МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Л.М. Любчик, О.В. Тоніца, О.І. Дунаєвська,
О.Б. Ахієзер, І.В. Сердюк

ВИЩА МАТЕМАТИКА
«ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ»

(Практичний курс для студентів технічних спеціальностей
заочної та дистанційної форм навчання)

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів

Затверджено
редакціоно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 04.06.14 р.

Харьків
НТУ «ХПІ»

2016

УДК 517.1

ББК 22.161

В 93

Рецензенти:

Г. Н. Жолткевич, д-р техн. наук, проф.,
Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

В 93 Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціаль-ностей заочної та дистанційної форм навчання. Інтегральне числення функції однієї змінної: навч. посіб. / Тоніца О.В., Дунаєвська О.І., Ахієзер О.Б., Сердюк І.В.; за ред. проф. Любчик Л.М. – Х. : НТУ «ХПІ», 2016. – 114 с.

ISBN

Посібник входить до серії «Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання» і є третьою частиною збірника. Містить мінімально необхідну кількість теорії та велику кількість розібраних зразків за темами «Інтегральне числення функції однієї змінної», що відповідає особливостям самостійного навчання.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

Іл. 30 Бібліогр. 15

УДК 517.1

ББК 22.161

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Останні роки в технічних університетах відбуваються зрушення у методиці викладання вищої математики, яку намагаються наблизити до інженерних дисциплін та ліквідувати відстань між абстрактними математичними теоріями і приладними задачами через тлумачення формальних теорій в категоріях реальних завдань. Особливо гострою є проблема актуалізації складу заочної та дистанційної математичної освіти, де відсутній постійний контакт студента з викладачем. Тому актуальним стало створення нового методичного забезпечення, яке б відповідало цим трендам.

Навчальний посібник входить до складу серії посібників «Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання».

Пропонований посібник містить теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач. Теоретична частина містить необхідні визначення, формулювання теорем, формули. Вона ілюструється розібраними прикладами і вправами, виконання яких сприяє засвоєнню фундаментальних понять вищої математики. Мінімально необхідна кількість теорії та велика кількість прикладів відповідає особливостям самостійного навчання. Досить дрібне розбиття на теми дозволяє використовувати його з різними навчальними програмами та при побудові індивідуальних траєкторій навчання.

ГЛАВА 1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

§1. Первісна. Властивості невизначеного інтеграла

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$, якщо в кожній точці цього інтервалу $f(x)$ є похідною для $F(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$.

З цього визначення виходить, що задача знаходження первісної є зворотною задачі диференціювання: по заданій функції $f(x)$ потрібно знайти функцію $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$.

Якщо функція $F(x)$ - деяка первісна для функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$, то будь-яка інша первісна $F_1(x)$ може бути представлена у вигляді:

$F_1(x)=F(x)+C$, де C - постійна на $[a,b]$ функція.

Сукупність первісних функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від цієї функції і позначається символом $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

де C - довільна постійна, x - змінна інтегрування, $f(x)$ - підінтегральна функція, $f(x)dx$ - підінтегральний вираз.

Властивості невизначеного інтеграла:

1. $d\int f(x)dx=f(x)dx$,
2. $\int F'(x)dx=F(x)+C$ (якщо $\int dF(x)=F(x)+C$).

Однак, не для всіх функцій можливо представити первісну в елементарних функціях. Наприклад $\int e^{-x^2}dx$ - інтеграл Пуассона, первісна якого не є елементарною функцією.

Враховуючи області визначення функцій та формули диференціювання елементарних функцій, отримуємо наступну таблицю невизначених інтегралів:

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int dx = x + C$

3. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$, $(a \neq -1)$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $(x \neq 0)$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $(a > 0,\ a \neq -1)$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$, $x \in \mathbb{R} \Big/ \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$, $x \in \mathbb{R} \Big/ \{ \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \}$

11. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$, $(|x| \neq a)$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

13. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$, $x \in \mathbb{R} \Big/ \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

14. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$, $x \in \mathbb{R} \Big/ \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

15. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{|a|} \mathrm{arctg} \frac{x}{|a|} + C = -\frac{1}{|a|} \mathrm{arcctg} \frac{x}{|a|} + C_1$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C = -\arccos \frac{x}{|a|} + C, \left(|x| < |a| \right)$

17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| \mathrm{tg} \frac{x}{2} \right| + C$, $x \in \mathbb{R} \Big/ \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$, $x \in \mathbb{R} \Big/ \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$

19. $\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C$

20. $\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + C$

21. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$

22. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$, $x \in \mathbb{R} \Big/ \{0\}$

Найпростіші правила інтегрування:

1. Однорідність: якщо $f(x)$ має первісну, а k - деяка відмінна від нуля постійна, то функція $k \cdot f(x)$ також має первісну, причому

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \, .$$

2. Адитивність: якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають первісні, то і функція $f(x) + g(x)$ також має первісну і справедлива наступна формула

$$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \, .$$

Приклади:

1.1. $$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}} dx = \left\| \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \right\| = \frac{x^{\frac{-3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + C =$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + C = \frac{5}{2} x^{\frac{2}{5}} + C \ .$$

1.2. $$\int (3x-5)\,dx = \int 3x dx - \int 5 dx = 3\int x dx - 5\int dx = = \frac{3x^{1+1}}{1+1} - 5x$$

$$+C = \frac{3x^2}{2} - 5x + C \ .$$

1.3. $$\int \left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right) = \\ = \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{x} + 2^2\right) = \\ = \left(\sqrt{x}\right)^3 - 2^3 = x^{\frac{3}{2}} - 8 \end{array} \right\| = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 8 \right) dx =$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}} dx - \int 8 dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx - 8\int dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 8x + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} -$$

$$-8x + C = 0.4x^2\sqrt{x} - 8x + C \, .$$

1.4. $$\int \frac{x^3 - x^4 e^x + x^2}{x^4} dx = \left\| \begin{array}{l} \dfrac{x^3 - x^4 e^x + x^2}{x^4} = \dfrac{x^3}{x^4} - \dfrac{x^4 e^x}{x^4} + \dfrac{x^2}{x^4} = \\ = \dfrac{1}{x} - e^x + \dfrac{1}{x^2} \end{array} \right\| =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} - e^x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - \int e^x dx + \int \frac{dx}{x^2} = = \ln|x| - e^x +$$

$$+ \int x^{-2} dx = \ln|x| - e^x + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \ln|x| - e^x - \frac{1}{x} + C .$$

1.5. $$\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx = \left\| \begin{array}{l} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \\ = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} dx = \int (\cos x - \sin x) dx =$$

$$= \int \cos x dx - \int \sin x dx = \sin x + \cos x + C .$$

1.6. $$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \left\| \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right\| =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2} \cos x dx = \frac{1}{2} \int dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C .$$

1.7. $$\int 3^x \cdot 2^{2x+3} dx = \left\| \begin{array}{l} 3^x \cdot 2^{2x+3} = 3^x \cdot 2^{2x} \cdot 3 = 3^x \cdot (2^2)^x \cdot 8 = \\ = 3^x \cdot 4^x \cdot 8 = (3 \cdot 4)^x \cdot 8 = 8 \cdot 12^x \end{array} \right\| =$$

$$= \int 8 \cdot 12^x dx = 8 \int 12^x dx = 8 \cdot \frac{12^x}{\ln 12} + C .$$

1.8. $\int \frac{5^x+3\cdot 2^x}{10^x}dx = \left\| \begin{array}{l} \frac{5^x+3\cdot 2^x}{10^x} = \frac{5^x+3\cdot 2^x}{(2\cdot 5)^x} = \frac{5^x+3\cdot 2^x}{2^x\cdot 5^x} = \\ = \frac{5^x}{2^x\cdot 5^x} + 3\cdot\frac{2^x}{2^x\cdot 5^x} = \frac{1}{2^x} + 3\cdot\frac{1}{5^x} = \\ = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x \end{array} \right\| =$

$$= \int\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x\right)dx = \int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx + +\int 3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x dx =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + 3\int\left(\frac{1}{5}\right)^x dx = \frac{2^{-x}}{\ln 2^{-1}} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} + C =$$

$$= -\frac{2^{-x}}{\ln 2} - \frac{3\cdot 5^{-x}}{\ln 5} + C\,.$$

<u>Задачі та вправи для самостійного розв’язання:</u>

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x^2}dx.$

(Відповідь: $\ln|x| + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C$.)

2. $\int \sqrt[3]{2x-3}dx.$

(Відповідь: $\frac{3}{2}(2x-3)^{\frac{4}{3}} + C$.)

3. $\int e^{-3x}dx.$ (Відповідь: $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$.)

4. $\int \frac{dx}{(6x+3)^3}.$ (Відповідь: $-\frac{1}{12(6x+3)^2}+C$.)

5. $\int \frac{dx}{7x+1}.$ (Відповідь: $\frac{1}{7}\ln|7x+1|+C$.)

6. $\int \cos(1-2x)dx.$ (Відповідь: $-\frac{1}{2}\sin(1-2x)+C$.)

7. $\int 2^x\cdot 3^{x-4}dx.$ (Відповідь: $\frac{81}{\ln 6}\cdot 6^x+C$.)

8. $\int\left(\sqrt[3]{x+5}-\sqrt{2x+3}+\frac{1}{5x-4}\right)dx.$

(Відповідь: $\frac{3}{4}(x+5)\sqrt[3]{x++5}-\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+\frac{1}{5}\ln|5x-4|+C$.)

9. $\int\left(e^x+e^{-x}-2\right)dx.$

(Відповідь: $e^x-e^{-x}-2x+C$.)

10. $\int\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx.$

(Відповідь: $x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$.)

§2. Підведення під знак диференціала у невизначеному інтегралі

Нехай функція $f(x)$ має первісною функцію $F(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Якщо функція $\varphi(x)$ безперервна функція, що диференціюється, то є справедливим наступний вираз:

$$\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C .$$

Зокрема, якщо $\varphi(x) = ax + b$, тоді

$$\int f(ax+b)dx = \left\| \begin{array}{l} (ax+b)' = a \\ d(ax+b) = a \cdot dx \\ dx = \dfrac{1}{a} d(ax+b) \end{array} \right\| = \int f(ax+b) \cdot \frac{1}{a} d(ax+b) =$$

$$= \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C .$$

Особливо часто зустрічаються випадки коли $a = 1$ або $b = 0$:

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C ,$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C .$$

Приклади:

2.1. $\int(3x+7)^9\,dx=\left\|\begin{aligned}&(3x+7)'=3\\&d(3x+7)=3dx\\&dx=\frac{1}{3}d(3x+7)\end{aligned}\right\|=$

$$=\int(3x+7)^9\cdot\frac{1}{3}d(3x+7)=\frac{1}{3}\int(3x+7)^9d(3x+7)=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(3x+7)^{10}}{10}+C==\frac{(3x+7)^{10}}{30}+C.$$

2.2. $\int x\cdot\sqrt[3]{5-x^2}\,dx=\int\left(5-x^2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot xdx=\left\|\begin{aligned}&\left(5-x^2\right)'=-2x\\&d\left(5-x^2\right)=-2xdx\\&xdx=-\frac{1}{2}d\left(5-x^2\right)\end{aligned}\right\|=$

$$=\int\left(5-x^2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)d\left(5-x^2\right)=-\frac{1}{2}\int\left(5-x^2\right)^{\frac{1}{3}}d\left(5-x^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\left(5-x^2\right)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=-\frac{3}{8}\left(5-x^2\right)\sqrt[3]{5-x^2}+C.$$

$$\textbf{2.3.}\ \int \frac{3^x\,dx}{\sqrt{7-9^x}} = \int \frac{3^x\,dx}{\sqrt{7-\left(3^x\right)^2}} = \left\| \begin{array}{l} \left(3^x\right)' = 3^x \ln 3 \\ d\left(3^x\right) = 3^x \ln 3dx \\ 3^x\,dx = \dfrac{1}{\ln 3} d\left(3^x\right) \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\ln 3} d\left(3^x\right)}{\sqrt{7-\left(3^x\right)^2}} = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{d\left(3^x\right)}{\sqrt{7-\left(3^x\right)^2}} = \frac{1}{\ln 3} \arcsin \frac{3^x}{\sqrt{7}} + C\,.$$

$$\textbf{2.4.}\ \int e^{ax+b}dx = \left\| \begin{array}{l} \left(ax+b\right)' = a \\ d\left(ax+b\right) = adx \\ dx = \dfrac{1}{a} d\left(ax+b\right) \end{array} \right\| = \frac{1}{a} \int e^{ax+b} d\left(ax+b\right) =$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax+b} + C\,.$$

$$\textbf{2.5.}\ \int \frac{dx}{ax+b} = \left\| \begin{array}{l} \left(ax+b\right)' = a \\ d\left(ax+b\right) = adx \\ dx = \dfrac{1}{a} d\left(ax+b\right) \end{array} \right\| = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(ax+b\right)}{ax+b} =$$

$$= \frac{1}{a} \ln\left|ax+b\right| + C\,.$$

$$\textbf{2.6.}\ \int \cos ax dx = \left\| \begin{array}{l} \left(ax\right)' = a \\ d\left(ax\right) = adx \\ dx = \dfrac{1}{a} d\left(ax\right) \end{array} \right\| = \frac{1}{a} \int \cos ax d\left(ax\right) = \frac{1}{a} \sin ax + C.$$

2.7. $\int \sin axdx = \left\| \begin{aligned} &(ax)' = a \\ &d(ax) = adx \\ &dx = \frac{1}{a} d(ax) \end{aligned} \right\| = \frac{1}{a} \int \sin axd(ax) = -\frac{1}{a} \cos ax + C.$

2.8. $\int \sin mx \cdot \cos nxdx = \left\| \begin{aligned} &\sin mx \cdot \cos nx = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right) \end{aligned} \right\| =$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(m+n)xdx + \frac{1}{2} \int \sin(m-n)xdx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} d(m+n)x = (m+n)dx & d(m-n) = (m-n)dx \\ dx = \dfrac{d(m+n)x}{m+n} & dx = \dfrac{d(m-n)x}{m-n} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2(m+n)} \int \sin(m+n)xd(m+n)x +$$

$$+ \frac{1}{2(m-n)} \int \sin(m-n)xd(m-n)x =$$

$$= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C\,.$$

2.9. $$\int \frac{dx}{(5x+2)\ln(5x+2)} = \left\| \begin{array}{l} \left(\ln(5x+2)\right)' = \dfrac{1}{5x+2} \cdot 5 \\ d\left(\ln(5x+2)\right) = \dfrac{5dx}{5x+2} \\ \dfrac{dx}{5x+2} = \dfrac{1}{5} d\left(\ln(5x+2)\right) \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{d\left(\ln(5x+2)\right)}{\ln(5x+2)} = \frac{1}{5} \ln\left|\ln(5x+2)\right| + C \ .$$

2.10. $$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \left\| \begin{array}{l} x^2+4x+5 = \underbrace{x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2} - 2^2 + 5 = \\ = (x+2)^2 - 4 + 5 = (x+2)^2 + 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \left\| \begin{array}{l} (x+2)' = 1 \\ d(x+2) = dx \end{array} \right\| = \int \frac{d(x+2)}{1^2+(x+2)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg}(x+2) + C \ .$$

2.11. $$\int \frac{dx}{\sin^2(11-7x)} = \left\| \begin{array}{l} (11-7x)' = -7 \\ d(11-7x) = -7dx \\ dx = -\dfrac{1}{7} d(11-7x) \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{7} \int \frac{d(11-7x)}{\sin^2(11-7x)} = \frac{1}{7} \operatorname{ctg}(11-7x) + C \ .$$

2.12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}x+1}} = \int \left(\mathrm{tg}x+1\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left\| \begin{array}{l} \left(\mathrm{tg}x+1\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \\ d\left(\mathrm{tg}x+1\right) = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\| =$

$$= \int \left(\mathrm{tg}x+1\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(\mathrm{tg}x+1\right) = \frac{\left(\mathrm{tg}x+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{\mathrm{tg}x+1} + C\,.$$

2.13. $\int \cos^3 2x \sin 4x dx = \int \cos^3 2x \cdot 2\sin 2x \cos 2x dx =$

$$= 2\int \cos^4 2x \cdot \sin 2x dx = \left\| \begin{array}{l} \left(\cos 2x\right)' = -2\sin 2x \\ d\left(\cos 2x\right) = -2\sin 2x dx \\ \sin 2x dx = -\frac{1}{2} d\left(\cos 2x\right) \end{array} \right\| =$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int \cos^4 2x \cdot d\left(\cos 2x\right) = -\frac{\cos^5 2x}{5} + C\,.$$

§3. Метод заміни змінної у невизначеному інтегралі

Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(t)$ визначені відповідно на проміжках X і T, причому $\varphi(T) \subseteq X$, тобто $x = \varphi(t)$. Тоді існує зворотна функція $t = \varphi^{-1}(x)$. Якщо функція $f(x)$ має на X первісну $F(x)$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

а функція $\varphi(t)$ диференційована на T, то функція $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ має на T первісну $F(\varphi(t))$:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Приклади:

3.1. $\displaystyle\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)} = \left\| \begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)\,dx \end{matrix} \right\| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C.$

3.2.

$$\int \left(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x\right) dx = \left\| \begin{matrix} t = \mathrm{tg}x & dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ x = \mathrm{arctg}t & \end{matrix} \right\| = \int \left(t^2 + t^4\right) \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{t^2\left(1+t^2\right)}{1+t^2}\,dt = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + C.$$

3.3.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \left\| \begin{matrix} x = \dfrac{1}{t} & dx = -\dfrac{dt}{t^2} \\ t = \dfrac{1}{x} & \end{matrix} \right\| = \int \frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t^2}\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+4}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{\dfrac{1+4t^2}{t^2}}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1+4t^2}} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \left(1+4t^2\right)' = 8t & tdt = \frac{1}{8} d\left(1+4t^2\right) \\ d\left(1+4t^2\right) = 8tdt & \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{d\left(1+4t^2\right)}{\sqrt{1+4t^2}} = -\frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{1+4t^2} + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1+4t^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1+4\frac{1}{x^2}} + C = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4|x|} + C\ .$$

3.4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left\| \begin{matrix} \sqrt{1+e^x} = t & x = \ln\left(t^2-1\right) \\ 1+e^x = t^2 & dx = \dfrac{2tdt}{t^2-1} \\ e^x = t^2-1 & \end{matrix} \right\| = \int \frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)\cdot t} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C\ .$$

<u>Задачі та вправи для самостійного розв’язання:</u>

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{7^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx.$ (Відповідь: $\frac{7^{\operatorname{tg} x}}{\ln 7} + C$.)

2. $\int \frac{\sin x}{5+\cos x}dx.$ (Відповідь: $-\ln|5+\cos x| + C$.)

3. $\int \left(\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \right) dx.$ (Відповідь: $e^{\arcsin x} - 2\sqrt{x} + C$.)

4. $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx.$ (Відповідь: $\sin \ln x + C$.)

5. $\int \frac{dx}{x\left(9+\ln^2 x\right)}.$ (Відповідь: $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{3} + C$.)

6. $\int \frac{dx}{\left(1+9x^2\right)\left(5+2\operatorname{arctg}3x\right)}.$

(Відповідь: $\frac{1}{6} \ln\left|5+2\operatorname{arctg}3x\right| + C$.)

7. $\int \sin^3 3x dx.$

(Відповідь: $\frac{1}{9}\cos^3 3x - \frac{1}{3}\cos 3x + C$.)

8. $\int \frac{x^2}{4x^6+9} dx.$ (Відповідь: $\frac{1}{18} \operatorname{arctg} \frac{2x^3}{3} + C$.)

9. $\int x^2 e^{-2x^3+1} dx.$ (Відповідь: $-\frac{1}{6} e^{-2x^3+1} + C$.)

10. $\int \frac{3^x}{9^x - 7} dx.$

(Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{7}\cdot \ln 3} \cdot \ln\left|\frac{3^x - \sqrt{7}}{3^x + \sqrt{7}}\right| + C$.)

§4. Інтегрування по частинах

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ - функції, що мають безперервні частинні похідні на проміжку X. Тоді за формулою диференціал добутку на цьому проміжку має вигляд: $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$. Звідси виражаємо $u \cdot dv$: $u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$. Якщо функція $u'(x) \cdot v(x)$ має первісну на множені X, тоді $u(x) \cdot v'(x)$ також має первісну та справедлива наступна формула:

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)u'(x)dx . \qquad (4.1)$$

Ця формула називається формулою інтегрування частинами.

Враховуючи, що $du = u'(x)dx$ та $dv = v'(x)dx$, одержимо запис формули (1), що вживається частіше:

$$\int udv = uv - \int vdu . \qquad (4.2)$$

Розглянемо випадки, в яких доцільне застосування формули інтегрування частинами:

1) Інтеграли виду: $\int P_n(x)\cos\alpha x dx$, $\int P_n(x)\sin\alpha x dx$, де $P_n(x)$ - многочлен n - го ступеня. У даному випадку в якості функції $u(x)$ беремо многочлен $P_n(x)$. Так, для $\int P_n(x)\cos\alpha x dx$ маємо $u = P_n(x)$, $dv = \cos\alpha x dx$, $du = \left(P_n(x)\right)'$, $v = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha x$. У результаті ми отримаємо інтеграл того ж типу з многочленом ступеня на одиницю менше. Після n - кратного застосування формули ступінь многочлена зменшиться до нуля, тобто многочлен перетвориться на постійну, і інтеграл зведеться до табличного.

2) Інтеграли виду: $\int P_n(x)R\left(a^x\right)dx$, де $P_n(x)$ - многочлен n - го ступеня, а $R\left(a^x\right)$ - вираз, залежний від показової функції a^x. В якості $u(x)$ беремо, також многочлен $P_n(x)$. Яка

ступінь многочлена, стільки разів застосовуємо формулу інтегрування частинами (2).

3) Інтеграли виду:

$$\int P_n(x) R(\arccos x; \arcsin x; \mathrm{arctg} x; \mathrm{arcctg} x) dx ,$$

де $R(\arccos x; \arcsin x; \mathrm{arctg} x; \mathrm{arcctg} x)$ - функція, що залежить від зворотних тригонометричних функцій. Цю функцію беремо в якості $u(x)$.

4) Інтеграли виду: $\int P_n(x) R(\log_a x) dx$, де аргументом функції $R(\log_a x)$ є логарифмічна функція. Тоді функція $u(x)$ є вираз $R(\log_a x)$.

5) Для деяких функцій застосовується прийом «зведення інтеграла до самого себе». За допомогою інтегрування частинами (можливо, неодноразового) інтеграл виражається через такий самий інтеграл. У результаті виходить рівняння щодо цього інтеграла. Вирішуючи це рівняння, знаходимо значення інтеграла.

Приклади:

4.1.

$$\int x \sin x dx = \begin{Vmatrix} u = x; & dv = \sin x dx \\ du = dx; & v = -\cos x \end{Vmatrix} = x(-\cos x) -$$

$$-\int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C .$$

4.2.

$$\int (3x+5) 2^{-x} dx =$$

$$=\left\| \begin{array}{ll} u=3x+5; & dv=2^{-x}\,dx \\ du=\left(3x+5\right)'\,dx=3dx; & v=\int 2^{-x}\,dx=\left\|\begin{array}{l}\left(-x\right)'=-1\\ d\left(-x\right)=-dx\\ dx=-d\left(-x\right)\end{array}\right\|= \\ & =-\int 2^{-x}\,dx=-\dfrac{2^{-x}}{\ln 2}\end{array}\right\|=$$

$$=-\frac{\left(3x+5\right)2^{-x}}{\ln 2}-\int -\frac{2^{-x}}{\ln 2}\cdot 3dx=-\frac{\left(3x+5\right)2^{-x}}{\ln 2}+$$

$$+\frac{3}{\ln 2}\int 2^{-x}\,dx=-\frac{\left(3x+5\right)2^{-x}}{\ln 2}+\frac{3}{\ln 2}\left(-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right)+C=$$

$$=-\frac{\left(3x+5\right)2^{-x}}{\ln 2}-\frac{3\cdot 2^{-x}}{\ln^2 x}+C\,.$$

4.3.

$$\int x\arcsin x dx=\left\|\begin{array}{ll} u=\arcsin x; & dv=xdx \\ du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; & \mathrm{v}=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\|=\frac{x^2}{2}\arcsin x-$$

$$-\int\frac{x^2dx}{2\sqrt{1-x^2}}=\left\|\begin{array}{l} x=\sin t \\ dx=\cos t dt \\ \sqrt{1-x^2}=\cos t\end{array}\right\|=\frac{x^2}{2}\arcsin x-$$

$$-\frac{1}{2}\int\sin^2 t dt=\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\int\left(1-\cos 2t\right)dt=\frac{x^2}{2}\arcsin x-$$

$$-\frac{1}{4}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{t}{4}+\frac{\sin t\cos t}{4}+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{\arcsin x}{4}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+C\,.$$

4.4.

$$\int \ln x dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x; & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}; & v = x \end{matrix} \right\| = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

4.5.

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx = \left\| \begin{matrix} u = \cos bx; & dv = e^{ax} dx \\ du = -b \sin bx; & v = \dfrac{1}{a} e^{ax} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx = \left\| \begin{matrix} u = \sin bx; & dv = e^{ax} dx \\ du = b \cos bx; & v = \dfrac{1}{a} e^{ax} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \left(\frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx \right) =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b e^{ax}}{a^2} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I .$$

Після дворазового інтегрування частинами отримано рівняння щодо I:

$I = \dfrac{e^{ax}}{a} \cos bx + \dfrac{b e^{ax}}{a^2} \sin bx - \dfrac{b^2}{a^2} I$, рішення якого наступне:

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left(a \cos bx + b \sin bx \right) + C .$$

4.6.

$$\int x \sin^2 x dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x;\ du = dx;\ dv = \sin^2 x dx; \\ v = \int \sin^2 x dx = \int \dfrac{1 - \cos 2x}{2} dx = \dfrac{1}{2} \int dx - \dfrac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ = \left\| (2x)' = 2;\ d(2x) = 2dx;\ dx = \dfrac{1}{2} d(2x) \right\| = \\ = \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{4} \sin 2x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right) - \int\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}\sin 2x\right) - \frac{1}{2}\int xdx + \frac{1}{4}\int \sin 2xdx = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}\sin 2x -$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2xd\left(2x\right) = = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x}{4}\sin 2x - -\frac{1}{8}\cos 2x + C\,.$$

4.7.

$$\int x^3 e^x dx = \left\|\begin{matrix} u = x^3; & dv = e^x dx \\ du = 3x^2 dx; & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix}\right\| = x^3 \cdot e^x -$$

$$-\int e^x \cdot 3x^2 dx = x^3 \cdot e^x - 3\int x^2 \cdot e^x dx =$$

$$= \left\|\begin{matrix} u = x^2; & dv = e^x dx \\ du = 2xdx; & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix}\right\| = x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx\right) =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x \cdot e^x dx = \left\|\begin{matrix} u = x; & dv = e^x dx \\ du = dx; & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix}\right\| =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left(xe^x - \int e^x dx\right) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x -$$

$$-6e^x + C == \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)e^x + C\,.$$

4.8.

$$\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}dx = \left\|\begin{matrix} u = \ln^2 x; & dv = \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}dx \\ du = \dfrac{2\ln x}{x}dx; & v = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \dfrac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} \end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\ln^2 x - \int \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2\ln x}{x}dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln^2 x -$$

$$-3\int x^{-\frac{1}{3}}\ln x dx = \left\|\begin{matrix} u=\ln x; & dv = x^{-\frac{1}{3}}dx \\ du=\dfrac{dx}{x}; & v=\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \end{matrix}\right\| = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln^2 x -$$

$$-3\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \int\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{x}\right) = 1.5\sqrt[3]{x^2}\ln^2 x - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x +$$

$$+3\cdot\frac{3}{2}\int x^{-\frac{1}{3}}dx = 1.5\sqrt[3]{x^2}\ln^2 x - 4.5\sqrt[3]{x^2}\ln x + \frac{9}{2}\cdot\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2} + C =$$

$$= 1.5\sqrt[3]{x^2}\ln^2 x - 4.5\sqrt[3]{x^2}\ln x + 6.75\sqrt[3]{x^2} + C =$$

$$= \left(1.5\ln^2 x - 4.5\ln x + 6.75\right)\cdot\sqrt[3]{x^2} + C\,.$$

4.9.

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx = \left\|\begin{matrix} u=\sqrt{a^2+x^2}; & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}\cdot 2xdx = & \\ = \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}; & v=\int dx = x \end{matrix}\right\| =$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x\sqrt{a^2+x^2} - -\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx =$$

$$x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{x^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx +$$

$$+\int\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx +$$

$$+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x\sqrt{a^2+x^2} - -\int\sqrt{a^2+x^2}dx + a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|.$$

Нехай $\int\sqrt{a^2+x^2}dx = I$, тоді маємо рівняння:

$$I = x\sqrt{a^2 + x^2} - I + a^2 \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|,$$

$$2I = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|,$$

$$I = \frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|.$$

Таким чином:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C.$$

<u>Задачі та вправи для самостійного розв'язання:</u>

Обчислити інтеграли:

1. $\int \left(x^2 + 2\right)\ln 3x dx.$

(Відповідь: $\left(\frac{x^3}{3} + 2x\right) \cdot \ln x - \frac{1}{9}x^3 + 2x + C$.)

2. $\int (x+3) \cdot 2^{-x}\, dx.$

(Відповідь: $-\frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{-x}(x+3) - \frac{1}{\ln^2 2} \cdot 2^{-x} + C$.)

3. $\int \arccos x\, dx.$ (Відповідь: $-\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} + C$.)

4. $\int (2x+3)\sin 3x dx.$ (Відповідь: $-\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3x + C$.)

5. $\int \frac{5x-2}{\sin^2 2x}\,dx.$

(Відповідь: $-\frac{1}{2}(5x-2)\operatorname{ctg}2x+\frac{5}{4}\ln\left|\sin 2x\right|+C$.)

6. $\int\left(\frac{x}{2}-5\right)e^{3x-2}dx.$

(Відповідь: $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-5\right)e^{3x-2}-\frac{1}{18}e^{3x-2}+C$.)

7. $\int x^5 \ln x\,dx.$ (Відповідь: $\frac{1}{6}x^6 \ln x-\frac{1}{36}x^6+C$.)

8. $\int\left(x^2-3x+1\right)e^{-2x}\,dx.$ (Відповідь: $e^{-2x}\cdot\left(\frac{-x^2}{2}+1\right)+C$.)

9. $\int x\cdot\operatorname{arctg}x\,dx.$

(Відповідь: $\frac{1}{2}\left(x^2\cdot\operatorname{arctg}x-x+\operatorname{arctg}x\right)+C$.)

10. $\int\sqrt{1+x^2}\,dx.$

(Відповідь: $\frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)+C$.)

§5. Інтеграли, що містять в знаменнику квадратний тричлен ax^2+bx+c

а) Інтеграли виду $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$, $(a \neq 0)$, наводяться до табличних, виділенням повного квадрата у тричлені:

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} = \frac{Mx+N}{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)} = \frac{Mx+N}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)} =$$

$$= \frac{M\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)} = \frac{M\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)} =$$

$$= \frac{M}{2a}\cdot\frac{2\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{2N}{M}-\frac{Mb}{a}\right)}{\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)}.$$

Сенс цих перетворень полягає у тому, що доданок Mx у чисельнику перетворюємо на похідну знаменника, що вийшов; другий доданок в чисельнику від x не залежить. Тепер, щодо заміни змінної $\left\| t = x+\frac{b}{2a};\ x = t-\frac{b}{2a};\ dx = \left(t-\frac{b}{2a}\right)' dt = dt \right\|$ інтеграл зводиться до

$$\frac{M}{2a}\left(\int \frac{2t}{t^2 \pm c_1^2}dt + L\int \frac{dt}{t^2 \pm c_1^2}\right), \text{ де } L = \frac{2N}{M}-\frac{b}{a},\ c_1^2 = \frac{\left|4ac-b^2\right|}{4a^2}.$$

Перший інтеграл $\int \frac{2t}{t^2 \pm c_1^2}dt = \int \frac{d\left(t^2 \pm c_1^2\right)}{t^2 \pm c_1^2} = \ln\left|t^2 \pm c_1^2\right| + C$, другий - один з табличних інтегралів 11, 15.

b) Інтеграли виду $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $(a \neq 0)$, наводяться до табличних, виділенням повного квадрата під коренем у знаменнику:

$$\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{Mx+N}{\sqrt{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}} =$$

$$= \frac{Mx+N}{\sqrt{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}} = \frac{M\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}+a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}.$$

Перший доданок у чисельнику дасть інтеграл від степеневої функції з показником ступеня $-\frac{1}{2}$, другий - залежно від знака - a табличний інтеграл 12, 16.

Приклади:

5.1

$$\int \frac{7x+3}{-5x^2+9x-6}dx = \frac{7}{-5\cdot 2}\int \frac{2x+\frac{6}{7}}{x^2-\frac{9}{5}x+\frac{6}{5}+\frac{81}{100}-\frac{81}{100}}dx =$$

$$= -\frac{7}{10}\int \frac{2\left(x-\frac{9}{10}\right)+\left(\frac{18}{10}+\frac{6}{7}\right)}{\left(x-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}}dx =$$

$$= -\frac{7}{10}\left(\int \frac{2\left(x-\frac{9}{10}\right)}{\left(x-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}}dx + \left(\frac{9}{5}+\frac{6}{7}\right)\int \frac{dx}{\left(x-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}}\right) =$$

$$=-\frac{7}{10}\int\frac{d\left(\left(x-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}\right)}{\left(x-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}}-\ -\frac{7}{10}\left(\frac{63+30}{35}\right)\int\frac{dx}{\left(x-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}}=$$

$$=-\frac{7}{10}\ln\left|\left(x-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}\right|-\frac{93}{50}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{39}}{10}\right)^2}=$$

$$=-\frac{7}{10}\ln\left|x^2-\frac{9}{5}x+\frac{81}{100}+\frac{39}{100}\right|-\frac{93}{50}\cdot\frac{10}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\frac{9}{10}}{\frac{\sqrt{39}}{10}}\right)+C=$$

$$=-\frac{7}{10}\ln\left|5x^2-9x+6\right|-\ -\frac{93}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\left(\frac{10x-9}{\sqrt{39}}\right)+C\,.$$

5.2.

$$\int\frac{7x+3}{\sqrt{-5x^2+9x+6}}dx=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\sqrt{-5x^2+9x+6}=-5\left(x^2-2\frac{9}{10}x+\frac{81}{100}-\frac{6}{5}-\frac{81}{100}\right)=\\ =-5\left(\left(x-\frac{9}{10}\right)^2-\frac{201}{100}\right)=5\left(\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right)\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{7\left(x-\frac{9}{10}\right)+3+\frac{63}{10}}{\sqrt{5\left(\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right)}}dx=\ =\frac{7}{\sqrt{5}}\int\frac{\left(x-\frac{9}{10}\right)}{\sqrt{\left(\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right)}}dx+$$

$$+\frac{93}{10\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right)}}==-\frac{7}{2\sqrt{5}}\int\frac{-2\left(x-\frac{9}{10}\right)}{\sqrt{\left(\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right)}}dx+$$

$$+\frac{93}{10\sqrt{5}}\int\frac{d\left(x-\frac{9}{10}\right)}{\sqrt{\left(\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right)}}=$$

$$=-\frac{7}{2\sqrt{5}}\int\left(\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{93}{10\sqrt{5}}\arcsin\frac{x-\frac{9}{10}}{\sqrt{\frac{201}{100}}}=-\frac{7}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2}+$$

$$+\frac{93}{10\sqrt{5}}\arcsin\frac{10x-9}{\sqrt{201}}+C=-\frac{7}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{6}{5}-x^2+\frac{9}{5}x}+$$

$$+\frac{93}{10\sqrt{5}}\arcsin\frac{10x-9}{\sqrt{201}}+C=-\frac{7}{5}\sqrt{-5x^2+9x+6}+\frac{93}{10\sqrt{5}}\arcsin\frac{10x-9}{\sqrt{201}}+C\,.$$

5.3.

$$\int\frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}4x^2+9x+1=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot\frac{9}{4}+\left(\frac{9}{4}\right)^2-\left(\frac{9}{4}\right)^2+1=\\=\left(2x+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{81}{16}+1=\left(2x+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{65}{16}\end{array}\right\|=$$

$$=\int \frac{(2-5x)\,dx}{\sqrt{\left(2x+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{65}{16}}}=\left\|\begin{matrix} t=2x+\frac{9}{4}; & x=\frac{t}{2}-\frac{9}{8} \\ 2x=t-\frac{9}{4}; & dx=\frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\|==\int \frac{2-5\cdot\left(\frac{t}{2}-\frac{9}{8}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{65}{16}}}\cdot\frac{1}{2}dt=$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2-\frac{5}{2}t+\frac{45}{8}}{\sqrt{t^2-\frac{65}{16}}}dt==\frac{1}{2}\int \frac{\frac{61}{8}-\frac{5}{2}t}{\sqrt{t^2-\frac{65}{16}}}dt=\frac{61}{16}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{65}{16}}}-\frac{5}{4}\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-\frac{65}{16}}}=$$

$$=\left\|\begin{matrix} \left(t^2-\frac{65}{16}\right)'=2t; & tdt=\frac{1}{2}d\left(t^2-\frac{65}{16}\right) \\ d\left(t^2-\frac{65}{16}\right)=2tdt; & \end{matrix}\right\|==\frac{61}{16}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{65}{16}}}-$$

$$\frac{5}{8}\int \frac{d\left(t^2-\frac{65}{16}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{65}{16}}}=\frac{61}{16}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{65}{16}}\right|--\frac{5}{8}\cdot 2\sqrt{t^2-\frac{65}{16}}+C=$$

$$\frac{61}{16}\ln\left|2x+\frac{9}{4}+\sqrt{\left(2x+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{65}{16}}\right|--\frac{5}{4}\cdot\sqrt{\left(2x+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{65}{16}}+C=$$

$$=\frac{61}{16}\ln\left|2x+2.25+\sqrt{4x^2+9x+1}\right|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C\,.$$

5.4.

$$\int\sqrt{6-5x-3x^2}\,dx=\sqrt{3}\int\sqrt{-x^2-\frac{5}{3}x+2dx}=$$

$$=\sqrt{3}\int\sqrt{-\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{25}{36}+2dx}==\sqrt{3}\int\sqrt{\frac{97}{36}-\left(x+\frac{5}{6}\right)^2}\,d\left(x+\frac{5}{6}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left(x+\frac{5}{6}\right)\sqrt{\frac{97}{36}-\left(x+\frac{5}{6}\right)^2}+\frac{97}{36}\arcsin\frac{x+\frac{5}{6}}{\sqrt{\frac{97}{36}}}\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left(x+\frac{5}{6}\right)\sqrt{2-\frac{5}{3}x-x^2}+\frac{97}{36}\arcsin\frac{6x+5}{\sqrt{97}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{12}(6x+5)\sqrt{6-5x-3x^2}+\frac{97\sqrt{3}}{72}\arcsin\frac{6x+5}{\sqrt{97}}+C\ .$$

Інтеграли виду $\int\frac{Mx+N}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx$, $\left(a\neq 0,\ n>1\right)$ беруться із застосуванням тієї ж техніки.

$$\frac{Mx+N}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}=\frac{M}{2a^n}\cdot\frac{2\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{2N}{M}-\frac{b}{a}\right)}{\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n}\ .$$

Інтеграл зведеться до виду $\frac{M}{2a^n}\left(\int\frac{2t}{\left(t^2\pm c_1^2\right)^n}dt+L\int\frac{dt}{\left(t^2\pm c_1^2\right)^n}\right)$.

Перший інтеграл $\int\frac{2t}{\left(t^2\pm c_1^2\right)^n}dt=\int\frac{d\left(t^2\pm c_1^2\right)}{\left(t^2\pm c_1^2\right)^n}=$

$=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\left(t^2\pm c_1^2\right)^{n-1}}+C$, другий може бути знайдений за рекурентною формулою.

Приклади 5.5.

$$I=\int\frac{5x+6}{\left(x^2+6x+15\right)^3}dx=\frac{5}{2}\int\frac{2x+\frac{12}{5}}{\left(x^2+6x+15\right)^3}dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{(2x+6)+\left(\frac{12}{5}-6\right)}{\left(x^2+6x+15\right)^3}dx=\frac{5}{2}\int\frac{(2x+6)dx}{\left(x^2+6x+15\right)^3}+$$

$$+\frac{5}{2}\left(-\frac{18}{5}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+6x+15\right)^3}=\frac{5}{2}\int\frac{d\left(x^2+6x+15\right)}{\left(x^2+6x+15\right)^3}$$

$$-9\int\frac{dx}{\left(x^2+6x+15\right)^3}=\frac{5}{2}I_1-9I_2\ ;$$

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+6x+15}=\left\|\begin{array}{l}x^2+6x+15=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+15=\\=(x+3)^2+6\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{dx}{(x+3)^2+6}=\left\|\begin{array}{l}(x+3)'=1\\d(x+3)=dx\end{array}\right\|=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{6}}+C\ ;$$

$$\int\frac{dx}{(x+3)^2+6}=\left\|\begin{array}{l}x+3=t\\x=t-3\\dx=dt\end{array}\right\|=\int\frac{dt}{t^2+6}=$$

$$=\left\|\begin{array}{ll}u=\frac{1}{t^2+6}; & dv=dt\\du=-\frac{2tdt}{\left(t^2+6\right)^2}; & v=t\end{array}\right\|=\frac{t}{t^2+6}+2\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+6\right)^2}=$$

$$=\frac{t}{t^2+6}+2\int\frac{t^2+6-6}{\left(t^2+6\right)^2}dt=\frac{t}{t^2+6}+2\int\frac{dt}{t^2+6}-12\int\frac{dt}{\left(t^2+6\right)^2}\ ,$$

$$12\int\frac{dt}{\left(t^2+6\right)^2}=\frac{t}{t^2+6}+2\int\frac{dt}{t^2+6}-\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{t}{t^2+6}+$$

$$+\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}==\frac{t}{t^2+6}+\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}.$$

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+6\right)^2}=\frac{1}{12}\left(\frac{t}{t^2+6}+\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}\right)+C,$$

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+6\right)^2}=\left\|\begin{matrix}u=\dfrac{1}{\left(t^2+6\right)^2}; & dv=dt\\ du=-\dfrac{2\cdot 2tdt}{\left(t^2+6\right)^3}=-\dfrac{4tdt}{\left(t^2+6\right)^3};\ v=t & \end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{t}{\left(t^2+6\right)^2}+4\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+6\right)^3}=\frac{t}{\left(t^2+6\right)^2}+4\int\frac{t^2+6-6}{\left(t^2+6\right)^3}dt=$$

$$=\frac{t}{\left(t^2+6\right)^2}+4\int\frac{dt}{\left(t^2+6\right)^2}-24\int\frac{dt}{\left(t^2+6\right)^3},$$

$$24\int\frac{dt}{\left(t^2+6\right)^3}=\frac{t}{\left(t^2+6\right)^2}+4\int\frac{dt}{\left(t^2+6\right)^2}-\int\frac{dt}{\left(t^2+6\right)^2}=$$

$$=\frac{t}{\left(t^2+6\right)^2}+3\int\frac{dt}{\left(t^2+6\right)^2},$$

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+6\right)^3}=\frac{1}{24}\frac{t}{\left(t^2+6\right)^2}+\frac{3}{24}\cdot\frac{1}{12}\left(\frac{t}{t^2+6}+\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}\right)+$$

$$+C=\frac{x+3}{24\left(\left(x+3\right)^2+6\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{24\cdot 4}\left(\frac{x+3}{(x+3)^2+6}+\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{6}}\right)+C=$$

$$=\frac{x+3}{24\left((x+3)^2+6\right)^2}+\frac{1}{96}\frac{x+3}{(x+3)^2+6}+\frac{1}{96\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{6}}+C.$$

Таким чином, остаточно маємо

$$I=\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\left(x^2+6x+15\right)^2}-$$

$$-9\left(\frac{1}{96\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{6}}+\frac{1}{96}\frac{x+3}{(x+3)^2+6}+\frac{1}{24}\frac{x+3}{\left((x+3)^2+6\right)^2}\right)+C=$$

$$=\frac{-5}{4\left(x^2+6x+15\right)^2}-$$

$$-\frac{3}{32\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{6}}-\frac{3}{32}\frac{x+3}{\left(x^2+6x+15\right)}-\frac{3}{8}\frac{x+3}{\left(x^2+6x+15\right)^2}+C.$$

Інтеграли виду $\int\frac{dx}{(Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ обчислюються за допомогою заміни $t=\frac{1}{Mx+N}$.

Приклад 5.6.

$$\int\frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2+6x+15}}=\left\|\begin{matrix}t=\frac{1}{x-4};\;\; x-4=\frac{1}{t}\\ x=\frac{1}{t}+4;\;\; dx=-\frac{dt}{t^2}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}+4\right)^2+6\left(\frac{1}{t}+4\right)+15}}=-\int \frac{dt}{t\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{8}{t}+16+\frac{6}{t}+24+15}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{55t^2+14t+1}}=$$

$$=\left\| \begin{array}{l} 55\left(t^2+\frac{14t}{55}+\frac{1}{55}\right)=55\left(t^2+2\cdot\frac{7}{55}t+\left(\frac{7}{55}\right)^2-\left(\frac{7}{55}\right)^2+\frac{1}{55}\right)= \\ =55\left(\left(t+\frac{7}{55}\right)^2-\frac{45}{55^2}+\frac{1}{55}\right)=55\left(\left(t+\frac{7}{55}\right)^2+\frac{55-45}{55^2}\right)= \\ =55\left(\left(t+\frac{7}{55}\right)^2+\frac{2}{605}\right) \end{array} \right\|=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{55}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{7}{55}\right)^2+\frac{2}{605}}}=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{55}}\ln\left|t+\frac{7}{55}+\sqrt{t^2+\frac{14}{55}t+\frac{1}{55}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{55}}\ln\left|\frac{1}{x-4}+\frac{7}{55}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-4}\right)^2+\frac{14}{55(x-1)}+\frac{1}{55}}\right|+C.$$

<u>Задачі та вправи для самостійного розв'язання:</u>

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{3x^2-4x+7}$. (Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{17}}\operatorname{arctg}\frac{3x-2}{\sqrt{17}}+C$.)

2. $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx.$

(Відповідь: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$.)

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$

(Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$.)

4. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

(Відповідь: $\sqrt{x^2+2x+2}+2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$.)

5. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+6x+2}}\,dx.$

(Відповідь: $2\sqrt{x^2+6x+2}-\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+2}\right|+C$.)

6. $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}\,dx.$

(Відповідь: $\frac{3}{8}\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\right|+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{2}+C$.)

7. $\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx.$

(Відповідь: $5\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$.)

8. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

(Відповідь: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$.)

9. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x+x^2}}$.

(Відповідь: $\sqrt{3-2x+x^2}+\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+2}\right|+C$.)

10. $\int \frac{3x-7}{x^2+4x+5}dx$.

(Відповідь: $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-13\operatorname{arctg}(x+2)+C$.)

§6. Інтегрування раціональних функцій

Простими дробами називаються раціональні функції наступних чотирьох типів:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k \in \mathbb{N} \diagup \{1\}$;

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$;

IV. $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $k \in \mathbb{N} \diagup \{1\}$, $p^2-4q<0$.

Інтеграли від дробів перших двох типів - табличні інтеграли:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = \ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{-k+1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C;$$

Інтегрування дробів II і IV типів розглянуто в пункті 6.2.4. (це інтеграли, що містять квадратний тричлен у знаменнику).

Алгоритм обчислення інтегралів від раціональних функцій, тобто інтегралів виду:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + ... + b_1 x + b_0}dx$$

полягає в наступному:

1. Якщо дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ неправильна $(n \ge m)$, її інтегрування зводиться до інтегрування многочлена і правильного дробу. Для цього вона представляється у вигляді

$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = L_{n-m}(x) + \dfrac{P_{n1}(x)}{Q_m(x)},\ n1 < m$, де $L_{n-m}(x)$, $P_{n1}(x)$ - многочлени, що задовольняють виразу $P_n(x) = L_{n-m}(x) \cdot Q_m(x) + P_{n1}(x)$.

2. Якщо дріб правильна, тобто $n < m$, то для розкладання $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на прості дроби, знаменник $Q_m(x)$ правильного дробу представляється у вигляді добутку $Q_m(x) = b_m(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot$ $\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_2}...(x^2+p_1x+q_1)^{l_s}$, де $x_1, x_2, ..., x_s$ - попарно різні дійсні корені цього многочлена, $k_1, k_2, ..., k_s$ - їх кратності, квадратні тричлени (відповідні попарно різним парам сполучених коренів $\alpha_j \pm i\beta_j$ кратностей $l_1, l_2, ..., l_r$) $x^2 + p_jx + q_j$, $j = 1, 2, ..., r$ многочлени з дійсними коефіцієнтами не мають дійсних коренів (тобто $p^2 - 4q < 0$), $k_1 + k_2 + ... + k_s + 2(l_1 + l_2 + ... + l_r) = m$.

- Якщо у розкладі $Q_m(x)$ x_i - простий корінь, то множнику $(x - x_i)$ відповідає в розкладі дріб I типу: $\dfrac{A}{x - x_i}$.
- Якщо у розкладі $Q_m(x)$ x_i - корінь кратності k_i, то множнику $(x-x_i)^{k_i}$ відповідають в розкладі k_i дробів I та II типів: $\dfrac{A_1}{(x-x_i)^{k_1}} + \dfrac{A_2}{(x-x_i)^{k_1-1}} + \dfrac{A_3}{(x-x_i)^{k_1-2}} + ... + \dfrac{A_{k_1}}{x-x_i}$.

- Якщо у розкладі $Q_m\left(x\right)$ $x^2+p_i x+q_i$ - квадратний тричлен не має дійсних коренів ($p^2-4q<0$), то у розкладі отримаємо дріб III типу: $\dfrac{M_i x+N_i}{x^2+p_i x+q_i}$.
- Якщо у розкладі $Q_m\left(x\right)$ квадратний тричлен, який не має дійсних коренів, стоїть у ступені k_i ($\left(x^2+p_i x+q_i\right)^{k_i}$ і $p^2-4q<0$). Тоді у розкладі отримуємо k_i дробів III та IV видів: $\dfrac{M_1+N_1 x}{\left(x^2+p_i x+q_i\right)^{k_1}}+\dfrac{M_2+N_2 x}{\left(x^2+p_i x+q_i\right)^{k_i-1}}+\ldots+\dfrac{M_{k_1}+N_{k_1} x}{x^2+p_i x+q_i}$.

3. Виписується зображення дробу у вигляді суми найпростіших дробів з невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}=\frac{A_{1,1}}{x-x_1}+\frac{A_{1,2}}{\left(x-x_1\right)^2}+\frac{A_{1,3}}{\left(x-x_1\right)^3}+\ldots+\frac{A_{1,\mathrm{k}_1}}{\left(x-x_1\right)^{k_1}}+\frac{A_{2,1}}{x-x_2}+$$

$$+\frac{A_{2,2}}{\left(x-x_2\right)^2}+\ldots+\frac{A_{2,k_2}}{\left(x-x_2\right)^{k_2}}+\ldots+$$

$$\frac{A_{l,1}}{x-x_l}+\frac{A_{l,2}}{\left(x-x_l\right)^2}+\ldots+\frac{A_{l,k_2}}{\left(x-x_l\right)^{k_2}}+$$

$$+\frac{M_{1,1}x+N_{1,1}}{x^2+p_1 x+q_1}+\frac{M_{1,2}x+N_{1,2}}{\left(x^2+p_1 x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{M_{1,l_1}x+N_{1,l_1}}{\left(x^2+p_1 x+q_1\right)^{l_1}}+$$

$$+\frac{M_{2,1}x+N_{2,1}}{x^2+p_2 x+q_2}+\frac{M_{2,2}x+N_{2,2}}{\left(x^2+p_2 x+q_2\right)^2}+\ldots+\frac{M_{2,l_2}x+N_{2,l_2}}{\left(x^2+p_2 x+q_2\right)^{l_2}}+\ldots+$$

$$+\frac{M_{\mathrm{r},1}x+N_{\mathrm{r},1}}{x^2+p_r x+q_r}+\frac{M_{r,2}x+N_{r,2}}{\left(x^2+p_r x+q_r\right)^2}+\ldots+\frac{M_{r,2}x+N_{r,2}}{\left(x^2+p_r x+q_r\right)^{l_r}}.$$

4. Права частина розкладу приводиться до спільного знаменника. Спільні знаменники ліворуч і праворуч скорочуються, і з умови рівності чисельників складається система лінійних рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів. Виконується інтегрування простих дробів.

Приклади:

6.1. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+3)}dx$. Дріб неправильна, тому виділяємо цілу частину:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^3}{x^2+2x-3} = x-2+\frac{5x-6}{(x-1)(x+3)},$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+x-3 \\ \cline{2-2} -\underline{\left(x^3+2x^2-3x\right)} & x-2 \\ -2x^2+3x & \\ -\underline{\left(-2x^2-2x+6\right)} & \\ 5x-6 & \end{array}$$

Правильну дріб представляємо у вигляді: $\frac{5x-6}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$.

Наводимо до спільного знаменника: $\frac{5x-6}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} =$

$= \frac{(A+B)x+(3A-B)}{(x-1)(x+3)}$.

Рівність чисельників:

$A(x+3)+B(x-1) = 5x-6$.

Оскільки знаменник має прості корені, то скористаємося так званим методом «викреслювання»: підставимо в цю рівність корінь знаменника $x=1$, отримаємо $4A = 5-6$, $A = -\dfrac{1}{4}$. При $x = -3$ отримаємо $-4B = -15-6$, $B = \dfrac{21}{4}$.

Переконаємося, що той же результат маємо при порівнянні коефіцієнтів при ступенях x. Отримаємо систему

$$\begin{array}{l|l} x^1 & A+B=5 \\ x^0=1 & 3A-B=-6 \end{array} \quad \begin{cases} B=5-A \\ 3A-(5-A)=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=5-A \\ 4A=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

Отримали той самий результат $\begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = 5+\dfrac{1}{4} = \dfrac{21}{4} \end{cases}$.

Остаточно маємо:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x+3)}dx = \int \left(x-2-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{21}{4(x+3)} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{21}{4}\ln|x+3| + C.$$

6.2.

$$I = \int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx = \int \frac{\left(x^3-x^2\right)+x^2+1}{x^3-x^2}dx = \int \left(1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}\right)dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}dx$$

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1} =$$

$$= \frac{A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2 = x^2+1 \qquad \text{(N)}$$

Маємо простий корінь $x=0$ і дійсний корінь кратності два $x=1$. Підставимо ці дійсні корені у ліву та праву частини рівності (N)

$$\begin{array}{l|l} x=0 & A(-1)=1 \\ x=1 & C\cdot 1^2=1+1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=-1; \\ C=2. \end{cases}$$

Для знаходження коефіцієнта B прирівнюємо коефіцієнти при x^2:

$$Ax-A+Bx^2-Bx+Cx^2=x^2+1$$

$$(B+C)x^2+(A-B)x-A=x^2+1$$

$$B+C=1$$

$$B=1-C$$

$$B=1-2=-1$$

$$\int\frac{x^2+1}{x^3-x^2}dx=\int\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}\right)dx=-\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x}+$$

$$+2\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{x}-\ln|x|+2\int\frac{d(x-1)}{x-1}=\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+\tilde{C}$$

$$I=x+\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C.$$

6.3. $\displaystyle\int\frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}=$

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\left\|\begin{array}{l} x^2-2x+5=0 \\ D=4-20=-16<0 \end{array}\right\|=\frac{A}{x-1}+$$

$$+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}=\frac{A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)}$$

$$A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)=2x^2-3x-3$$

$$x=1|\;A(1-2+5)=2-3-3$$

$$4A=-4\Rightarrow A=-1$$

$$Ax^2-2Ax+5A+Bx^2+Cx-Bx-C=2x^2-3x-3$$

$$\begin{array}{l|c} x^2 & A+B=2 \\ x^1 & -2A+C-B=-3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} B=2-A \\ C=-3+2A+B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=3 \\ C=-2 \end{cases}$$

$$\int \frac{\left(2x^2-3x-3\right)dx}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)} = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2-2x+5} \right) dx = -\int \frac{dx}{x-1} +$$

$$+\int \frac{3x-2}{x^2-2x+5} dx$$

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+5} dx = \left\| \begin{array}{l} x^2-2x+5 = x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2+5= \\ =(x-1)^2+4 \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{3x-2}{(x-1)^2+4} dx = \left\| \begin{array}{l} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right\| = \int \frac{3(t+1)-2}{t^2+4} dt =$$

$$= \int \frac{3t+1}{t^2+4} dt = 3\int \frac{tdt}{t^2+4} + \int \frac{dt}{t^2+4} = \left\| \begin{array}{l} \left(t^2+4\right)' = 2t \\ d\left(t^2+4\right) = 2tdt \\ tdt = \frac{1}{2} d\left(t^2+4\right) \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{d\left(t^2+4\right)}{t^2+4} + \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{3}{2} \ln\left|t^2+4\right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{2} \ln\left|(x-1)^2+4\right| + +\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C = \frac{3}{2} \ln\left|x^2-2x+5\right| +$$

$$+\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C .$$

6.4.

$$\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx = \left\| \begin{array}{l} x^4+6x^2+8=0 \\ x^2=t \\ t^2+6t+8=0 \\ D=36-32=4 \\ t_{1,2}=\dfrac{-6\pm 2}{2}=\left[\begin{array}{l}-4\\-2\end{array}\right. \\ t^2+6t+8=(t+2)(t+4) \\ x^4+6x^2+8=\left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right) \end{array} \right\| =$$

$$=\int \frac{x^3-6}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right)}dx = \frac{x^3-6}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right)} = \frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4} =$$

$$= \frac{(Ax+B)\left(x^2+4\right)+(Cx+D)\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right)}$$

$$(Ax+B)\left(x^2+4\right)+(Cx+D)\left(x^2+2\right)=x^3-6$$

$$Ax^3+Bx^2+4Ax+4B+Cx^3+Dx^2+2Cx+2D=x^3-6$$

$$\begin{array}{l|c} x^3 & A+C=1 \\ x^2 & B+D=0 \\ x^1 & 4A+2C=0 \\ x^0 & 4B+2D=-6 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=1-C \\ B=-D \\ C=-2A \\ D=-3-2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1+2A \\ B=-D \\ C=-2A \\ D=-3+2D \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -A=1 \\ B=-D \\ C=-2A \\ -D=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-3 \\ C=2 \\ D=3 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^3-6}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right)}dx = \int\left(\frac{-x-3}{x^2+2}+\frac{2x+3}{x^2+4}\right)dx =$$

$$= \int\frac{-x-3}{x^2+2}dx + \int\frac{2x+3}{x^2+4}dx = -\int\frac{xdx}{x^2+2} - 3\int\frac{dx}{x^2+2} + \int\frac{2xdx}{x^2+4} +$$

$$+3\int\frac{dx}{x^2+4} = \left\|\begin{matrix} \left(x^2+2\right)' = 2x & \left(x^2+4\right)' = 2x \\ d\left(x^2+2\right) = 2xdx & d\left(x^2+4\right) = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2+2\right) & xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2+4\right) \end{matrix}\right\| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2\right)}{x^2+2} - 3\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} + \int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4} +$$

$$+3\int\frac{dx}{x^2+(2)^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| - 3\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} +$$

$$+\ln\left|x^2+4\right| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C\,.$$

<u>Задачі та вправи для самостійного розв’язання:</u>

Обчислити інтеграли:

1. $\int\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}dx.$

(Відповідь: $\ln\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{5}{4}\ln|x-2| - \frac{5}{12}\ln|x+2| + C$.)

2. $\int\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}dx.$ (Відповідь: $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^3 - \frac{2}{x+2} + C$.)

3. $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx.$

(Відповідь: $3\ln|x-1|-2\ln|x-2|-\ln|x+2|+C$.)

4. $\int \frac{x^4-x+1}{x\left(x^2-4\right)}dx$.

(Відповідь: $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{13}{8}\ln|x-2|+\frac{19}{8}\ln|x+2|+C$.)

5. $\int \frac{1-3x}{4-x^2}dx$. (Відповідь: $\frac{5}{4}\ln|2-x|+\frac{7}{4}\ln|2+x|+C$.)

6. $\int \frac{x^3+4}{x(x-1)\left(x^2+4\right)}dx$.

(Відповідь: $-\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.)

7. $\int \frac{2x-3}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx$.

(Відповідь: $\frac{5}{2}\ln|x-4|-3\ln|x-3|+\frac{1}{2}\ln|x-2|+C$.)

8. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$. (Відповідь: $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$.)

9. $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2\left(x^2-x+1\right)}dx$.

(Відповідь: $\frac{3}{x+1}+\ln\sqrt{x^2-x+1}+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.)

10. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)}dx$.

(Відповідь: $\frac{x^2}{2}+7\ln|x-4|-3\ln|x-3|+C$.)

§7. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від $\sin x$, $\cos x$

Розглянемо інтеграли $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де раціонально залежна від $\sin x$, $\cos x$ функція $R(\sin x, \cos x)$.

Універсальна тригонометрична підстановка. Перехід у підінтегральної функції до змінної $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, $(-\pi < x < \pi)$ перетворює $R(\sin x, \cos x)$ у функцію, раціонально залежну від t. Виразимо $\sin x$, $\cos x$, dx через t.

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)}{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)}{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\mathrm{arctg}t\,;\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

У результаті всі компоненти підінтегральної функції виражаються через раціонально залежні від t вирази:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int \tilde{R}(t)dt,$$

де $\tilde{R}(t)$ - раціональна функція.

Проте, часто універсальна тригонометрична підстановка приводить до дуже громіздких раціональних дробів, в яких, зокрема, практично неможливо знайти корені знаменника. Тому при нагоді застосовуються приватні підстановки, які теж раціоналізують підінтегральну функцію, але приводять до менш складних дробів.

Приватні тригонометричні підстановки.

1. Підінтегральна функція непарна щодо $\sin x$, тобто $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$. У цьому випадку застосовується підстановка $t=\cos x$.

2. Підінтегральна функція непарна щодо $\cos x$, тобто $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$. У цьому випадку застосовується підстановка $t=\sin x$.

3. Підінтегральна функція парна щодо $\sin x$, $\cos x$, тобто $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$. У цьому випадку застосовується підстановка $t=\mathrm{tg}x$ (або $t=\mathrm{ctg}x$).

Вирази $\sin x$, $\cos x$, dx через $\mathrm{tg}x$:

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,;\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,;\ x=\mathrm{arctg}t\,;\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\,.$$

4. Інтегрування добутку парних ступенів $\sin x$, $\cos x$. При обчисленні інтегралів $\int \sin^{2n}x\cos^{2n}xdx$ слід понизити ступінь тригонометричних функцій переходом до косинусу подвійного кута:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\,.$$

5. Інтегрування добутку синусів і косинусів кратних дуг. При знаходженні інтегралів виду $\int \sin mx\cdot\cos nxdx$, $\int \sin mx\cdot\sin nxdx$, $\int \cos mx\cdot\cos nxdx$, доцільно використовувати тригонометричні формули:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big);$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big);$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big).$$

Задача зводиться до інтегрування лінійної комбінації таких же функцій, але з іншими аргументами.

Приклади:

7.1.

$$\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\left\|t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\|=\int\frac{2\dfrac{dt}{1+t^2}}{8-4\dfrac{2t}{1+t^2}+7\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{8+8t^2-8t+7-7t^2}=\int\frac{2dt}{t^2-8t+15}=\int\frac{2d(t-4)}{(t-4)^2-1^2}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(t-4)-1}{(t-4)+1}\right|+C=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C.$$

7.2. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx$. Підінтегральна функція непарна щодо $\sin x$: $\frac{(-\sin x)^3}{\cos x-3}=-\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}$, тому

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3}\,dx = \left\| \begin{matrix} t = \cos x; & x = \arccos t \\ \sin x = \sqrt{1-t^2}; & dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t-3} \cdot \left(-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right) = -\int \frac{1-t^2}{t-3}\,dt = \int \frac{t^2-9+8}{t-3}\,dt =$$

$$= \int (t+3)\,dt + 8\int \frac{dt}{t-3} = \frac{t^2}{2} + 3t + 8\ln|t-3| + C = \frac{\cos^2 x}{2} +$$

$$+3\cos x + 8\ln|\cos x - 3| + C.$$

7.3.

$$\int \sin\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{4}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin\frac{7x}{12}\,dx + \frac{1}{2}\int \sin\frac{x}{12}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{7}\cos\frac{7x}{12} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 12\cos\frac{x}{12} + C = -\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{12} - 6\cos\frac{x}{12} + C.$$

7.4.

$$\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin^2 x dx =$$

$$= \int \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 2x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \sin^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\sin^2 2x + \sin^2 2x \cos 2x\right) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx +$$

$$+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx +$$

$$+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx +$$

$$+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2xdx=\left\|\begin{array}{ll}(4x)'=4; & (\sin 2x)'=2\cos 2x\\ d(4x)=4dx; & d(\sin 2x)=2\cos 2xdx\\ dx=\frac{1}{4}d(4x); & \cos 2xdx=\frac{1}{2}d(\sin 2x)\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}\int\cos 4xd(4x)+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3}+C=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

7.5.

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\sin^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)}=\int\frac{dx}{\sin^2 x\left(1+\mathrm{ctg}^2 x+1\right)}=$$

$$=\int\frac{1}{2+\mathrm{ctg}^2 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=\left\|\begin{array}{l}(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}\\ d(\mathrm{ctg}x)=-\frac{dx}{\sin^2 x}\\ \frac{dx}{\sin^2 x}=-d(\mathrm{ctg}x)\end{array}\right\|=$$

$$=-\int\frac{d(\mathrm{ctg}x)}{\mathrm{ctg}^2 x+\left(\sqrt{2}\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{ctg}x}{\sqrt{2}}+C.$$

7.6.

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=\left\|\begin{array}{l}\sin x\cdot\cos x=\frac{\sin 2x}{2}\\ \sin^4 x\cos^4 x=\frac{\sin^4 2x}{2^4}=\frac{\sin^4 2x}{16}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{16dx}{\sin^4 2x}=16\int\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 2x}=$$

$$=16\int\left(1+\mathrm{ctg}^2 2x\right)\frac{dx}{\sin^2 2x}=\left\|\begin{matrix}(\mathrm{ctg}2x)'=\dfrac{-2}{\sin^2 2x}\\ d(\mathrm{ctg}2x)=\dfrac{-2dx}{\sin^2 2x}\\ \dfrac{dx}{\sin^2 2x}=-\dfrac{1}{2}d(\mathrm{ctg}2x)\end{matrix}\right\|=$$

$$=16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int\left(1+\mathrm{ctg}^2 2x\right)d(\mathrm{ctg}2x)=-8\int d(\mathrm{ctg}2x)-$$

$$-8\int \mathrm{ctg}^2 2x d(\mathrm{ctg}2x)=-8\mathrm{ctg}2x-\frac{8}{3}\mathrm{ctg}^3 2x+C\ .$$

Задачі та вправи для самостійного розв'язання:

Обчислити інтеграли:

1. $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

(Відповідь: $\ln\left|\dfrac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-5}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C$.)

2. $\int\frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$.

(Відповідь: $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x-2)+C$.)

3. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x-3}dx$.

(Відповідь: $\frac{1}{2}\cos^2 x+3\cos x+8\ln|\cos x-3|+C$.)

4. $\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \, dx$.

(Відповідь: $\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{6}\cos 6x\right) + C$.)

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \cdot \sin x}}$.

(Відповідь: $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}C$.)

6. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx$.

(Відповідь: $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$.)

7. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$.

(Відповідь: $\frac{-2}{3 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$.)

8. $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x \cos x + 9\cos^3 x} dx$.

(Відповідь: $\ln\left(\operatorname{tg}^2 x + 9\right) + \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{3} + C$.)

9. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x}$.

(Відповідь: $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$.)

10. $\int \frac{1 + 3\cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx$.

(Відповідь: $\ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{3}{2}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1\right) + \frac{3}{2}x + C$.)

§8. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt[n]{x}\right)dx$, де n - натуральне число, $R\left(x,\sqrt[n]{x}\right)$ – функція, раціонально залежна від своїх аргументів зводяться до інтегралів від раціональної функції заміною $x=t^n$:

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{x}\right)dx=\left\|\begin{matrix}\sqrt[n]{x}=t\\ x=t^n\\ dx=nt^{n-1}dt\end{matrix}\right\|=\int R\left(t^n,r\right)nt^{n-1}dt=n\int \tilde{R}\left(t\right)dt,$$

де $\tilde{R}\left(t\right)$ - раціональна функція аргументу t.

До розглянутого типу зводяться інтеграли виду:

- $\int R\left(x,x^p,x^q,x^r,...\right)dx$, де p, q, r..., раціональні числа, так як, якщо n - спільний знаменник дробів p, q, r..., то підінтегральна функція раціонально залежить від x та $x^{\frac{1}{n}}$. Підстановка $x=t^n$ раціоналізує підінтегральну функцію, тобто зводить її до раціональної функції змінної t.
- Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, де a, b, c, d - дійсні постійні, раціоналізуються підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$.
- Розглянемо більш загальний випадок: $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right)dx$.

  Позначимо через n - спільний знаменник дробів $\frac{p_1}{q_1}$,

$\frac{p_2}{q_2}$, …, $\frac{p_k}{q_k}$. Заміна $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$ призведе даний інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Приклади:

8.1.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx = \left\| \begin{array}{l} x^{\frac{1}{2}}; x^{\frac{2}{3}}; x \to \text{степені } \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \Rightarrow \\ \text{спільний знаменник } n=6 \\ x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{array} \right\| = \int \frac{t^3}{t^6-t^4}6t^5dt =$$

$$6\int \frac{t^4}{t^2-1}dt = = 6\int \frac{t^4-1+1}{t^2-1}dt = 6\int \left(t^2+1\right)dt + 6\int \frac{dt}{t^2-1} = 2t^3+6t+$$

$$+3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = 2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C .$$

8.2.

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{\left(1+x\right)^2} = \left\| \begin{array}{l} \frac{1-x}{1+x}=t^3 \\ x=\frac{1-t^3}{1+t^3}=-1+\frac{2}{1+t^3} \\ dx=-\frac{6t^2dt}{\left(1+t^3\right)^2};\ \ 1+x=\frac{2}{1+t^3} \end{array} \right\| =$$

$$=-\frac{6}{4}\int t\left(1+t^3\right)^2\frac{t^2dt}{\left(1+t^3\right)^2} = -\frac{3}{2}\int t^3dt = -\frac{3}{8}t^4+C =$$

$$=-\frac{3}{48}\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4}+C .$$

8.3. $$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx = \left\| \begin{array}{l} \sqrt{x+1}=t \\ x+1=t^2 \\ x=t^2-1 \\ dx=2tdt \end{array} \right\| = \int \frac{t+2}{t^4-t}\cdot 2tdt =$$

$$=2\int \frac{t(t+2)}{t(t^3-1)}\,dt = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}\,dt =$$

$$\frac{t+2}{t^3-1} = \frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1} =$$

$$= \frac{A(t^2+t+1)+(Bt+C)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$A(t^2+t+1)+(Bt+C)(t-1)=t+2$$

$$t=1 \,|\, A(1+1+1)=1+2$$

$$3A=3 \Rightarrow A=1$$

$$At^2+At+A+Bt^2+Ct-Bt-C=t+2$$

$$(A+B)t^2+(A+C-B)t+(A-C)=t+2$$

$$\begin{array}{l|l} t^2 & A+B=0 \\ t^0 & A-C=2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ C=A-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ C=1-2=-1 \end{cases}$$

$$=2\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{-t-1}{t^2+t+1}\right)dt = 2\int\frac{dt}{t-1}-2\int\frac{t+1}{t^2+t+1}\,dt$$

$$\int\frac{dt}{t-1} = \left\| \begin{array}{l} (t-1)'=1 \\ d(t-1)=dt \end{array} \right\| = \int\frac{d(t-1)}{t-1} = \ln|t-1|+C_1$$

$$\int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt = \left\| t^2 + 2\cdot t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \right\| =$$

$$= \int \frac{t+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt = \int \frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt = \int \frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \left\| \begin{array}{l} d\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) = 2\left(t+\frac{1}{2}\right)dt \\ \left(t+\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{2}d\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) \\ d\left(t+\frac{1}{2}\right) = dt \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+t+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C_2$$

$$2\int\frac{dt}{t-1} - 2\int\frac{t+1}{t^2+t+1}dt = 2\cdot\ln|t-1| - 2\left(\frac{1}{2}\ln\left|t^2+t+1\right| +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C = \ln(t-1)^2 - \ln\left|t^2+t+1\right| -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\ln\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\sqrt{x+1}+1}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C\ .$$

8.4.

$$\int\frac{x^2+\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}}dx=\left\|\begin{array}{ll}\frac{1}{2};\frac{1}{3}\Rightarrow n=6; & x=t^6-2\\ x+2=t^6; & dx=6t^5dt\\ t=\sqrt[6]{x+2} & \end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{\left(t^6-2\right)^2+\left(t^6\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(t^6\right)^{\frac{1}{3}}}\cdot 6t^5dt=6\int\frac{\left(t^6-2\right)^2+t^3}{t^2}\cdot t^5dt=$$

$$=6\int\left(t^{12}-4t^6+4+t^3\right)t^3dt=6\int\left(t^{15}-4t^9+t^6+4t^3\right)dt=$$

$$=6\int t^{15}dt-6\cdot 4\int t^9dt+6\int t^6dt+6\cdot 4\int t^3dt=6\frac{t^{16}}{16}-24\frac{t^{10}}{10}+$$

$$+6\frac{t^7}{7}+24\frac{t^4}{4}+C=\frac{3}{8}\cdot\left(x+2\right)^{\frac{16}{6}}-\frac{12}{5}\left(x+2\right)^{\frac{10}{6}}+$$

$$+\frac{6}{7}\left(x+2\right)^{\frac{7}{6}}+6\left(x+2\right)^{\frac{4}{6}}+C=\frac{3}{8}\left(x+3\right)^{\frac{8}{3}}-\frac{12}{5}\left(x+2\right)^{\frac{5}{3}}+$$

$$+\frac{6}{7}\left(x+2\right)^{\frac{7}{6}}+6\left(x+2\right)^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{8}\left(x+2\right)^2\sqrt[3]{\left(x+2\right)^2}-$$

$$-\frac{12}{5}\left(x+2\right)\sqrt[3]{\left(x+2\right)^2}+\frac{6}{7}\left(x+2\right)\sqrt[6]{\left(x+2\right)}+6\sqrt[3]{\left(x+2\right)^2}+C\ \mathbf{.}$$

<u>Задачі та вправи для самостійного розв’язання:</u>

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$.

(Відповідь: $2\sqrt{x} - 4\ln\left|2+\sqrt{x}\right| + C$.)

2. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx.$

(Відповідь: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\text{arctg}\sqrt[6]{x} + C$.)

3. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$.

(Відповідь: $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right) + C$.)

4. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

(Відповідь: $x - 2\sqrt{x} + \ln\left(1+\sqrt{x}\right)^2 + C$.)

5. $\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$.

(Відповідь: $\ln\left|3\sqrt[3]{x}+1\right|+C$.)

6. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

(Відповідь: $2\left(\sqrt{x+4}+\ln\left|\frac{2-\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}}\right|\right)+C$.)

7. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$.

(Відповідь: $6\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}-\frac{\sqrt{x}}{3}+\sqrt[6]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C$.)

8. $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

(Відповідь: $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$.)

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

(Відповідь: $\sqrt{2x+1}+2\sqrt[4]{2x+1}+2\ln\left|\sqrt[4]{2x+1}-1\right|+C$.)

10. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx$.

(Відповідь: $\frac{6}{5}\left(x^{\frac{5}{6}}+2x^{\frac{5}{12}}+2\ln\left|x^{\frac{5}{12}}-1\right|\right)+C$.)

§9. Тригонометричні підстановки для інтегралів виду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Після виділення повного квадрата у тричлені та відповідної лінійної заміни змінної інтеграл зводиться, в залежності від знаків a та дискриминанта тричлена, до інтеграла одного з наступних трьох видів: $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$.

Потім:

1. $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ раціоналізується підстановкою $x=a\sin t$ (або $x=a\cos t$).
2. $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ раціоналізується підстановкою $x=\dfrac{a}{\sin t}$ (або $x=\dfrac{a}{\cos t}$).
3. $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ раціоналізується підстановкою $x=a\,\mathrm{tg}t$ (або $x=a\,\mathrm{ctg}\,t$).

Приклади:

9.1.

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2-1}}=\left\|\begin{matrix}x=\dfrac{1}{\cos t}; & dx=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt\\ x^2-1=\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} & \end{matrix}\right\|=$$

$$=\int\frac{\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}+2\right)\cdot\sqrt{\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}}=$$

$$=\int\frac{\cos tdt}{1+2\cos^2 t}=\left\|\begin{array}{l}\cos^2 t=1-\sin^2 t\\ 1+2\cos^2 t=1+2\left(1-\sin^2 t\right)=\\ =3-\sin^2 t\\ d\left(\sin t\right)=\cos tdt\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{d\left(\sin t\right)}{3-2\sin^2 t}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\sqrt{2}\sin t\right)}{2\sin^2 t-3}=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin t-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sin+\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin t+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sin-\sqrt{3}}\right|+C=$$

$$=\left\|\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\cos t\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2\left(x^2-1\right)}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2\left(x^2-1\right)}-\sqrt{3}x}\right|+C.$$

9.2.

$$\int\frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}dx=\left\|\begin{array}{l}x=2\mathrm{tg}t;\qquad \mathrm{tg}t=\dfrac{x}{2}\\ dx=\dfrac{2dt}{\cos^2 t};\quad t=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}\\ \sqrt{4+x^2}=\sqrt{4+4\mathrm{tg}^2 t}=2\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}=\\ =2\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}=\dfrac{2}{\cos t}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{\frac{2}{\cos t}\cdot\frac{2dt}{\cos^2 t}}{tg^6 t}=4\int\frac{dt}{\cos^3 t\cdot\frac{\sin^6 t}{\cos^6 t}}=4\int\frac{\cos^3 tdt}{\sin^6 t}=$$

$$=4\int\frac{\cos^2 t\cdot\cos tdt}{\sin^6 t}=4\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^6 t}\cos tdt=$$

$$=4\int\left(\sin^{-6}t-\sin^{-4}t\right)\cos t dt=\left\|\begin{matrix}(\sin t)'=\cos t\\ d(\sin t)=\cos t dt\end{matrix}\right\|=$$

$$=4\int\sin^{-6}t d(\sin t)-4\int\sin^{-4}t d(\sin t)=4\cdot\frac{\sin^{-5}t}{-5}-$$

$$-4\cdot\frac{\sin^{-3}t}{-3}+C=-\frac{4}{5}\frac{1}{\sin^5 t}+\frac{4}{3}\frac{1}{\sin^3 t}+C=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\sin t=\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=\sqrt{\sin^2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}=\sqrt{1-\cos^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)}=\\ =\sqrt{1-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)}}=\sqrt{1-\dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=\\ =\sqrt{1-\dfrac{4}{4+x^2}}=\sqrt{\dfrac{4+x^2-4}{4+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\frac{4}{5}\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right)^5}+\frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right)^3}+C=-\frac{4}{5}\frac{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^5}{x^5}+$$

$$+\frac{4}{3}\frac{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^3}{x^3}+C=-\frac{4}{5}\frac{\left(4+x^2\right)^2\sqrt{4+x^2}}{x^5}+$$

$$+\frac{4}{3}\frac{\left(4+x^2\right)\sqrt{4+x^2}}{x^3}+C.$$

9.3.

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}=\left\|\begin{matrix}x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin t}; & \mathrm{sint}=\dfrac{\sqrt{3}}{x}\\ dx=-\dfrac{\sqrt{3}\cos t}{\sin^2 t}dt; & \mathrm{t}=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{x}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\int\frac{-\frac{\sqrt{3}\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{9}{\sin^4 t}\cdot\sqrt{\frac{3}{\sin^2 t}-3}}=-\sqrt{3}\int\frac{\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}}{\frac{9}{\sin^4 t}\cdot\sqrt{3}\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}\int\frac{\cos t\sin^4 t\sin t}{\sin^2 t\cos t}dt=-\frac{1}{9}\int\sin^3 tdt=$$

$$=-\frac{1}{9}\int\sin^2 t\cdot\sin tdt=-\frac{1}{9}\int\left(1-\cos^2 t\right)\cdot\sin tdt=-\frac{1}{9}\int\sin tdt+$$

$$+\frac{1}{9}\int\cos^2 t\cdot\sin tdt=\left\|\begin{matrix}(\cos t)'=-\sin t\\ d(\cos t)=-\sin tdt\\ \sin tdt=-d(\cos t)\end{matrix}\right\|=\frac{1}{9}\cos t-$$

$$-\frac{1}{9}\int\cos^2 td(\cos t)=\frac{1}{9}\cos t-\frac{1}{9}\frac{\cos^3 t}{3}+C=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\cos t=\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{x}\right)=\sqrt{\cos^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{x}\right)}=\\ =\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{x}\right)}=\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}-\frac{1}{27}\left(\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\right)^3+C=\frac{\sqrt{x^2-3}}{9x}-\ -\frac{\left(x^2-3\right)\sqrt{x^2-3}}{27x^3}+C.$$

Задачі та вправи для самостійного розв’язання:

Обчислити інтеграли:

1. $\int x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

(Відповідь: $\frac{1}{8}\left(\arcsin x - \frac{1}{4}\sin\left(4\arcsin x\right)\right) + C$.)

2. $\int \frac{x^2 - x + 1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}\, dx$.

(Відповідь: $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)\right| + \cos\left(\operatorname{arctg} x\right) + C$.)

Запитання для самоперевірки з теми
«Невизначений інтеграл. Методи інтегрування»

1. Яка функція називається первісною для даної функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом?
3. Сформулюйте властивості невизначеного інтеграла.
4. Випишіть ту частину таблиці невизначених інтегралів, що містить логарифмічну функцію.
5. Випишіть ту частину таблиці невизначених інтегралів, що містить тригонометричні функції.
6. Поясніть зміст операції «підведення під знак диференціала»?
7. Напишіть формулу заміни змінної в невизначеному інтегралі.
8. Запишіть формулу інтегрування частинами.
9. Які функції утворюються у результаті інтегрування

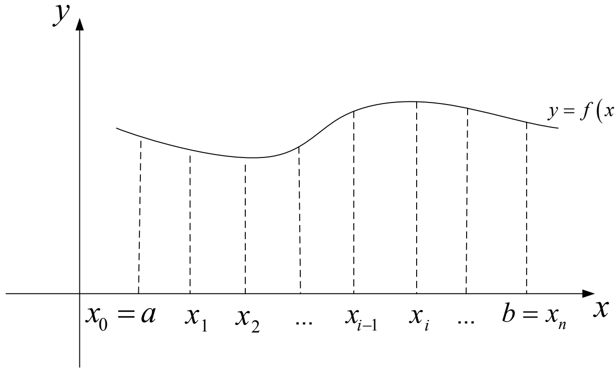
$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx \text{, якщо } p^2-4q<0 \text{?}$$

10. Яка функція називається раціональним дробом?
11. Що означає термін «виділити цілу частину неправильного дробу»?
12. Опишіть процедуру розкладання правильного дробу на елементарні.
13. Обчислення інтегралів виду $\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_r}{q_r}}\right)dx$.
14. Обчислення інтегралів виду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.
15. Обчислення інтегралів виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Універсальна тригонометрична підстановка.
16. Як обчислюється інтеграл вигляду $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ в залежності від парності та непарності показників n і m?
17. Як обчислюється інтеграл вигляду $\int \sin nx \cdot \cos mx dx$?
18. За допомогою яких тригонометричних підстановок обчислюють інтеграли: $\int \sqrt{1-x^2}dx, \int \sqrt{x^2-4}dx, \int \sqrt{9+x^2}dx$?

ГЛАВА 2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§1. Означення визначеного інтеграла

Криволінійною трапецією називається фігура, обмежена відрізком $[a,b]$ на осі OX, прямими $x=a$, $x=b$ і лінією $y=f(x)$ $\left(f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]\right)$.



Розбиттям P відрізка $[a,b]$ називають сукупність точок $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$. Позначимо через Δx_i довжину проміжку $[x_{i-1};x_i]$:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Діаметром розбиття називають найбільшу з довжин одержуваних проміжків

$$\lambda(P) = \max_i \Delta x_i$$

Якщо на кожному проміжку $[x_{i-1};x_i]$ розбиття обрана точка $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$, то кажуть, що даному розбиттю P відповідає вибір точок $\xi=\{\xi_1;\xi_2;...;\xi_n\}$.

Нехай на проміжку $[a,b]$ задана функція $f(x)$, P - розбиття $[a,b]$, ξ - вибір точок, $\lambda(P)$ - діаметр розбиття. Інтегральною сумою

$I_n\left(f\left(x\right);P;\xi\right)$ для функції $f\left(x\right)$, яка відповідає P - розбиттю і ξ - вибору точок на відрізку $\left[a,b\right]$ називають суму:

$$I_n\left(f\left(x\right);P;\xi\right)=\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i \tag{1.1}$$

Якщо існує кінцева границя інтегральної суми (1.1), при діаметрі розбиття, яке прагне до 0 і ця границя не залежить від розбиття P і вибору точок ξ, то така границя називається визначеним інтегралом функції $f\left(x\right)$ на проміжку $\left[a,b\right]$ і позначається $\int_a^b f\left(x\right)dx$.

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I_n\left(f\left(x\right);P;\xi\right)=\int_a^b f\left(x\right)dx, \tag{1.2}$$

а функція $f\left(x\right)$ називається інтегрованою на $\left[a,b\right]$.

Визначимо класи функцій, що інтегруються:

1. Якщо функція $f\left(x\right)$ неперервна на проміжку $\left[a,b\right]$, то вона на ньому інтегрується.
2. Якщо функція визначена і неперервна на проміжку $\left[a,b\right]$ всюди, за винятком кінцевого числа точок розриву першого роду, то вона інтегрована на цьому проміжку.
3. Якщо функція визначена і монотонно зростаюча (спадна) на проміжку $\left[a,b\right]$, то вона інтегрована на цьому проміжку.

§2. Властивості визначеного інтеграла

Спочатку розглянемо властивості визначеного інтеграла, виражені рівностями:

1. *(Властивість однорідності)* Якщо функція $f\left(x\right)$ інтегрована на проміжку $\left[a,b\right]$ та k - постійна величина, тоді $k\cdot f\left(x\right)$ також інтегрована на проміжку $\left[a,b\right]$ і справедлива наступна формула:
$$\int_a^b k\cdot f\left(x\right)dx = k\int_a^b f\left(x\right)dx \qquad (2.1)$$
2. *(Адитивність щодо підінтегральної функції)* Якщо функції $f\left(x\right)$ та $g\left(x\right)$ інтегровані на проміжку $\left[a,b\right]$, то і їх сума $f\left(x\right)+g\left(x\right)$ також інтегрована на проміжку $\left[a,b\right]$ і справедлива формула:
$$\int_a^b \left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]dx = \int_a^b f\left(x\right)dx + \int_a^b g\left(x\right)dx \qquad (2.2)$$
3. Визначений інтеграл з однаковими границями інтегрування дорівнює нулю
$$\int_a^a f\left(x\right)dx = 0 \qquad (2.3)$$
4. При зміні місць верхньої та нижньої границі інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний
$$\int_a^b f\left(x\right)dx = -\int_b^a f\left(x\right)dx \qquad (2.4)$$
5. *(Адитивність щодо проміжку інтегрування)* Якщо функція $f\left(x\right)$ інтегрована на найбільшому із проміжків $\left[a,b\right]$; $\left[a,c\right]$; $\left[c,b\right]$, тоді вона інтегрована на двох інших проміжках. Має місце рівність:
$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \int_a^c f\left(x\right)dx + \int_c^b f\left(x\right)dx \qquad (2.5)$$

Тепер розглянемо властивості визначеного інтеграла пов'язані з нерівностями:

6. Нехай функція $f(x)$ інтегрована на $[a,b]$, $(a<b)$ і приймає на ньому невід'ємні значення $\left(f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]\right)$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0 \tag{2.6}$$

7. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a,b]$, $(a<b)$ і задовольняють нерівності $f(x)\leq g(x)$ на цьому проміжку, тоді

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx \tag{2.7}$$

8. Нехай функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a,b]$, $(a<b)$, тоді функція $|f(x)|$ також інтегрована на цьому проміжку і справедлива нерівність:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx \tag{2.8}$$

9. *(Теорема про оцінку визначеного інтеграла)* Нехай функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a,b]$ та для $x\in[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівності $m\leq f(x)\leq M$, $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$, $M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$, тоді:

$$m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq M \tag{2.9}$$

10. *(Теорема про середнє значення)* Нехай функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a,b]$ і нехай у всьому цьому проміжку $m\leq f(x)\leq M$, тоді:

$$\int_a^b f(x)dx=\mu\cdot(b-a) \tag{2.10}$$

де $\mu=f(\xi)$, $\xi\in[a,b]$. Значення μ називається середнім значенням функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$.

§3. Визначений інтеграл як функція верхньої границі. Формула Ньютона – Лейбниця

Нехай функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a,b]$. Візьмемо довільне значення $x \in [a,b]$ і складемо проміжок $[a,x] \in [a,b]$. За властивістю 5, так як функція інтегрована на $[a,b]$, то вона і інтегрована на проміжку $[a,x]$. Замінимо верхню границю у визначеному інтегралі (1.2) на змінну, отримаємо вираз:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{3.1}$$

який є функцією від аргументу x. Функцію $F(x)$ виду (3.1) назвемо інтегралом із змінною верхньою границею.

Розглянемо деякі властивості цієї функції:

1. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a,b]$, то функція $F(x)$ буде безперервною функцією від аргументу x у тому ж проміжку.
2. Якщо функцію $f(t)$ припустити безперервною в точці $t = x$, то в цій точці функція $F(x)$ має похідну, яка дорівнює $f(x)$

$$F'(x) = f(x) \tag{3.2}$$

Таким чином, для безперервної в проміжку $[a,b]$ функції $f(x)$ існує первісна, приміром її є визначений інтеграл (3.1) із змінною верхньою границею.

3. *(Формула Ньютона - Лейбниця)* Нехай функція $f(x)$ безперервна на проміжку $[a,b]$, тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{3.3}$$

де $F(x)$ якась первісна функції $f(x)$.

Приклади:

3.1. $\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)' = \left(-\int_b^x f(t)\,dt\right)' = -\left(\int_b^x f(t)\,dt\right)' = -f(x).$

3.2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

3.3. $$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} = \int\limits_{-2}^{-1} (11+5x)^{-3} dx = \left\| \begin{array}{l} (11+5x)' = 5 \\ d(11+5x) = 5dx \\ dx = \frac{1}{5} d(11+5x) \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{5} \int\limits_{-2}^{-1} (11+5x)^{-3}\, d(11+5x) = \frac{1}{5} \frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\Bigg|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{10} \frac{1}{(11+5x)^2}\Bigg|_{-2}^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{\left(11+5(-1)\right)^2} - \frac{1}{\left(11+5(-2)\right)^2} \right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{36} - \frac{1}{1} \right) =$$

$$= -\frac{1-36}{10\cdot 36} = \frac{35}{10\cdot 36} = \frac{7}{72}\ .$$

3.4. $$\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \left\| \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)} = \\ = \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+9}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{9} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{9} \int\limits_0^{16} \left(\sqrt{x+9} + \sqrt{x} \right) dx = \frac{1}{9} \int\limits_0^{16} \sqrt{x+9}\, dx + \frac{1}{9} \int\limits_0^{16} \sqrt{x}\, dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} (x+9)' = 1 \\ d(x+9) = dx \end{array} \right\| = \frac{1}{9} \int\limits_0^{16} (x+9)^{\frac{1}{2}}\, d(x+9) + \frac{1}{9} \int\limits_0^{16} x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$=\frac{1}{9}\left.\frac{(x+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{16}+\frac{1}{9}\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{16}=\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\left((16+9)^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right)+$$

$$+\frac{2}{9\cdot 3}\left(16^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{27}\left(5^3-3^3\right)+\frac{2}{27}\cdot 4^3=\frac{2}{27}(125-27)+\frac{2\cdot 64}{27}=$$

$$=\frac{2\cdot(98+64)}{27}=\frac{2\cdot 162}{27}=\frac{2\cdot 18}{3}=12\,.$$

3.5. $$\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}=\left\|\begin{matrix}\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2} & \frac{dx}{x^2}=-d\left(\frac{1}{x}\right)\\ d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{dx}{x^2} & \end{matrix}\right\|=-\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)=-\left.e^{\frac{1}{x}}\right|_1^2=$$

$$=-e^{\frac{1}{2}}+e=e-\sqrt{e}\,.$$

3.6. $$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\left\|\begin{matrix}(1+\ln x)'=\frac{1}{x}\\ d(1+\ln x)=\frac{dx}{x}\end{matrix}\right\|=\int_1^{e^2}\frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}=2\left.\sqrt{1+\ln x}\right|_1^{e^2}=$$

$$=2\left(\sqrt{1+\ln e^2}-\sqrt{1+\ln 1}\right)=2\left(\sqrt{1+2}-1\right)=2\left(\sqrt{3}-1\right).$$

3.7. $$\int_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}=\left\|\begin{matrix}x^2+4x+5=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+5=\\ =(x+2)^2-4+5=(x+2)^2+1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\left\|\begin{matrix}(x+2)'=1\\ d(x+2)=dx\end{matrix}\right\|=\int_0^1\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=\left.\operatorname{arctg}(x+2)\right|_0^1=$$

$$=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2=\left\|\begin{matrix}\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2)=\frac{3-2}{1+3\cdot 2}=\frac{1}{7}\\ \operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\end{matrix}\right\|=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\,.$$

$$\textbf{3.8.}\ \int_1^2 \frac{dx}{x+x^2} = \left\| \frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{x(1+x)} = \frac{1+x-x}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right\| =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{1+x}\,dx = \left\| \begin{matrix} (x+1)' = 1 \\ d(x+1) = dx \end{matrix} \right\| = \ln|x|\Big|_1^2 -$$

$$-\int_1^2 \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln 2 - \ln 1 - \ln|x+1|\Big|_1^2 = \ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) = 2\ln 2 -$$

$$-\ln 3 = \ln \frac{4}{3}.$$

$$\textbf{3.9.}\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \left\| \begin{matrix} \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \\ d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{dx}{2} \end{matrix} \right\| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 2.$$

$$\textbf{3.10.}\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}} \cos x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^2 x}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}} \cos x\,dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} (\sin x)' = \cos x \\ d(\sin x) = \cos x\,dx \end{matrix} \right\| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \left((\sin x)^{-\frac{1}{3}} - (\sin x)^{\frac{5}{3}} \right) d(\sin x) =$$

$$= \frac{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} - \frac{(\sin x)^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}\left(\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \right) -$$

$$-\frac{3}{8}\left(\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{8}{3}} - \left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{8}{3}} \right) = \frac{3}{2}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}} \right) -$$

$$-\frac{3}{8}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{8}{3}}-(-1)^{\frac{8}{3}}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-1\right)-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}-1\right)=\frac{3}{2\cdot\sqrt[3]{2}}-\frac{3}{2}-$$

$$-\frac{3}{8\cdot2\sqrt[3]{2}}+\frac{3}{8}=\frac{3\cdot(8-1)}{16\sqrt[3]{2}}-\frac{12-3}{8}=\frac{3\cdot7}{16\sqrt[3]{2}}-\frac{9}{8}=\frac{21}{16\sqrt[3]{2}}-\frac{9}{8}=\frac{21-18\sqrt[3]{2}}{16\sqrt[3]{2}}.$$

§4. Інтегрування по частинах у визначеному інтегралі

Нехай функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$ диференціюються на проміжку $[a,b]$. Тоді справедлива формула:

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x) \qquad (4.1)$$

Приклади:

4.1.

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=\left\|\begin{matrix} u=x & dv=e^{-x}dx \\ du=dx & v=\int e^{-x}dx=\left\|\begin{matrix}(-x)'=-1\\ d(-x)=-dx\end{matrix}\right\|= \\ & =\int e^{-x}d(-x)=-e^{-x}\end{matrix}\right\|=-x\,e^{-x}\Big|_0^1+$$

$$+\int_0^1 e^{-x}dx=-1e^{-1}+0-e^{-x}\Big|_0^1=-\frac{1}{e}-\left(e^{-1}-e^{0}\right)=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=\frac{-2}{e}+1.$$

4.2.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\sin^2 x}=\left\|\begin{matrix} u=x & dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x} \\ du=dx & v=\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\text{ctg}x\end{matrix}\right\|=-x\,\text{ctg}x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\text{ctg}x dx=$$

$$=-\frac{\pi}{3}\text{ctg}\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\text{ctg}\frac{\pi}{4}+\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{4}+\ln\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|-$$

$$-\ln\left|\sin\frac{\pi}{4}\right| = -\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{\pi}{4} + \ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = = \frac{9\pi - 4\sqrt{3}\pi}{36} +$$

$$+\ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{9\pi - 4\sqrt{3}\pi}{36} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

4.3.

$$\int_1^2 x\cdot\log_2 x dx = \left\| \begin{matrix} u = \log_2 x & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{x\ln 2} & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\| = \frac{x^2}{2}\log_2 x\Big|_1^2 -$$

$$-\frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 \frac{x^2dx}{x} = \frac{2^2}{2}\log_2 2 - \frac{1}{2}\log_2 1 - \frac{1}{2\ln 2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2 -$$

$$-\frac{1}{2^2\ln 2}\left(2^2 - 1^2\right) = 2 - \frac{3}{4\ln 2} = \frac{8\ln 2 - 3}{4\ln 2}.$$

§5. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Нехай потрібно обчислити $\int\limits_a^b f(x)dx$, де функція $f(x)$ безперервна на проміжку $[a,b]$. Припустимо $x=\varphi(t)$, зажадавши від неї виконання наступних умов:

- функція $\varphi(t)$ визначена і неперервна на проміжку $[\alpha,\beta]$ і не виходить за межі проміжку $[a,b]$, коли t змінюється в $[\alpha,\beta]$;
- $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;
- на проміжку $[\alpha,\beta]$ існує безперервна похідна $\varphi'(t)$.

Тоді має місце формула:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{5.1}$$

Приклади:

5.1.

$$\int\limits_3^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx=\left\|\begin{matrix}\sqrt[3]{x-2}=t & dx=3t^2dt\\ x-2=t^3 & t_в=\sqrt[3]{29-2}=\sqrt[3]{27}=3\\ x=t^3+2 & t_н=\sqrt[3]{3-2}=1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\int\limits_1^3\frac{t^2}{3+t^2}\cdot 3t^2dt=3\int\limits_1^3\frac{(t^2)^2-3^2+3^2}{t^2+3}dt=3\int\limits_1^3\frac{(t^2-3)(t^2+3)+9}{t^2+3}dt=$$

$$=3\int\limits_1^3\frac{(t^2-3)(t^2+3)}{t^2+3}dt+3\cdot 9\int\limits_1^3\frac{dt}{t^2+3}=3\int\limits_1^3(t^2-3)dt+27\int\limits_1^3\frac{dt}{t^2+3}=$$

$$=3\left(\frac{t^3}{3}-3t\right)\Bigg|_1^3+27\cdot\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt3}\Bigg|_1^3=3\left(\frac{3^3-1}{3}-3(3-1)\right)+$$

$$+\frac{27}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=3\left(\frac{26}{3}-6\right)+\frac{27}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=(26-18)+\frac{27}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}=8+\frac{9\pi}{2\sqrt{3}}.$$

5.2.

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx=\left\|\begin{matrix} x=\operatorname{tg}t & dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ t=\operatorname{arctg}x & t_в=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3} \\ & t_н=\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}\end{matrix}\right\|=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\operatorname{tg}^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}}{\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\sin^2 t\cos t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t dt}{\sin^2 t\cos^2 t}==\left\|\begin{matrix}(\sin t)'=\cos t \\ d(\sin t)=\cos t dt\end{matrix}\right\|=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t\left(1-\sin^2 t\right)}=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t+\left(1-\sin^2 t\right)}{\sin^2 t\left(1-\sin^2 t\right)}d(\sin t)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1-\sin^2 t}+\frac{1}{\sin^2 t}\right)d(\sin t)=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\sin t)}{\left(1-\sin^2 t\right)}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|\Bigg\|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{\sin t}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sin\frac{\pi}{3}-1}{\sin\frac{\pi}{3}+1}\right|-\ln\left|\frac{\sin\frac{\pi}{4}-1}{\sin\frac{\pi}{4}+1}\right|\right)-\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}\right|\right)-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}{3-4}\right|-\ln\left|\frac{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}{2-4}\right|\right)-\frac{2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{6}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\left(7-4\sqrt{3}\right)}{2-4\sqrt{2}+4}\right|+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{7-4\sqrt{3}}{3-2\sqrt{2}}\right|.$$

5.3.

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx=\left\|\begin{array}{ll} x=\cos t & t=\arccos x \\ dx=-\sin t dt & t_в=\arccos 1=0 \\ & t_н=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos^6 t}(-\sin t)dt=-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l} 1+\mathrm{tg}^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t} \\ \left(\mathrm{tg}t\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 t} \\ d\left(\mathrm{tg}t\right)=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\end{array}\right\|=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^2 t\left(1+\mathrm{tg}^2 t\right)d\left(\mathrm{tg}t\right)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{tg}^2 t+\mathrm{tg}^4 t\right)d\left(\mathrm{tg}t\right)=$$

$$=\left(\frac{\mathrm{tg}^3 t}{3}+\frac{\mathrm{tg}^5 t}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\mathrm{tg}^3\frac{\pi}{4}}{3}+\frac{\mathrm{tg}^5\frac{\pi}{4}}{5}-0=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}.$$

5.4.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3} = \left\| \begin{array}{ll} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} & dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} & t_в=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1 \\ & t_н=\operatorname{tg}0=0 \end{array} \right\| = \int\limits_0 \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{2\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+3} =$$

$$=2\int\limits_0^1 \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{2-2t^2+3+3t^2}{1+t^2}} = 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}\ .$$

5.5.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\dfrac{1}{6}\sin^2 x} = \left\| \begin{array}{ll} t=\operatorname{tg}x & \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}= \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 t & =\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x-1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} & \\ x=\operatorname{arctg}t & t_в=\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{4}=1 \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} & t_н=\operatorname{arctg}0=0 \end{array} \right\| =$$

$$=\int\limits_0^1 \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\left(1+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int\limits_0^1 \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{6+6t^2+t^2}{6\left(1+t^2\right)}} = \int\limits_0^1 \frac{6dt}{7t^2+6} = \frac{6}{7}\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+\dfrac{6}{7}} =$$

$$=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{6}{7}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{7}}{\sqrt{6}}\Bigg|_0^1 = \sqrt{\frac{6}{7}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{7}}{\sqrt{6}}\Bigg|_0^1 = \sqrt{\frac{6}{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}\ .$$

5.6.

$$\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \left\| \begin{array}{ll} \sqrt{e^x - 1} = t & x = \ln\left|t^2 + 1\right| \\ e^x - 1 = t^2 & dx = \dfrac{2tdt}{t^2+1} \\ e^x = t^2 + 1 & t_в = \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = \sqrt{2-1} = 1 \\ & t_н = \sqrt{e^0 - 1} = \sqrt{1-1} = 0 \end{array} \right\| =$$

$$= \int\limits_0^1 t \cdot \frac{2tdt}{1+t^2} = 2\int\limits_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int\limits_0^1 \frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt = 2\int\limits_0^1 dt - 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2t\Big|_0^1 - 2\mathrm{arctg}\, t\Big|_0^1 = 2 \cdot 1 - 2\mathrm{arctg}1 = 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

5.7.

$$\int\limits_0^1 \mathrm{arctg}\sqrt[3]{x}dx = \left\| \begin{array}{ll} \sqrt[3]{x} = t & t_в = \sqrt[3]{1} = 1 \\ x = t^3 & t_н = \sqrt[3]{0} = 0 \\ dx = 3t^2 dt & \end{array} \right\| = \int\limits_0^1 \mathrm{arctg}t \cdot 3t^2 dt =$$

$$= 3\int\limits_0^1 \mathrm{arctg}t \cdot t^2 dt = \left\| \begin{array}{ll} u = \mathrm{arctg}t & dv = t^2 dt \\ du = \dfrac{dt}{1+t^2} & v = \int t^2 dt = \dfrac{t^3}{3} \end{array} \right\| =$$

$$= 3\left(\frac{t^3}{3}\mathrm{arctg}t\Bigg|_0^1 - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{t^3 dt}{t^2+1} \right) = \left\| \begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} t^3 \\ t^3 + t \end{array} & \begin{array}{l} t^2 + 1 \\ \hline t \end{array} \\ \hline -t & \end{array} \right\| = 3\left(\frac{1}{3}\mathrm{arctg}1 - 0 \right) -$$

$$-3 \cdot \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right)dt = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - 3 \cdot \frac{1}{3}\int\limits_0^1 tdt + 3 \cdot \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{tdt}{t^2+1} =$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\left(t^2+1\right)'=2t\\ d\left(t^2+1\right)=2tdt\\ tdt=\frac{1}{2}d\left(t^2+1\right)\end{array}\right\|=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|\Big\|_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\ln 2-\ln 1\right)=\frac{\pi-2+2\ln 2}{4}.$$

5.8.

$$\int\limits_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}=\int\limits_1^3\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}+1=\left(\frac{1}{x}\right)^2+2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\\ -\left(\frac{5}{2}\right)^2+1=\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+1=\\ =\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}\end{array}\right\|=\int\limits_1^3\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{ll}t=\frac{1}{x}+\frac{5}{2} & t_в=\frac{1}{3}+\frac{5}{2}=\frac{17}{6}\\ dt=-\frac{dx}{x^2} & t_н=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}\end{array}\right\|=\int\limits_{\frac{7}{2}}^{\frac{17}{6}}\frac{-dt}{\sqrt{t^2-\frac{21}{4}}}=$$

$$=\int\limits_{\frac{17}{6}}^{\frac{7}{2}}\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{21}{4}}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{21}{4}}\right|\Bigg\|_{\frac{17}{6}}^{\frac{7}{2}}=\ln\left|\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}-\frac{21}{4}}\right|-$$

$$-\ln\left|\frac{17}{6}+\sqrt{\frac{289}{36}-\frac{21}{4}}\right|=\ln\left|\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}}\right|-\ln\left|\frac{17}{6}+\sqrt{\frac{100}{36}}\right|=\ln\left|\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\right|-$$

$$-\ln\left|\frac{17}{6}+\frac{10}{6}\right|=\ln\frac{12}{2}-\ln\frac{27}{6}=\ln 6-\ln\frac{9}{2}=\ln\frac{6\cdot 2}{9}=\ln\frac{4}{3}.$$

Задачі та вправи для самостійного розв’язання:

Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)dx$. (Відповідь: $2\frac{5}{6}$.)

2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x dx$. (Відповідь: $\frac{2}{3}$.)

3. $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{25-x^2}$. (Відповідь: $\frac{\ln 9}{10}$.)

4. $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. (Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.)

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5-3\cos x}$. (Відповідь: $\frac{\text{arctg}2}{2}$.)

6. $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$. (Відповідь: $\sqrt{2}-1$.)

7. $\int\limits_{0}^{3}x\sqrt{x+1}dx$. (Відповідь: $7\frac{11}{15}$.)

8. $\int\limits_{0}^{2\pi}x\cos x dx$. (Відповідь: 0.)

9. $\int\limits_{-1}^{0}(2x+3)e^{-x}dx$. (Відповідь: $3e-5$.)

10. $\int\limits_{0}^{1}x^3\text{arctg}x dx$. (Відповідь: $\frac{1}{6}$.)

§6. Обчислення площі

Розглянемо криволінійну трапецію (D), обмежену прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ і кривою $y = f(x)$ $\left(f(x) \ge 0,\, x \in [a,b]\right)$ (рис.1).

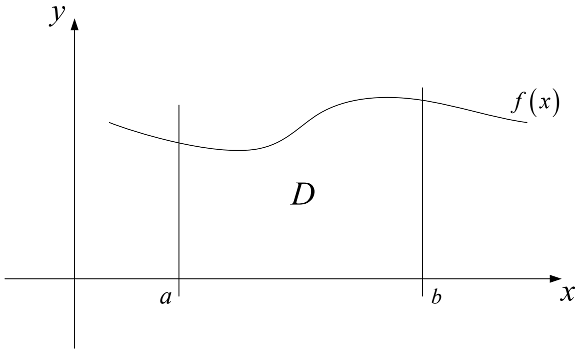


Рисунок 1

Тоді площа області D може бути визначена за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \tag{6.1}$$

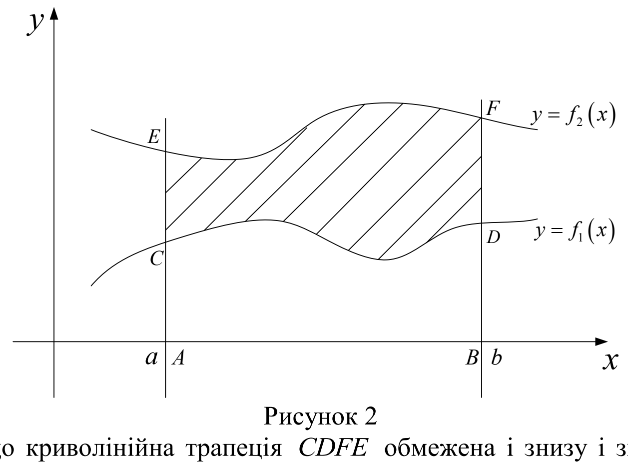


Рисунок 2

Якщо криволінійна трапеція $CDFE$ обмежена і знизу і зверху кривими, рівняння яких $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $(a \le x \le b)$ (рис.2), то розглянемо її площу, як різницю площ двох криволінійних трапецій $ABDC$ та $ABFE$:

$$S = S_{ABFE} - S_{ABDC} = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx$$

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx \qquad (6.2)$$

Приклади:

Обчислити площу фігур, обмежених лініями.

6.1. $xy = 8$, $x + y - 6 = 0$.

$xy = 8 \Rightarrow y = \dfrac{8}{x}$ - гіпербола $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline y & 8 & 4 & 2 & 1 \end{array}$

$x + y - 6 = 0$ - пряма $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 6 \\ \hline y & 6 & 0 \end{array}$

Відобразимо фігуру на площині xOy (рис.3)

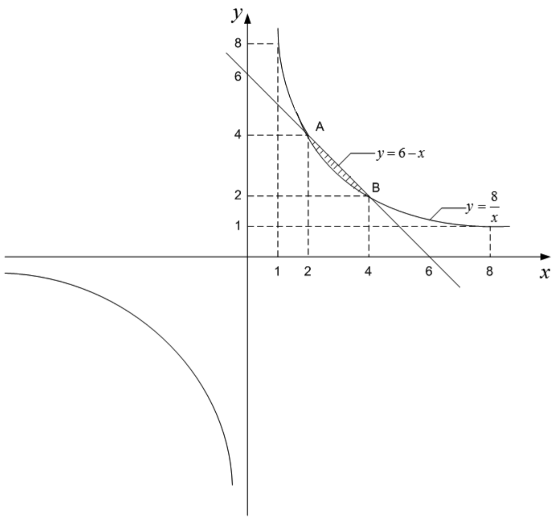


Рисунок 3

Знайдемо точки перетину ліній:

$$\begin{cases} xy = 8; \\ x + y - 6 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot (6 - x) = 8; \\ y = 6 - x; \end{cases}$$

$6x - x^2 = 8$,

$x^2 - 6x + 8 = 0$,

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 - 32 = 4$,

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \left[\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right. .$$

$$\begin{cases} x = 4; \\ y = 6 - 4 = 2; \end{cases} \Rightarrow B(4;2).$$

$$\begin{cases} x = 2; \\ y = 6 - 2 = 4; \end{cases} \Rightarrow A(2;4).$$

$$S = \int_2^4 \left(6 - x - \frac{8}{x} \right) dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - 8\ln|x| \right) \Bigg|_2^4 = 6(4-2) - \frac{4^2 - 2^2}{2} -$$

$$-8(\ln 4 - \ln 2) = 12 - 6 - 8\ln\frac{4}{2} = 6 - 8\ln 2 \text{ (кв.од.)}.$$

6.2. $y = 3^x$, $y = -x^2$, $x = 0$, $x = 2$.

Побудуємо дану область на площині xOy (рис.4):

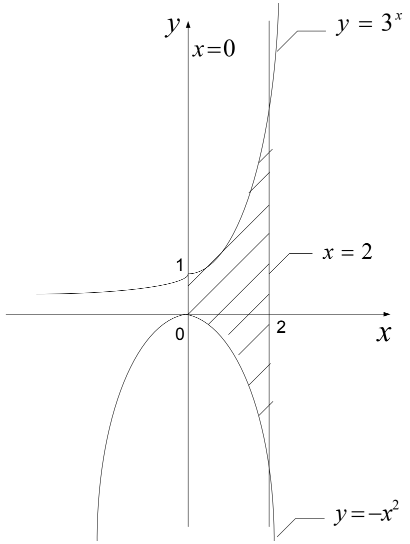


Рисунок 4

Область зверху обмежена кривою $y = 3^x$, а знизу параболою $y = -x^2$, а x лежить між прямими $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$.

Тоді за формулою (6.2) маємо:

$$S = \int_0^2 \left(3^x - \left(-x^2\right)\right)dx = \int_0^2 \left(3^x + x^2\right)dx = \int_0^2 3^x dx + \int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{3^x}{\ln 3}\right|_0^2 +$$

$$+\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{3^2 - 3^0}{\ln 3} + \frac{2^3 - 0^3}{3} = \frac{8}{\ln 3} + \frac{8}{3} \text{ (кв.од.).}$$

6.3. $y = 5 + 4x - x^2$, $y = 2(x+1)$, $y = 0$.

Побудуємо область, обмежену даними лініями в площині xOy:

$y = 2(x+1)$ - пряма. Для побудови достатньо взяти дві точки $x = 0 \Rightarrow y = 2$, $y = 0 \Rightarrow x = -1$.

$y = 5 + 4x - x^2$ - парабола. Знайдемо координати вершини за формулами:

$$ax^2+bx+c=0,\ x_в=-\frac{b}{2a},\ y_в=y\left(x_в\right);$$

$$\left.\begin{array}{l} x_в=\frac{-4}{-2}=2 \\ y_в=5+4\cdot 2-2^2=9 \end{array}\right. \Rightarrow B\left(2;9\right).$$

Точки перетину з осями координат:

З віссю Oy: $x=0\Rightarrow y=5 \quad \left(0;5\right)$

З віссю Ox: $y=0\Rightarrow 5+4x-x^2=0\big|\left(-1\right)$

$$x^2-4x-5=0$$

$$D=b^2-4ac=\left(-4\right)^2-4\cdot\left(-5\right)=36$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\left[\begin{array}{l}5\\-1\end{array}\right.$$

Таким чином маємо точки $\left(5;0\right)$ та $\left(-1;0\right)$.

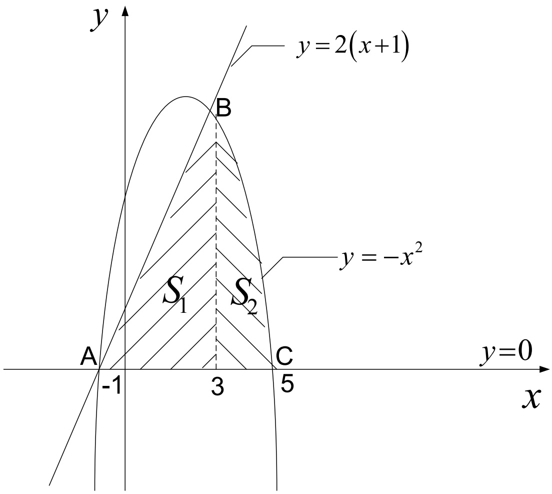


Рисунок 5

За рисунком видно, що в даному випадку загальна площа складається з площ $\left(S_1\right)$ під прямою $y=2\left(x+1\right)$ і площею $\left(S_2\right)$ під параболою $y=5+4x-x^2$. Тоді $S=S_1+S_2$. Знайдемо точки перетину прямої і параболи:

$$\begin{cases} y = 5+4x-x^2 \\ y = 2(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2(x+1) \\ 2(x+1) = 5+4x-x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+2 = 5+4x-x^2$$

$$x^2-4x-5+2x+2=0$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$D=(-2)^2-4\cdot 1(-3)=4+12=16$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\left[\begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=2(-1+1)=0 \\ x=3 \Rightarrow y=2(3+1)=8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A(-1;0) \\ B(3;8) \end{array}$$

$$S_1=\int_{-1}^{3} 2(x+1)\,dx = 2\int_{-1}^{3} x dx + 2\int_{-1}^{3} dx = 2\cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{3} + \left. 2\cdot x\right|_{-1}^{3} = 3^2 -$$

$$-(-1)^2+2(3-(-1))=9-1+2\cdot 4=8+8=16 \text{ (кв.од.)};$$

$$S_2=\int_{3}^{5}\left(5+4x-x^2\right)dx = 5\int_{3}^{5} dx + 4\int_{3}^{5} x dx - \int_{3}^{5} x^2 dx = \left.5x\right|_{3}^{5} + 4\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{3}^{5} -$$

$$-\left.\frac{x^3}{3}\right|_{3}^{5} = 5(5-3)+2\left(5^2-3^2\right)-\frac{5^3-3^3}{3}=10+2\cdot 16-\frac{98}{3}=42-$$

$$-32\frac{2}{3}=9\frac{1}{3} \text{ (кв.од.)};$$

$$S=16+9\frac{1}{3}=25\frac{1}{3} \text{ (кв.од.)}.$$

Нехай крива, що обмежує криволінійну трапецію задана параметрично.

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, де $t\in[\alpha,\beta]$. Тоді площа криволінійної трапеції може бути обчислена за формулою:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\cdot\left|x'(t)\right| dt \qquad (6.3)$$

Приклад 6.4.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$, $y \geq 4$.

Розв'язання.

Система $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$ задає еліпс з центром на початку координат і півосями $a = 3$ та $b = 8$. Будуємо область в площині xOy:

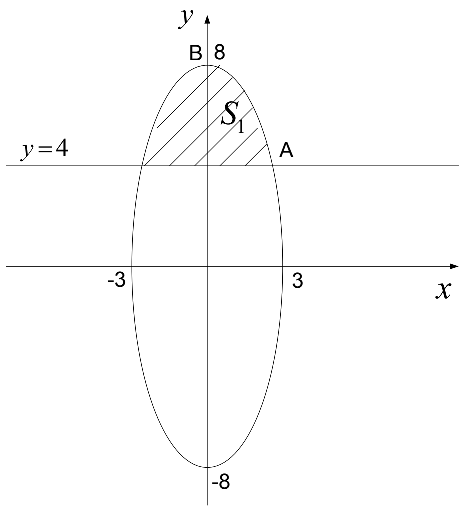


Рисунок 6

Так як вісь Oy є вісь симетрії даного еліпса, то область складається з двох рівновеликих частин $S = 2S_1$. Знайдемо значення параметра t при яких отримуємо точки A і B:

A:

$8\sin t = 4$

$\sin t = \dfrac{1}{2}$

$t = (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Так як у даному випадку

B:

$8\sin t = 8$

$\sin t = 1$

$t = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

у даному випадку

$$t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t_A = \frac{\pi}{6} \qquad\qquad t_B = \frac{\pi}{2}$$

Таким чином, за формулою (6.3) (враховуючи, що дана площа є різниця площ під еліпсом і під прямою $y = 4$):

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8\sin t - 4\right)\left|\left(3\cos t\right)'\right| dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8\sin t - 4\right)\left|-3\sin t\right| dt =$$

$$= 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8\sin^2 t - 4\sin t\right)dt = 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8 \cdot \frac{1-\cos 2t}{2} - 4\sin t\right)dt = 12\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dt -$$

$$-12\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt - 12\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 12 \cdot t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - 12 \cdot \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d\left(2t\right) + 12\cos t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 12\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 6\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + 12\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{12 \cdot 2\pi}{6} -$$

$$-6\left(\sin\frac{2\cdot\pi}{2} - \sin\frac{2\cdot\pi}{6}\right) + 12\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\pi - 6\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 12\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$= 4\pi + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 4\pi - 3\sqrt{3}$ (кв.од.).

Отже, $S = 2 \cdot \left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) = 8\pi - 6\sqrt{3}$ (кв.од.).

§7. Обчислення площі в полярній системі координат

Криволінійним сектором називають фігуру, обмежену променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ та кривою $\rho = \rho(\varphi)$ (рис.7).

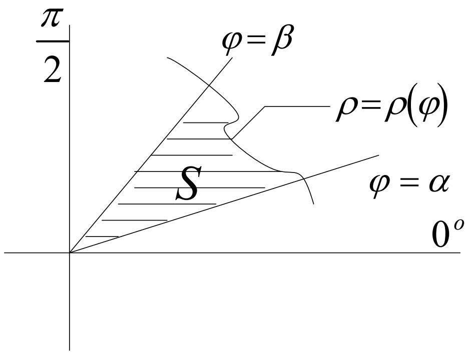


Рисунок 7

У даному випадку площа обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi . \qquad (7.1)$$

Приклади:

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

7.1. $\rho = 2(1-\cos\varphi)$

Побудуємо криву в полярних координатах. Знайдемо область визначення функції:

$\rho \ge 0 \Rightarrow 2(1-\cos\varphi) \ge 0$,

$1-\cos\varphi \ge 0$,

$\cos\varphi \le 1$,

таким чином, $\varphi \in \mathbb{R}$

Функція періодична з $T = 2\pi$. Розглянемо основний проміжок $\varphi \in [0; 2\pi]$

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	0	2	4	2	0

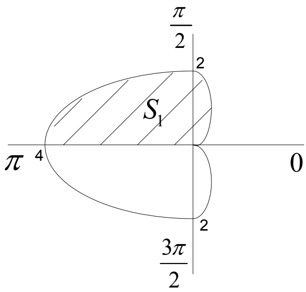


Рисунок 8

Крива є кардіоїдою (рис.8). У силу симетрії кривої (функція парна $\rho(-\varphi)=\rho(\varphi)$) щодо осі OX, область складається з двох рівновеликих частин $S=2S_1$. Область S_1 відповідає зміні параметра від $\varphi=0$ до $\varphi=\pi$. Тоді в силу формули (7.1) маємо:

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(2\left(1-\cos\varphi\right)\right)^2 d\varphi=2^2\int_0^{\pi}\left(1-\cos\varphi\right)^2 d\varphi=$$

$$=4\int_0^{\pi}\left(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi=4\int_0^{\pi}\left(1-2\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=4\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos2\varphi\right)d\varphi=4\cdot\frac{3}{2}\int_0^{\pi}d\varphi-4\cdot2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi+$$

$$+4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos2\varphi d\varphi=6\varphi\Big|_0^{\pi}-8\sin\varphi\Big|_0^{\pi}+2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos2\varphi d\left(2\varphi\right)=$$

$$=6\left(\pi-0\right)-8\left(\sin\pi-\sin0\right)+\sin2\varphi\Big|_0^{\pi}=6\pi+\sin2\pi-\sin0=$$

$=6\pi$ (кв.од.).

7.2. $\rho=3\sin3\varphi$

Знайдемо множину значень φ для яких визначена дана функція:

$\rho\geq0\Rightarrow3\sin3\varphi\geq0$,

$$\sin 3\varphi \geq 0,$$
$$2\pi n \leq 3\varphi \leq \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},$$
$$\frac{2\pi n}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, основний проміжок $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ і період $T = \frac{2\pi}{3}$.

Будуємо функцію на основному проміжку

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
ρ	0	3	0

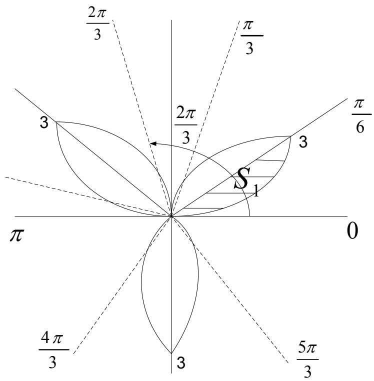


Рисунок 9

В силу симетрії функції $\sin 3\varphi$ щодо променя $\varphi = \frac{\pi}{6}$ на основному проміжку, маємо 6 рівновеликих частин S_1 та $S = 6S_1$ для $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, зображених на рис.9.

$$S=6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(3\sin 3\varphi\right)^2 d\varphi=3\int_0^{\frac{\pi}{6}}9\sin^2 3\varphi d\varphi=27\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi-\frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 6\varphi d\varphi=\frac{27}{2}\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{27}{2}\cdot\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 6\varphi d\left(6\varphi\right)=$$

$$=\frac{27}{2}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{9}{4}\sin 6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{9\pi}{4}-\frac{9}{4}\left(\sin\frac{6\cdot\pi}{6}-\sin 0\right)=\frac{9\pi}{4}\text{ (кв.од.).}$$

<u>Задачі та вправи для самостійного розв'язання:</u>

Знайти площі фігур, обмежених заданими лініями:

1. $y=x^2+1,\ y=0,\ x=1,\ x=4.$ (Відповідь: 24 (кв.од.).)

2. $y=2x,\ y=3-x^2.$ (Відповідь: $10\frac{2}{3}$ (кв.од.).)

3. $y=\frac{3}{x},\ x+y=4.$ (Відповідь: $4-\ln 27$ (кв.од.).)

4. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x.$ (Відповідь: 9 (кв.од.).)

5. $y=x^2,\ y=\frac{1}{x},\ x=3,\ y=0.$ (Відповідь: $\frac{1}{3}+\ln 3$ (кв.од.).)

6. $\rho=3\left(1+\cos\varphi\right).$ (Відповідь: 24 (кв.од.).)

7. $\begin{cases} x=2\cos^3 t; \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$ (Відповідь: $\frac{3\pi}{2}$ (кв.од.).)

§8. Довжина дуги спрямляючої кривої

Нехай несамопересічна крива задана параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

та точкам A і B відповідають значення параметра $t=\alpha$ і $t=\beta$. Якщо функції $x(t)$, $y(t)$ мають безперервні похідні на проміжку $[\alpha,\beta]$, $(\alpha<\beta)$ тоді довжину $|L|$ дуги кривої між точками A і B можна обчислити за формулою:

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt \tag{8.1}$$

Якщо крива L є графіком функції $y=f(x)$, безперервної і яка має на проміжку $[a,b]$ неперервну похідну $f'(x)$, то її довжина $|L|$ може бути знайдена за формулою:

$$|L| = \int_{a}^{b} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \tag{8.2}$$

Якщо крива L визначається полярним рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, де $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ і функція $\rho(\varphi)$ безперервна й має на проміжку $[\varphi_1;\varphi_2]$ неперервну похідну, тоді:

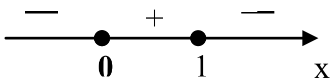
$$|L| = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi)+[\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi \tag{8.3}$$

Приклади:

Обчислити довжини дуг кривих, заданих рівняннями

8.1. $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$.

Область визначення D_x даної функції $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$ – множина точок, для яких:



$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x - x^2 \ge 0 \\ \sqrt{x} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x(x-1) \ge 0 \\ x \le 1 \end{cases}$$

Таким чином, $D_x = [0;1]$.

Обчислимо $|L|$ за формулою (8.2):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}(1-2x) + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{2-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \sqrt{\frac{(1-x)^2}{x-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$|L| = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{1-x}{x}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{x+1-x}{x}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2\left(\sqrt{1}-0\right) = 2 \text{ (лін.од.).}$$

8.2. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

Так як крива задана параметрично, то довжину дуги обчислюємо за формулою (8.1):

$$x'_t = \left(e^t\right)' \cdot (\cos t + \sin t) + e^t \cdot (\cos t + \sin t)' = e^t(\cos t + \sin t) +$$

$$+e^t(-\sin t + \cos t) = e^t(\cos t + \sin t - \sin t + \cos t) = 2e^t \cos t.$$

$$y'_t = \left(e^t\right)' \cdot (\cos t - \sin t) + e^t \cdot (\cos t - \sin t)' = e^t(\cos t - \sin t) +$$

$$+e^t(-\sin t - \cos t) = e^t(\cos t - \sin t - \sin t - \cos t) = -2e^t \sin t$$

$$|L|=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(2e^t\cos t\right)^2+\left(-2e^t\sin t\right)^2}\,dt=\int_0^{\pi}2e^t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=2\int_0^{\pi}e^t dt=2e^t\Big|_0^{\pi}=2\left(e^{\pi}-e^0\right)=2\left(e^{\pi}-1\right)\text{ (лін.од.).}$$

8.3. $\rho=1-\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi$.

Крива задана в полярних координатах. Для обчислення довжини дуги скористаємося формулою (8.3):

$\rho'=-\cos\varphi$,

$$|L|=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(1-\sin\varphi\right)^2+\left(-\cos\varphi\right)^2}\,d\varphi=\int_0^{\pi}\sqrt{1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\sin\varphi}\,d\varphi=\left\|\begin{array}{l}2-2\sin\varphi=2\left(1-\sin\varphi\right)=2\left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\right)=\\ =2\cdot 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)\\ 0\le\varphi\le\pi \qquad -\dfrac{\pi}{2}\le-\dfrac{\varphi}{2}\le 0\\ 0\le\dfrac{\varphi}{2}\le\dfrac{\pi}{2} \qquad -\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\le\dfrac{\pi}{4}\\ \sqrt{2^2\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)}=2\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)\right|=\\ =\begin{cases}2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right);\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ -2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right);\ \dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi\end{cases}\end{array}\right\|=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=\left\|\begin{array}{l}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)'=-\frac{1}{2}\\ d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)=-\frac{d\varphi}{2}\\ d\varphi=-2d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\end{array}\right\|=$$

$$=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)+4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\left(\cos 0-\cos\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos 0\right)=4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=4-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+$$

$$+4=8-4\sqrt{2}\ \text{(лін.од.).}$$

<u>Задачі та вправи для самостійного розв’язання:</u>

Знайти довжину дуги заданої кривої:

1. $y=\ln\sin x,\ x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right].$ (Відповідь: $\frac{\ln 3}{2}$ (лін.од.).)
2. $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2},\ x\in\left[0,\frac{3}{4}\right].$(Відповідь: $\sqrt{2}$ (лін.од.).)
3. $\begin{cases}x=e^t\sin t;\\ y=e^t\cos t,\end{cases}$ $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$ (Відповідь: $\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$ (лін.од.).)
4. $\begin{cases}x=t-\sin t;\\ y=1-\cos t,\end{cases}$ $t\in[0,2\pi].$ (Відповідь: 8 (лін.од.).)
5. $\rho=2\sin\varphi,\ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right].$ (Відповідь: $\frac{2\pi}{3}$ (лін.од.).)

§9. Обчислення об'ємів тіл за площею поперечного перерізу

Нехай дано довільної форми тіло (V), тобто обмежена замкнута область в тривимірному просторі. Розглянемо випадок, коли тіло (V) міститься між площинами $x = a$ і $x = b$ і станемо розсікати його площинами перпендикулярними до осі OX. Припустимо, що всі ці перерізи є квадрованими, і нехай площа перерізу, що відповідає абсцисі x, позначимо її через $S(x)$, буде безперервною функцією від x $(a \le x \le b)$ (рис.10). У цьому випадку можна стверджувати, що тіло (V) має об'єм, який виражається формулою:

$$V = \int_a^b S(x)dx . \tag{9.1}$$

Важливим приватним випадком є тіло обертання. Розглянемо на площині XOY криву, задану рівнянням $y = f(x)$, $(a \le x \le b)$, де $f(x)$ безперервна функція, що приймає невід'ємні значення.

Будемо обертати обмежену цією кривою криволінійну трапецію навколо осі OX.

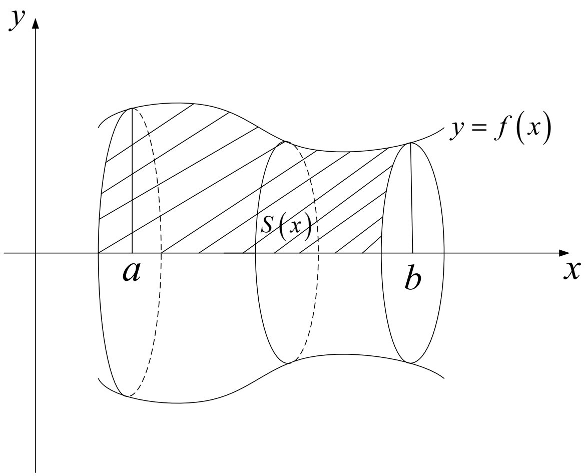


Рисунок 10

Отримане тіло (V) підходить під аналізований випадок, тому що перерізи проектуються на перпендикулярну до осі OX площину у вигляді концентричних кіл. Тут $S(x) = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot f^2(x)$, так що

$$V_{OX} = \pi \int_a^b f^2(x)dx . \qquad (9.2)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена і знизу і зверху кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$, $(a \le x \le b)$ (рис.11), то

$$V_{OX} = \pi \int_a^b \left[f_1^2(x) - f_2^2(x) \right] dx \qquad (9.3)$$

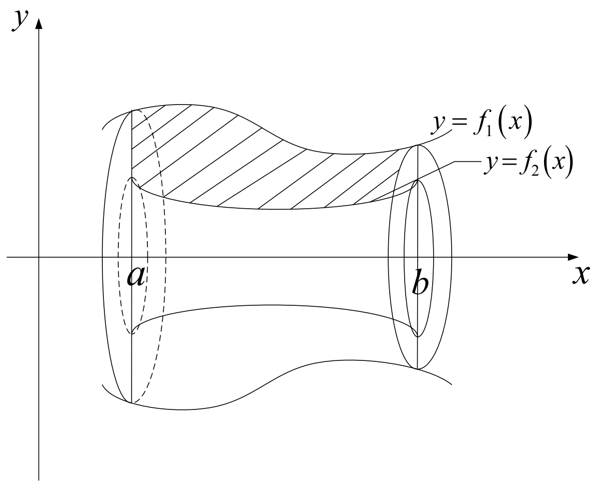


Рисунок 11

Приклад 9.1.

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$, $y = 1$, $y = 4$.

Розв'язання.

Поверхня $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ є гіперболоїдом з півосями $a = 6$, $b = 5$, $c = 3$.

$y=1$, $y=4$ - площини перпендикулярні осі OY .

Побудуємо тіло в просторі $\mathbb{R}^3$ (рис.12):

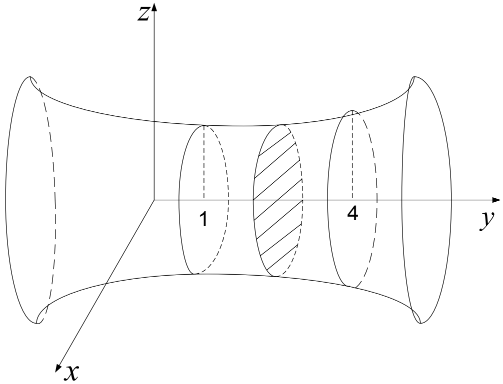


Рисунок 12

У перерізі тіла площиною, перпендикулярною осі Oy , утворюється еліпс $\left(y=\text{Const}\right)$:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1+\frac{y^2}{25},$$

$$\frac{x^2}{36\left(1+\frac{y^2}{25}\right)}+\frac{z^2}{9\left(1+\frac{y^2}{25}\right)}=1,$$

$$a=\sqrt{36\left(1+\frac{y^2}{25}\right)}=6\sqrt{1+\frac{y^2}{25}},$$

$$b=\sqrt{9\left(1+\frac{y^2}{25}\right)}=3\sqrt{1+\frac{y^2}{25}}.$$

Площа еліпса $S=\pi\cdot a\cdot b$, таким чином площа перерізу

$$S\left(y\right)=\pi\cdot 6\sqrt{1+\frac{y^2}{25}}\cdot 3\sqrt{1+\frac{y^2}{25}}=18\pi\left(1+\frac{y^2}{25}\right)$$

$S\left(y\right)$ - безперервна функція від $y\in\left[1;4\right]$. Враховуючи формулу (9.1) маємо:

$$V=\int_1^4 18\pi\left(1+\frac{y^2}{25}\right)dy=18\pi\left(\int_1^4 dy+\frac{1}{25}\int_1^4 y^2dy\right)=18\pi\left(y\Big|_1^4+\frac{1}{25}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_1^4\right)=$$

$$=18\pi\left(4-1+\frac{1}{75}\cdot\left(4^3-1\right)\right)=18\pi\left(3+\frac{63}{75}\right)=18\pi\left(3+\frac{21}{25}\right)=$$

$$=\frac{18\pi\cdot 96}{25}=69.12\pi \text{ (куб.од.).}$$

Приклади:

Обчислити об'єм тіл, утворених обертанням фігур, обмежених графіками функцій. Вісь обертання OX .

9.2. $y=1-x^2$, $x=0$, $x=\sqrt{y}$.

Побудуємо область, обмежену даними функціями в площині XOY :

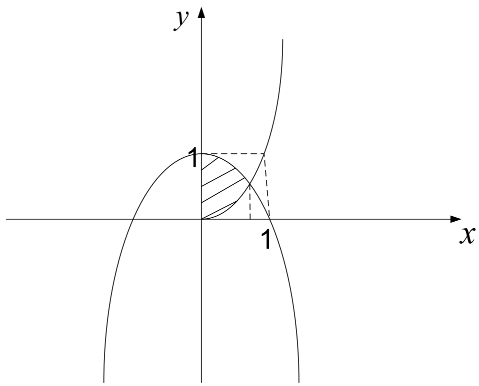


Рисунок 13

Знайдемо абсцису точки перетину кривих:

$$\begin{cases} y=1-x^2; \\ x=\sqrt{y}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1-x^2; \\ y=x^2; \end{cases} \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

через те, що $x\geq 0$, то $x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$.

Точка перетину $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right)$. Оскільки область обмежена зверху кривою $y=1-x^2$, а знизу кривою $y=x^2$ $\left(x=\sqrt{y}\right)$, то для обчислення отриманого об'єму

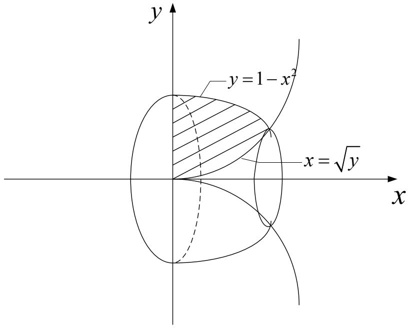


Рисунок 14

скористаємося формулою (9.3):

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\left(1-x^2\right)^2-\left(x^2\right)^2\right)dx=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(1-2x^2+x^4-x^4\right)dx=$$

$$=\pi\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx-2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x^2dx\right)=\pi\left(x\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\pi\frac{3-1}{3\sqrt{2}}=\pi\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\ \text{(куб.од.).}$$

9.3. $y=x^2+6x$, $y=0$

Будуємо область (D) в площині XOY

$y=x^2+6x$ - парабола.

Знайдемо координати вершини B параболи:

$$\left.\begin{aligned}&x_B=\frac{-b}{2a}=-\frac{6}{2\cdot 1}=-3;\\&y_B=y\left(x_B\right)=\left(-3\right)^2+6\cdot\left(-3\right)=9-18=-9\end{aligned}\right\}\Rightarrow B\left(-3;-9\right).$$

Точки перетину з осями координат. З віссю OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 0$

$$x(x+6) = 0$$

$$x = 0;\ x = -6 \Rightarrow \text{т. } (0;0);\ (-6;0)$$

З віссю OY: $x = 0 \Rightarrow y(0) = 0^2 + 6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{т.}(0;0)$.

$y = 0$ - вісь абсцис.

Побудуємо область, симетричну даній області (D) щодо осі OX.

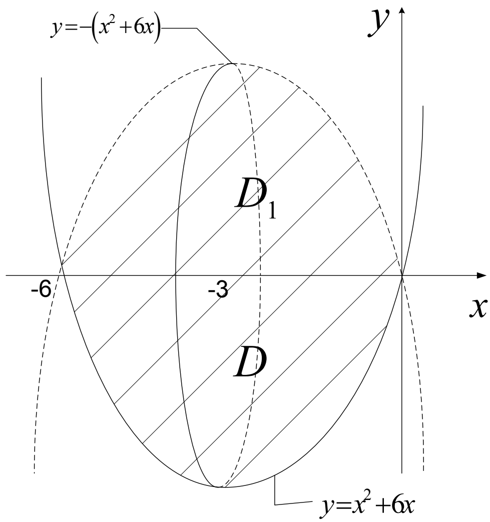


Рисунок 15

$y_1 = -(x^2 + 6x)$, $y = 0$ - область D_1 (рис.15).

Функція y_1 приймає невід'ємні значення при $x \in [-6;0]$. Фігура, отримана обертанням області D_1 навколо осі OX, в точності збігається з тілом, отриманим обертанням області D навколо тієї ж осі.

Застосуємо формулу (9.2) для функції $y_1(x)$:

$$V=\pi\int_{-6}^{0}\left[-\left(x^2+6x\right)\right]^2dx=\pi\int_{-6}^{0}\left(x^2+6x\right)^2dx=$$

$$=\pi\int_{-6}^{0}\left(x^4+12x^3+36x^2\right)dx=\pi\left(\int_{-6}^{0}x^4dx+12\int_{-6}^{0}x^3dx+36\int_{-6}^{0}x^2dx\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{12x^4}{4}+\frac{36x^3}{3}\right)\Bigg|_{-6}^{0}=\pi\left(0-\left(\frac{(-6)^5}{5}+3(-6)^4+12(-6)^3\right)\right)=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{6^5}{5}-3\cdot6^4+12\cdot6^3\right)=\pi\cdot6^3\left(\frac{36}{5}-18+12\right)=\pi\cdot6^3\cdot\frac{36-30}{5}=$$

$$=\frac{\pi\cdot6^4}{5}=259,2\pi\ \text{(куб.од.)}.$$

<u>Задачі та вправи для самостійного розв’язання:</u>

Знайти об’єми тіл, утворених обертанням навколо осі Ox фігур, обмежених заданими лініями:

1. $y=x^2,\ x=1,\ x=2.$ (Відповідь: $\frac{31\pi}{5}$ (куб.од.).)

2. $y=\sqrt{x},\ y=x^2.$ (Відповідь: $\frac{3\pi}{10}$ (куб.од.).)

3. $y=3\sin x,\ y=\sin x,\ x\in[0,\pi].$ (Відповідь: $4\pi^2$ (куб.од.).)

4. $y=x^2,\ y=\frac{8}{x},\ x=4,\ y=0.$ (Відповідь: $\frac{112\pi}{5}$ (куб.од.).)

Знайти об’єми тіл, утворених обертанням навколо осі Oy фігур, обмежених заданими лініями:

5. $y=x^2,\ x=1,\ x=2.$ (Відповідь: $7,5\pi$ (куб.од.).)

Запитання для самоперевірки з теми «Визначений інтеграл»

1. Дайте означення інтегральної суми функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.
2. Дайте означення визначеного інтеграла.
3. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
4. Запишіть формулу Ньютона – Лейбніца.
5. У чому полягає відмінність методів заміни змінної у визначеному і невизначеному інтегралах?
6. Як обчислити площу плоскої фігури при різних формах її завдання?
7. Як обчислити довжину дуги кривої:
    1) у декартовій системі координат;
    2) у полярних координатах;
    3) у випадку, коли крива задана параметричними рівняннями?
8. Запишіть формулу для обчислення об’єму тіла за площами його паралельних перерізів.
9. Наведіть формули для об’ємів тіл обертання: навколо осі Ox, навколо осі Oy.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособ. для вузов / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 384 с.

2. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 1. / / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 343 с.

3. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 2. / / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 336 с.

4. Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. I. / / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. – М. : Наука, 1971. – 600 с.

5. Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. II. / / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. – М. : Наука, 1973. – 448 с.

6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 1. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 712 с.

7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 2. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 576 с.

8. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 3. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1989. – 352 с.

9. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1984. – 592 с.

10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1990. – 270 с.

11. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1991. – 352 с.

12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 3. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1991. – 288 с.

13. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : у 2 ч. Ч. I. / Ю. М. Сенчук. – Х. : НТУ «ХПІ», 2004. – 408 с.

14. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : у 2 ч. Ч. II. / Ю. М. Сенчук. – Х. : НТУ «ХПІ», 2006. – 408 с.

15. Заболоцький М. В. Математичний аналіз / М. В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. – К. : Знання, 2008. – 421 с.

16. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 1. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1966. – 608 с.

17. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 2. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1988. – 800 с.

18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 3. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – 653 с.

Навчальне видання

Любчик Леонід Михайлович, **Тоніца** Олег Володимирович,

Дунаєвська Ольга Ігорівна, **Ахієзер** Олена Борисівна,

Сердюк Ірина Василівна

Вища математика.

Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання. Інтегральне числення функції однієї змінної

Навчальний посібник

для студентів усіх спеціальностей вищих технічних навчальних закладів

За загальною редакцією **Любчик** Леонід Михайлович

Роботу до видання рекомендував М.І. Безменов

Редактор М. П. Єфремова

План 2016 р., поз. 33

Підп.до друку 03.02.2016 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 8,6
Наклад 50 прим. Зам. № Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.