (пара изображена круговой стрелкой, рис. 2.12). Система координат *xOy* имеет начало в центре приведения *O*.

Аналитически главный вектор плоской системы сил определяют формулами:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\,, \qquad (2.28)$$

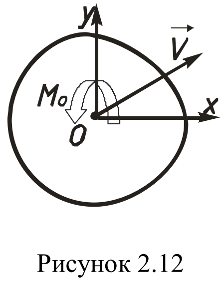


Рисунок 2.12

где

$$V_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \qquad V_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \tag{2.29}$$

а затем находят направляющие косинусы:

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}\,) = \frac{V_x}{V}; \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}\,) = \frac{V_y}{V}. \tag{2.30}$$

Главный алгебраический момент плоской системы сил равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно центра приведения *O*:

$$M_0 = \sum_{k=1}^{n} m_0(\vec{F}_k), \tag{2.31}$$

где

$$m_0(\vec{F}_k) = \pm\left|\vec{F}_k\right| \cdot h_k .$$

Условия равновесия произвольной плоской системы сил: «*Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил, а также главный алгебраический момент относительно любого центра были равны нулю*»:

$$\vec{V} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0; \tag{2.32}$$

$$M_0 = \sum_{k=1}^{n} m_0(\vec{F}_k) = 0. \tag{2.33}$$

Аналитические условия равновесия можно получить в трех различных формах.

Первая (основная) форма условий равновесия. Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} m_0(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \qquad (2.34)$$

С точки зрения механики 1-е два уравнения выражают необходимые условия того, чтобы тело не имело перемещений вдоль осей координат, а 3-е – отсутствие вращения в плоскости *xOy*.

Если на тело, наряду с плоской системой сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, действует система лежащих в той же плоскости пар сил, моменты которых $m_1, m_2, ..., m_j$, то при составлении условий равновесия пары в уравнения проекций не войдут, так как сумма проекций пар на любую ось равна нулю. В уравнениях же моментов алгебраически прибавляются к моментам сил моменты пар сил, так как сумма моментов сил пары относительно любого центра равна моменту пары. При действии на тело системы сил и системы пар сил условия равновесия записывают в виде:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} m_0(\vec{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0. \end{cases} \qquad (2.35)$$

Вторая форма условий равновесия. Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно каких-либо двух центров *A* и *B*, а также сумма их проекций на ось *Ox*, не перпендикулярную прямой *AB*, были равны нулю:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} m_B(\vec{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

Третья форма условий равновесия (уравнения трех моментов). Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно любых трех центров *A*, *B* и *C*, не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} m_B(\vec{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} m_C(\vec{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

<u>Пример.</u> Арочная ферма, изображенная на рис. 2.12, имеет неподвижный опорный шарнир в точке *A*, а в точке *B* – подвижную шарнирную опору, плоскость которой наклонена к горизонту под углом 30°. Пролёт *AB* = 20 м. Центр тяжести фермы, вес которой вместе со снеговой нагрузкой *G* = 100 кН, находится в точке *C*, расположенной над серединой пролёта *AB*. Равнодействующая сил давления ветра *F* равна 20 кН и направлена параллельно пролету *AB*, линия её действия отстоит от *AB* на 4 м.

Определить опорные реакции.

<u>Решение</u>

Воспользуемся последовательностью решения задач, описанной в подразделе 2.2:

1) объект равновесия – арка;

2) силу $\vec{G}$ приложим в точке *C*;

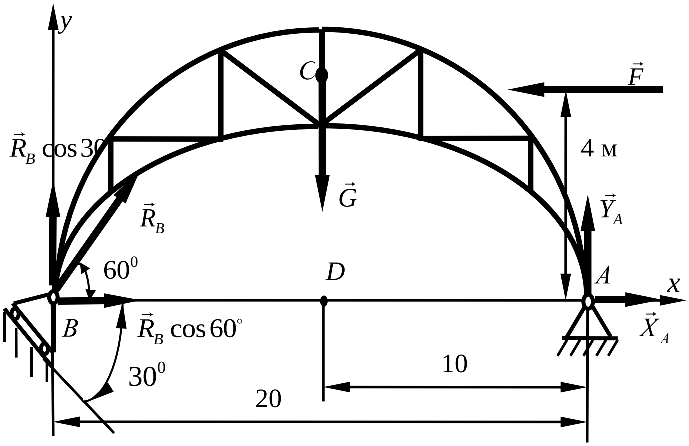


Рисунок 2.12

3) реакция подвижной шарнирной опоры – $\vec{R}_B$, реакция неподвижного шарнира разложена на две составляющие: $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$;

4) заданные силы и реакции связей образуют плоскую произвольную систему сил, условия равновесия которой имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}_0\left(\vec{P}_k\right) = 0.$$

Заполним вспомогательную табл. 2.3.

Таблица 2.3

$\vec{P}_k$	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$	$\vec{G}$	$\vec{F}$	$\vec{R}_B$
P_{kx}	X_A	0	0	$-F$	$R_B\cos 60^\circ$
P_{ky}	0	Y_A	$-G$	0	$R_B\cos 30^\circ$
M_A	0	0	$G\cdot AB/2$	$F\cdot 4$	$R_B\cos 30^\circ\cdot AB$

Момент силы $\vec{R}_B$ относительно точки A вычисляем по теореме Вариньона:

$$M_A\left(\vec{R}_B\right) = M_A\left(\vec{R}_{Bx}\right) + M_A\left(\vec{R}_{By}\right) = R_B \cos 60^0 \cdot 0 - R_B \cos 30^0 \cdot AB .$$

Запишем уравнения равновесия системы сил:

$$\begin{cases} X_A - F + R_B \cdot 0{,}5 = 0 \\ Y_A - G + R_B \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ 10G + 4F - R_B \cdot 10\sqrt{3} = 0. \end{cases}$$

Решения уравнений дают такие результаты:

$X_A = -11{,}2$ кН; $Y_A = 46$ кН; $R_B = 62{,}4$ кН.

Для проверки достоверности полученных результатов вычислим сумму моментов заданных сил и реакций относительно точки D:

$$\sum_{k=1}^{n} M_D\left(\vec{P}_k\right) = 0;$$

$$-R_B \cos 30^\circ \cdot \frac{AB}{2} + F \cdot 4 + Y_A \cdot \frac{AB}{2} = 0;$$

$$-62{,}4 \cdot 10\sqrt{3} + 20 \cdot 4 + 46 \cdot 10 \cong 0.$$

2.11. Условие равновесия произвольной пространственной системы сил

В подразделе 2.9 были получены геометрические условия равновесия произвольной системы сил (2.26). Проецируя векторные равенства (2.26) на координатные оси, получим *аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил* в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{P}_k\right) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{P}_k\right) = 0; \tag{2.38}$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{P}_k\right) = 0.$$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей, а также суммы их моментов относительно этих осей, были равны нулю.

Пример. Горизонтальный вал нагружен, как показано на рис. 2.13. Силы $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ действуют в плоскости шкивов. Сила $\vec{F}$ параллельна оси z . Дано Q = 1 кН, r = 0,05 м. R = 0,1 м.

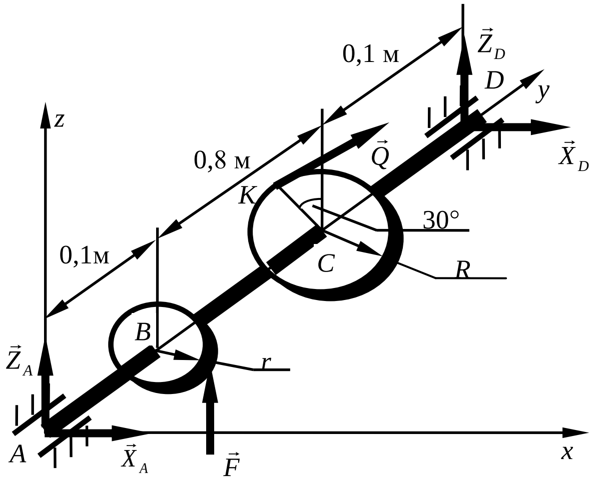


Рисунок 2.13

Определить силу $\vec{F}$ и реакции подшипников A и B в положении равновесия.

Решение

Выбрав в качестве объекта равновесия вал со шкивами и заменив действие подшипников их реакциями, запишем аналитические условия равновесия для произвольной пространственной системы сил в виде (2.38). Для этого заполним вспомогательную табл. 2.4.

Таблица 2.4

$\vec{P}_k$	$\vec{X}_A$	$\vec{Z}_A$	$\vec{X}_D$	$\vec{Z}_D$	$\vec{F}$	$\vec{Q}$
P_{kx}	X_A	0	X_D	0	0	$Q\cos30°$
P_{ky}	0	0	0	0	0	0
P_{kz}	0	Z_A	0	Z_D	F	$Q\sin30°$
M_x	0	0	0	$Z_D \cdot AD$	$F \cdot AB$	$Q\sin30° \cdot AC$
M_y	0	0	0	0	$-F \cdot r$	$Q \cdot R$

Запишем уравнения равновесия:

$$X_A + X_D + Q\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A + Z_D + F + Q\sin 30^\circ = 0;$$

$$Z_D \cdot AD + F \cdot AB + Q\sin30° \cdot AC = 0;$$

$$-F \cdot r + Q \cdot R = 0;$$

$$-X_D \cdot AD - Q\cos 30^\circ \cdot AC = 0.$$

Решая систему уравнений, получим:

$$X_A = 0{,}068 \text{ кН}; \quad Z_A = -2{,}95 \text{ кН}; \quad F = 2 \text{ кН};$$

$$X_D = 0{,}774 \text{ кН}; \quad Z_D = 0{,}45 \text{ кН}.$$

Вопросы для самоконтороля

1. Какие тела называют свободными и несвободными?
2. Что называют связью и каковы основные виды связей?
3. Какую систему сил называют сходящейся?
4. Чему равна равнодействующая сходящейся системы сил?
5. Каковы геометрические и аналитические условия равновесия сходящейся системы сил?
6. Каков порядок решения задач статики?
7. Чему равен момент силы относительно центра?
8. Чему равен момент силы относительно оси?
9. Каков аналитический способ его определения?
10. Что называют парой сил и чему равен момент пары сил?
11. Какие пары сил эквивалентны друг другу?
12. Каковы условия равновесия системы пар сил в пространстве?
13. Что называют главным вектором и главным моментом произвольной системы сил?
14. Как формулируют основную теорему статики о приведении произвольной системы сил к данному центру?
15. Каковы условия равновесия произвольной системы сил?
16. Каковы аналитические условия равновесия плоской системы сил?
17. Каковы аналитические условия равновесия пространственной системы сил?

3. ДИНАМИКА

3.1. Основные понятия. Законы динамики

Динамикой называют раздел теоретической механики, в котором изучают движение материальных объектов под действием приложенных к ним сил.

Свойство объекта оказывать сопротивление изменению состояния его движения называют ***инертностью***. Количественную характеристику инертности материального объекта называют ***массой***.

Материальной точкой называют точку, имеющую массу.

Такие понятия как система отсчета, движение, точка, абсолютно твердое тело, сила были рассмотрены в разделах «Кинематика» и «Статика».

Основу теоретической механики составляют законы динамики, которые называют ***законами Ньютона***.

Первый закон Ньютона (закон инерции). Существует система отсчета, в которой свободная материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Такую систему отсчета называют ***инерциальной***.

Второй закон Ньютона (основной закон динамики). В инерциальной системе отсчета произведение массы точки на ее ускорение равно приложенной к ней силе.

Третий закон Ньютона (закон равенства действия и противодействия). Силы, с которыми взаимодействуют две материальные точки, равны по величине, противоположны по направлению и имеют одну общую линию действия.

Четвертым законом является закон независимости действия сил. Ускорение, приобретаемое материальной точкой при действии на нее системы сил, равно геометрической сумме ускорений, сообщаемых точке каждой силой в отдельности.

3.2. Основное уравнение динамики точки. Дифференциальные уравнения движения точки. Две задачи динамики точки

Если на материальную точку действует система сил, то векторное равенство, математически выражающее основной закон динамики запишем в виде:

$$m\vec{a} = \vec{P}\,, \tag{3.1}$$

где m – масса точки; $\vec{a}$ – ускорение точки; $\vec{P} = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k$ – геометрическая сумма сил, действующих на точку. Для несвободной точки эта сумма представляет собой геометрическую сумму активных сил и реакций связей.

Векторное равенство (3.1) называют основным уравнением динамики точки. Проецируя его на оси декартовой системы координат, получим

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} P_{ky}; \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} P_{kz}. \tag{3.2}$$

Здесь $\ddot{x}$; $\ddot{y}$; $\ddot{z}$ соответствуют проекциям ускорения точки, а $\sum_{k=1}^{n} P_{kx}$; $\sum_{k=1}^{n} P_{ky}$; $\sum_{k=1}^{n} P_{kz}$ – суммам проекций сил, действующих на точку, на оси прямоугольной декартовой системы координат.

Проекции равенства (3.1) на оси естественной системы координат (оси естественного трехгранника):

$$m\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^{n} P_{k\tau}; \quad m\frac{v^2}{R} = \sum_{k=1}^{n} P_{kn}; \quad ma_b = \sum_{k=1}^{n} P_{kb}\,, \tag{3.3}$$

где $\frac{dv}{dt} = a_t$, $\frac{v^2}{R} = a_n$ – касательное и нормальное ускорения точки, соответственно. Проекция ускорения точки на бинормаль $a_b = 0$.

Математические выражения (3.2) и (3.3) являются дифференциальными уравнениями движения точки в координатной и естественной формах. Они позволяют решить две основные задачи динамики точки:

1-ю задачу – при известной массе точки и законе ее движения определить силы, действующие на точку;

2-ю задачу – при известных силах, действующих на материальную точку, определить закон движения этой точки.

Следует отметить, что 1-ю задачу динамики решают в основном посредством дифференцирования уравнений движения точки. При решении 2-й задачи динамики необходимо выполнить интегрирование систем дифференциальных уравнений (3.2) или (3.3) с последующим вычислением постоянных интегрирования, которые определяют из начальных условий. Начальные условия – это скорость (проекции скорости) и положение (координаты) точки в фиксированный момент времени, в основном в момент времени, равный нулю:

$$t = 0; \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0;$$
$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

Рассмотрим движение свободной материальной точки в однородном поле тяжести.

<u>Пример.</u> Снаряд вылетает из орудия, находящегося на высоте H под углом α к горизонту, с начальной скоростью v_0 (рис. 3.1).

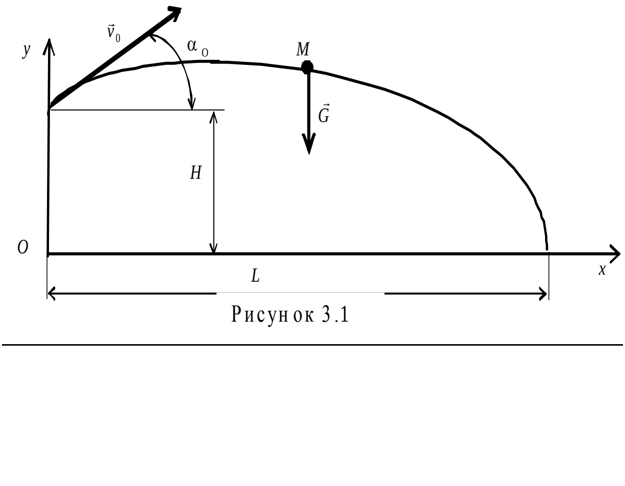


Рисунок 3.1

Составить уравнения движения снаряда и определить его траекторию, пренебрегая сопротивлением воздуха.

Решение

Выберем систему координат и изобразим точку *M* в произвольном положении. На точку действует только постоянная сила тяжести *G*. Запишем дифференциальные уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} P_{ky}.$$

В данном случае $m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = -G = -mg$. Начальные условия в момент времени $t = 0$:

$$x_0 = 0;\ y_0 = H;\ \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha;\ \dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha .$$

Сократив на величину массы *m*, которая отлична от нуля, получим

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g.$$

Проинтегрируем дважды дифференциальные уравнения движения точки:

$$\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = \dot{x} = C_1;\ C_1 = \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha ;$$

$$dx = v_0 \cos\alpha \, dt ; \quad \int dx = \int v_0 \cos\alpha dt ; \quad x = v_0 \cos\alpha \cdot t + C_2 ;$$

$$\ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = -g; \quad dv_y = -gdt; \quad \int dv_y = \int -gdt; \quad v_y = \dot{y} = -gt + C_3 ;$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha ; \ \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha ; \ y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t + C_4 .$$

После вычисления постоянных интегрирования $C_1 - C_4$, которые определены из начальных условий при $t = 0$, $C_1 = \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha$, $C_2 = x_0 = 0$, $C_3 = \dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha$, $C_4 = y_0 = H$, окончательно запишем уравнения движения снаряда:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t\ ;\ y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t + H\ .$$

Исключая время $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, получим уравнение траектории движения точки в декартовой системе координат

$$y = x \cdot tg\alpha - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + H\ .$$

Соответствующая этому уравнению траектория представляет собой параболу.

3.3. Механическая система. Центр масс механической системы. Момент инерции тела относительно оси. Теорема Гюйгенса

Механической системой называют совокупность материальных точек, положения и движения которых взаимосвязаны. Силы, которые действуют на точки механической системы со стороны объектов, не входящих в состав системы, называют ***внешними***. Силы взаимодействия между точками механической системы называют ***внутренними***. Внешние силы обозначают через P^e , а внутренне – через P^i .

Ограничения, накладываемые на положения и скорости точек механической системы, называют ***связями***.

Центром масс механической системы называют ***геометрическую точку***, радиус-вектор и координаты которой в выбранной системе отсчета определяют по следующим формулам:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k};\ x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k};\quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k};\quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \qquad (3.4)$$

где $\sum_{k=1}^{n} m_k = M$ – масса системы.

Осевой момент инерции является мерой инертности тела при непоступательном движении.

Моментом инерции тела (системы) относительно центра или оси называют скалярную величину, равную сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от центра или от оси:

$$
\begin{aligned}
&J_O = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2; \quad J_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(y_k^2 + z_k^2 \right); \\
&J_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + z_k^2 \right); \quad J_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Теорема Гюйгенса: «***Момент инерции тела относительно некоторой оси равен ее моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями***», т.е.

$$J_{Oz} = J_{Cz} + md^2. \tag{3.6}$$

3.4. Количество движения, момент количества движения (кинетический момент), кинетическая энергия точки и механической системы

Количество движения точки – это векторная величина, равная произведению массы точки на вектор ее скорости

$$\vec{q} = m\vec{v}. \tag{3.7}$$

Количеством движения механической системы называют векторную величину $\vec{Q}$, равную геометрической сумме количеств движений всех точек системы

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k \quad \text{или} \quad \vec{Q} = M\vec{v}_C, \tag{3.8}$$

где $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ – масса всей системы; $\vec{v}_C$ – скорость ее центра масс.

Моментом количества движения точки относительно центра называют векторную величину, равную векторному произведению радиус-вектора движущейся точки на ее количество движения

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times m\vec{v}. \tag{3.9}$$

Моментом количества движения механической системы (кинетическим моментом) относительно центра называют векторную сумму моментов количеств движений всех точек системы относительно того же центра

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k. \tag{3.10}$$

Для вращающегося твердого тела момент количества движения (кинетический момент) относительно оси вращения – это произведение момента инерции тела относительно данной оси на его угловую скорость

$$L_{Oz} = J_{Oz} \cdot \omega. \tag{3.11}$$

Кинетической энергией материальной точки называют скалярную величину, равную половине произведения массы точки на квадрат ее скорости

$$T_k = \frac{m_k {v_k}^2}{2}. \tag{3.12}$$

Кинетической энергией механической системы называют сумму кинетических энергий всех точек системы

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}. \tag{3.13}$$

Запишем формулы для расчета кинетической энергии твердого тела при разных видах движения:

при поступательном

$$T = \frac{Mv^2}{2}; \qquad (3.14)$$

при вращательном

$$T = \frac{J_{Oz} \cdot \omega^2}{2}; \qquad (3.15)$$

при плоскопараллельном

$$T = \frac{M \cdot v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}, \qquad (3.16)$$

где v_C – скорость центра масс тела; J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

3.5. Импульс силы. Работа силы

Элементарным импульсом силы называют векторную величину, равную произведению вектора силы на элементарный промежуток времени,

$$d\vec{S} = \vec{P} \cdot dt. \qquad (3.17)$$

Полным импульсом силы (импульсом силы за конечный промежуток времени) называют векторную величину

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{P} \cdot dt. \qquad (3.18)$$

Элементарной работой силы называют скалярную величину dA, равную произведению силы на элементарное перемещение точки ее приложения или произведению проекции силы на направление движения точки на ее элементарное перемещение:

$$dA = \vec{P} \cdot d\vec{r}\ ,\ dA = P_\tau \cdot ds \text{ или } dA = P \cdot ds \cdot \cos\alpha\ , \qquad (3.19)$$

где α – угол между направлением силы и направлением перемещения. Косинус угла α определяет знаки работ различных сил.

Алгебраическая сумма всех элементарных работ будет представлять полную работу силы на конечном перемещении точки ее приложения.

Работа силы тяжести:

$$A = \pm P \cdot h\ , \qquad (3.20)$$

где h – вертикальное перемещение точки приложения силы тяжести P. Знак «плюс» ставится, если точка приложения силы тяжести опускается, знак «минус» – в противном случае

Работа силы упругости:

$$A = \frac{C}{2}\left(x_n^2 - x_O^2\right), \qquad (3.21)$$

где x_0 и x_n – начальная и конечная координата точки; C – коэффициент жесткости.

Работа силы трения:

$$A = -P_{\text{тр}} \cdot s\ . \qquad (3.22)$$

Работа момента пары сил, приложенных к вращающемуся телу, вокруг оси Oz

$$A = \pm M_{Oz} \cdot \varphi. \qquad (3.23)$$

3.6. Общие теоремы динамики точки и системы

3.6.1. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс

Если на k-ю материальную точку, принадлежащую механической системе, действуют внешние и внутренние силы, то, суммируя по всем точкам системы

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^i, \qquad (3.24)$$

получим выражение для теоремы о движении центра масс

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e. \qquad (3.25)$$

Теорема: «***Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему***».

В проекциях на оси декартовой системы координат выражение (3.25) запишем следующим образом:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_{kx}^e\ ;\ M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_{ky}^e\ ;\ M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_{kz}^e. \qquad (3.26)$$

Закон сохранения движения центра масс: «***Если геометрическая сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю*** $\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e = 0$***, то*** $\vec{v}_C$ ***– скорость центра масс есть величина постоянная по модулю и направлению***».

Если при тех же условиях в начальный момент времени $\vec{v}_{C_0} = 0$, то положение центра масс есть величина постоянная $\vec{r}_C = \text{const}$. Если алгебраическая сумма проекций на какую-либо из координатных осей (например, Ox) внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то проекция скорости центра масс на соответствующую ось – величина постоянная

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_{kx}^e = 0;\ \dot{x}_C = \text{const}.$$

Если при тех же условиях в начальный момент времени $\vec{v}_{C_0} = 0$, то положение центра масс, определяемое радиус-вектором, есть величина постоянная $\vec{r}_C = \text{const}.$ Если проекция начальной скорости на какую-либо из координатных осей (например, Ox) $\dot{x}_{C_0} = 0$, то соответствующая координата центра масс системы $x_C = \text{const}$.

3.6.2. Теорема об изменении количества движения системы. Закон сохранения количества движения [1]

Теорема: «***Производная по времени от вектора количества движения системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему***».

Изменив последовательность дифференцирования и суммирования в (3.24), получим

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e, \tag{3.27}$$

а учитывая (3.4), запишем выражение для теоремы об изменении количества движения в дифференциальной форме:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e. \tag{3.28}$$

В проекциях на оси декартовой системы координат оно выглядит следующим образом:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} P_{ky}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} P_{kz}^e. \tag{3.29}$$

Закон сохранения количества движения: «***Если геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению***»

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e = 0; \quad \vec{Q} = \text{const}.$$

Если алгебраическая сумма проекций на какую-либо из координатных осей (например, Ox) внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то проекция количества движения системы на соответствующую ось – величина постоянная

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx}^{e} = 0; \quad Q_x = \text{const}.$$

Интегрируя (3.28) в пределах от начального значения количества движения $\vec{Q}_0$ до конечного $\vec{Q}_1$ и учитывая (3.18), получим выражение для рассматриваемой теоремы в интегральной форме:

$$\vec{Q}_0 - \vec{Q}_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \vec{P}_k^e dt = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e. \tag{3.30}$$

<u>Теорема:</u> «***Приращение количества движения системы за конечный промежуток времени равно векторной сумме действующих на систему за это время импульсов внешних сил***».

В проекциях на координатные оси (например, Ox) выражение (3.30) запишем следующим образом:

$$Q_{0x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^{e}. \tag{3.31}$$

3.6.3. Теорема об изменении момента количества движения (кинетического момента) системы. Закон сохранения момента количества движения (кинетического момента). Дифференциальное уравнение вращательного движения

<u>Теорема:</u> «***Производная по времени от момента количества движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра***»

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{P}_k^e\right). \tag{3.32}$$

В проекциях на оси декартовой системы координат выражение (3.32) для рассматриваемой теоремы имеет вид:

$$\frac{d\vec{L}_{Ox}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}M_{Ox}\left(\vec{P}_k^e\right);\quad \frac{d\vec{L}_{Oy}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}M_{Oy}\left(\vec{P}_k^e\right);\quad \frac{d\vec{L}_{Oz}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}M_{Oz}\left(\vec{P}_k^e\right). \quad (3.33)$$

<u>Закон сохранения момента количества движения:</u> «***Если алгебраическая сумма проекций моментов внешних сил, действующих на какую-либо из осей, равна нулю, то проекция момента количества движения на соответствующую ось постоянна***»

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_0\left(\vec{P}_k^e\right)=0,\quad \vec{L}_O=\text{const}.$$

В проекциях на оси декартовой системы координат (например, Oz) вышестоящее выражение для рассматриваемой теоремы имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n}M_{Oz}\left(\vec{P}_k^e\right)=0;\quad L_{Oz}=\text{const}.$$

Если тело вращается вокруг оси Oz, то, используя выражения (3.11) и (3.33), получим дифференциальное уравнение вращательного движения

$$J_{Oz}\cdot\dot{\omega}=J_{Oz}\cdot\varepsilon=\sum_{k=1}^{n}M_{Oz}\left(\vec{P}_k^e\right). \quad (3.34)$$

3.6.4. Теорема об изменении кинетической энергии системы

<u>Теорема:</u> «***Изменение кинетической энергии системы при некотором ее конечном перемещении равно сумме работ всех приложенных к системе внешних и внутренних сил на этом перемещении***»

$$T_1-T_0=\sum_{k=1}^{n}A_k^e+\sum_{k=1}^{n}A_k^i. \quad (3.35)$$

Выражение (3.35) представляет математическую запись теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме. Для неизменяемой системы, где сумма работ внутренних сил равна нулю, оно имеет вид:

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e\left(\vec{P}_k\right). \tag{3.36}$$

<u>Пример</u>. Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя (рис. 3.2). Учитывая трение скольжения тела 1 о наклонную плоскость и пренебрегая другими силами сопротивления, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный путь будет равным *s*.

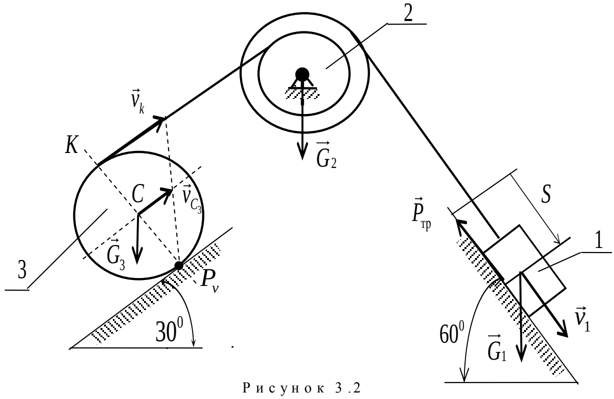


Рисунок 3.2

Дано: $m_1 = m_3 = 4m$; $m_2 = m$; $R_2 = R_3 = 20$ см; $r_2 = 0{,}75R_2$; $f = 0{,}2$; $s = 1{,}2$ м; радиус инерции блока $2\rho_2 = 0{,}8R_2$.

<u>Решение</u>

Применим теорему об изменении кинетической энергии для неизменяемой системы: $T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i\left(\vec{P}_i^e\right)$, где T и T_0 – начальное и конечное значение кинетической энергии. Так как система в начальный момент времени находилась в покое, то $T_0 = 0$, а $T = T_1 + T_2 + T_3$.

Тело 1 совершает поступательное движение, его кинетическая энергия

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{4mv_1^2}{2} = 2mv_1^2.$$

Блок 2 совершает вращательное движение с угловой скоростью $\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}$. Определим момент инерции блока относительно оси вращения

$$J_{C_2} = m_2 \rho_2^2 = m \frac{16}{25} R_2^2.$$

Кинетическая энергия блока 2

$$T_2 = \frac{J_{C_2} {\omega_2}^2}{2} = \frac{16mR_2^2 v_1^2}{25 \cdot 2 \cdot R_2^2} = 0,32mv_1^2.$$

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение, его кинетическая энергия

$$T_3 = \frac{m_3 v_{C_3}^2}{2} + \frac{J_{C_3} {\omega^2}_3}{2}.$$

Мгновенный центр скоростей катка находится в точке P, поэтому его угловая скорость $\omega_3 = \frac{v_2}{2R_3}$. Скорость точки M блока 2

$$v_2 = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{v_1 r_2}{R_2} = \frac{v_1 3R_2}{4R_2} = \frac{3v_1}{4}, \text{ а } \omega_3 = \frac{3v_1}{4 \cdot 2R_3} = \frac{3v_1}{8R_3}.$$

Скорость центра катка 3 $v_{C_3} = \frac{v_2}{2} = \frac{3v_1}{8}$. Момент инерции катка – сплошного, однородного цилиндра $J_{C_3} = \frac{m_3 R_3^2}{2} = \frac{4mR_3^2}{2}$. Его кинетическая энергия

$$T_3 = \frac{4m \cdot 9v_1^2}{64 \cdot 2} + \frac{4mR_3^2}{2 \cdot 2} \frac{9v_1^2}{64R_3^2} = \frac{27}{64} mv_1^2 = 0,42mv_1^2.$$

Кинетическая энергия всей системы $T = 2,74 \cdot mv_1^2$.

При движении системы работу совершают следующие силы:
– сила тяжести тела 1

$$A_1 = m_1 gs \cdot \sin 60^0 = 0,86 \cdot 4mgs;$$

– сила трения тела 1 о наклонную плоскость

$$A_2 = -m_1 gfs \cdot \cos 60^0 = -2mgfs;$$

– сила тяжести катка 3

$$A_3 = -m_3 gs_C \cdot \sin 30^0 = -4mg\frac{3}{8} \cdot s\frac{1}{2} = -0,75mgs.$$

Сумма работ всех внешних сил, приложенных к системе:

$$\sum A_i \left(\vec{P}_i^e\right) = 4,6mgs .$$

Из выражения $T = \sum A_i \left(\vec{P}_i^e\right)$ следует, что $2,74mv_1^2 = 4,6mgs$. Окончательно получим $v_1 = \sqrt{1,68gs} = 5,74$ м/с.

3.7. Принцип Даламбера

Принцип Даламбера позволяет сформулировать задачи динамики механических систем как задачи статики. При этом динамическим дифференциальным уравнениям движения придают вид уравнений равновесия. Такой метод называют ***методом кинетостатики***.

Принцип Даламбера для материальной точки: «***В каждый момент времени движения материальной точки, фактически действующие на нее активные силы, реакции связей и условно приложенная к точке сила инерции образуют уравновешенную систему сил***»

$$\vec{P}^a + \vec{R} + \vec{P}^u = 0. \tag{3.37}$$

Силой инерции точки называют векторную величину, имеющую размерность силы, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную противоположно вектору ускорения

$$\vec{P}^{и} = -m\vec{a}\,. \tag{3.38}$$

Рассматривая механическую систему как совокупность материальных точек, на каждую из которых действуют, согласно принципу Даламбера, уравновешенные системы сил, имеем следствия из этого принципа применительно к системе. Главный вектор и главный момент относительно любого центра приложенных к системе внешних сил и сил инерции всех ее точек равны нулю:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^{a} + \sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^{и} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{P}_k^{a}\right) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{R}_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{P}_k^{и}\right) = 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

Здесь внешними силами являются активные силы и реакции связей.

Главный вектор сил инерции механической системы равен произведению массы системы на ускорение ее центра масс и направлен в сторону, противоположную этому ускорению

$$-M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_к^{и} = \vec{R}^{и}\,. \tag{3.40}$$

Главный момент сил инерции системы относительно произвольного центра *O* равен взятой с обратным знаком производной по времени от кинетического момента ее относительно того же центра

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{P}_к^{и}\right) = \vec{M}_O^{и} = -\frac{d\vec{L}_O}{dt}\,. \tag{3.41}$$

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси *Oz*, найдем главный момент сил инерции относительно этой оси

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{P}_{\kappa}^{u}\right) = M_{Oz} = -J_{Oz}\varepsilon\ . \qquad (3.42)$$

3.8. Элементы аналитической механики

В разделе «Аналитическая механика» рассматривают общие принципы и аналитические методы решения задач механики материальных систем.

3.8.1.Возможные перемещения системы. Классификация некоторых связей

Возможными перемещениями точек $\delta\vec{r}_k$ механической системы называют любые воображаемые, бесконечно малые их перемещения, допускаемые наложенными на систему связями, в фиксированный момент времени. По определению, ***числом степеней свободы*** механической системы называют число ее независимых возможных перемещений.

Связи, наложенные на систему, называют ***идеальными***, если сумма элементарных работ их реакций на любом из возможных перемещений точек системы равна нулю

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k \cdot \delta\,\vec{r}_k = 0\ . \qquad (3.\ 43)$$

Связи, для которых налагаемые ими ограничения сохраняются при любом положении системы, называют ***удерживающими***. Связи, не изменяющиеся во времени, в уравнения которых явно не входит время, называют ***стационарными***. Связи, ограничивающие только перемещения точек системы, называют ***геометрическими***, а ограничивающие скорости – ***кинематическими***. В дальнейшем будем рассматривать только геометрические связи и те кинематические, которые могут быть путем интегрирования сведены к геометрическим.

3.8.2. Принцип возможных перемещений

Для равновесия механической системы с удерживающими идеальными и стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, действующих на нее, на любых возможных перемещениях системы была равна нулю

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k^a \cdot \delta\,\vec{r}_k = 0\,. \qquad (3.44)$$

В проекциях на оси координат:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(R_{kx}^a \cdot \delta x_k + R_{ky}^a \cdot \delta y_k + R_{kz}^a \cdot \delta z_k \right) = 0\,. \qquad (3.45)$$

Принцип возможных перемещений позволяет установить в общей форме условия равновесия любой механической системы, не рассматривая равновесие отдельных ее частей. При этом учитываются только действующие на систему активные силы. Неизвестные реакции идеальных связей в эти условия не входят. Вместе с тем данный принцип позволяет определять неизвестные реакции идеальных связей путем отбрасывания этих связей и введения их реакций в число активных сил. При отбрасывании связей, реакции которых необходимо определить, система приобретает дополнительно соответствующее число степеней свободы.

Пример 1. Найти зависимость между силами $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ домкрата, если известно, что при каждом повороте рукоятки $AB = l$, винт C выдвигается на величину h (рис. 3.3).

Решение

Возможные перемещения механизма – это поворот рукоятки $\delta\varphi$ и перемещение груза δh. Условие равенства нулю элементарных работ сил:

$$Pl\delta\varphi - Q\delta h = 0;\ \frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta h}{h} \Rightarrow \delta\varphi = \frac{2\pi}{h}\delta h.$$

Тогда $\left(\frac{Pl2\pi}{h} - Q\right)\delta h = 0$. Так как $\delta h \neq 0$, то $Q = \frac{2\pi \cdot l}{h} P$.

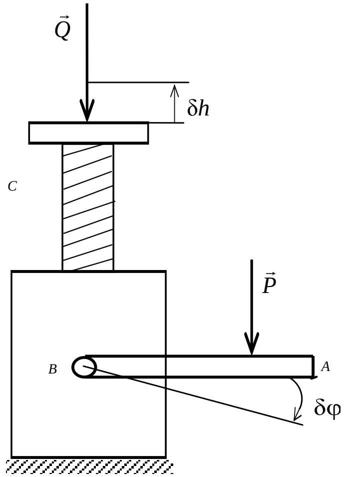


Рисунок 3.3

3.8.3. Общее вариационное уравнение динамики

Рассмотрим движение системы, состоящей из n точек. На нее действуют активные силы $\vec{P}_k^a$ и реакции связей $\vec{R}_k$.(k = 1,…,n) Если к действующим силам добавить силы инерции точек $\vec{P}_k^u = -m_k \vec{a}_k$, то, согласно принципу Даламбера, полученная система сил будет находиться в равновесии и, следовательно, справедливо выражение, записанное на основе принципа возможных перемещений (3.44):

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{P}_k^a \cdot \delta\vec{r}_k\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{P}_k^u \cdot \delta\vec{r}_k\right) = 0 . \qquad (3.46)$$

Если все связи идеальные, то 2-я сумма равна нулю и в проекциях на оси координат равенство (3.46) будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(P_{kx}^{a}+P_{kx}^{u}\right)\delta x_k+\left(P_{ky}^{a}+P_{ky}^{u}\right)\delta y_k+\left(P_{kz}^{a}+P_{kz}^{u}\right)\delta z_k\right]=0\,. \qquad (3.47)$$

Последнее равенство представляет собой общее вариационное уравнение динамики в проекциях на оси координат, которое позволяет составить дифференциальные уравнения движения механической системы.

Общее вариационное уравнение динамики – это математическое выражение принципа Даламбера-Лагранжа: «***При движении системы, подчиненной стационарным, идеальным, удерживающим связям, в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к системе, и сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю***».

Пример 2. Для механической системы (рис. 3.4), состоящей из трех тел определить ускорение груза 1 и натяжение троса 1-2, если: $m_1 = 5m$; $m_2 = 4m$; $m_3 = 8m$; $r_2 = 0{,}5R_2$; радиус инерции блока 2 $i = 1{,}5r_2$. Каток 3 представляет собой сплошной однородный диск.

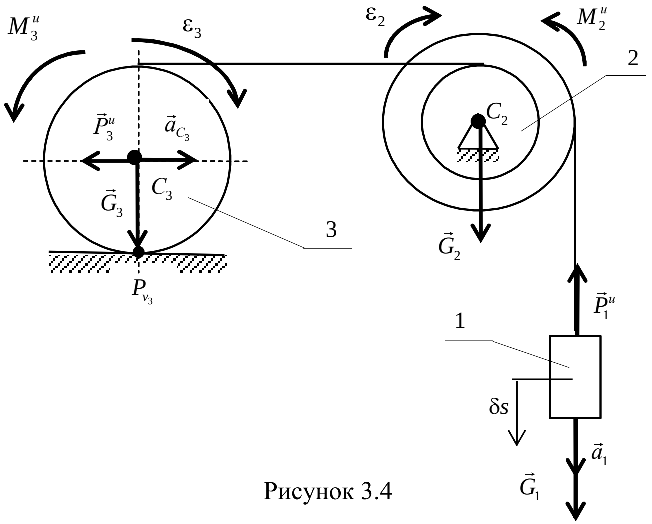


Рисунок 3.4

Решение

Изобразим силы, которые совершают элементарную работу на возможном перемещении δs груза 1:

$$G_1 = 5mg; \quad P_1^и = -5ma_1; \quad M_2^и = -J_2\varepsilon_2; \; P_3^и = -8ma_C; \quad M_3^и = -J_{C_3}\varepsilon_3,$$

где $J_{C_2} = m_2 i_2^2 = 4m2,25r_2^2; \; J_{C_3} = m_3 R_3^2 = 8mR_3^2.$

Запишем возможные перемещения всех тел через возможное перемещение груза 1:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s}{R_2}; \quad \delta s_{C_3} = \frac{\delta s r_2 R_3}{R_2 \cdot 2R_3} = 0,25\delta s; \quad \delta\varphi_3 = \frac{\delta s_{C_3}}{R_3} = 0,25\frac{\delta s}{R_3}.$$

Выразим линейные и угловые ускорения всех тел через искомое ускорение груза 1 (отношения такие же, как и в случае возможных перемещений):

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2} = \frac{a_1}{2r_2}; \quad a_{C_3} = \frac{a_1}{4}; \quad \varepsilon_2 = 0,25\frac{a_1}{R_3}.$$

Общее вариационное уравнение для данной задачи имеет вид:

$$G\delta s - P_1^{u}\delta s - M_2^{u}\delta\varphi_2 - M_3^{u}\delta\varphi_3 - P_3^{u}\delta s_{C_3} = 0.$$

Подставляя полученные ранее выражения для активных сил, сил инерции и возможных перемещений, после несложных преобразований получим

$$\left(5mg - 5ma_1 - 2,25ma_1 - 0,5ma_1 - 0,5ma_1\right)\delta s = 0.$$

Так как $\delta s \neq 0$, следовательно, равно нулю выражение в скобках, содержащее ускорение a_1, откуда $a_1 = 5g/8,25 = 0,606g$.

Для определения натяжения троса, удерживающего груз, освободим груз от троса, заменив действие его искомой реакцией $\vec{N}$. Под действием заданных сил $\vec{G}$, $\vec{N}$ и приложенной к грузу силы инерции $\vec{P}_1^{u}$, он находится в равновесии. Следовательно, к рассматриваемому грузу (точке) применим принцип Даламбера, т.е. запишем, что $G - N - P_1^{u} = 0$. Отсюда $N = G + P_1^{u}$; $N = 5mg - 5ma_1$; $N = 2,145mg$.

3.8.4. Уравнение Лагранжа 2-го рода

Обобщенные координаты и обобщенные скорости. Любые независимые между собой параметры, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве, называют ***обобщенными координатами***. Эти координаты, обозначаемые $q_1,\dots q_i$, могут иметь любую размерность. В частности, обобщенные координаты могут быть перемещениями или углами поворота.

Для рассматриваемых систем число обобщенных координат равно числу степеней свободы. Положение каждой точки системы $\vec{r}_k$ является однозначной функцией обобщенных координат

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k\left(q_1, q_2, \dots, q_i\right).$$

Таким образом, движение системы в обобщенных координатах определяется следующими зависимостями:

$$q_1 = f_1(t); \quad q_2 = f_2(t), ..., q_i = f_i(t). \tag{3.48}$$

Первые производные от обобщенных координат называют ***обобщенными скоростями***: $\dot{q}_1; \dot{q}_2, ..., \dot{q}_i$.

Обобщенные силы. Выражение для элементарной работы силы $\vec{P}$ на возможном перемещении $\delta\vec{r}$ имеет вид:

$$\delta A = \vec{P} \cdot \delta\vec{r} .$$

Для элементарной работы системы сил запишем

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k \cdot \delta\vec{r}_k .$$

Используя полученные зависимости, это выражение можно записать в виде:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \cdot \delta q_i ,$$

где обобщенная сила, соответствующая *i*-й обобщенной координате,

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} . \tag{3.49}$$

Таким образом, обобщенной силой, соответствующей *i*-й обобщенной координате, является коэффициент при вариации этой координаты в выражении суммы элементарных работ активных сил на возможном перемещении системы. Для вычисления обобщенной силы необходимо сообщить системе возможное перемещение, при котором изменяется только обобщенная координата q_i. Коэффициент при δq_i и будет искомой обобщенной силой.

Уравнения движения системы в обобщенных координатах. Пусть дана механическая система с *s* степенями свободы. Зная действующие на нее силы, необходимо, составить дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах $q_1, q_2, ..., q_i$. Применим процедуру составления дифференциальных уравнений движения системы – уравнений Лагранжа 2-го рода – по аналогии вывода этих уравнений для свободной материальной точки. Исходя из 2-го закона Ньютона, запишем

$$m\ddot{x} = P_x; \quad m\ddot{y} = P_y; \quad m\ddot{z} = P_z.$$

Получим аналог этим уравнениям, используя запись для кинетической энергии материальной точки,

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}{2}.$$

Частная производная от кинетической энергии по проекции скорости на ось $x - (\dot{x})$ равна проекции количества движения на эту ось, т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

Чтобы получить необходимые уравнения, вычислим производные по времени:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = P_x; \quad \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = P_y; \quad \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = P_z$$

Полученная система уравнений является уравнениями Лагранжа 2-го рода для материальной точки.

Для механической системы уравнения Лагранжа 2-го рода представим в виде уравнений, в которых вместо проекций активных сил P_x, P_y, P_z используют обобщенные силы Q_1, Q_2,...,Q_i и учитывают в общем случае зависимость кинетической энергии от обобщенных координат.

Уравнения Лагранжа 2-го рода для механической системы имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = \overline{1,\ i}\,. \tag{3.50}$$

Их можно использовать для изучения движения любой механической системы с геометрическими, идеальными и удерживающими связями.

<u>Пример 3.</u> Для механической системы (рис. 3.5), данные для которой приведены в предыдущем примере, составить дифференциальное уравнение движения, используя уравнение Лагранжа 2-го рода,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1.$$

<u>Решение</u>

Механическая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем линейное перемещение груза $q_1 = s$; обобщенная скорость – $\dot{s}$. С учетом этого запишем уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right)-\frac{\partial T}{\partial s}=Q.$$

Составим выражение для кинетической энергии системы

$$T=\frac{m_1 v_1^2}{2}+\frac{J_{C_2}\omega_2^2}{2}+\frac{m_3 v_{C_3}^2}{2}+\frac{J_{C_3}\omega_3^2}{2}.$$

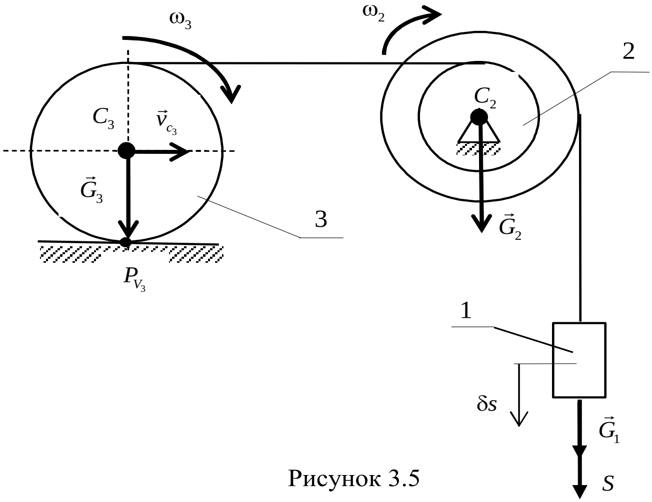


Рисунок 3.5

Выразим все угловые и линейные скорости через обобщенную скорость:

$$v_1 = \dot{s}; \quad \omega_2 = \frac{\dot{s}}{R_2}; \quad v_{C_3} = \frac{1}{2}(\omega_2 r_2) = \frac{\dot{s} \cdot r_2}{2R_2} = 0,25\dot{s}; \quad \omega_3 = \frac{v_{C_3}}{R_3} = \frac{0,25\dot{s}}{R_3};$$

$$J_{C_2} = m_2 i_2^2 = 4m2,25r_2^2; \quad J_{C_3} = \frac{m_3 R_3^2}{2} = 4m \cdot R_3^2.$$

Теперь получим

$$T = \frac{5m\dot{s}^2}{2} + \frac{9mr_2^2\dot{s}^2}{2R_2^2} + \frac{mr_2^2\dot{s}^2}{R_2^2} + \frac{4mR_3^2\left(0,25\right)^2\dot{s}^2}{R_3^2} = 4{,}125m\dot{s}^2.$$

Вычислим обобщенную силу, составив выражение элементарной работы на возможном перемещении δs всех действующих сил. Без учета сил трения работу в системе производит только сила тяжести груза 1 $\delta A = 5mg\delta s.$ Запишем обобщенную силу при δs, как коэффициент в элементарной работе $Q_1 = 5mg$. Далее найдем

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = 8,25m\dot{s}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = 8,25m\ddot{s}.$$

Окончательно дифференциальное уравнение движения системы будет иметь вид: $\ddot{s} = 0,606g$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют материальной точкой, инертностью и массой?
2. Как сформулировать законы Ньютона – законы динамики?
3. Какой вид имеет дифференциальное уравнение движения точки?
4. Как формулируют две основные задачи динамики материальной точки?
5. Что называют механической системой и ее центром масс?
6. Как определяют осевые и центробежные моментами инерции?
7. В чем заключается суть теоремы Гюйгенса о моментах инерции?
8. Как определяют вектор количества движения точки и системы?
9. Как определяют вектор момента количества движения точки и системы?
10. Как вычисляют кинетическую энергию для различных видов движения?
11. Что называют импульсом силы?
12. Как вычисляют работы силы тяжести, силы упругости, силы трения, момента пары сил?
13. Как формулируют теорему о движении центра масс системы?
14. Когда имеет место закон сохранения движения центра масс системы?
15. Как формулируют теорему об изменении количества движения системы?

16. Когда имеет место закон сохранения количества движения системы?

17. Как формулируют теорему об изменении момента количества движения (кинетического момента) системы?

18. Когда имеет место закон сохранения момента количества движения (кинетического момента) системы?

19. Как формулируют теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме?

20. В чем суть принципа Даламбера для материальной точки и механической системы?

21. Что называют возможными перемещениями системы?

22. Как классифицируют связи?

23. Как формулируют принцип возможных перемещений?

24. Как формулируют общее вариационное уравнение динамики?

25. Что называют силой инерции материальной точки?

26. Как вычисляют главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела?

27. Как формулируют принцип Даламбера-Лагранжа для материальной точки и механической системы?

28. Что называют обобщенными координатами и обобщенными скоростями?

29. Как определяют обобщенные силы?

30. Какой вид имеют уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа 2-го рода)?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Беломытцев А.С. Общий курс теоретической механики. Статика и кинематика. Тексты лекций для студентов заочной формы обучения всех специальностей. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2004. – 76 с.

2. Ільчишина Д.І., Шальда Л.М. Теоретична механіка. – Київ : УМК ВО, 1991. – 252 с.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.– М.: Высшая школа, 1986 – 416 с.

4. Попов М.В. Теоретическая механика. Кратний курс / Учебник для втузов. – М.: Наука, 1986. – 336 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

АДАШЕВСЬКИЙ Володимир Михайлович
АНІЩЕНКО Галина Оттівна
ТАРСІС Юрій Львович

ЗАГАЛЬНИЙ КУРС
ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Навчальний посібник

Для студентів технічних університетів

Російською мовою

Роботу до видання рекомендував С. К. Шелковий

За авторською редакцією
Комп'ютерна верстка – І.Р. Грабовська
Комп'ютерний макет – О.О. Замула
Зав. редакційно-видавничим відділом М.П. Єфремова

План 2004, п.

Підп. до друку . .2004 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсет.
Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Ум.-друк. арк. 4,6.
Обл.-вид. арк. 5,8. Наклад 300 прим. Зам. № . Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ «ХПІ», 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21