2. При некоторых диапазонах изменения величины прижимающего усилия наблюдается достаточно хорошее совпадение результатов.

3. Для случая применения МКЭ численные результаты имеют тенденцию к реализации примерно линейной зависимости максимального контактного давления от величины прижимающего усилия. Это объясняется тем, что в силу конечности площадки возможных областей контакта происходит резкое изменение колокообразного характера распределения контактных давлений по площадке контакта. В связи с этим возрастание интегрального распределения прижимающей силы происходит не за счет роста максимального контактного давления и размеров их площадки контакта, а преимущественно только за счет первого фактора.

Предложенный в статье подход будет использован в дальнейшем для исследования контактного взаимодействия при варьировании радиусов кривизны, размеров взаимодействующих тел.

Список литературы: **1.** *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509с. **2.** *Ткачук Н.Н.* Анализ контактного взаимодействия сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями: Дисс… канд.техн.наук: 05.02.09 / *Ткачук Николай Николаевич.* – Харьков, 2010 – 203с. **3.** *Belytschko T., Liu W.K. and Moran B.* Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures – New York: J. Wiley & Sons. – 2000. – 600pp. **4.** *Попов А.П.* Контактная прочность зубчатых механизмов. – Николаев: НУК, 2008. – 580с. **5.** *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper. Math. – 1881. – Vol.92. – S.156-171.

Поступила в редколлегию 31.05.12

УДК 621.833.6

А.В. ШЕХОВ, старший научный сотрудник НАКУ "ХАИ", Харьков

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИИ МНОГОСТУПЕНЧАТОГО ПЛАНЕТАРНОГО МЕХАНИЗМА ТИПА $n\times\overline{\mathbf{AI}}$

В статье рассмотрена методика численного решения задач оптимизации конструкции многоступенчатого планетарного механизму.

В статті розглянуто методику чисельного находження рішення задач оптимального проектування конструкції багатоступінчатого планетарного механізму.

In article the numeric method of find results tasks of optimizing structure planetary transmission is submitted.

Постановка проблемы. Проектирование любого многоступенчатого зубчатого механизма – комплекс задач, которые должен решить конструктор. Сложность решаемых задач возрастает, если необходимо спроектировать конструкцию механизма, оптимальную по каким-то критериям, например, по минимуму обшей массы или габаритов. Степень сложности или трудоемкости оптимального проектирования еще больше возрастает, если параметры кон-

струкции механизма должны удовлетворять нескольким критериям, которые, как правило, бывают противоречивыми. Эффективность решение задач оптимального проектирования определяется выбором соответствующих алгоритмов или методик оптимизации целевой функции. В свою очередь, от вида целевой функции и ее свойств как математической функции, зависит сложность этих алгоритмов. Поэтому разработка эффективных алгоритмов оптимизации конструкций многоступенчатых зубчатых механизмов, в том числе планетарных, представляет собой актуальную проблему.

Анализ литературы. Вопросам оптимального проектирования многоступенчатых планетарных механизмов типа $n\times\overline{\mathbf{AI}}$ посвящено достаточно работ, в частности [1-5]. В работе [2] приведены целевые функции проектирования для различных типов многоступенчатых планетарных механизмов. Но в этой работе не рассматриваются вопросы, связанные с методами решения математической задачи оптимизации целевой функции. В работах [3-5] приводятся алгоритмы решения математической задачи оптимизации целевой функции, но мало сказано о численных методах реализации этих алгоритмов.

Цель статьи. Разработка численной методики решения задач оптимального проектирования многоступенчатого планетарного механизма типа $n\times\overline{\mathbf{AI}}$ применительно для сред программных продуктов, которые доступны и понятны конструкторам.

Раздел. Задан многоступенчатый планетарный механизм типа $n\times\overline{\mathbf{AI}}$, образованный последовательным соединением n планетарных ступеней, кинематическая схема которого приведена на рисунке.

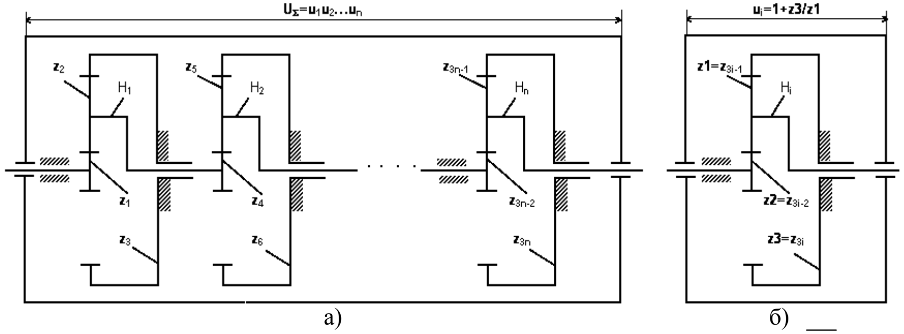

Рисунок – Схема многоступенчатого планетарного механизма типа $n\times\overline{\mathbf{AI}}$

Значение общего передаточного отношения механизма находят по формуле

$$U_\Sigma = u_1u_2\cdots u_{n-1}u_n = \sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{z_{3i}}{z_{3i-2}}\right), \qquad (1)$$

где $u_i = z_{3i}/z_{3i-2}$ – передаточное отношение i-ой ступени механизма (i=1,n).

Для заданного значения общего передаточного отношения механизма U_Σ требуется спроектировать конструкцию механизма, которая должна удовлетворять заданным критериям. Другими словами требуется найти такое распределение передаточных отношений u_i ступеней, которое обеспечивает с заданной точностью реализацию значения общего передаточного отношения $U_\Sigma = u_1 u_2 \cdots u_{n-1} u_n$ механизма и оптимальные значения выбранных критериев качества его конструкции. С математической точки зрения поставленная конструкторская задача эквивалента нахождению оптимума целевой функции проектирования при заданных ограничениях на параметры проектирования.

Пусть в качестве критерия качества конструкции задан критерий минимума общей массы механизма. Определение целевой функции проектирования $\overline{M}_\Sigma(u_1, u_2, ..., u_n)$ – аналога массы механизма, приведено в работах [3-4]. При этом целевая функция может быть построена с учетом изгибной или контактной прочности соответствующих ступеней. Как правило, это первая или последняя ступени механизма. В вышеуказанных работах приведено построение целевой функции и для случая равнопрочности (изгибной или контактной) внешних зацеплений ступеней механизма. Далее будем рассматривать только случай контактной прочности. Целевая функция в этом случае будет записываться с нижним индексом "Н".

Аналог массы (безразмерная масса) механизма при расчете на контактную прочность имеет вид [4]

$$\overline{M}_{H\Sigma} = \frac{u_1}{k_1 U_\Sigma (u_1 - 2)} \left(A_1 + \sum_{i=2}^{n} A_i B_i \right), \qquad (1)$$

где i, $A_i = 1 + k_i \left(\frac{u_i - 2}{2} \right)^2 + n_{Mi} \frac{u_i^2}{4}$ и $B_i = \frac{\rho_{3i-2} b_{3i-2} d_{3i-2}^2}{\rho_1 b_1 d_1^2}$ – номер ступени и безразмерные коэффициенты; u_i и k_i – передаточное отношение и число сателлитов ступени; ρ_{3i-2}, b_{3i-2}, d_{3i-2} – плотность материала, ширина венца и диаметр делительной окружности центрального зубчатого колеса z_{3i-2}; n_{Mi} – коэффициент приведения масс корпуса, водила и неподвижного зубчатого колеса к массе условного диска, принятого для ступени.

При заданных параметрах ρ_{3i-2}, b_{3i-2}, d_{3i-2}, k_i и n_{Mi} конструкций ступеней механизма зависимость (1) рассматривается как функция передаточных отношений отдельных его ступеней, т.е. $\overline{M}_{H\Sigma} = \overline{M}_{H\Sigma}(u_1, u_2, ..., u_n)$. При этом на передаточные отношения u_i наложены ограничения

$$u_{iн} \le u_i \le u_{iв}; \quad \prod_{i=1}^{n} u_i = U_\Sigma, \qquad (2)$$

где $u_{iн}$, $u_{iв}$ – нижнее и верхнее значения допустимого передаточного отношения i-ой ступени.

Требуется для заданного значения общего передаточного отношения механизма U_Σ найти такое его распределение по ступеням, при котором целевая функция $\overline{M}_{H1}$ принимала бы наименьшее значение. Поставленная задача

относится к задачам параметрической оптимизации. Действительно, если передаточные отношения u_i рассматривать как компоненты вектора управляемых параметров **u**

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}. \qquad (3)$$

Тогда задача параметрической оптимизации формулируется следующим образом:

$$\overline{M}_{H\Sigma}(\mathbf{u}^*) = \min_{\mathbf{u} \in D} \overline{M}_{H\Sigma}(\mathbf{u}), \qquad (4)$$

где $D = \left\{ \mathbf{u} : \prod_{i=1}^{n} u_i = U_\Sigma, u_{iн} \le u_i \le u_{iв}, i = \overline{1,n} \right\}$ – область допустимых решений.

Таким образом, формулировка задачи параметрической оптимизации является задачей поиска условного минимума целевой функции $\overline{M}_{H\Sigma}(u_1, u_2, ..., u_n)$, на n переменных которой наложены ограничения.

В математическом пакете MathCAD имеется внутренняя функция Minimize, которая находит локальный минимум как с учетом ограничений, так и без них. Вызов функции выполняется с помощью решающего блока, начинающегося с ключевого слова Given и заканчивающегося вызовом функции Minimize. Заметим, что с помощью этой функции можно решать как задачу линейного программирования (целевая функция – линейная функция), так и задачу нелинейного программирования (целевая функция – нелинейная функция). Применительно к нашей целевой функции $\overline{M}_{H\Sigma}(u_1, u_2, ..., u_n)$ выбирается вариант нелинейного программирования. При этом пакет MathCAD реализует алгоритм метода сопряженного градиента.

В математическом пакете Maple реализована возможность решения задач нелинейной оптимизации (нелинейного программирования NLP) посредством вызова функции Minimize из пакета Optimization. В этом пакете реализуются алгоритмы многих методов нелинейной оптимизации, например, нелинейный симплекс метод, модифицированный метод Ньютона, метод квадратичной интерполяции и др.

Укажем на один недостаток, с нашей точки зрения, численного решения оптимизационной задачи. Конструктор не может определить в аналитическом виде зависимость оптимального решения $\mathbf{u}^*$ от значений параметров конструкций ступеней. В нашем случае, это число сателлитов k_i и коэффициент n_{Mi}. Поэтому он должен заняться исследованием указанной зависимости путем решения оптимизационной задачи при различных значениях параметров k_i и n_{Mi}. Здесь заметим, что часто эти параметры выбирают из конструктивных соображений и тогда никакого исследования проводить не надо. Тем не менее, вышеотмеченные математические пакеты позволяют получить решение задачи поиска локального минимума целевой функции $\overline{M}_{H\Sigma}$ в символьном виде.

Рассмотрим механизм с одной ступенью (n=1). В этом случае целевая функция $\overline{M}_{H\Sigma} = \overline{M}_{H\Sigma}(u_1)$ имеет вид

$$\overline{M}_{H1} = \frac{u_1}{k_1 U_\Sigma (u_1 - 2)} \left(A_1\right) = \frac{A_1}{k_1 (u_1 - 2)}. \qquad (5)$$

Оптимальное значение передаточного отношения u_{opt1}, при котором масса одноступенчатого механизма типа $\overline{AI}$ будет минимальной, находим из решения уравнения $\partial \overline{M}_{H1} / \partial u_1 = 0$. Это уравнение имеет два корня, которые вычисляются по формуле

$$\left(u_1\right)_{1,2} = \frac{2\left(k_1^2 + n_{M1}\right) \pm 2\sqrt{\left(k_1^2 + n_{M1}\right)\left(n_{M1} + 1\right)}}{k_1^2 + n_{M1}}. \qquad (6)$$

Из двух корней, определяемых из формулы (6), выбираем тот, при котором значение аналога массы $\overline{M}_{H1}$ будет положительным. В нашем случае получим

$$u_{opt1} = \frac{2\left(k_1^2 + n_{M1}\right) + 2\sqrt{\left(k_1^2 + n_{M1}\right)\left(n_{M1} + 1\right)}}{k_1^2 + n_{M1}}. \qquad (7)$$

Соотношение (7) в явном виде позволяет найти оптимальное передаточное отношение одной ступени в зависимости от значений параметров ее конструкции – числа сателлитов k_1 и коэффициента n_{M1}.

Результат (6) был получен в математическом пакете MathCAD путем вызова внутренней функции символьного вычисления Find. Вызов этой функции осуществляется посредством задания решающего блока с ключевым словом Given. В качестве уравнения, которое надо решить в символьном виде, был выбран числитель символьного представления производной $\partial \overline{M}_{H1} / \partial u_1 = 0$. Аналогично можно поступить и в математическом пакете Maple с помощью внутренней функции solve. Заметим, что в Maple набор внутренних функций символьного вычисления шире, чем в MathCAD.

Перейдем к двухступенчатому механизму (n=2), для которого целевая функция $\overline{M}_{H\Sigma} = \overline{M}_{H\Sigma}\left(u_1, u_2\right)$ определяется по формуле

$$\overline{M}_{H2} = \frac{u_1}{k_1 U_\Sigma (u_1 - 2)} \left(A_1 + A_2 B_2\right). \qquad (8)$$

В формуле (8) для коэффициентов, стоящих в круглых скобках, имеем следующие функциональные зависимости: $A_1 = A_1(u_1)$, $A_2 = A_2(u_2)$, $B_2 = B_2(u_1, u_2)$ [4]. При этом считается, что значения параметров k_1, k_2, n_{M1} и n_{M2} заданы. Аналитическое выражение для определения коэффициента B_2 можно получить, если конструктор предварительно задаст отношение $\dfrac{\rho_4 b_4 d_4^2}{\rho_1 b_1 d_1^2}$ из условий контактной прочности внешних зацеплений ступеней механизма. Для начала примем условие $B_2 = 1$, тогда получим

$$\overline{M}_{H2} = \frac{u_1}{k_1 U_\Sigma (u_1 - 2)} \left(A_1 + A_2\right). \qquad (9)$$

Поиск локального минимума целевой функции $\overline{M}_{H2} = \overline{M}_{H2}\left(u_1, u_2\right)$ можно выполнить, как выше уже отмечалось, в MathCAD или Maple внутренней функцией Minimize (minimize).

При заданном передаточном отношении U_Σ двухступенчатого механизма передаточное отношение одной его ступени может рассматриваться как независимой величиной, а передаточное отношение другой ступени – как зависимой величиной. Пусть в качестве независимой переменной целевой функции $\overline{M}_{H2} = \overline{M}_{H2}\left(u_1, u_2\right)$ выбрана величина u_1, тогда $u_2 = U_\Sigma / u_1$. Оптимальные значения передаточных отношений ступеней находим из уравнений $\partial \overline{M}_{H2}\left(u_1, U_\Sigma / u_1\right) / \partial u_1 = 0$ и $u_2 = U_\Sigma / u_1$. Эта система двух уравнений эквивалентна следующему одному уравнению

$$\left(-k_1 - n_{M_1}\right)u_1^5 + \left(5k_1 + 3n_{M_1}\right)u_1^4 + \left(-8k_1\right)u_1^3 + \left(4k_1 + 4k_2 - 2k_2 U_\Sigma + 8\right)u_1^2 +$$
$$+ \left(k_2 U_\Sigma^2 + n_{M_2} U_\Sigma^2\right)u_1 - \left(k_2 U_\Sigma^2 + n_{M_2} U_\Sigma^2\right) = 0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) имеет 5 корней, из которых следует выбрать только положительные действительные корни, удовлетворяющие ограничению на значение передаточного отношения первой ступени. Затем из оставшихся корней находят тот, при котором значение аналога массы $\overline{M}_{H2} = \overline{M}_{H2}\left(u_1, U_\Sigma / u_1\right)$ будет наименьшим, а величина U_Σ / u_{opt1} удовлетворяет ограничениям на значение передаточного отношения второй ступени. Зная значение u_{opt1}, находят $u_{opt2} = U_\Sigma / u_{opt1}$.

В символьном виде решение уравнения (10) получить нельзя. Поэтому это уравнение решается численно, если заданы значения параметров k_1, k_2, n_{M1} и n_{M2}. В Maple для численного нахождения корней уравнения (10) можно применять внутренние функции solve, RootOf, roots, root, Roots и Root. Подобные внутренние функции имеются и в MathCAD.

Для случая, когда величина $B_2 \neq 1$, поступают точно так, как и для случая $B_2 = 1$.

Выше отмечалось, что определение оптимального распределения общего передаточного отношения $U_\Sigma = \prod_{i=1}^{n} u_i$ механизма по его ступеням является задачей поиска локального минимума целевой функции $\overline{M}_{H\Sigma}(\mathbf{u})$. Принято такие задачи относить к классу условно-экстремальных задач. В математической теории оптимизации имеются методы сведения условно-экстремальной задачи к безусловной. В частности, одним из таких методов есть метод множителей Лагранжа [6].

Введем функцию Лагранжа

$$F(\mathbf{u}, \lambda) = \overline{M}_{H\Sigma}(\mathbf{u}) + \lambda g(\mathbf{u}), \qquad (11)$$

где $g(\mathbf{u}) = U_\Sigma - \prod_{i=1}^{n} u_i = 0$ – ограничение, которое наложено на передаточные отношения ступеней механизма; λ – множитель Лагранжа.

Необходимые условия минимума целевой функции $\overline{M}_{H\Sigma}(\mathbf{u})$ при наличии ограничения $g(\mathbf{u})$ могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F(\mathbf{u},\lambda)}{\partial u_i} = \frac{\partial \overline{M}_{H\Sigma}(\mathbf{u})}{\partial u_i} + \lambda \frac{\partial g(\mathbf{u})}{\partial u_i},\ i = \overline{1,n};\\ &\frac{\partial F(\mathbf{u},\lambda)}{\partial \lambda} = g(\mathbf{u}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Это система n+1 уравнений, решением которой является $\mathbf{u}^*$ и λ^* в точке минимума.

Сформулированная математическая задача (12) может быть решена в MathCAD посредством вызова внутренней функции Find, а в Maple – функции solve. Но в Maple имеется возможность реализовать метод множителей Лагранжа путем вызова соответствующей внутренней функции LagrangeMultipliers.

Заметим следующее. Функция Лагранжа (11) построена с учетом одного ограничения, заданного в форме равенства. В [6] приводится прием, позволяющий построить эту функцию и для случая, когда ограничения заданы в форме неравенства. Применив этот прием, можно найти оптимальное решение $\mathbf{u}^*$, удовлетворяющее условиям задачи (4).

Конечно же, рассмотренные численные методы решения оптимизационных задач не единственные. Выбор метода зависит от вида целевой функции и задаваемых ограничений, а также умения конструктора решать такие задачи.

Выводы. Разработана методика численного решения задач оптимизации конструкции многоступенчатого планетарного механизма типа $n \times \overline{\mathbf{AI}}$ применительно к математическим пакетам MathCAD и Maple. Методика проста в освоении. Предоставляет возможность проводить исследования поведения целевой функции для различных вариантов оптимизации. Не требует больших вычислительных ресурсов. Эффективность методики проверена для различных значений числа ступеней n=1…10.

Список литературы: 1. Проектирование планетарных механизмов, оптимальных по динамическим характеристикам: Учеб. пособие по курсов. и дипл. проектированию / *В.А. Ткаченко*, *В.Т. Абрамов*, *М.Д. Коровкин*. – Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1983. – 110с. **2.** Планетарные механизмы (оптимальное проектирование) / *В.А. Ткаченко*. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2003. – 446с. **3.** *Абрамов В.Т.* Минимизация массы многоступенчатого планетарного механизма // Авиационно-космическая техника и технология. – Вып.33. – С.202-207. **4**. *Абрамов В.Т., Гетя А.Н, Матусевич В.А., Шехов А.В.* Методика оптимизации многоступенчатого планетарного механизма по критерию массы // Вісник Національного технічного університету "ХПИ". – 2009. – Вип.29. – С.45-52. **5.** *Матусевич В.А., Шарабан Ю.В., Шехов А.В, Абрамов В.Т.* Равнопрочность зубчатых зацеплений в задаче оптимизации многоступенчатого планетарного механизма $\overline{AI}$ по критерию массы // Вісник Національного технічного університету "ХПИ". – 2010. – Вип.26. – С.77-85. **6.** *Малков В.П., Угодчиков А.Г.* Оптимизация упругих систем. – М.: Наука, 1981. – 288с.

Поступила в редколлегию 31.05.12

УДК 621.833

В.П. ШИШОВ, д.т.н., професор каф. машинознавства СНУ ім. В. Даля, Луганськ;
П.М. ТКАЧ, к.т.н., доцент каф. машинознавства СНУ ім. В. Даля;
О.Ю. ЧАЛА, асистент каф. прикладної математики СНУ ім. В. Даля;
Т.Є. ЖУРАВЛЬОВА, аспірант каф. машинознавства СНУ ім. В. Даля

ВЕРСТАТНЕ ЗАЧЕПЛЕННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ АРКОВИХ ПЕРЕДАЧ ЗМІШАНОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ

У статті проводиться теоретичне дослідження верстатного зачеплення при нарізуванні циліндричних аркових передач інструментом з несиметричним вихідним контуром. Отримані рівняння активних поверхонь зубців циліндричних аркових передач, які необхідні для визначення показників працездатності передач з арковими зубцями.

В статье проводится теоретическое исследование станочного зацепления при нарезании цилиндрических арочных передач инструментом с несимметричным исходным контуром. Получены уравнения активных поверхностей зубцов цилиндрических арочных передач, которые необходимы для определения показателей работоспособности передач с арочными зубцами.

In the article theoretical research of the machine-tool hooking is conducted at cutting of the cylindrical arched transmissions by an instrument with an asymmetrical initial contour. Equalization of active surfaces of indents of the cylindrical arched transmissions, which is needed for determination of indexes of capacity of transmissions with the arched indents, is got.

Постановка проблеми. Працездатність машин у багатьох галузях визначається якістю механічних приводів, що входять до їх складу. Доля зубчастих передач при цьому досить велика. Тому удосконалення зубчастих приводів дозволить підвищити працездатність машин, а отже є актуальним завданням. Одним із шляхів його вирішення є синтез геометрії за якісними показниками працездатності. Такий синтез може бути віднесеним до проблеми багатокритеріальної оптимізації машинобудівних конструкцій [1].

У теперішній час накопичено значний досвіт у дослідженнях традиційного евольвентного зачеплення [2]. Але і в класичних передачах застосовувалися елементи синтезу [3]. Стосовно аркових передач традиційна модель зачеплення реалізована у квазіевольвентних аркових передачах та евольвентних по всій довжині зуба [4].

Однак відомо, що є певні обмеження у навантажувальній здатності передач з евольвентними профілями. Ці обмеження обумовлені формою зубців, що реалізує контакт опуклих поверхонь. Тому з’явилися нові різновиди зачеплень з опукло-ввігнутим контактом. Наприклад, зачеплення Новікова було реалізовано стосовно аркових передач та активно досліджувалося останні десятиріччя [5, 6]. Перспективним напрямом удосконалення параметрів опукло-ввігнутого контакту є синтез геометрії за якісними показниками працездатності [7]. Щодо аркових передач, такий підхід було застосовано у роботі [8], де було синтезовано симетричні вихідні контури різального інструменту, кожен з яких надавав значні переваги за показниками працездатності, але мав і певні недоліки.