



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

## **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до практичних занять з курсу**

**«Сучасні проблеми і методи математичного  
і комп'ютерного моделювання в економіці та менеджменті»**

**для студентів напрямку підготовки**

**8.030601 «Менеджмент»**

Харків 2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до практичних занять з курсу**

**«Сучасні проблеми і методи математичного  
і комп'ютерного моделювання в економіці та менеджменті»**

**для студентів напряму підготовки**

**8.030601 «Менеджмент організацій»**

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 2 від 23.06.2016

Харків  
НТУ «ХП»  
2016

**Методичні вказівки** до практичних занять з курсу „Сучасні проблеми і методи математичного і комп’ютерного моделювання в економіці та менеджменті” для студентів напряму підготовки 8.030601 "Менеджмент" / уклад.: О. Б. Білоцерківський, О. С. Другова. – Харків: НТУ «ХП», 2016. – 44 с.

Укладачі: О. Б. Білоцерківський  
О. С. Другова

Рецензент О. О. Замула

Кафедра менеджменту зовнішньоекономічної діяльності та фінансів

## ВСТУП

В умовах сьогодення в Україні як самостійної держави зростає роль математичного та комп'ютерного моделювання – одного із засобів динамічного розвитку стійкої економіки з науково обґрунтованими шляхами розвитку та прогнозами на майбутнє. Зважаючи на це студентам необхідно засвоїти такі поняття.

*Моделювання* – це процес побудови, реалізації та дослідження моделі, який здатний замінити реальну систему та дати інформацію про неї.

*Математична модель* – це система математичних і логічних співвідношень, які описують структуру та функції реальної системи.

*Комп'ютерна модель* – це інформаційна модель, що реалізується на комп'ютері.

У даних методичних вказівках розглянуто основні числові методи, які застосовуються в курсі «Сучасні проблеми і методи математичного і комп'ютерного моделювання в економіці та менеджменті». Кожен розділ присвячений окремій темі курсу. Всі розділи побудовані однаково: спочатку викладаються необхідні теоретичні відомості, потім докладно розглядається хід розв'язання задач, наприкінці кожного розділу наведено варіанти індивідуальних домашніх завдань. Варіанти завдань студент вибирає за останньою цифрою номера свого прізвища у журналі групи.

Дані методичні вказівки не замінюють підручники з сучасних проблем і методів математичного і комп'ютерного моделювання в економіці та менеджменті. Теоретичні основи викладаються у стислому вигляді. Даються тільки ті відомості, які необхідно використати безпосередньо для розв'язання задач. Більш детально матеріал розглянуто у підручниках [1–7].

## ТЕМА 1. ПАВУТИНОПОДІБНА МОДЕЛЬ

### 1.1. Механізм побудови павутиноподібної моделі

Достатньо повне уявлення про те, яким чином відбувається “нащупування” стану рівноваги на ринку, дає так звана павутиноподібна модель. Її побудова ґрунтується на припущенні, що попит і пропозиція є функціями від ціни.

Введемо позначення:  $y_t^c$  – попит у момент часу  $t$ ;  $y_t^n$  – пропозиція у момент часу  $t$ ;  $p_t$  – ціна товару в момент часу  $t$ .

Природно вважати, що попит у даний момент часу залежить від ціни в цей же момент часу:

$$y_t^c = ap_t + b, \quad (1.1)$$

а пропозиція – від ціни в попередній момент часу:

$$y_t^n = cp_{t-1} + d, \quad (1.2)$$

тобто є запізнювання реакції виробництва на зміну ціни.

Оскільки із збільшенням ціни попит зазвичай падає, а пропозиція зростає, то  $a < 0$ ,  $c > 0$ .

Рівність у кожен момент часу попиту і пропозиції

$$y_t^c = y_t^n, \quad (1.3)$$

завершує опис павутиноподібної моделі.

Із співвідношення (1.3) легко виходить модель для ціни у вигляді різниці першого порядку:

$$p_t = c/ap_{t-1} + (d - b)/a. \quad (1.4)$$

Значення ціни, при якому встановлюється рівність попиту і пропозиції і яке не приводить до подальших змін, позначимо через  $p^*$ . Це саме та ціна, для якої у стані рівноваги попиту і пропозиції справедливе співвідношення:

$$p^* = \frac{c}{a} p^* + \frac{d - b}{a}, \quad (1.5)$$

звідки одержуємо її значення:

$$p^* = \frac{\gamma}{1 - c/a}, \quad (1.6)$$

де  $\gamma = \frac{d - b}{a}$ .

Дослідження процесу, що описується моделлю, на збіжність дає підставу стверджувати:

1. Якщо  $r = \left| \frac{c}{a} \right| < 1$ , то при  $t \rightarrow \infty$   $p_t \rightarrow p^*$ .
2. Якщо  $r = 1$ , то при  $t \rightarrow \infty$   $p_t$  коливається біля рівноважного значення.
3. Якщо  $r > 1$ , то при  $t \rightarrow \infty$  ціна відхилятиметься на все більшу величину від її рівноважного значення.

## 1.2. Побудова павутиноподібної моделі з використанням *Microsoft Excel*

**Приклад 1.** За даними табл. 1.1 розрахувати траєкторії зміни ціни, попиту і пропозиції та побудувати графік руху ціни до рівноважного стану:

Таблиця 1.1 – Дані для побудови траєкторії зміни ціни, попиту і пропозиції

№	Ціна	Попит	Пропозиція
1	7,5	23,25	10,13
2	15,38	19,32	12,87
3	19,25	17,39	14,24
4	21,12	16,44	14,9
5	24,21	14,9	15,98
6	25,53	14,24	16,44
7	28,25	12,89	17,39

### **Порядок виконання завдання**

1. Введемо початкові дані на робочий лист *Excel*.

2. Оцінимо параметри регресійної залежності попиту від ціни за допомогою пакету *Аналіз даних* або за допомогою вбудованої функції лінійної регресії. Результати розрахунку будуть наступні:

$$y_t^c = -0,5p_t + 27. \quad (1.7)$$

3. Оцінимо параметри регресійної залежності пропозиції від ціни. Результати розрахунку будуть наступні:

$$y_t^n = 0,35p_{t-1} + 7,5. \quad (1.8)$$

4. Запишемо умову рівноваги попиту і пропозиції:

$$-0,5p_t + 27 = 0,35p_{t-1} + 7,5 \quad (1.9)$$

або

$$p_t = \frac{0,35}{-0,5} p_{t-1} + \frac{27 - 7,5}{0,5}. \quad (1.10)$$

5. Розрахуємо траєкторії зміни ціни, попиту і пропозиції:

а) у вільне поле робочого листа *Excel* (наприклад, в комірки A12 і A13) двічі введемо значення первинної ціни, що дорівнює 7,5;

б) у комірку A14 введемо формулу (1.10) і скопіюємо її в блок A15... A27;

в) у комірку B12 введемо формулу (1.7) і скопіюємо її в блок B13... B27;

г) у комірку C12 введемо формулу (1.8) і скопіюємо її в блок C13... C27;

д) у комірки D12 і D13 введемо відповідно формули (1.7) і (1.8) і останню з них скопіюємо в блок D14... D27.

В результаті цих дій таблиця розрахункових значень точок траєкторій матиме наступний вигляд (табл. 1.2):

Таблиця 1.2 – Результати розрахунків

Ціна	Траєкторія попиту	Траєкторія пропозиції	Траєкторія руху до рівноважної ціни
7,5	23,25	10,125	23,25
7,5	23,25	10,125	10,125
33,75	10,125	19,3125	10,125
33,75	10,125	19,3125	19,3125
15,375	19,3125	12,88125	19,3125
15,375	19,3125	12,88125	12,88125
28,2375	12,88125	17,383125	12,88125
28,2375	12,88125	17,383125	17,383125
19,23375	17,383125	14,2318125	17,383125
19,23375	17,383125	14,2318125	14,2318125
25,53638	14,231813	16,43773125	14,2318125
25,53638	14,231813	16,43773125	16,43773125
21,12454	16,437731	14,89358813	16,43773125
21,12454	16,437731	14,89358813	14,89358813
24,21282	14,893588	15,97448831	14,89358813
24,21282	14,893588	15,97448831	15,97448831

6. За даними, що описують траєкторію ціни, попиту і пропозиції, побудуємо графік типу XY, призначивши X блок A12... A27, Y1 – блок B12... B27, Y2 – блок C12... C27, Y3 – блок D12... D27.

Побудований графік матиме наступний вигляд (рис. 1.1):

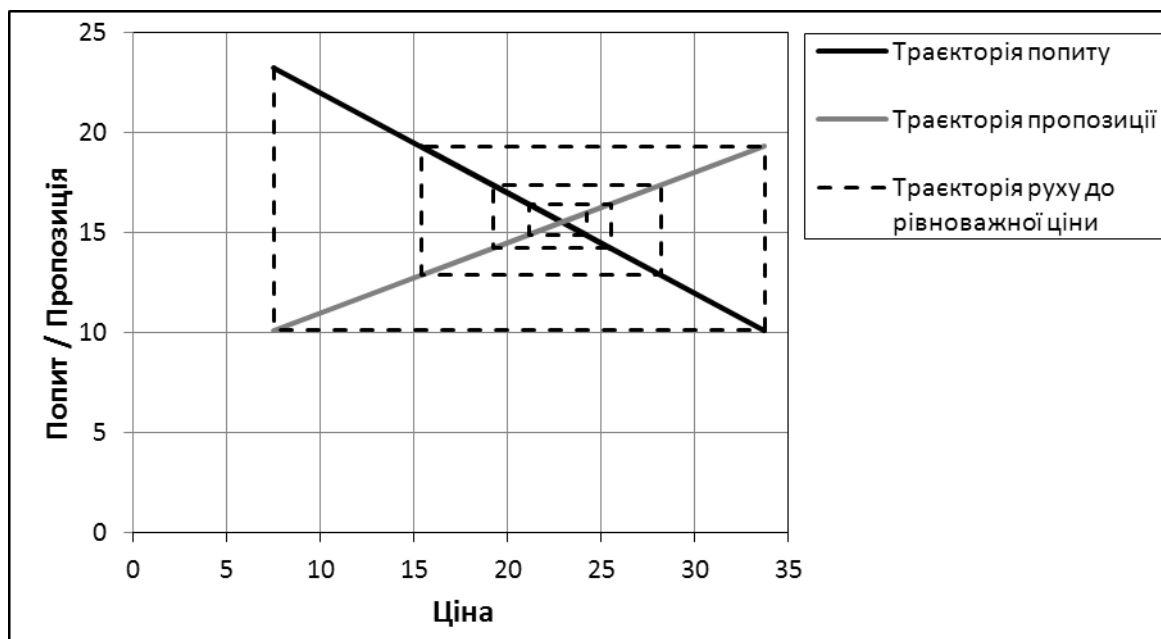


Рисунок 1.1

### Завдання

Для свого варіанту вихідних даних розрахувати траєкторії зміни ціни, попиту і пропозиції та побудувати графік руху ціни до рівноважного стану згідно з табл. 1.3

Таблиця 1.3 – Варіанти завдань

№ з/п	Ціна	Попит	Пропозиція
1	$7,5 \cdot k$	$23,25 \cdot k$	$10,13 \cdot k$
2	$15,38 \cdot k$	$19,32 \cdot k$	$12,87 \cdot k$
3	$19,25 \cdot k$	$17,39 \cdot k$	$14,24 \cdot k$
4	$21,12 \cdot k$	$16,44 \cdot k$	$14,9 \cdot k$
5	$24,21 \cdot k$	$14,9 \cdot k$	$15,98 \cdot k$
6	$25,53 \cdot k$	$14,24 \cdot k$	$16,44 \cdot k$
7	$28,25 \cdot k$	$12,89 \cdot k$	$17,39 \cdot k$

Коефіцієнт варіанту визначається за формулою:

$$k = \frac{100 + N}{100}, \quad (1.11)$$

де  $N$  – номер прізвища студента в журналі групи.

## ТЕМА 2. МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ (МГБ)

### 2.1. Методи розв'язування систем рівнянь МГБ

**Приклад 2.1.** Для трьохгалузевої економічної системи на плановий період задані матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат і вектор кінцевої продукції (дані умовні):

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,25 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,15 & 0,3 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Необхідно обчислити планові обсяги валової продукції, матрицю повних матеріальних витрат, значення міжгалузевих потоків, умовно чисту продукцію галузей і подати результати у формі “галузевого балансу”.

#### *Розв'язання*

1. Для розрахунку валової продукції складемо систему рівнянь, яка в матричному записі має вигляд:

$$X = AX + Y. \quad (2.1)$$

$$X_1 = 0,3X_1 + 0,2X_2 + 0,25X_3 + 150,$$

$$X_2 = 0,1X_1 + 0,4X_2 + 0,1X_3 + 200,$$

$$X_3 = 0,2X_1 + 0,15X_2 + 0,3X_3 + 300.$$

Перетворимо систему до вигляду:

$$0,7X_1 - 0,2X_2 - 0,25X_3 = 150,$$

$$-0,1X_1 + 0,6X_2 - 0,1X_3 = 200,$$

$$-0,2X_1 - 0,15X_2 + 0,7X_3 = 300.$$

Цю систему можна розв'язати методом послідовного виключення Гаусса. На першому кроці обчислень одне з рівнянь перетворюється таким чином, щоб коефіцієнт при  $X_1$  дорівнював одиниці, а з решти рівнянь  $X_1$  виключається взагалі. Далі друге рівняння перетворюють так, щоб коефіцієнт при  $X_2$  дорівнював одиниці, з решти рівнянь  $X_2$  виключають. Продовжуючи описану процедуру, зрештою отримують систему, в якій останнє рівняння містить лише одну невідому величину, а кожне попереднє – на одну більше. Послідовно підставляючи вже обчислені значення невідомих у рівняння – від останнього до першого, обчислюють значення всіх невідомих величин.

У результаті такого послідовного виключення невідомих отримаємо еквівалентну систему:

$$X_1 - 6X_2 + X_3 = -2000,$$

$$X_2 - 0,667X_3 = 74,074,$$

$$17,167X_3 = 12537,037.$$

З останнього рівняння знаходимо

$$X_3 = 730,313.$$

Підставляючи це значення у друге рівняння, обчислимо

$$X_2 = 560,949.$$

Нарешті, підставивши значення  $X_1$  та  $X_2$  у перше рівняння, отримаємо

$$X_3 = 635,383.$$

2. Знайдемо матрицю повних матеріальних витрат згідно з формулою

$$B = (E - A)^{-1}. \quad (2.2)$$

Отримаємо матрицю  $(E - A)$ :

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,25 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,15 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,25 \\ -0,1 & 0,6 & -0,1 \\ -0,2 & -0,15 & -0,7 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник цієї матриці:

$$\det(E - A) = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,25 \\ -0,1 & 0,6 & -0,1 \\ -0,2 & -0,15 & 0,7 \end{vmatrix} = 0,232.$$

Будуємо матрицю  $\overline{(E - A)}$ , приєднану до матриці  $(E - A)$ . Елементами цієї матриці є алгебраїчні доповнення  $A_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1,3}$  для елементів матриці, транспонованої до  $(E - A)$ . Алгебраїчні доповнення  $A_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1,3}$  обчислюють як добуток  $(-1)^{i+j}$  на мінор, який отримано після викреслення з матриці  $(E - A)$   $i$ -го рядка й  $j$ -го стовпця:

$$\overline{(E - A)} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,405 & 0,178 & 0,170 \\ 0,090 & 0,440 & 0,095 \\ 0,135 & 0,145 & 0,400 \end{pmatrix}.$$

За формулою

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{\overline{(E - A)}}{\det(E - A)} \quad (2.3)$$

знаходимо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,748 & 0,766 & 0,734 \\ 0,388 & 1,899 & 0,410 \\ 0,583 & 0,626 & 1,728 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обсяги валової продукції трьох галузей, використовуючи формулу:

$$X = BY = \begin{pmatrix} 1,748 & 0,766 & 0,734 \\ 0,388 & 1,899 & 0,410 \\ 0,583 & 0,626 & 1,728 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 635,383 \\ 560,949 \\ 730,313 \end{pmatrix}.$$

Як з цього видно, обсяги валової продукції, обчислені співвідношеннями, повністю збігаються.

3. Для обчислення елементів першого квадранта міжгалузевого балансу – значення міжгалузевих потоків – скористаємося формулою:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j, i, j = \overline{1, n}, \quad (2.4)$$

тобто елементи першого стовпчика матриці  $A$  перемножимо на величину  $X_1 = 635,383$ , елементи другого стовпчика матриці  $A - X_2 = 560,949$ ; елементи третього стовпчика матриці  $A - X_3 = 730,313$ .

Складові третього квадранта (умовно чиста продукція) знаходять з урахуванням формули  $(-1)$  як різницю між обсягом валової продукції та сумою елементів відповідного стовпчика першого квадранта.

Четвертий квадрант у наведеному прикладі складається лише з одного показника й слугує, зокрема, для контролю правильності обчислень. Сума елементів другого квадранта має збігатися (у вартісному матеріальному балансі) із сумою елементів третього квадранта.

Результати обчислень подано у вигляді табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Міжгалузевий баланс виробництва й розподілу продукції

Галузі-виробники	Галузі-споживачі			Кінцева продукція	Валова продукція
	1	2	3		
1	190,615	112,190	182,578	150	635,383
2	63,538	224,380	73,031	200	560,949
3	127,077	84,142	219,094	300	730,313
Умовна чиста продукція	254,153	140,237	255,610	650	
Валова продукція	635,383	560,949	730,313		1926,645

**Приклад 2.2.** Для умовної двохгалузевої економіки відомі міжгалузеві потоки продукції та обсяги кінцевої продукції галузей за звітний період:

Таблиця 2.2 - Міжгалузеві потоки продукції та обсяги кінцевої продукції галузей за звітний період

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		Кінцева продукція
	1	2	
1	40	50	110
2	60	20	170

У плановому періоді необхідно отримати кінцеву продукцію першої галузі в обсязі  $Y_1 = 120$ , валову продукцію другої галузі в обсязі  $X_2 = 300$ . Побудувати МГБ на плановий період (обчислити міжгалузеві потоки продукції планового МГБ, обсяг валової продукції першої галузі, обсяг кінцевої продукції другої галузі, обсяги умовно чистої продукції галузей).

#### **Розв'язання**

1. Обчислимо обсяг валової продукції кожної галузі як суму матеріальних витрат галузей, які споживають її продукцію, і кінцевої продукції даної галузі

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i, i = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

Отже, обсяги валової продукції галузей:

$$X_1 = 40 + 50 + 110 = 200,$$

$$X_2 = 60 + 20 + 170 = 250.$$

2. Обчислимо коефіцієнти прямих матеріальних витрат за формулою

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, i, j = \overline{1, n}. \quad (2.6)$$

Отримаємо матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,08 \end{pmatrix}.$$

3. Складемо систему рівнянь (1.1). Підставивши дані прикладу, отримаємо систему відносно невідомих змінних  $X_1, Y_2$ :

$$X_1 = 0,2X_1 + 0,2 \cdot 300 + 120,$$

$$300 = 0,3X_1 + 0,08 \cdot 300 + Y_2.$$

Розв'язок системи рівнянь:

$$X_1 = 225, Y_2 = 208,5.$$

4. Знайдемо міжгалузеві потоки продукції планового МГБ за формулою  $x_{ij} = a_{ij}X_j, i, j = \overline{1, n}$ :

$$x_{11} = 0,2 \cdot 225 = 45; x_{12} = 0,2 \cdot 300 = 60;$$

$$x_{21} = 0,3 \cdot 225 = 67,5; x_{22} = 0,08 \cdot 300 = 24.$$

5. Обсяг умовно чистої продукції знайдемо як різницю між обсягом валової продукції та сумою елементів відповідного стовпця першого квадранта. Результати обчислень подамо у вигляді табл. 2.2:

Таблиця 2.2 – Результати обчислень

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		Кінцева продукція	Валова продукція
	1	2		
1	45	60	120	225
2	67,5	24	208,5	300
Умовно чиста продукція	112,5	216	328,5	
Валова продукція	225	300		

## 2.2. Модифікації основної схеми міжгалузевого балансу

**Приклад 2.3.** Скористаємось даними прикладу 2.1. Нехай додатково задані затрати живої праці (трудові ресурси) в розрізі трьох галузей:  $L_1 = 900$ ;  $L_2 = 750$ ;  $L_3 = 650$  в однакових одиницях вимірювання. Треба визначити коефіцієнти повної трудомісткості й скласти міжгалузевий баланс затрат праці.

### Розв'язання

1. Скориставшись формулою та розв'язком попереднього прикладу, знайдемо коефіцієнти прямої трудомісткості:

$$t_1 = \frac{900}{635,383} = 1,416; t_2 = \frac{750}{560,949} = 1,337; t_3 = \frac{650}{730,313} = 0,890.$$

2. Обчислимо коефіцієнти повної трудомісткості:

$$T = (1,416 \quad 1,337 \quad 0,890) \begin{pmatrix} 1,748 & 0,766 & 0,734 \\ 0,388 & 1,899 & 0,410 \\ 0,583 & 0,626 & 1,728 \end{pmatrix} = (3,513 \quad 4,180 \quad 3,123).$$

3. Перемноживши відповідно перший, другий і третій рядки першого та другого квадрантів міжгалузевого матеріального балансу, побудованого у прикладі 2.1, на відповідні коефіцієнти прямої трудомісткості, отримаємо схему міжгалузевого балансу праці в трудових вимірниках (табл. 2.3):

Таблиця 2.3 – Міжгалузевий баланс затрат праці

Галузі-виробники	Галузі-споживачі			Затрати праці на кінцеву продукцію	Затрати праці в галузях (трудові ресурси)
	1	2	3		
1	270	158,913	258,616	212,470	900
2	84,952	300	97,644	267,404	750
3	113,102	74,889	195	267,009	650

## Завдання 2

Для свого номеру варіанту вихідних даних (табл. 2.4) розрахувати планові обсяги валової продукції, міжгалузеве постачання, чисту продукцію галузей та показники повних витрат, скласти міжгалузевий баланс.

Таблиця 2.4 – Варіанти завдань

Виробляючі галузі	Споживаючі галузі				Продукція у сфері споживання $Y_i$
	Валова продукція $X_i$	Коефіцієнти прямих витрат $a_{ij}$			
		Промисловість	Сільське господарство	Інші галузі	
Промисловість	$X_1$	$0,30 \cdot k$	$0,25 \cdot k$	$0,20 \cdot k$	$56 \cdot k$
Сільське господарство	$X_2$	$0,15 \cdot k$	$0,12 \cdot k$	$0,03 \cdot k$	$20 \cdot k$
Інші галузі	$X_3$	$0,01 \cdot k$	$0,05 \cdot k$	$0,08 \cdot k$	$12 \cdot k$

### ТЕМА 3. АНАЛІЗ СТАТИКИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

#### 3.1. Способи дослідження функцій

##### *Приклад 3.1*

Розв'язати рівняння  $x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$ , тобто  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 11$ .

##### *Розв'язання*

Знайдемо похідну  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 3$ .

Обчислимо нулі похідної:  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 3 = 0$ ;  $D = 144 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ ;

$$x_1 = (12 - \sqrt{D}) / (2 \cdot 3) = 0,268;$$

$$x_2 = (12 + \sqrt{D}) / (2 \cdot 3) = 3,732.$$

Оскільки  $f'(-\infty) > 0$ , то  $f'(x) > 0$  при  $x \in (-\infty, x_1)$ ,  $f'(x) < 0$  при  $x \in (x_1, x_2)$  й  $f'(x) > 0$  при  $x \in (x_2, +\infty)$ . Крім того,  $f(-\infty) = -\infty < 0$ ,  $f(+\infty) = +\infty > 0$ . Отже, на інтервалі  $(-\infty, x_1)$  зростає від  $-\infty$  до  $f(x_1) = 3x_1^2 - 12x_1 + 3 = 11,39$ ; на інтервалі  $[x_1, x_2]$  убуває до  $f(x_2) = 3x_2^2 - 12x_2 + 3 = -9,39$  і на інтервалі  $[x_2, +\infty)$  зростає до  $+\infty$ , тобто рівняння має три корені.

Знайдемо інтервали ізоляції для кожного з коренів.

Розглянемо для першого кореня відрізок  $[-2, -1]$ :

$f(-2) = -27 < 0$ ,  $f(-1) = 1 > 0$ ,  $f'(x) > 0$  при  $x \in [-2, -1]$ , тобто цей відрізок є інтервалом ізоляції кореня.

Розглянемо для другого кореня відрізок  $[1, 3]$ :

$f(1) = 9 > 0$ ,  $f(3) = -7 < 0$ ,  $f'(x) < 0$  при  $x \in [1, 3]$ , тобто цей відрізок є інтервалом ізоляції кореня.

Розглянемо для третього кореня відрізок  $[4, 5]$ :

$f(4) = -9 < 0$ ,  $f(5) = 1 > 0$ ,  $f'(x) > 0$  при  $x \in [4, 5]$ , тобто цей відрізок є інтервалом ізоляції кореня.

### Табличний спосіб

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	-79	-27	1	11	9	1	-7	-9	1	29	81

### Графічний спосіб

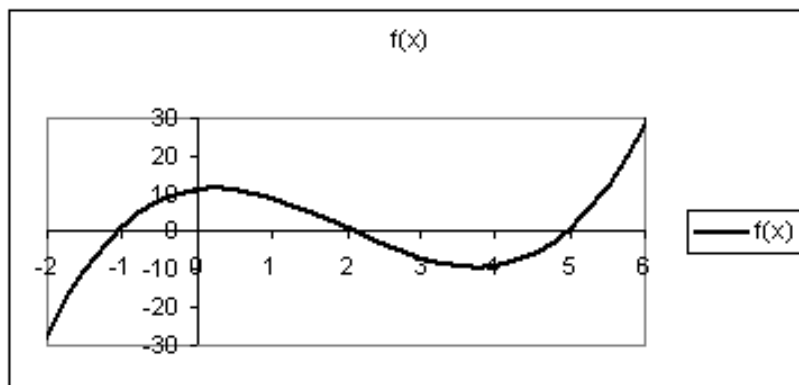


Рисунок 3.1

## 3.2. Наближені ітераційні методи

### Метод поділу відрізка навпіл (дихотомії)

**Приклад 3.2.** Знайти перший корінь рівняння  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$ , що лежить на інтервалі  $[-2, -1]$  з точністю  $\varepsilon = 0,05$ .

**Розв'язання.** Обчислення оформляються у вигляді табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Обчислення по методу поділу відрізка навпіл (дихотомія)

$k$	$a$	$b$	$c$	$f(a)$	$f(c)$	$ b - a $
0	-2	-1	-1,5	-27	-10,375	1
1	-1,5	-1	-1,25	-10,375	-4,07813	0,5
2	-1,25	-1	-1,125	-4,07813	-1,39258	0,25
3	-1,125	-1	-1,0625	-1,39258	-0,1604	0,125
4	-1,0625	-1	-1,03125	-0,1604	0,42868	0,0625
5	-1,0625	-1,03125	-1,04688	-0,1604	0,136372	0,03125
6	...	...	...	...	...	...
7	...	...	...	...	...	...
8	...	...	...	...	...	...
9	...	...	...	...	...	...
10	-1,05469	-1,05371	-1,0542	-0,01146	-0,00218	0,000977

У табл. 3.1  $a_0, b_0$  – це початкові границі інтервалу ізоляції кореня;  $c_i = (a_i + b_i)/2, i = 0, 1, 2, \dots$ ;

$$a_i = \begin{cases} c_{i-1}, & \text{якщо } f(a_{i-1})f(c_{i-1}) > 0; \\ a_{i-1}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$b_i = \begin{cases} b_{i-1}, & \text{якщо } f(a_{i-1})f(c_{i-1}) < 0; \\ c_{i-1}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases} \quad (3.2)$$

У результаті розрахунку наближене значення першого кореня:

$x = -1,047$  при точності  $\varepsilon = 0,05$  і  $x = -1,0542$  при точності  $\varepsilon = 0,001$ .

### Метод простої ітерації

**Приклад 3.3.** Знайти другий корінь нашого вихідного рівняння  $x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$ , що лежить на інтервалі  $[1, 3]$  з точністю  $\varepsilon = 0,001$ .

**Розв'язання.** Спочатку знайдемо функцію  $\varphi(x) = x - cf(x)$ . У нашому випадку  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$ .

Для знаходження  $c$  необхідно знайти максимальне та мінімальне значення  $f'(x)$  на відрізку  $[1, 3]$ . Для цього необхідно знайти значення  $f'(x)$  на кінцях інтервалу й у точках, де  $f''(x) = 0$ , тобто в точках екстремуму, якщо такі точки для розглянутого інтервалу існують. І вибрати серед цих значень  $f'(x)$  максимальне та мінімальне значення.

$f'(1) = 3x^2 - 12x + 3 = -6, f'(3) = -6, f''(x) = 6x - 12 = 0$  при  $x = 2 \quad x \in [1, 3],$   
 $f'(2) = -8.$

Отже,  $M = \max(-6, -6, -8) = -6, m = \min(-6, -6, -8) = -8, c = 2/(M + m) = 2/(-14) = -1/7.$

Таким чином,  $\varphi(x) = x + \frac{1}{7}f(x) = x + \frac{1}{7}(x^3 - 6x^2 + 3x + 11).$

Обчислення оформимо у вигляді табл. 3.2:

Таблиця 3.2 – Обчислення за методом простої ітерації

$k$	$x$	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_k) $
0	2	–	1
1	2,142857	0,142857	0,282799
2	2,102457	0,0404	0,07896
3	2,113737	0,01128	0,022164
4	2,110571	0,003166	0,006213
5	2,111459	0,000888	0,001742
6	2,11121	0,000249	0,000489

Тут  $x_0 = (1 + 3)/2 = 2$ ,

$$x_1 = x_0 + \frac{1}{7}(x_0^3 - 6x_0^2 + 3x_0 + 11), \quad x_2 = x_1 + \frac{1}{7}(x_1^3 - 6x_1^2 + 3x_1 + 11) \text{ і т.д.}$$

### Метод Ньютона (метод дотичних)

**Приклад 3.4.** Знайти третій корінь методом Ньютона нашого вихідного рівняння  $x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$ , що лежить на інтервалі  $[4, 5]$  з точністю  $\varepsilon = 0,001$ .

**Розв’язання.** Спочатку переконаємося, що  $f'(x)$  не змінює знака на цьому відрізку.

$f'(x) = 6x - 12$ .  $f'(x) > 0$  при  $x > 2$ , тобто  $f'(x) > 0$  на інтервалі  $[4, 5]$ . Оскільки  $f(5) = 1 > 0$ , то  $x_0 = 5$ .

Обчислення оформимо у вигляді табл. 3.3:

Таблиця 3.3 – Обчислення за методом Ньютона (метод дотичних)

$k$	$x_k$	$ x_{k+1} - x_k $	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	5	–	1	18
1	4,944444	0,055556	0,027606	17,00926
2	4,942821	0,001623	$2,33 \cdot 10^{-5}$	16,98059
3	4,94282	$1,37 \cdot 10^{-6}$	$1,66 \cdot 10^{-11}$	16,98057

$$\text{Тут } f(x_k) = x_k^3 - 6x_k^2 + 3x_k + 11, \quad f'(x_k) = 3x_k^2 - 12x_k + 3, \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

У якості кореня можна взяти значення  $x = 4,943$ . Із табл. 3.3 видно, що процес зійшовся вже на другій ітерації.

Для порівняння знайдемо перший корінь нашого рівняння  $x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$  на відрізку  $[-2, -1]$  методом Ньютона:

Оскільки  $f'(x) = 6x - 12$ , то  $f'(x) < 0$  на інтервалі  $[-2, -1]$ , а оскільки  $f(-2) = -27 > 0$ , то  $x_0 = -2$ .

Таблиця 3.4 – Обчислення першого кореня

$k$	$x_k$	$ x_{k+1} - x_k $	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	-2	-	-27	39
1	-1,30769	0,692308	-5,41966	23,82249
2	-1,08019	0,227502	-0,50182	19,46272
3	-1,05441	0,025783	-0,00613	18,9882
4	-1,05408	0,000323	$-9,5 \cdot 10^{-7}$	18,98229
5	-1,05408	$5,02 \cdot 10^{-8}$	$-2,3 \cdot 10^{-14}$	18,98229

Нагадаємо, що методом дихотомії ми досягли даної точності 0,001 на 10-ій ітерації.

Обчислимо другий корінь нашого рівняння на відрізку  $[1, 3]$ . Помітимо, що  $f'(x) = 6x - 12$  змінює знак на відрізку при  $x = 2$ . Зменшимо інтервал ізоляції так, щоб  $f'(x)$  не міняла знака. Розглянемо інтервал  $[2,1; 3]$ :  $f'(2,1) = 6 \cdot 2,1 - 12 = 0,6 > 0$  і  $f(2,1) = 0,101 > 0$ . Отже,  $x_0 = 2,1$ .

Таблиця 3.5 – Обчислення другого кореня

$k$	$x_k$	$ x_{k+1} - x_k $	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	2,1	-	0,101	-8,97
1	2,11126	0,01126	$3,95 \cdot 10^{-5}$	-8,96286
2	2,111264	$4,4 \cdot 10^{-6}$	$6,47 \cdot 10^{-12}$	-8,96286

Якщо порівнювати з методом простої ітерації, то значення цього кореня ми одержали за дві ітерації замість шести.

Ці приклади показують, що метод Ньютона є таким, що більш швидко збігається. Але для його використання необхідно приймати початкове наближення досить близьким до кореня.

### Метод хорд

**Приклад 3.5.** Знайти перший і третій корінь рівняння  $x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$  методом хорд.

**Розв'язання.** Для першого кореня  $a = -2$ ,  $b = -1$ .

$f''(-2)f(-2) = (-24)(-27) > 0$ , тоді розрахунок ведеться за першими формулами:  $x_0 = b$  й  $x_{k+1} = a - \frac{f(a)(x_k - a)}{f(x_k) - f(a)}$ .

Таблиця 3.6 – Обчислення першого кореня

$k$	$x_k$	$ x_{k+1} - x_k $	$f(x_k)$
0	-1		1
1	-1,03571	0,035714	0,345618
2	-1,0479	0,012187	0,117007
3	-1,05201	0,004108	0,039334
4	-1,05339	0,001379	0,013192
5	-1,05385	0,000462	0,004421

Для останнього кореня:  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $f''(4)f(4) = 12(-9) < 0$ , тоді розрахунок ведеться за іншими формулами:  $x_0 = a$  й  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(b - x_k)}{f(b) - f(x_k)}$ .

Таблиця 3.7 – Обчислення останнього кореня

$k$	$x_k$	$ x_{k+1} - x_k $	$f(x_k)$
0	4		-9
1	4,9	0,9	-0,711
2	4,941555	0,041555	-0,02147
3	4,942783	0,001229	-0,00062
4	4,942819	$3,57 \cdot 10^{-5}$	$-1,8 \cdot 10^{-5}$

### 3.3. Розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь з використанням *Microsoft Excel*

**Приклад 3.6.** Знайти корінь нелінійного алгебраїчного рівняння  $2\ln x = 10$ .

#### Етапи виконання роботи

1. Спочатку розв'яжемо рівняння *графічно*. Відомо, що графічним розв'язком рівняння  $f(x) = 0$  є точка перетину графіка функції  $f(x)$  з віссю абсцис, тобто таке значення  $x$ , при якому функція звертається в *нуль*.

Проведемо табулювання функції на інтервалі від 100 до 200 з кроком 2. Результати обчислень наведені на рис. 3.2, де в комірці **В3** була введена формула:  $=2*\ln(A3)-10$ . На графіку видно, що функція один раз перетинає вісь  $Ox$ , тобто графічний розв'язок поставленої задачі знайдено. Інакше кажучи, була проведена локалізація кореня, тобто визначений інтервал, на якому знаходиться розв'язок даної функції: [148; 150].

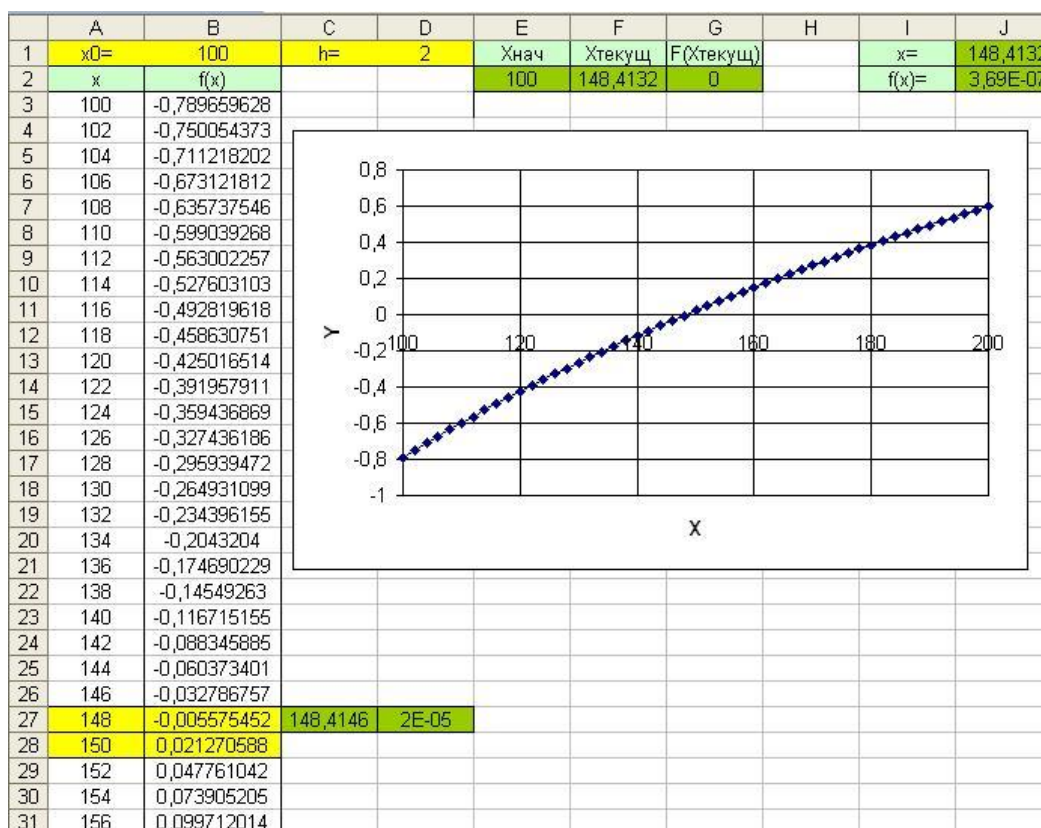


Рисунок 3.2

2. Знайдемо розв'язок трьома способами.

2.1. Метод дотичних із використанням циклічних посилань

Знайдемо корінь нелінійного рівняння **в табличному процесорі Excel методом дотичних з використанням циклічних посилань**. Для знаходження кореня використовуватимемо формулу:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Для включення **режиму циклічних обчислень в Excel 2003** в меню **Сервіс/Параметри/вкладка Обчислення** слід поставити прапорець **Ітерації** і прапорець вибору виду ведення обчислень: **автоматично**. У **MS Excel 2010** слід зайти в меню **Файл/Параметри/Формули** і поставити прапорець в полі **“Включити ітеративні обчислення”** (рис. 3.3).

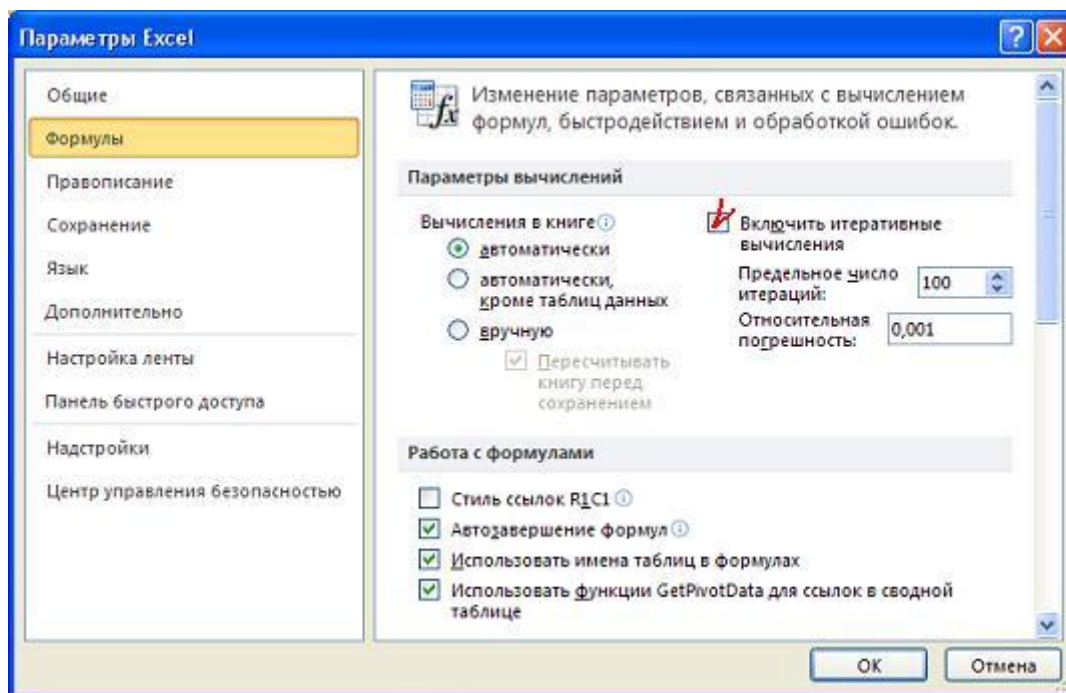


Рисунок 3.3

Знайдемо похідну функції  $f(x) = 2 \ln x - 10$ .  $f'(x) = 2/x$ . У комірку E2 введемо початкове значення  $X_{нач} = 100$ , в комірку F2 введемо формулу розрахунку поточного значення  $x$ :  $= \text{ЕСЛИ}(F2=0;E2;F2-(2*\text{LN}(F2)-10)/(2/F2))$ . У комірку G2 введемо формулу для контролю значення  $f(x)$ :  $=$

$2 * \ln(F2) - 10$ . Отримаємо корінь рівняння в комірці F2  $x = 148,4132$  (рис. 3.4).

E	F	G
Xнач	Xтекущ	F(Xтекущ)
100	148,4132	-2,9E-12

Рисунок 3.4

## 2.2. Підбір параметра

Знайдемо корінь рівняння методом послідовних наближень за допомогою команди **Сервіс** → **Підбір параметра**. Відносна похибка обчислень і граничне число ітерацій (наприклад, 0,00001 і 1000) задаються на вкладці **Сервіс** → **Параметри**. У MS Excel 2010 слід зайти в меню **Дані** → **Робота з даними** → **Аналіз «що якби»** → **Підбір параметра**.

Після введення початкових наближень і значень функції можна звернутися до пункту меню **Сервіс** → **Підбір параметра** і заповнити діалогове вікно таким чином (рис. 3.5).

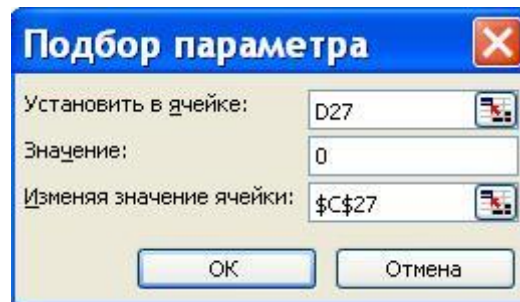


Рисунок 3.5

У полі **Установити у ячейці** дається посилання на комірку, в якій введена формула, що обчислює значення лівої частини рівняння (рівняння має бути записане так, щоб його права частина не містила змінну). У полі **Значення** вводимо праву частину рівняння, а в полі **Змінюючи значення ячейки** дається посилання на комірку, відведена під змінну. Відмітимо, що вводити посилання на комірки в поля діалогового вікна **Підбір параметра** зручніше не з клавіатури, а клацанням на відповідній комірці.

Після натиснення кнопки **ОК** з'явиться діалогове вікно **Результат підбора параметра** (рис. 3.6) з повідомленням про успішне завершення пошуку рішення, наближене значення кореня буде поміщено в комірку D27.



Рисунок 3.6

### 2.3. Пошук рішення

Після відкриття діалогу **Пошук рішення** (рис. 3.7) необхідно виконати наступні дії:

1. У полі **Установити цільову ячейку** вводимо адресу комірки, що містить формулу для обчислення значень функції, яка оптимізується: цільова комірка – це J2, а формула в ній має вигляд:  $= 2*\ln(J1)-10$ .

2. Встановлюємо перемикач в положення **Значення** і вводимо значення 0.

3. У полі **Змінюючи ячейки** вводимо адреси змінних комірок, тобто аргументів цільової функції (J1).

4. Для запуску процесу пошуку рішення натискаємо кнопку **Виконати**.

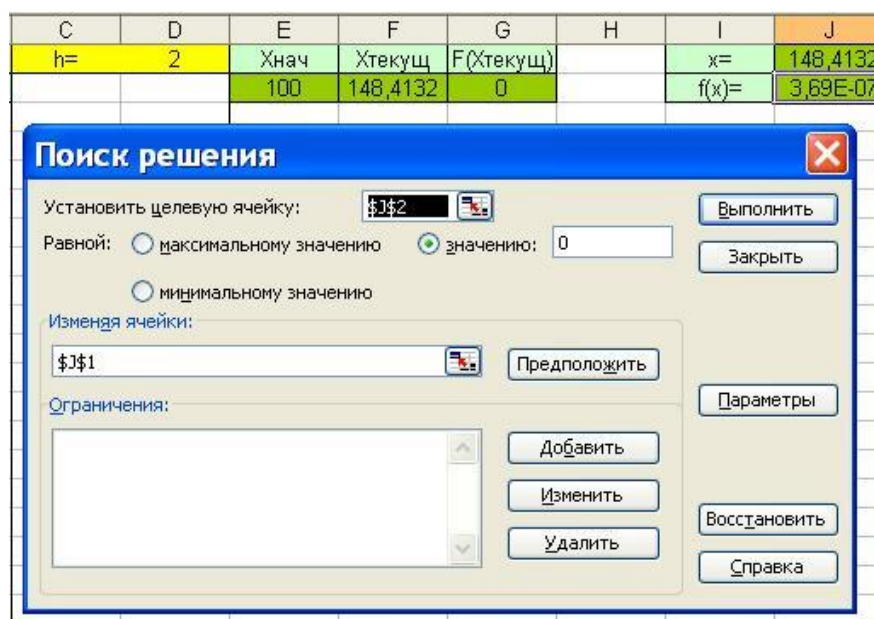


Рисунок 3.7

Результат пошуку рішення буде виведений в комірку **J2** (рис. 3.2).  
Отже, розв'язок рівняння за трьома способами дорівнює  $x = 148,4$ .

### Завдання 3.1

1. Для свого варіанту вихідних даних (табл. 3.8) побудувати графіки рівнянь.
2. Уточнити дійсні корні нелінійного алгебраїчного рівняння із заданою точністю  $\varepsilon = 10^{-3}$  за допомогою методів: дихотомії; простої ітерації; Ньютона; хорд.
3. Результати розрахунків порівняти між собою.

Таблиця 3.8 – Варіанти завдань

Варіант	Рівняння	$a$	$b$
1	$\operatorname{tg} x = 1/x$	0	$\pi/2$
2	$\ln x = 1/x$	1	2
3	$e^{-x^2} = x$	0	1
4	$2 + \ln x = 1/x$	0	1
5	$x + x^3 + 1 = 0$	1	2
6	$2x + x^5 - 1 = 0$	0	1
7	$1 - x^2 - x^{1,5} = 0$	0	1
8	$\sin x = x/3$	$\pi/2$	$\pi$
9	$\lg x = 10^{-x}$	0	10
10	$\cos x = 1/x$	0	$\pi/2$

### Завдання 3.2

1. За даними завдання 3.1 побудувати графіки рівнянь, використовуючи *Microsoft Excel*.
2. Знайти корінь нелінійного алгебраїчного рівняння  $f_1(x) = f_2(x)$  на заданому відрізку  $[a; b]$  із застосуванням трьох способів:
  - ✓ метода дотичних з використанням циклічних посилань;
  - ✓ за допомогою засобу Підбір параметра;
  - ✓ використовуючи можливості Пошуку рішення.
3. Результати розрахунків порівняти між собою.

**ТЕМА 4. АНАЛІЗ ДИНАМІКИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ.  
 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ  
 ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО  
 ПОРЯДКУ**

На основі розглянутого вище матеріалу пропонуються практичні завдання.

**Приклад 4.1.** Розв'язати задачу Коші:

$$\frac{dy}{dx} = 2(x^2 + y), y(0) = 1 \text{ на } [0, 1] \quad h = 0,1.$$

Розглянути три методи: явний метод Ейлера, модифікований метод Ейлера, метод Рунге – Кутта.

**Розв'язання.** Точний розв'язок визначається за формулою:

$$y(x) = 1,5e^{2x} - x^2 - x - 0,5. \quad (4.1)$$

Розрахункові формули для даного приклада мають вигляд:

а) явний метод Ейлера

$$y_0 = 1, y_{i+1} = y_i + 2h(x_i^2 + y_i), x_i = ih, i = 0, \dots, 10; \quad (4.2)$$

б) модифікований метод Ейлера

$$y_0 = 1, \quad (4.3)$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + 2h(x_i^2 + y_i), \quad (4.4)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [2(x_i^2 + y_i) + 2(x_{i+1}^2 + \tilde{y}_{i+1})], x_i = ih, i = 0, \dots, 10; \quad (4.5)$$

в) метод Рунге – Кутта

$$y_0 = 1, \quad k_1 = 2(x_i^2 + y_i), \quad k_2 = 2[(x_i + h/2)^2 + y_i + hk_1/2], \quad (4.6)$$

$$k_3 = 2[(x_i + h/2)^2 + y_i + hk_2/2], \quad k_4 = 2[(x_i + h)^2 + y_i + hk_2], \quad (4.7)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), x_i = ih, i = 0, \dots, 10. \quad (4.8)$$

Результати розрахунків за трьома методами наведено в табл. 4.1, в якій позначено:  $y_1$  – результати методу Ейлера,  $y_2$  – модифікованого методу Ейлера,  $y_3$  – методу Рунге – Кутта.

З табл. 4.1 видно, що самим точним є метод Рунге – Кутта.

Таблиця 4.1 – Результати розрахунків за трьома методами

$x$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	точний розв'язок
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	1,2000	1,2210	1,2221	1,2221
0,2	1,4420	1,4923	1,4977	1,4977
0,3	1,7384	1,8284	1,8432	1,8432
0,4	2,1041	2,2466	2,2783	2,2783
0,5	2,5569	2,7680	2,8274	2,8274
0,6	3,1183	3,4176	3,5201	3,5202
0,7	3,8139	4,2257	4,3927	4,3928
0,8	4,6747	5,2288	5,4894	5,4895
0,9	5,7377	6,4704	6,8643	6,8645
1	7,0472	8,0032	8,5834	8,5836

#### Завдання 4

Розв'язати задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на відрізку  $[a, b]$  при заданих початкових умовах із зазначеним кроком  $h$  із використанням методу Ейлера, модифікованого методу Ейлера та методу Рунге – Кутта:

Таблиця 4.2 – Варіанти для розв'язання задачі Коші

Варіант	Рівняння
1	$y' = -xy/(1 + x^2), y(0) = 2, h = 0,05, a = 0, b = 0,3$
2	$y' = y + (1 + x)y^2, y(0) = 1, h = 0,1, a = 0, b = 0,5$
3	$y' = 2y/x + x, y(1) = 0, h = 0,1, a = 1, b = 1,5$
4	$y' = 1/(1 + x^2 + y^2), y(0) = 0, h = 0,1, a = 0, b = 0,3$
5	$y' = -y \cos x + \cos x \sin x, y(0) = -1, h = 0,1, a = 0, b = 0,5$
6	$y' = -y/x + \ln x y^2, y(1) = -2, h = 0,1, a = 1, b = 1,5$
7	$y' = y^2 + y/x + 1/x^2, y(1) = 0, h = 0,1, a = 1, b = 1,5$
8	$y' = (6 - x^2 y^2)/(-x^2), y(1) = 2, h = 0,05, a = 1, b = 1,5$
9	$y' = 1/\cos x - y \sin x/\cos x, y(0) = 0, h = 0,1, a = 0, b = 1$
10	$y' = 3y/2x + 3xy^{1/3}/2, y(1) = 0, h = 0,1, a = 1, b = 2$

## ТЕМА 5. ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

За даним вище визначенням імітація – це комп’ютерний експеримент. Єдина відмінність подібного експерименту від реального полягає в тому, що він проводиться з моделлю системи, а не з самою системою. Проте проведення реальних експериментів з економічними системами, безсумнівно, вимагає значних витрат і навряд чи буде здійснено на практиці. Таким чином, імітація є єдиним способом дослідження систем без здійснення реальних експериментів.

У подібних випадках відсутні фактичні дані замінюються величинами, що отримані в процесі імітаційного експерименту (тобто що генеруються комп’ютером), це продемонструється прикладами нижче.

### 5.1. Економічне формулювання задачі

Фірма розглядає інвестиційний проект з виробництва нового продукту. В процесі попереднього аналізу експертами були виявлені три ключові параметри проекту і визначені можливі межі їх змін (табл. 5.1). Інші параметри проекту вважаються за постійні величини (табл. 5.2).

Таблиця 5.1 – Змінні параметри проекту за інвестиційним проектом

Сценарій	Найгірший	Найкращий
Обсяг випуску – $Q$	150	300
Ціна за штуку – $P$	40	55
Змінні витрати – $V$	35	25

Таблиця 5.2 – Незмінні параметри проекту за інвестиційним проектом

Показники	Найбільш імовірне значення
Постійні витрати – $F$ , тис. грн.	500
Амортизація – $A$ , тис. грн.	100
Норма податку на прибуток – $T$ , %	24
Норма дисконту – $r$ , %	13
Термін проекту – $n$ , років	5
Початкові інвестиції – $I_0$ , тис. грн.	2000

Першим етапом аналізу згідно сформульованому вище алгоритму є визначення залежності результуючого показника від початкових параметрів. При цьому як результуючий показник зазвичай виступає один з критеріїв ефективності:  $NPV$ ,  $IPR$ ,  $PI$ .

## 5.2. Математична формалізація задачі

Припустимо, що критерієм, який використовується, є чиста дисконтована вартість проекту  $NPV$ :

$$NPV = \sum_{t=1}^n \frac{NCF_t}{(1+r)^t} - I_0, \quad (5.1)$$

де  $NCF_t$  – величина чистого потоку платежів у періоді  $t$ ,

$$NCF_t = ((P - V) \cdot Q - A - F) \cdot (1 - T) + A. \quad (5.2)$$

За умовами прикладу значення норми дисконту  $r$  і первинного об'єму інвестицій  $I_0$  відомі і вважаються за постійними протягом терміну реалізації проекту (див. табл. 5.2).

За умовами прикладу ключовими варійованими параметрами є: змінні витрати  $V$ , обсяг випуску  $Q$  і ціна  $P$ . Діапазони можливих змін варійованих показників наведені в табл. 5.1. При цьому виходитимемо з припущення, що всі ключові змінні мають рівномірний розподіл імовірності.

Реалізація третього етапу може бути здійснена тільки із застосуванням ЕОМ, оснащеної спеціальними програмними засобами. Тому, перш ніж приступити до третього етапу – імітаційного експерименту, познайомимось з відповідними засобами *Microsoft Excel*, що автоматизують його проведення.

## 5.3. Комп'ютерне моделювання об'єкта дослідження

Для реалізації комп'ютерної моделі описаної задачі потрібно створити шаблон у книзі *Excel*. Формули для заповнення листа наведені в табл. 5.3.

Таблиця 5.3 – Формули листа шаблону імітаційної моделі

Комірка	Формула
B14	=СРЗНАЧ(B24:B1023)
B15	=СТАНДОТКЛОНП(B24:B1023)
B16	=B15/B14
B17	=МИН(B24:B1023)
B18	=МАКС(B24:B1023)
B21	=СУММЕСЛИ(F24:F1023 ; "<0")
B24:B1023	=СЛУЧМЕЖДУ(\$B\$7;\$C\$7)
C14	=СРЗНАЧ(C24:C1023)
C15	=СТАНДОТКЛОНП(C24:C1023)
C16	=C15/C14
C17	=МИН(C24:C1023)
C18	=МАКС(C24:C1023)
C24:C1023	=СЛУЧМЕЖДУ(\$B\$8;\$C\$8)
D14	=СРЗНАЧ(D24:D1023)
D15	=СТАНДОТКЛОНП(D24:D1023)
D16	=D15/D14
D17	=МИН(D24:D1023)
D18	=МАКС(D24:D1023)
D24:D1023	=СЛУЧМЕЖДУ(\$B\$9;\$C\$9)
E14	=СРЗНАЧ(E24:E1023)
E15	=СТАНДОТКЛОНП(E24:E1023)
E16	=E15/E14
E17	=МИН(E24:E1023)
E18	=МАКС(E24:E1023)
E24:E1023	=(C24*(D24-B24)-\$B\$4-\$B\$5)*(1-\$D\$4)+\$B\$5
F14	=СРЗНАЧ(F24:F1023)
F15	=СТАНДОТКЛОНП(F24:F1023)
F16	=F15/F14
F17	=МИН(F24:F1023)
F18	=МАКС(F24:F1023)
F19	=СЧЕТЕСЛИ(F24:F1023 ; ">0")
F20	=НОРМРАСП(НОРМАЛИЗАЦИЯ(E20;\$F\$14;\$F\$15);0;1;1)
F21	=СУММЕСЛИ(F24:F1023;»>0»)»
F24:F1023	=ПС(\$D\$3;\$D\$5;-E24;;0)-\$B\$3

Нижче подано приклад заповнення шаблону імітаційної моделі (рис. 5.1).

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Имитационный анализ инвестиционного проекта</b>					
2	Данные для анализа					
3	Начальные инвест. (I)	2000	Норма дисконта (r)	0.13		
4	Пост. Расходы (F)	500	Налог (T)	0.24		
5	Амортизация (A)	100	Срок (n)	5		
6		минимум	максимум			
7	Перем. Расходы (V)	25	35			
8	Количество (Q)	150	300			
9	Цена (P)	40	55			
10	Количество испытаний =		1000			
11						
12	Результаты анализа					
13	Показатели	Переменные расходы (V)	Количество (Q)	Цена (P)	Поступления (NCFt)	NPV
14	Среднее значение	30.204	224.7	47.326	2579.53496	7072.821002
15	Стандарт. Отклонение	3.14521605	45.30452516	4.575120108	1157.432891	4070.959147
16	Коеф. вариации	0.104132434	0.201622275	0.096672444	0.448698277	0.575577856
17	Минимум	25	150	40	221.6	-1220.581552
18	максимум	35	300	55	6096.4	19442.44866
19	Число случаев NPV<0					18
20	Вероятность p(NPV<0)					0.041159629
21	Сумма убытков =	-8292.23695		Сумма доходов =		3504378.001
22						
23		Переменные расходы (V)	Количество (Q)	Цена (P)	Поступления (NCFt)	ЧСС (NPVt)
24		30	252	44	2325.28	6 178.55р.
25		28	235	40	1787.2	4 286 00р.

Рисунок 5.1

Неважно помітити, що за наслідками імітаційного аналізу величина очікуваної  $NPV = 7072,81$ , а величина стандартного відхилення дорівнює  $4070,95$  і не перевищує значення  $NPV$ . Коефіцієнт варіації ( $0,58$ ) менше 1, таким чином, ризик даного проекту в цілому нижче середнього ризику інвестиційного портфеля фірми. Результати імовірнісного аналізу показують, що шанс отримати негативну величину  $NPV$  не перевищує 5%. Ще більший оптимізм вселяють результати аналізу розподілу чистих надходжень від проекту  $NCF$ . Величина стандартного відхилення тут складає всього 45% від середнього значення. Таким чином, з імовірністю більше 90% можна стверджувати, що надходження від проекту будуть невід'ємними величинами.

Сума всіх від'ємних значень  $NPV$  в отриманій генеральній сукупності (комірка B21) може бути інтерпретована як чиста вартість невизначеності для інвестора у разі ухвалення проекту. Аналогічно сума всіх невід'ємних значень  $NPV$  (комірка F21) може трактуватися як чиста вартість невизначене-

ності для інвестора у разі відхилення проекту. Незважаючи на всю умовність цих показників, у цілому вони є індикаторами доцільності проведення подальшого аналізу.

В даному випадку вони наочно демонструють несумісність суми можливих збитків відносно до загальної суми доходів (–8292,24 і 3504378,00 відповідно).

### Завдання 5

Взявши у якості прикладу описану вище задачу, розв'язати подібну. Для зміни чисельних значень початкових даних в різних варіантах задач введені параметри  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Значення параметрів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  для різних варіантів взяти з табл. 5.4. Інтерпретувати підсумкові дані, отримані в результаті розрахунків.

Таблиця 5.4 – Незмінні параметри проекту за інвестиційним проектом (з параметрами для варіантів розрахунків)

Показники	Найбільш імовірне значення
Постійні витрати – $F$ , тис. грн.	$500 + 50\alpha$
Амортизація – $A$ , тис. грн.	$100 + 50\beta$
Норма податку на прибуток – $T$ , %	$24 + \gamma$ %
Норма дисконту – $r$ , %	13%
Термін проекту – $n$ , років	5
Початкові інвестиції – $I_0$ , тис. грн.	2000

Таблиця 5.5 – Варіанти задач до завдання 5

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha$	1	0	–1	1	0	–1	1	0	–1	1
$\beta$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	–1
$\gamma$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	1

## ТЕМА 6. ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА

**Приклад 6.1.** Комівояжер повинен об'їхати найкоротшим шляхом  $N$  міст. Дані для розрахунку наведено в табл. 6.1.

Таблиця 6.1 – Дані для розрахунку задачі

$N$	1	2	3	4
1	–	35	18	11
2	20	–	27	4
3	3	8	–	60
4	50	10	12	–

**Розв'язання.** Задача комівояжера полягає в тому, щоб мінімізувати функцію мети

$$F = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N C_{ij} \rightarrow \min, \quad (6.1)$$

де  $C_{ij}$  – вартість проїзду між містами  $i$  та  $j$ ;  $i = \overline{1, N}$  – нумерація міст, з яких від'їжджають;  $j = \overline{1, N}$  – нумерація міст, куди в'їжджають. Усього комівояжер має обрати оптимальний варіант серед  $(N - 1)! = (4 - 1)! = 6$  маршрутів.

### 6.1. Метод редукції рядків і стовпців

Обираємо довільний маршрут комівояжера, наприклад  $(1,3) - (3,2) - (2,4) - (4,1)$  і отримуємо значення функції мети  $F_b = 18 + 8 + 4 + 50 = 80$ .

#### Етап 1

**Крок 1.1.** Виконуємо редукцію рядків

У кожному рядку  $i$  помічаємо найменше значення  $C_{ij}$  і віднімаємо його від елементів даного рядку, значення  $C_{ij}$  вказуємо у стовпці  $A_i$  (табл. 6.2)

Таблиця 6.2 – Редукція рядів

$N$ з/п	1	2	3	4	$A_i$
1	–	24	7	0	11
2	16	–	23	0	4
3	0	5	–	57	3
4	40	0	2	–	10

**Крок 1.2.** Виконуємо редукцію стовпців (табл. 6.3)

Таблиця 6.3 – Редукція стовпів

$N$	1	2	3	4	$A_i$
1	–	24	5	0	11
2	16	–	21	0	4
3	0	5	–	57	3
4	40	0	0	–	10
$B_j$	0	0	2	0	

$$F_{\min 1} = \sum_{i=1}^N A_i + \sum_{j=1}^N B_j = 11 + 4 + 3 + 10 + 0 + 0 + 2 + 0 = 30.$$

Очевидно, що оптимальне значення цільової функції має знаходитися в межах:  $F_{\min 1} \leq F_0 \leq F_b$  або  $30 \leq F_0 \leq 80$ .

**Крок 1.3.** Визначення одного з кроків оптимального шляху

Визначаємо штрафи  $a_i$ ,  $b_j$  (табл. 6.4):

Таблиця 6.4 – Визначення штрафів

$N$	1	2	3	4	$A_i$	$a_i = \min C_{ij}$
1	–	24	5	0	11	5
2	16	–	21	0	4	16
3	0	5	–	57	3	5
4	40	0	0	–	10	0
$B_j$	0	0	2	0		
$b_j$	16	5	5	0		

Розраховуємо для кожної нульової комірки функцію вторинного штрафу  $\Phi_{ij} = a_i + b_j$  і вводимо розраховані дані в табл. 6.5.

Таблиця 6.5 – Розраховані дані

Нульові комірки $(i, j)$	(1,4)	(2,4)	(3,1)	(4,2)	(4,3)
Вторинний штраф $\Phi_{ij}$	5	16	21*	5	5

Найбільше значення  $\Phi_{ij} = 21$  вказує, що у маршрут комівояжера потрібно внести комірку (3,1). Викреслимо рядок  $i = 3$  та стовпець  $j = 1$  у табл. 6.4. У результаті отримаємо табл. 6.6.

Таблиця 6.6 – Результати розрахунків

$N \text{ з/н}$	2	3	4
1	24	5	0
2	–	21	0
4	0	0	–

**Вимога:** у будь-якій таблиці комівояжера повинна існувати одна заборонена комірка. Забороняємо для використання у розрахунках комірку (1,3) і отримуємо табл. 6.7.

$N \text{ з/н}$	2	3	4
1	24	–	0
2	–	21	0
4	0	0	–

## Етап 2

**Кроки 2.1, 2.2.** Виконуємо редукцію рядків і стовпців (табл. 6.8).

Таблиця 6.8 – Редукція рядків і стовпців

$N \text{ з/н}$	2	3	4	$A'_i$	$a'_i = \min C_{ij}$
1	24	–	0	0	24
2	–	21	0	0	21
4	0	0	–	0	0
$B'_j$	0	0	0		
$b'_j$	24	21	0		

$$F_{\min 2} = F_{\min 1} + \sum_{i=1}^N A'_i + \sum_{j=1}^N B'_j = 30 + 0 + 0 = 30.$$

$$F_{\min 2} \leq F_0 \leq F_b \text{ або } 30 \leq F_0 \leq 80.$$

### Крок 2.3. Визначення ще одного з кроків оптимального шляху

За даними табл. 6.8 розраховуємо для кожної нульової комірки функцію вторинного штрафу  $\Phi'_{ij} = a'_i + b'_j$  і вводимо розрахункові дані в табл. 6.9.

Нульові комірки $(i, j)$	(1,4)	(2,4)	(4,2)	(4,3)
Вторинний штраф $\Phi'_{ij}$	24*	21	24*	21

Отримали два найбільших значення  $\Phi'_{ij} = 24$ . Обираємо довільно (1,4). Викреслимо рядок  $i = 1$  та стовпець  $j = 4$  у табл. 6.8. У результаті отримаємо табл. 6.10.

$N$ з/п	2	3
2	–	21
4	0	0

Забороняємо для використання комірку (4,3) і отримуємо табл. 6.11.

$N$	2	3
2	–	21
4	0	–

Далі розрахунки не виконуються, бо табл. 6.11 вказує маршрут завершення шляху комівояжера: (2,3) та (4,2). Таким чином дізнаємося маршрут комівояжера:  $(3,1) + (1,4) + (2,3) + (4,2) = (1,4) + (4,2) + (2,3) + (3,1)$ .

$F_0 = 3 + 11 + 27 + 10 = 51$ , При цьому виконується умова  $F_{\min 2} \leq F_0 \leq F_b$  або  $30 \leq 51 \leq 80$ .

**Зауваження:** якщо в розглянутій задачі комівояжера не дотримується умова  $F_{\min} \leq F_0 \leq F_b$ , то треба з самого початку зробити редукцію стовпців, а потім – редукцію рядків.

## 6.2. Метод усереднених коефіцієнтів

За даними попередньої задачі обчислимо середні тарифи рядків  $C_{pi}$  та стовпців  $C_{kj}$ , а також усереднені коефіцієнти  $K_{ij} = C_{ij} - (C_{pi} + C_{kj})$ . Результати наведемо в табл. 6.12.

Таблиця 6.12 – Результати розрахунків

$N з/n$	1	2	3	4	$C_{pi}$
1	–	35; 5,75	18; –12,25	11; –23,75	16
2	20; –10,75	–	27; 0	4; –27,5	12,75
3	<b>3; –33</b>	8; –23	–	60; 23,5	17,75
4	50; 13,75	10; –21,25	12; –20,25	–	18
$C_{kj}$	18,25	13,25	14,25	18,75	

За найменшим значенням усередненого коефіцієнта  $K_{ij}$  обираємо комірku оптимального шляху комівояжера і записуємо її дані в табл. 6.13.

Номер кроку	Комірка оптимального шляху $(i, j)$	$K_{ij}$	Початковий тариф $C_{ij}$	Заборонені рядок $i$ та стовпець $j$		Заборонена комірка $(i, j)$
				$i$	$j$	
1	(3,1)	–33	3	3	1	(1, 3)
2	(4,2)	–12,3	10	4	2	(2, 4)
3	(1,4)	–	11	–	–	–
4	(2,3)	–	27	–	–	–

**Крок 2.4** Умовно закреслюємо рядок  $i = 3$  та стовпець  $j = 1$  у табл. 6.13. У результаті отримуємо табл. 6.14.

$N з/n$	2	3	4	$C_{pi}$
1	35; 4,7	–	11; –9,3	15,3
2	–	27; 3,7	4; –11,3	10,3
4	<b>10; –12,3</b>	12; –8,3	–	7,3
$C_{kj}$	15	13	5	

$$F_{\min} = 3 + 10 + 11 + 27 = 51.$$

### Завдання 6

Розв'язати задачу комівояжера за методом редукції рядків і стовпців та за методом усереднених коефіцієнтів.

$N$ з/п	1	2	3	4	5
1	–	$N$	60	$20A$	$5A$
2	$2A$	–	$4A$	80	100
3	140	150	–	$2N$	70
4	$40A$	120	70	–	$N$
5	$3N$	$A + 6$	$4N$	90	–

Тут  $N$  – остання цифра номера прізвища студента у журналі групи:

$$A = \sqrt{N}.$$

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Розкрийте сутність поняття «моделювання».
2. Які є види моделювання?
3. У чому суть поняття «математична модель»? Охарактеризуйте основні принципи побудови математичних моделей.
4. Наведіть основні етапи побудови математичної моделі.
5. Класифікуйте математичні моделі за складністю об'єкта моделювання.
6. Класифікуйте математичні моделі залежно від оператора моделі.
7. Класифікуйте математичні моделі залежно від параметра моделі.
8. Класифікуйте математичні моделі залежно від цілей моделювання.
9. Класифікуйте математичні моделі залежно від методів реалізації.
10. Що називається потребою та попитом?
11. У чому суть функції та величини попиту? Сформулюйте закон попиту.
12. Що таке крива та ціна попиту? Сформулюйте закон поступового зниження попиту.
13. Розкрийте зміст поняття «еластичність» та наведіть її види.
14. Які існують види зв'язків між благами?
15. Що таке пропозиція та її величина?
16. У чому суть функції, кривої та ціни пропозиції?
17. Що називається еластичністю пропозиції за ціною?
18. Охарактеризуйте статичну та динамічну рівновагу ринку.
19. Розкрийте суть безперервної моделі рівноваги ринку.
20. Які галузі виробництва називаються чистими?
21. У чому полягає суть моделі Леонтьєва?
22. Охарактеризуйте модель міжгалузевої залежності цін.
23. Яка матриця називається продуктивною?
24. Поясніть суть розкладної матриці.
25. Сформулюйте теорему 1 (Фробеніуса – Перона). Що називається числом Фробеніуса?
26. Сформулюйте теореми 2, 3 (достатні ознаки продуктивності моделі «витрати-випуск»).

27. Сформулюйте теорему 4 (критерій продуктивності моделі «витрати – випуск»).
28. Сформулюйте теорему 5 (про спектр довільної невід’ємної матриці).
29. Сформулюйте теорему 6 (про оцінки для фробеніусового числа невід’ємної матриці).
30. Що таке корінь нелінійного алгебраїчного рівняння? Які існують методи розв’язання нелінійних алгебраїчних рівнянь?
31. Дайте визначення поняттям межі, ітерації, точності методу. Наведіть загальні етапи методів знаходження наближеного розв’язку.
32. У чому суть інтервалу ізоляції кореня? Які необхідні та достатні умови існування кореня, а також способи дослідження функцій?
33. Наведіть алгоритм методу дихотомії.
34. Наведіть алгоритм методу простої ітерації.
35. Наведіть алгоритм методу Ньютона.
36. Наведіть алгоритм методу хорд.
37. Що таке звичайні диференціальні рівняння, задача Коші та крайова задача?
38. Наведіть постановку задачі Коші 1-го порядку. У чому суть явного методу Ейлера? Чим він відрізняється від неявного методу Ейлера?
39. Які особливості має модифікований метод Ейлера для задачі Коші 1-го порядку?
40. Наведіть алгоритм методу Рунге – Кутта 4-го порядку точності для задачі Коші 1-го порядку.
41. У чому суть аналітичного та комп’ютерного моделювання?
42. Які є види комп’ютерного моделювання?
43. Наведіть основні етапи комп’ютерного моделювання та розкрийте його проблеми.
44. Як виникло імітаційне моделювання? Розкрийте сутність понять: «імітація» та «модель».
45. Які переваги та недоліки імітаційного моделювання?
46. Наведіть основні етапи імітаційного моделювання.
47. Сформулюйте задачу комівояжера та її математичну модель.
48. Які існують методи розв’язання задачі комівояжера?

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Тарасевич Ю. Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс : учеб. пособие / Ю. Ю. Тарасевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 152 с.
2. Самарский А. А. Математическое моделирование : Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.
3. Трусов П. В. Введение в математическое моделирование : учеб. пособие / П. В. Трусов. – М. : Логос, 2005. – 440 с.
4. Стариков А. В. Экономико-математическое и компьютерное моделирование : учеб. пособие / А. В. Стариков, И. С. Кушева. – Воронеж : ГОУ ВПО «ВГЛТА», 2008. – 132 с.
5. Лященко І. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів / І. М. Лященко, М. В. Коробова, А. М. Столяр. – К. : Богдан, 2006. – 304 с.
6. Вітлінський В. В. Моделювання економіки : навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. / В. В. Вітлінський, Г. І. Великоіваненко. – К. : КНЕУ, 2005. – 306 с.
7. Ромашова О. Ю. Методы оптимизации и расчеты на ЭВМ технико-экономических задач : учебное пособие / О. Ю. Ромашова. – Томск : ТПУ, 2009. – 210 с.
8. Давнис В. В. Лабораторный практикум по курсу “Элементы экономико-математического моделирования” для студентов 2-4 курсов дневного и вечернего отделений экономического факультета / В. В. Давнис, И. Н. Щепина, С. И. Мокшина, О. С. Воищева, С. С. Щекунских. – Воронеж, 2001. – 49 с.
9. Расторгуев Д. Н. Методические рекомендации к практическим занятиям по компьютерному моделированию социально-экономических процессов / Д. Н. Расторгуев. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 32 с.
10. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій : навч. посіб. / В. Я. Кутковецький. – К. : ВД «Професіонал», 2004. – 350 с.

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
Тема 1. Павутиноподібна модель.....	4
1.1. Механізм побудови павутиноподібної моделі.....	4
1.2. Побудова павутиноподібної моделі з використанням <i>Microsoft Excel</i> .....	5
Тема 2. Модель міжгалузевого балансу (МГБ).....	9
2.1. Методи розв'язання систем рівнянь МГБ.....	9
2.2. Модифікації основної схеми міжгалузевого балансу.....	14
Тема 3. Аналіз статички математичних моделей. Наближене розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь.....	16
3.1. Способи дослідження функцій.....	16
3.2. Наближені ітераційні методи.....	17
3.3. Розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь з використанням <i>Microsoft Excel</i> .....	22
Тема 4. Аналіз динаміки математичних моделей. Чисельні методи розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.....	27
Тема 5. Імітаційне моделювання.....	29
5.1. Економічне формулювання задачі.....	29
5.2. Математична формалізація задачі.....	30
5.3. Комп'ютерне моделювання об'єкта дослідження.....	30
Тема 6. Задача комівояжера.....	34
6.1. Метод редукції рядків і стовпців.....	34
6.2. Метод усереднених коефіцієнтів.....	38
Контрольні запитання.....	40
Список літератури.....	42

Навчальне видання

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до практичних занять з курсу  
«Сучасні проблеми і методи математичного  
і комп'ютерного моделювання в економіці та менеджменті»  
для студентів напряму підготовки  
8.030601 «Менеджмент»

Укладачі: **БЛОЦЕРКІВСЬКИЙ** Олександр Борисович  
**ДРУГОВА** Олена Сергіївна

Відповідальний за випуск В. А. Міщенко

Роботу до видання рекомендував О. О. Замула

Редактор О.І. Шпільова

План 2016 р., поз. 60

Підп. до друку 23.06.2016р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.

Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк.

Наклад 50 прим. Зам № \_\_\_\_\_. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХП».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.  
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

---

Друкарня НТУ «ХП».

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21