УДК 513.88

С. Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО, ст. преп., НТУ «ХПИ»

ПОЧТИ АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ КАК КОМПАКТНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НА ГРУППЕ

Показано, що по будь-якій майже автоморфній функції, визначеної на групі, можна ввести топологію і будь-яка компактна безперервна в цій топології функція є майже автоморфною; для абстрактних функцій справедлива теорема Віча – майже автоморфність всіх здвижок рівнозначна майже періодичності функції.

В работе показано, что по любой почти автоморфной функции, заданной на группе, можно ввести топологию и любая компактная непрерывная в этой топологии функция является почти автоморфной; для абстрактных функциях справедлива теорема Вича - почти автоморфность всех сдвижек равносильна почти периодичности функции.

In the paper is shown that for any almost automorphic function, defined on the group, the topology can be introduced, and any compact continuous function in this topology is almost automorphic function. Veech's theorem, stated that the almost automorphity of all translations is equivalent to almost periodicity of the function, is true for abstract functions as well.

Введение. Определения (по *Бохнеру* и по *Бору*) *числовых почти автоморфных функций* даны *В. Вичем* [5]. *А. Райх* [4] и *Б. Болес* [2] показали, что ограниченные числовые L – почти периодические функции совпадают с непрерывными почти автоморфными функциями. Б. Болес [2] перенес этот результат и на функции со значениями в банаховых пространствах. В. Вич[5] показал, что если числовая функция $f(x)$ почти автоморфна и любая полученная по ней предельная функция почти автоморфна, то она почти периодична. Цель настоящей работы показать, что результаты Вича, Райха и Болеса переносятся на абстрактные функции со значениями в *пространствах Фреше*. Особенно полезно показать, что почти автоморфные функции являются непрерывными функциями в специальной топологии. Это дает возможность использовать хорошо разработанный аппарат для непрерывных функций. С другой стороны можно исследовать единым образом почти периодические, L – почти периодические и почти автоморфные функции как компактные равномерно непрерывные, как неограниченные непрерывные и как компактные непрерывные функции на группе, соответственно.

Вспомогательные утверждения и определения. Работа является продолжением статьи [3] и в ней использованы основные обозначения и определения из [3]. G – это $\sigma-$компактная топологическая группа, Y – сепарабельное пространство Фреше, $f(t)$ – абстрактная функция, отображающая G в Y. Абстрактная функция $f_h(t)=f(th)$ – сдвижка, когда h – элемент группы, а когда h – последовательность элементов $h=\{h_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}\in G$, то $f_h(t)$ – поточечный предел (если он существует) последовательности $f_h(th_\alpha)$. С каждой функцией $f(x)$ связано множество

$$B_{N,f,\varepsilon}=\left\{\tau\in G:\ \sup_{a,b\in N}\rho\big[f(a\tau b);\ f(ab)\big]<\varepsilon\right\},$$

$\rho(.,.)$ – метрика в Y, N – компактное множество в G, $\varepsilon>0$.

Определение 1. *Непрерывная функция f называется почти автоморфной, если из любой последовательности $\{y_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}\in G$ можно извлечь подпоследовательность $\{x_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$ так, что* $\lim\limits_{\beta} f(x_\beta t)=g(t)$, $\lim\limits_{\beta} g(x_\beta^{-1}t)=f(t)$ *и* $\lim\limits_{\beta} f(tx_\beta)=g(t)$, $\lim\limits_{\beta} g(tx_\beta^{-1})=f(t)$, $\forall t\in G$.

Определение 2. *Согласно* [3] *непрерывная функция $f(x):\ G\to Y$ называется L – почти периодической, если для любого $\varepsilon>0$ и любого компакта $N\subset G$, существует относительно плотное множество $E\subset G$ такое, что $E^{-1}E\subset B_{N,f,\varepsilon}$, где* $B_{N,f,\varepsilon}=\left\{\tau\in G:\ \sup\limits_{a,b\in N}\rho\big[f(a\tau b);\ f(ab)\big]<\varepsilon\right\}$.

Определение 3. *Как и в* [3] *будем говорить, что непрерывная функция $f(x)$ обладает свойством (A), если: для каждого компактного множества $N\subset G$ и для каждой последовательности $\{x_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$ из существования предела $\lim\limits_{\beta'} f(sx_{\beta'}x_\beta^{-1}t)=g(sx_\beta^{-1}t)$, для любых $s,\ t\in G$, $\beta=1,2,3,\ldots$ следует существование подпоследовательности $\{y_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}\subset\{x_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$, для которой* $\lim\limits_{\beta} g(sy_\beta^{-1}t)=f(st)$, $\forall s,t\in G$.

Предложение 1. *Если для любого $\varepsilon>0$ и любого компакта $N\subset G$, существует относительно плотное множество $E\subset G$ такое что $E^{-1}E\subset B_{N,f,\varepsilon}$, то функция $f(x)$ обладает свойством (A)* [3].

Предложение 2. *Если функция $f(x)$ обладает свойством **(A)**, то для любого множества $B_{N,f,\varepsilon}$ существуют $\delta>0$ и компактное множество M такие, что $B^{-1}{}_{M,f,\delta}.B_{M,f,\delta}\subset B_{N,f,\varepsilon}$* [3].

Из результатов работы [3] вытекает, что *теоремы Б. Болеса* [2] и *А. Райха* [4] о совпадении L – почти периодических и почти автоморфных функций, верны и для пространств Фреше.

Следствие. *В пространствах Фреше класс компактных* L *– почти периодических функций совпадает с классом непрерывных почти автоморфных функций.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ компактна. Из произвольной последовательности $\{y_\beta\}_{\beta=1}^{\infty} \in G$ выбираем подпоследовательность $\{x_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$ так, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{\beta'} f\left(sx_\beta^{-1}x_{\beta'}t\right) = g\left(sx_\beta^{-1}t\right)$, $\lim\limits_{\beta} g\left(sx_\beta^{-1}t\right) =$ $= h(st)$.

Так как функция $f(x)$ L– почти периодична, то по предложению 1 следует, что функция обладает свойством (A), и тогда по определению 3 $h(x) = f(x)$. Следовательно, функция $f(x)$ почти автоморфна.

Обратно, если функция $f(x)$ почти автоморфна, то она обладает свойством (A) и для нее справедливо предложение 2, то есть для любого множества $B_{N,f,\varepsilon}$ существует $\delta > 0$ и компактное множество M, такие, что $B^{-1}{}_{M,f,\delta}.B_{M,f,\delta} \subset B_{N,f,\varepsilon}$, где множество $B_{M,f,\delta}$ относительно плотно. Следовательно, функция $f(x)$ L – почти периодична.

По заданной почти автоморфной функции $f(x)$ на группе G можно ввести топологию $\Im_f$ с помощью относительно плотных множеств $B_{N,f,\varepsilon}$. Пополненная группа является компактной, и её будем далее в работе обозначать через T. Следствие доказано.

Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть задана почти автоморфная функция* $f(x)$ *и по ней введена топология* $\Im_f$ *на группе* G. *Любая компактная функция* $g(x)$, *заданная на группе* G *и непрерывная в топологии* $\Im_f$, *почти автоморфна.*

Доказательство. Топологию $\Im_f$ вводим при помощи окрестностей $B_{N,f,\varepsilon}$. Пусть задана последовательность $\{y_\beta\}_{\beta=1}^{\infty} \in G$. Из нее выбираем подпоследовательность $\{x_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$ такую, что существуют пределы

$$\lim_{\beta} g\left(sx_\beta^{-1}x_{\beta'}t\right) = h\left(sx_\beta^{-1}t\right), \quad \lim_{\beta} h\left(sx_\beta^{-1}t\right) = l(st).$$

Выбираем сходящуюся подпоследовательность $\{z_\gamma\}_{\gamma=1}^{\infty} \subset \{x_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$ в T.

Из сходимости $\lim\limits_{\gamma',\gamma\to\infty} z_{\gamma'}^{-1} z_{\gamma} = e$ и непрерывности функции $g(x)$ в топологии $\Im_f$ следует что, $l(st) = \lim\limits_{\gamma',\gamma\to\infty} g\left(s z_{\gamma'}^{-1} z_{\gamma} t\right) = g(st)$. Следовательно, $g(x)$ почти автоморфна. Теорема доказана.

Теорема 2. *Функция $f(x)$ почти периодична тогда и только тогда, если она почти автоморфна, и для любой сдвижки функция $f_h(t)$ также почти автоморфна.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ – почти автоморфная функция и любая функция $f_h(t)$ также почти автоморфна. Возьмем $y^* \in Y^*$, тогда числовые функции, $\left\langle y^*, f(t)\right\rangle$, $\left\langle y^*, f_h(t)\right\rangle$, $y^* \in Y^*$ удовлетворяют *условиям теоремы В. Вича* ([5] теорема 3.3.1) и значит, почти периодичны. Поскольку $f(x)$ слабо почти периодична, то она равномерно слабо непрерывна в топологии $\Im_f$. Любая компактная слабо непрерывная функция сильно непрерывна. Таким образом, функция $f(x)$ L – почти периодична. Так как функция $f(x)$ компактна и равномерно слабо непрерывна, то ее можно доопределить на компактной группе T. Любая компактная слабо непрерывная функция сильно непрерывна на T и значит, является сильно почти периодической функцией.

Обратно, из почти периодичности тривиально следует почти автоморфность. Это верно и для предельных функций. Таким образом, они почти автоморфны.

Выводы. Полученные результаты показывают, что абстрактные почти автоморфные функции – это компактные L – почти периодические функции и это функции, которые компактны и непрерывны в подходящей топологии, в которой окрестности относительно плотные множества. Дана характеристика почти периодических функций: в классе почти автоморфных функций – почти автоморфная функция почти периодична тогда и только тогда, если все ее сдвиги – почти автоморфные функции.

Список литературы: **1**. *Левин Б.Я.* О почти периодических функциях Левитана// УМЖ. Т.1, № 1. 1949, С. 49-101. **2.** Болес Басит Р., Некоторые задачи теории почти - периодических функций // Канд. дис., МГУ, 1971. **3.** *Димитрова-Бурлаенко С.Д.*, Представление L – почти периодических функций как непрерывные функции на топологической группе, Вісник національного технічного університету „ХПІ" – Харків: НТУ"ХПІ".-2010.-№68.-с.65-75.**4.** *Reich A.* Präkompakte Gruppen and Fastperiodizität//Math. Z.,116, p.216-234. **5.** *Veech W. A.* Almost automorphic functions on groups// Amer. J. Math., 87, №3, 1965, p.719-751.

Поступила в редколлегию 25.05.2012