УДК 621.24

С.Д. КОСТОРНОЙ, д-р техн. наук; проф. СумГУ, Сумы

МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ОСОБЕННОСТИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Предлагается математическая модель течения идеальной жидкости, учитывающая структуру турбулентного потока и граничные условия реальной жидкости.

Ключевые слова: Уравнения Навье-Стокса, несжимаемая жидкость, турбулентное течение, существование единственности решения.

Введение

Обоснованная математическая модель течения жидкости в проточной части (ПЧ) лопастной гидравлической машины (турбины или насоса) способствует развитию методов их проектирования и определения гидродинамических параметров для целенаправленного совершенствования энергетических, кавитационных и силовых характеристик на этапе конструирования, что позволяет сократить сроки выполнения технического задания и заменить дорогостоящий физический эксперимент вычислительным.

Поток, протекающий в машине, имеет сложную пространственную структуру. Течение жидкости в общем виде поддается математическому описанию уравнениями вязкой жидкости Навье-Стокса (НС). Однако на практике пока не представляется возможным, учитывая уровень развития численных методов расчета уравнений НС и вычислительной техники, провести достаточно точный гидродинамический расчет пространственного течения жидкости как во всей машине в целом, так и в ее отдельных элементах.

Уместно отметить, что практические потребности инженерных расчетов трехмерных течений в элементах гидравлических машин позволяют в конкретных условиях вводить ряд упрощений и для практических целей использовать упрощенные модели течений, расчет которых находится в пределах возможных вычислительных возможностей.

При проектировании гидравлических машин (ГМ) турбин и насосов выбор геометрических размеров и формы проточной части (ПЧ) с учетом взаимного влияния всех элементов ПЧ для получения высоких энергетических и динамических характеристик все еще представляет собой сложную научно-техническую задачу. Она решается, в большинстве случаев, на основании опыта и интуиции конструктора с использованием упрощенных математических моделей турбулентного течения рабочей жидкости в ПЧ.

Принято считать, что наиболее рациональное решение поставленной задачи может быть получено с использованием результатов решения уравнений НС [1, 2, 3] нестационарного трехмерного движения вязкой несжимаемой жидкости, которое в векторной форме для напряжений имеет вид

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z}\right), \quad (1)$$

где $\vec{V} = V(x, y, z, t)$ – вектор скорости, $\vec{F}$ – вектор массовых сил, ρ – плотность жидкости, $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z = P(x, y, z, t)$ – векторы напряжений в центре площадок, обозначения которых соответствуют направлению нормалей к ним.

К трем уравнениям (1) в проекциях на оси координат дополняются уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

и граничные условия безотрывного обтекания и прилипания жидкости $V_n = 0$, $V_\tau = 0$.

В общем случае система уравнений (1), (2) незамкнута, так как в ней число неизвестных превышает число уравнений. Для ее решения добавляют дополнительные уравнения, связывающие возникающие в жидкости касательные и нормальные напряжения с ее скоростями, которые согласно обобщенной гипотезе Ньютона, пропорциональны соответствующим относительным скоростям и угловых деформаций жидкой частицы.

$$P_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial V_x}{\partial x}; \quad P_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial V_y}{\partial y}; \quad P_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial V_z}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

где p – давление в вязкой жидкости**;** μ – коэффициент динамической вязкости.

После подстановки в (1) выражений нормальных и касательных напряжений согласно принятым гипотезам (3), (4), и считая $\mu = \text{const}$, а $\operatorname{div}\overline{V} = 0$, система уравнений движения вязкой жидкости, называемая уравнениями НС, в векторной форме имеет вид

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\vec{F} - \operatorname{grad} p + \mu\Delta\vec{V}, \tag{5}$$

где Δ – оператор Лапласа.

Дифференциальное уравнение (5) в частных производных второго порядка нелинейное. Нелинейность его обусловлена членом с конвективным ускорением $\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}$**.** Решение векторного уравнения (5) необходимо подчинить граничному условию на поверхности тела при обтекании его потоком вязкой жидкости наряду с условием безотрывного обтекания, условию прилипания (смачивания) жидкости, т.е. нормальная и касательная составляющие скорости $V_n = 0$ и $V_\tau = 0$.

Все соображения о начальных условиях для течения невязкой (идеальной) жидкости сохраняют свою силу и для вязкой жидкости. Принципиально новым является лишь изменение граничного условия на твердых границах потока. Выполнение условия прилипания совершенно не зависит от материала поверхности и степени чистоты его обработки. Оно одинаково выполняется при обтекании поверхностей как смачиваемых, так и несмачиваемых жидкостей. Это условие является общепринятым в гидромеханике вязкой жидкости.

Анализ известных источников

Анализ возможных решений уравнений НС при полных граничных условиях показывает, что не существует такого общего решения для уравнения Лапласа, которое удовлетворяло бы двум граничным условиям для касательной и нормальной производных потенциала на теле. Из этого следует, что безвихревое движение вязкой жидкости, удовлетворяющее уравнению движения, не удовлетворяет граничным условиям на теле. Иными словами, безвихревое течение вязкой жидкости во всей области течения, в том числе и около твердых стенок, не может существовать, т.е. уравнения НС описывают вихревое течение жидкости. Нелинейность уравнений НС и отсутствие потенциала скорости очень затрудняют их решения. До настоящего времени не разработаны общие методы решения нелинейных уравнений НС, нет общей формулировки и доказательства теорем существования и единственности [1, 4], а существуют утверждения, что они вообще неверны [5].

Необходимость удовлетворять одновременно двум граничным условиям на поверхности тела делает возможным получить точные решения этих уравнений только для простейших частных случаев, когда конвективное ускорение можно считать равным нулю. Численные методы, позволяющие решать приближенные уравнения НС в случае медленных течений, учитывают конвективное ускорение, но по величине инерционные силы очень малы по сравнению с силами вязкости. Этот подход позволяет применить гипотезу Прандтля о том, что силы вязкости в наибольшей мере проявляют себя около твердых границ тел в потоке жидкости, а на некотором удалении от этих границ они пренебрежимо малы, послужил развитию моделей теории пограничного слоя на протяжении 20-го века. Анализ этих моделей приведен в многочисленных работах.

Поскольку свойство вязкости присуще реальным жидкостям независимо от режима их движения и при переходе от ламинарного течения к турбулентному другие физические свойства не изменяются, то можно предполагать, что обобщенная гипотеза Ньютона и уравнение НС справедливы как при ламинарном, так и при турбулентном движении жидкости. Но в последнем случае использовать уравнение НС для получения каких-либо прикладных решений практически невозможно. Входящие в него мгновенные скорости и давление при турбулентных режимах являются пульсирующими величинами. Даже если эти параметры удается найти путем решения уравнений НС, то использовать эти мгновенные значения величин в практических целях весьма затруднительно. Поэтому для турбулентного режима ставится задача отыскания усредненных во времени скоростей и давлений. Эти усредненные величины сами могут оказаться зависящими или независящими от времени.

При построении математических моделей течения жидкость рассматривается как сплошная среда. Это предположение сразу ограничивает диапазон чисел Кнудсена, в котором данный анализ является справедливым. Кроме того, из этой же гипотезы следует вывод о существовании нижнего предела масштабов длины, связанных с турбулентным движением. Например, внутренний масштаб Колмогорова по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул должен быть больше. Для большинства, представляющих практический интерес течений, это требование выполняется.

Предположение о том, что жидкость является сплошной средой, делает ненужным рассмотрение ансамблей молекул и позволяет использовать уравнения движения, полученные НС. Обусловленное этим упрощение весьма полезно, однако необходимо сделать одно замечание, касающееся следствия такого перехода от анализа молекулярного движения жидкости к анализу сплошной среды. Задача с начальными данными в кинетической теории допускает лишь единственное решение, тогда как решение уравнений НС может быть неединственным [1]. Математические проблемы существования и единственности решений уравнений в частных производных, описывающих течения жидкости, далеки от своего завершения как для самих дифференциальных уравнений, так и для конечно-разностных аналогов. После появления монографии Ладыженской в 1961 г., посвященной этим проблемам для стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости, Эймсом было дано в 1965 г. изложение существа её работы [4]. Основываясь на сравнении задачи о течении несжимаемой жидкости, описываемой уравнениями НС с другими задачами, Эймс предполагает, что единственное стационарное решение существует только ниже некоторого неизвестного предельного значения числа Рейнольдса. Выше этого значения в некотором интервале чисел Re существует несколько решений и, наконец, выше некоторого другого, также неизвестного значения числа Рейнольдса, решений вообще не существует. При этом Эймс задается правомерным вопросом, справедливы ли сами стационарные уравнения НС для чисел Рейнольдса, превышающих некоторое значение, при котором возникает турбулентность.

При конечно-разностном решении этой задачи положение может ещё более усложняться из-за неясности граничных условий. Существование решения представляет собой меньшую проблему в том случае, когда расчеты ведутся по нестационарным уравнениям. Этот подход оказался наиболее успешным при решении полных уравнений для течения вязкой жидкости. Будучи уверенным в справедливости нестационарных уравнений НС, можно считать, что численное решение, полученное по физически реальным начальным условиям, имеет определенную ценность. Если же стационарного решения не существует, то, проводя нестационарные конечно-разностные расчёты, можно убедиться в этом. Может случиться, что непрерывное течение, неустойчивое по отношению к малым возмущениям, будет оставаться устойчивым при численном моделировании. Это может иметь место при крупномасштабной неустойчивости при срыве вихрей. Кроме того, внесение в полные уравнения НС приближённых допущений, которые неизбежны при их численном решении на ЭВМ, лишает уверенности в получении достоверных результатов.

Вопрос о единственности полученного численного решения вызывает большее беспокойство еще и потому, что существует много примеров многозначности стационарных решений. Наиболее очевидным примером таких течений является работа двухрежимных приборов струйной автоматики и две устойчивые ориентации вихревой нити при обтекании стенки с полусферической выемкой. Более важным примером отсутствия единственного решения, имеющем место при энергетических испытаниях гидравлических машин, является отрыв потока на профиле при одних и тех же граничных условиях. Это явление называют гистерезисом. Оно возникает на углах атаки, близких к возникновению срыва или приближения к оптимальным режимам обтекания. Картина течения в этом случае получается различной в зависимости от того, с какой стороны приближаться к данному углу атаки – со стороны меньших (досрывных) или больших (послесрывных) значений. При рассмотрении всех таких примеров, естественно возникает следующий вопрос – к какому из решений должна сходиться численная схема, если она вообще сходится к какому-либо решению? На этот вопрос пока нельзя дать определенный ответ. Если руководствоваться физическим опытом, т.е. экспериментом и интуицией, тогда для проверки получаемых решений и объяснения правомерности использованных алгоритмов, необходимо применять более строгие критерии и зависимости при разработке более совершенной математической теории или применять другие подходы к численному решению [4, 5].

Следовательно, хотя накладываемые ограничения значительно упрощают анализ, результаты технических исследований необходимо оценивать с точки зрения возможных последствий этих предположений. Если при теоретическом исследовании не принимались во внимание обнаруженные экспериментально существенные свойства явления, то нельзя рассчитывать, что такое исследование будет правильно отражать характеристики реальных течений. В частности, турбулентные течения никогда не бывают двумерными, даже если накладываемые на них граничные условия позволяют на это надеяться. Но во всех предлагаемых коммерческих пакетах программ применяются только двумерные модели турбулентности без объяснения правомерности такой операции.

Для получения уравнений турбулентного течения используются уравнения НС, все члены которых подвергаются операции усреднения по времени. Применяемые при этом операции усреднения основаны на предположении существования для любого турбулентного потока такого интервала усреднения T, что выполненное по нему усреднение дает величину, не изменяющуюся при повторном усреднении. Интервал T должен быть достаточно большим по сравнению с максимальным периодом пульсаций, но в случае усредненного неустановившегося движения малым по сравнению с характерным для усредненного движения интервалом времени. После выполнения операции осреднения для всех членов уравнения НС с учетом уравнения неразрывности для усредненного установившегося турбулентного движения получают уравнения Рейнольдса:

$$\left.\begin{aligned}
&F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2\vec{V}_x = \vec{V}_x\frac{\partial \overline{V}_x}{\partial x} + \overline{V}_y\frac{\partial \vec{V}_x}{\partial y} + \overline{V}_z\frac{\partial \overline{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial\left(\overline{V'_xV'_x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\overline{V'_xV'_y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\overline{V'_xV'_z}\right)}{\partial z}\\
&F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \nu\nabla^2\vec{V}_y = \overline{V}_x\frac{\partial \overline{V}_y}{\partial x} + \overline{V}_y\frac{\partial \overline{V}_y}{\partial y} + \overline{V}_z\frac{\partial \overline{V}_y}{\partial z} + \frac{\partial\left(\overline{V'_xV'_y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\overline{V'_yV'_y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\overline{V'_yV'_z}\right)}{\partial z}\\
&F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \nu\nabla^2\overline{V}_z = \overline{V}_x\frac{\partial \overline{V}_z}{\partial x} + \overline{V}_y\frac{\partial V_z}{\partial y} + \overline{V}_z\frac{\partial \overline{V}_z}{\partial z} + \frac{\partial\left(\overline{V'_zV'_x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\overline{V'_zV'_y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\overline{V'_zV'_z}\right)}{\partial z}
\end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Система уравнений (6) отличается от уравнений НС не только тем, что в них входят усредненные скорости вместо мгновенных, но и наличием в них девяти новых членов, зависящих от пульсаций скорости. Представив каждый из этих членов в форме $\frac{\partial\left(\overline{V'_xV'_x}\right)}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\overline{V'_xV'_x}\right)$ и т. д. видно, что в (6) наряду с членами вида $\nu\nabla^2\overline{V}_x = \frac{1}{\rho}\mu\nabla^2\overline{V}_x$, выражающими действие вязких напряжений, уравнения Рейнольдса содержат члены вида $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\overline{V'_xV'_x}\right)$, которые выражают действия напряжений, присущих только турбулентному потоку. Эти напряжения, порожденные пульсациями скорости, называют турбулентными или кажущимися напряжениями, подчеркивая последним термином, что их появление в уравнениях движения есть результат формального перехода мгновенных к усредненным скоростям. Если сравнить усредненный турбулентный поток с ламинарным, эти напряжения дают отнюдь не «кажущийся» эффект, состоящий в значительном увеличении сопротивлений и соответствующем изменении профиля скорости. В турбулентном потоке полные касательные напряжения слагаются из вязких τ_μ и турбулентных τ_t, т.е. $\tau = \tau_\mu + \tau_t$, причем турбулентные напряжения выражаются формулой $\tau_t = -\rho\overline{V'_i\,V'_j}$ и обладают свойством взаимности $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Полная совокупность турбулентных нормальных и касательных напряжений образует, по аналогии с вязкими напряжениями, симметричную матрицу турбулентных напряжений

$$\begin{vmatrix}
-\rho\overline{V'_xV'_x} & -\rho\overline{V_xV'_y} & -\rho\overline{V'_xV'_z}\\
-\rho\overline{V_yV'_x} & -\rho\overline{V_yV'_y} & -\rho\overline{V_yV'_z}\\
-\rho\overline{V_zV'_x} & -\rho\overline{V_zV'_y} & -\rho\overline{V'_zV'_z}
\end{vmatrix}. \tag{7}$$

Таким образом, в уравнениях движения появляется шесть новых членов турбулентных напряжений, для вычисления которых необходимо устанавливать связь между пульсационными и осредненными скоростями в турбулентном потоке. Эту связь устанавливают модели турбулентности, которые основаны не на законах сохранения, а на более или менее простых физических гипотезах о характере процессов турбулентности. Такие модели по мнению Лайтхилла образуют кладбище теорий, каждая из которых добавляет еще одну новую могилу, а датированное 1932 годом высказывание Г. Ламба остается актуальным и поныне: «Я старый человек и, когда после смерти попаду на небеса, то спрошу у Всевышнего две вещи: что такое квантовая электродинамика и что такое турбулентность. В отношении первого я настроен более оптимистически».

Цена, которую платят за новую упрощенную модель течения жидкости, является весьма высокой и дорогой, так как все модели турбулентности являются полуэмпирическими, а не моделями фундаментальных законов сохранения. Все уравнения динамики жидкости основаны на универсальных законах сохранения: массы, количества движения и энергии, а для получения конкретных числовых значений приближенных моделей, необходимо знать некоторые величины, определяемые на основе экспериментов, который весьма трудоемок и дорог. В общем случае турбулентная вязкость не постоянна. Она резко меняется по сечению потока или пограничного слоя от очень малых значений вблизи стенки до некоторого максимума на его половине, а затем вновь достигает минимума в центре. В настоящее время известно около ста моделей турбулентности, которые в целом делают задачу расчета турбулентного потока весьма приближенной и технически сложной. Все существующие модели турбулентности имеют недостатки, а для трехмерных течений они вообще отсутствуют и поэтому можно считать, что окончательная модель турбулентности еще не создана. Поэтому проблема решения уравнения НС в настоящее время привлекает ведущих ученых всего мира, так как в таких случаях численно решать уравнения НС нельзя.

Приближенная модель течения вязкой жидкости

Выше было показано, что уравнения движения вязкой жидкости отличаются от уравнений движения идеальной жидкости только наличием члена вида $\nu\nabla^2\vec{V}$, учитывающего вязкость. Если допустить, что существует потенциальное течение вязкой жидкости, т.е. $V = \mathrm{grad}\,\varphi$, причем в силу уравнения непрерывности $\nabla^2\varphi = 0$, тогда $\nu\ \mathrm{grad}\ \nabla^2\varphi = 0$, т.е. вязкий член в уравнения движения не входит и течение вязкой жидкости описывается теми же уравнениями, что и течение идеальной жидкости. Таким образом, предположение о возможности безвихревого течения вязкой жидкости не противоречит уравнениям движения и, казалось бы, что задачу можно свести к решению уравнения Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$. Но помимо уравнений движения должны удовлетворяться еще и граничные условия. Для идеальной жидкости эти условия заключаются в равенстве нулю нормальной составляющей скорости на твердой неподвижной стенке. Для вязкой жидкости, кроме того, должна равняться нулю касательная к стенке составляющая скорости, т.е. $V_\tau = 0$. Первое из условий вместе с уравнением Лапласа составляет классическую задачу Неймана, для которой доказана теорема существования и единственности. Иными словами, это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы существовало единственное решение $\varphi(x, y, z)$ уравнения $\nabla^2\varphi = 0$. Но такое решение не удовлетворяет, вообще говоря, второму условию, тогда как для всякой реальной (вязкой) жидкости это условие обязательно выполняется. Следовательно, для течения таких жидкостей потенциал скорости не существует. Кроме того, силы вязкости не являются потенциальными, а потому, течение вязкой жидкости вблизи твердых стенок должно быть вихревым. Тем не менее, если в частном случае воспроизвести на твердой поверхности такое же граничное условие, как и для идеальной жидкости, то движение вязкой жидкости окажется безвихревым. Оценивая качество описанной приближенной модели, которая поддается сравнительно несложному теоретическому описанию и имеет численное решение, укажем на ее ограниченность и неспособность отразить все многообразие процессов и структуры потока. В большей степени это относится к центробежным (насосным) рабочим колесам, где еще не накоплен достаточный материал из опыта для разработки уточненных моделей. Торможение потока в каналах насосных колес приводит к интенсивному нарастанию пограничного слоя и в большинстве случаев к отрыву потока от стенок, образованию зон заторможенного потока (следа), нестационарным явлениям и дополнительным потерям. Весьма заметное влияние здесь оказывают вращение канала, кривизна его стенок, а также вторичное течение.

Несколько слов о вторичных течениях. Говоря о канале рабочего колеса центробежного насоса, отметим, что на передней стенке (по ходу вращения) давление меньше, чем на задней, которая часто называется рабочей. В связи с имеющейся разницей давления в пределах пограничного слоя наблюдается течение жидкости в направлении меньшего давления по кольцевым поверхностям (дискам рабочего колеса). Образующееся таким образом вторичное течение влияет как на основной поток, так и на течение в пограничном слое на рабочей и тыльной сторонах лопасти. Ясно, что теоретическая модель, разделяющая поток на три течения (ядро потока, пограничные слои на поверхности лопастей, вторичные течения), чтобы быть эффективной, нуждается в непрерывном пополнении данных, полученных из опыта по зондированию потока в ядре, так и в пристеночных областях.

Сейчас нет недостатка в попытках построить замкнутую теорию турбулентности, основанную на результатах использования уравнений Больцмана [6].

Однако природа турбулентности такова, что ожидать быстрого решения этой задачи, используя физические методы и методы статистического анализа, едва ли было бы обоснованным. В отличие от тех задач, с которыми встречается молекулярная физика, теория турбулентности имеет дело с беспорядочно перемещающимися массами вихревого течения различных размеров, а пути их применения сравнимы с размерами перемещающихся масс. Это приводит к крайнему усложнению проблемы. Поэтому тем более надо приветствовать каждый новый шаг в данном направлении.

Означает ли такая не очень оптимистическая точка зрения на современное состояние турбулентности, что проблема турбулентности находится в застое? Думаю, что такая оценка была бы неправильной.

С турбулентностью мы встречаемся всюду: и в технике, и в физике, и в астрофизике, и геофизике – и, наверное, ни одну машину, ни один процесс, связанный с течением жидкости, газа или плазмы, нельзя было бы осуществить, если бы мы совсем не знали основных закономерностей турбулентного течения. И эти закономерности изучаются сейчас все более и более широким фронтом.

Экспериментальные данные обобщаются при помощи современных методов механики и математики. Для изучения турбулентности используется богатый арсенал физических приборов и методов [7]

Состояние проблемы турбулентности в настоящее время можно охарактеризовать как период зрелости этой науки. Накапливается и обобщается большой фактический материал, строятся практические приемы использования этих данных и создается основа для будущей стройной теории турбулентности течения.

Существенным различием течения вязкой и идеальной жидкости является также и то, что линию тока нельзя заменять твердыми поверхностями, как это можно делать для идеальной жидкости. Благодаря прилипанию частиц жидкости к твердой поверхности вблизи нее образуется область, называемая пограничным слоем, где осуществляется переход от нулевых значений скорости на поверхности к их значениям в невозмущенном потоке. В связи с этим замена свободной линии тока твердой поверхностью в вязкой жидкости ведет к резкому изменению кинематической структуры течения. Поэтому особое место в числе задач, решаемых приближенными методами, могут занимать те, в которых можно разделить поле течения вязкой жидкости на две характерные области: внешнюю, где влияние вязкости мало и поток можно приближенно считать квазипотенциальным, в котором течение вихревое, но выполняется условие

$$\overline{V}\ \mathrm{rot}\overline{V} = V_1\Omega_1 + V_2\Omega_2 + V_3\Omega_3 = 0, \qquad (8)$$

и пристенную, называемую пограничным слоем, где существенно проявление вязкости, а условие прилипания $V_\tau = 0$ обеспечивается непрерывным вихревым слоем, который назовем присоединенным. Интенсивность такого слоя определяется величиной скорости на обтекаемой поверхности, а индуцируемая им скорость условием прилипания.

Выводы

Догадка предшествует доказательству.

Список литературы: 1. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ [Текст]: в 2 ч. / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с. **2.** Численные методы исследования течения вязкой жидкости [Текст] / А.Д. Госмен, В.М. Пан, А.К. Ранчел и др. – М.: Мир, 1972. – 322 с. **3**. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика [Текст] / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 698 с. **4.** *Ладыженская О.А*. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. [Текст] / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с. **5.** *Ames W.F.* Nonlinear partial differential equations in engineering [Text] / W.F. Ames. – New York: Academic Press, 1965. – 120 p. **6.** *Косторной С.Д.* Методологические аспекты остроения моделей турбулентности при численном решении уравнений Рейнольдса [Текст] / С.Д. Косторной, А.К. Давиденко, А.С. Косторной // Труды 10-й Международной научно-технической конференции «Герметичность, вибронадежность экологическая безопасность насосного и компрессорного оборудования». – Сумы: СумГУ, 2002. – Т. 2. – С.229-240. **7.** *Брэдшоу П.* Введение в турбулентность и ее измерение [Текст] / П. Брэдшоу; перевод с англ. А.Ф. Алымова, В.В. Альтова, В.С. Войтешонка и др., ред. Г.С. Глушко. – М.: Мир, 1974. – 270 с.

Поступила в редколлегию 30.09.13

УДК 621.24

Модель течения, учитывающая особенности граничных условий реальной жидкости [Текст] / **С.Д. Косторной** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 1(1044). – С. 214-221. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-774X.

Пропонується математична модель течії ідеальної рідини, яка враховує структуру турбулентного потока і крайові умови реальної рідини.

Ключові слова: рівняння Нав'є-Стокса, нестискувана рідина, турбулентна течія, існування єдиного розв'язку.

The mathematical model of an ideal fluid, which takes into account the structure of the turbulent flow and the boundary conditions of a real fluid is proposed.

Keywords: Navier-Stokes equations, incompressible fluid, turbulent flow, the existence of uniqueness of solution.