УДК 66-93

Ведь Е.В., Толчинский Ю.А.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОГО И ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

При анализе гетерогенных смесей удобно использовать следующие бинарные оппозиции: изолированность – неизолированность; связность – несвязность; конечность – бесконечность. Если фаза представлена в каждом объеме двухфазной среды, то она считается бесконечной, а в противном случае – конечной. Если любые две точки фазы можно соединить непрерывной кривой, не выходящей за пределы этой фазы, то такая фаза – связанная; в противном случае – несвязная. Изолированной фазой будет такая, элементы которой окружены другой фазой.

Модель коэффициента теплопроводности для такой среды заключается в построении коэффициента теплопроводности для типичного элемента фильтрующей среды. Такой элемент представлен кубом, в середине которого расположена пара кубической формы. Такое представление оправдано тем обстоятельством, что для включений с не слишком сильно выраженной анизотропией формы коэффициент теплопроводности слабо зависит от формы включения [1]. Для учета такого факта, что частицы фильтрующей среды касаются друг друга по площадям контакта, поверхность куба имеет выступы кубической формы. Элемент с перечисленными свойствами куба имеет выступы кубической формы. При построении формул для вычисления коэффициента теплопроводности используется способ, восходящий к Рэлею [1]. Производится изотермическое и адиабатическое разбиение элемента. Используются правила сложения тепловых сопротивлений при их последовательном и параллельном расположении. В итоге для коэффициента теплопроводности λ_{s1} получается следующее выражение:

$$\lambda_{s1} = \lambda_{ss} \frac{1+\left(\omega_{ss}-1\right) m_1^{2/3}}{1+\left(\omega_{ss}-1\right) m_1^{2/3}\left(1-m_1^{2/3}\right)}, \quad \omega_{ss} = \lambda_g / \lambda_{ss}, \tag{1}$$

в котором λ_{s5} коэффициент теплопроводности твердой фазы; λ_9 – коэффициент теплопроводности газа в поре. Выражение (1) относится к элементу без учета контактных выступов. С учетом этих выступов коэффициент теплопроводности принимает следующий вид:

$$\lambda_{s2} = \lambda_{ss} \frac{\lambda_{s1}}{1+f\left(N\right)\dfrac{\lambda_{s1}}{\lambda_{ss}}\left(\dfrac{1-m_1}{m_2}\right)^{1/3}}, \tag{2}$$

где λ_{s2} – коэффициент теплопроводности элемента с учетом контактных выступов. Величина $f(N)$ – множитель, который показывает, какое число площадок контакта передаёт тепло в направлении его потока.

По причине ненулевой проникаемости фильтрующей среды, обе фазы являются связными и взаимопроникающими. Коэффициент теплопроводности такого элемента определяется коэффициентом теплопроводности газа и коэффициентом теплопроводности твёрдой фазы. Выражение для коэффициента теплопроводности учитывает пористость каналов – m_2 только один раз, поскольку в выражении (2) для величины λ_{s1} эта пористость не учитывается. Наличие сужений и расширений в элементе может быть легко учтено. Ценою такого уточнения является значительное усложнение формул [1]. Ниже используется простейший вариант геометрии межпорового канала.

С учетом сказанного коэффициент теплопроводности принимает следующий:

$$\lambda_m = \lambda_{s2}\left[\theta^2 + \omega_{ss} - (1-\theta)^2 + \frac{2\omega_{ss}(1-\theta)}{1+\omega_{ss}\theta - \theta}\right],$$
$$\theta = \left(\frac{1-m_2}{1-2m_2}\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Выражение (3) учитывает наличие пор с газом и каналов, их соединяющих. В это выражение входит коэффициент теплопроводности газа λ_g, а сам газ в поре считается неподвижным. В общем случае это не так. Наличие тепловой конвекции в порах приводит к тому, что коэффициент теплопроводности газа увеличивается, то есть в формулах (1)–(3) следует заменить λ_g на λ_{g1} по правилу:

$$\lambda_{g1} = \lambda_g\left(1 + Ra^{\xi}\right); \quad \xi \approx 0,30 \div 0,33; \quad g = 9,8\,м/c^2$$
$$Ra = \frac{\Omega L g \beta_T \Delta t}{\nu_g \chi_g}; \quad \nu_g = \mu_g/\rho_g \quad \chi_g = \lambda_g/\rho_g\, c_{pg}, \tag{4}$$

в котором Ra – число Рэлея; Ω – проницаемость фильтрующей среды; L – характерный размер фильтрующей среды; β_T – коэффициент теплового расширения газа; Δt – изменение температуры в фильтрующей среде; μ_g, ρ_g, c_{pg} – вязкость, плотность, теплоёмкость газа соответственно [2].

Использование выражения (4) несет в себе некоторую неопределенность. Эта неопределенность порождается строением фильтрующей среды. Если рассмотреть такую среду, в которой поры почти изолированы друг от друга, то в выражении для числа Ra в качестве величины Ω следует использовать квадрат размера поры, а в качестве величины L – размер поры. Если рассматривать среду, в которой поры хорошо сообщаются между собой, то масштабом конвекции является масштаб всей среды. Реальная ситуация свидетельствует о том, что тепловая конвекция существенна там и тогда, где и когда выполняется условие: $Ra > 10^3$.

Для описания гидравлического поведения системы частиц необходимо установить связь между перепадом давлений и среднеобъемной скоростью газа. На основании положения о наличии двух масштабов пористости m_1 и m_2 будет использоваться такая модель порового канала. Поровый канал имеет характерный поперечный размер порядка $m_2^{1/3}d$, если d – характерный размер частицы. Реальный поровый канал имеет сужения и расширения, которые моделируются ступенчатого изменения сечения и ступенчатого изменения направления.

Перепад давлений на границах объёма, содержащего отдельную пару, обусловлен числом N^+ каналов, входящих в пору и числом N^- каналов, выходящих из поры. Также перепад давлений зависит от деталей гидродинамики потоков внутри поры. Не задаваясь детальным геометрическим строением поры, располагая только величины N^+, N^-, $m_1^{1/3}d$, $m_2^{1/3}d$ можно сформулировать чисто кинематическую модель, основанную только на уравнении Бернулли. Сущность модели состоит в следующем. Места входа и выхода каналов на поверхности поры расположены под разными углами. Размеры каналов и пор сильно отличаются по величине. Поток, попадая из канала в пору, испытывает расширение. Поток, попадая в пору, испытывает расширение. Поток, покидает пору через канал, испытывает сжатие. Направления входных и выходных каналов не совпадают так, что отдельные потоки внутри поры испытывают повороты на некоторые углы. Внутри поры происходит перестройка входных потоков в выходные

Попадая в пору, поток сначала расширяется от величины d_j^+ до величины Δ_{j1}^+, затем изменяется до величины Δ_{j2}^-, а затем сужается до величины d_i^-. Учитывая то, что вклад местных сопротивлений учитывается аддитивно, можно составить систему уравнений Бернулли, в которых в качестве крайних выступают сечения 1, 01, 02 и 2. такая система уравнений имеет следующий вид:

$$p^{+}+\frac{\rho\left(\omega_i^{+}\right)^2}{2}=p_{01}+\frac{\rho\omega_{01}^2}{2}+\xi_i^{+}\frac{\rho\left(\omega_i^{+}\right)^2}{2};\quad i=1,2,\ldots,N^{+};$$
$$p_{02}+\frac{\rho\omega_{01}^2}{2}=p^{-}+\frac{\rho\left(\omega_j^{-}\right)^2}{2}+\xi_j^{-}\frac{\rho\left(\omega_j^{-}\right)^2}{2};\quad i=1,2,\ldots,N^{-}, \tag{5}$$

в котором P^{+} и P^{-} – значения давлений в сечениях; ξ_j^{+}, ξ_j^{-} – коэффициенты местных сопротивлений на входе и выходе из поры j-ого входного и i-ого выходного каналов соответственно. Результат решения этой системы уравнений может быть записан в виде совокупности таких формул:

$$\omega_j^{+}=\frac{\omega_{01}\,s_{01}\Big/\sqrt{1+\xi_j^{+}}}{\sum\limits_{j=1}^{N^{+}}s_j^{+}\Big/\sqrt{1+\xi_j^{+}}};\quad \omega_i^{-}=\frac{\omega_{02}\,s_{02}\Big/\sqrt{1+\xi_i^{-}}}{\sum\limits_{i=1}^{N^{-}}s_j^{-}\Big/\sqrt{1+\xi_i^{-}}};$$
$$\omega_{01}=\frac{\sqrt{2\Delta p^{+}/\rho}}{\sqrt{1-\dfrac{s_{01}^2}{\left(\sum\limits_{j=1}^{N^{-}}s_j^{+}\Big/\sqrt{1+\xi_j^{+}}\right)^2}}};\quad \omega_{02}=\frac{\sqrt{2\Delta p^{-}/\rho}}{\sqrt{1-\dfrac{s_{02}^2}{\left(\sum\limits_{j=1}^{N^{-}}s_i^{-}\Big/\sqrt{1+\xi_i^{-}}\right)^2}}}; \tag{6}$$
$$\Delta p^{+}=p^{+}-p_{01},\quad \Delta p^{-}=p_{02}-p^{-},$$

где w_{01} и w_{02} – скорости перемешанного суммарного потока, образованного входными потоками перемешанного выходного потока из которого образуются выходные потоки; S_j^{+} и S_i^{-} – площади поперечных сечений входных и выходных потоков. В этих формулах величины S_j^{+} и S_i^{-} имеют порядок $m_2^{2/3}d^2/N^{+}$ и $m_2^{2/3}d^2/N^{-}$, а величины S_{01} и S_{02} имеют порядок $m_1^{2/3}d^2$. В рассматриваемой схеме принято, что перестройка отдельных потоков заменяется перестройкой усредненного потока от скорости w_{01} и до скорости w_{02}. Отказ от схемы с полным смешением входных и выходных потоков влечет значительные трудности, поскольку при этом необходимо рассматривать множество вариантов соединения и разъединения. Количество возможностей $\aleph$ и при этом определяется числом разбиений N^{+} элементов на N^{-} групп по такой формуле:

$$\aleph=\sum_{N_j}\frac{N^{+}!}{\prod\limits_{j=1}^{N^{-}}N_j!};$$
$$\sum_j N_j=N^{+}; \tag{7}$$
$$1\le j\le N^{-}.$$

Изменение площади поперечного сечения при перестройке его из входного в выходной, которое определяет величину соответствующего местного сопротивления, имеет порядок. При заданном направлении градиента давления поверхность поры можно разделить на две части по принципу, чтобы проекции градиента давления на направления входных и выходных потоков вне поры были положительными. Тогда для пор с не слишком большой анизотропией формы типичные углы для расположения мест впадения входных каналов в пору равны $\pi i\Big/\sqrt{N^{+}+1}$, а такие же углы для выходных каналов равны $\pi j\Big/\sqrt{N^{+}+1}$. Таким образом, углы поворота потоков будут равным всевозможным суммам вида

$\pi\left(i/\sqrt{N^{+}+1}+j/\sqrt{N^{-}+1}\right)$, $1\leq i\leq N^{+}$; $1\leq j\leq N^{-}$. Соответствующие местные сопротивления следует усреднить по множеству возможных комбинаций, число которых дается формулой (7).

Представленная модель, в случае различия величин N^{+} и N^{-}, следовательно, предполагает два способа вычисления сопротивления поры. Первый способ учитывает сужения и расширения потоков при входе в пору и выходе из нее, учет перестройки потоков внутри поры при условии полного перемешивания. Повороты потоков в этой схеме не учитываются. Во втором способе каждый поток внутри поры сохраняет свою индивидуальность. При этом учитываются расширения и сужения потоков, повороты на разные углы, что равносильно допущению об отсутствии вообще какого-либо перемешивания. Во втором способе необходимо вычислять статистическую сумму по всем возможным конфигурациям входных и выходных каналов для нахождения средних значений.

Ниже рассматривается второй способ в рамках предлагаемой модели, в котором принято, что $N^{+}=N^{-}$, все каналы имеют одинаковое поперечное сечение при пересечении поверхности поры, перемешивания внутри поры нет. При таких условиях коэффициенты местных сопротивлений на входе, выходе и повороте потоков имеют следующие выражения:

$$\begin{gathered}
\xi^{+}=\left(0,6+9/\sqrt{\mathrm{Re}}\right)\left(1-s^{+}/\left(s_0/N\right)\right)^{2} \quad /\,\textit{расширение}\,/;\\
\xi^{-}=\left(0,5+13/\sqrt{\mathrm{Re}}\right)\left(1-s^{-}/\left(s_0/N\right)\right)^{3/4} \quad /\,\textit{сужение}\,/;\\
\xi_{\varphi}=\lambda\varphi r_0/d_0 \quad /\,\textit{поворот}\,/;\\
\lambda=\frac{20}{\mathrm{Re}^{0,45}}\left(\frac{d_0}{2r_0}\right)^{0,175},\\
50<\mathrm{Re}\sqrt{\frac{d_0}{2r_0}}<600,
\end{gathered} \tag{8}$$

где индексы i и j опущены; γ – угол поворота потока; r_0 – радиус кривизны поворота; N – число входных (выходных каналов); d_0 – размер потока; R_e – локальное число Рейнольдса потока в канале. Используя свойство аддитивности местных сопротивлений и связь величин $S^{+}=S^{-}$ с пористостью m_2, а величины S_0-cm_1 суммарное сопротивление потока при пересечении пары можно записать так:

$$\begin{gathered}
\xi=\left(0,6+9/\sqrt{\mathrm{Re}}\right)\left[1-\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/3}\frac{1}{N^{2/3}}\right]^{2}+\left(0,5+13/\sqrt{\mathrm{Re}}\right)\left[1-\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/3}\frac{1}{N^{2/3}}\right]^{3/4}+\\
+\lambda\left(\mathrm{Re}\right)\gamma\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/3}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Местное сопротивление отдельного канала, то есть потока вне поры можно представить в виде суммы отдельных сопротивлений сужений и расширений и поворотов. Оценка для местного сопротивления ξ_k отдельного канала принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}
\xi_k=\frac{d}{2\Delta}\left\{\left(0,6+9/\sqrt{\mathrm{Re}}\right)\left[1-\left(1-\left(\frac{\delta}{dm_2^{1/3}}\right)\right)^{2}\right]^{2}+\left(0,5+13/\sqrt{\mathrm{Re}}\right)\left[1-\left(1-\left(\frac{\delta}{dm_2^{1/3}}\right)\right)^{2}\right]^{3/4}+\right.\\
\left.+\lambda\left(\mathrm{Re}\right)\frac{m_2^{1/3}d}{\Delta}\cdot\frac{dm_2^{1/3}\delta}{\delta^2+\Delta^2}\arcsin\frac{2\delta\Delta}{\delta^2+\Delta^2}\right\}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Для элемента объема фильтрующий среды сопротивление отдельного канала складывается из сопротивлений по формулам (9) и (10), в которых величины m_1, m_2, N, δ, Δ следует считать заданными. На длине L помещается L/d междупоровых каналов. Средний по сечению расход движения газа $\dot{V}$ связан со скоростью движения газа W в канале, которая входит в число Re в формулах (8)–(10) таким соотношением:

$$< \dot{v} >= \omega(1-m_1)^{2/3}\frac{N}{2}m_2^{2/3} \tag{11}$$

с помощью которого связь перепада давления и средним принимает такой вид:

$$\dot{V} = m_2^{2/3}(1-m_1)^{2/3}\left(N^{2/3}/2\right)\sqrt{\frac{2\Delta p}{L}\frac{d}{\xi+\xi_k}}. \tag{12}$$

Результаты, полученные в предыдущих частях настоящей работы, дают возможность сделать уравнения для нахождения толщин диффузионных пограничных слоёв δ_i замкнутыми. Подстановка выражений приводит к уравнениям для x_{i0} такого вида:

$$\begin{gathered}
-\frac{2\left(x_{10}-x_1^{\infty}\right)}{\delta_1}\left\{-\left[D_{12}\left(x_{10}+x_{20}\right)\left(1-x_{10}\right)x_{20}+D_{12}\left(1-x_{20}\right)\left(1-x_{10}\right)\left(1-x_{10}-x_{20}\right)\right]\xi-D_{31}x_{10}\xi\right\}- \\
-\frac{2\left(x_{20}-x_2^{\infty}\right)}{\delta_2}\left(D_{21}-D_{31}\right)x_{10}\xi=U_w^{\infty}d\,x_{10}/dx\Big|_{y=0}; \\
-\frac{2\left(x_{10}-x_1^{\infty}\right)}{\delta_1}\left(D_{12}-D_{32}\right)x_{20}\xi-\frac{2\left(x_{20}-x_2^{\infty}\right)}{\delta_2}\left\{-\left[D_{21}\left(x_{10}+x_{20}\right)\left(1-x_{20}\right)x_{10}+\right.\right. \\
\left.\left.+D_{23}\left(1-x_{10}\right)\left(1-x_{20}\right)\left(1-x_{10}-x_{20}\right)\xi\right]-D_{32}x_{20}\xi\right\}=U_w^{\infty}d\,x_{20}/dx\Big|_{y=0}.
\end{gathered} \tag{13}$$

Уравнения гидродинамики и теплообмена для смеси имеют такой вид:

$$\begin{gathered}
-\nabla P+\frac{\rho|\vec{\upsilon}|^{\infty}}{2d}\left(\xi+\xi_k\right)\vec{\upsilon}^{\infty}=0; \\
\xi=\xi(\mathrm{Re}); \\
\xi_k=\xi_k(\mathrm{Re}); \\
\rho c_p\left(\upsilon^{\infty}\nabla\right)T^{\infty}=\dot{I}\left(\upsilon^{\infty},T^{\infty},x_j^{\infty}\right); \\
\left(\upsilon^{\infty}\nabla\right)x_i^{\infty}=\dot{I}\left(\upsilon^{\infty},T^{\infty},x_j^{\infty}\right); \\
\rho=\rho\left(x_j^{\infty},T^{\infty}\right); \\
c_p=c_p\left(x_j^{\infty},T^{\infty}\right); \\
\mu=\mu\left(x_j^{\infty},T^{\infty}\right),
\end{gathered} \tag{14}$$

в котором $\dot{J}_T$ и $\dot{J}_i$ – источники для температуры и компонентов смеси соответственно.

Все величины, отмеченные индексом « ∞ » относятся к области, расположенной вне соответствующих пограничных слоёв. Уравнения (14) следует решать для конкретной области течения смеси с обычными граничными условиями для скорости температуры.

Представленная модель предназначена для описания гидродинамического и тепломассообменного поведения смеси газов в реакции доокисления монооксида углерода в приближении ламинарного характера пограничных слоёв в интервале температур, не превышающем 1000 К и давлении смеси порядка $0{,}1\cdot10^5$ Па и менее. Модель допускает распространение на турбулентный режим течения без изменения своих методологических оснований. Увеличение числа компонентов газовой смеси для других реакций изменяет количество диффузионных потоков и уравнений. Структура формул позволяет по индексации записывать выражения для потоков с любым количеством компонентов. Гидравлические характеристики фильтрующей среды относятся к случаю неконсолидированного тела, состоящего из отдельных частиц, поверхность которого покрыта слоем катализатора. Иные способы организации каталитической поверхности требуют иных моделей, однако, используемые в настоящей модели элементы, порождающие местные сопротивления – сужение, расширение, поворот, представляются универсальными и такими, которые можно использовать при описании любой внутренней поверхности.

Литература

1. Gebhart B., Jaluria Y., Mahajan R., Sammokia B Buoyanecy-induced flows and transport. Hemisphere Publishing Corporation; a subsidiary of Harper and Row Incorporated. – New York. – 1988. – 528 p.
2. Groot S., Mazur P. Non-Equilibrium thermodynamics. North Holland publishing company. – Amsterdam. – 1962. – 456 p.

УДК 66-93

Ведь Е.В., Толчинский Ю.А.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОГО ТА ГІДРАВЛІЧНОГО ОПОРУ

Розроблено модель, яка описує гідродинамічну й тепломасообмінну поведінку суміші газів у реакції доокислення монооксиду вуглецю в наближенні ламінарного характеру граничних шарів.

Ved E.V., Tolchinsky Y.A

A MATHEMATICAL MODEL OF THERMAL AND HYDRAULIC RESISTANCE

The model which describes the hydrodynamic and heat-mass exchange behavior of the gas mixture in the reaction of carbon monoxide oxidation in approximation to the laminar character of boundary layers has been developed.