

О.С.МАЗУР, НТУ «ХПИ»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В работе запропоновано метод побудови областей динамічної нестійкості (ОДН) у випадку коливань пластин складної геометрії. В основу запропонованого методу покладено використання теорії R-функцій та варіаційних методів. Отримані нові чисельні результати для пластин складної форми.

The method of construction of dynamic instability region for plates with complex form is offered. The proposed approach is based on application R-function method and variational one. New numerical results for plates with complex form are obtained.

В работе рассматривается задача о параметрических колебаниях пластин сложной формы. Исследованию этого вопроса посвящено достаточно большое количество публикаций [1,2,6,7]. В данной статье излагается методика построения областей динамической неустойчивости для пластин сложной геометрии. Результаты подобных исследований можно найти в монографии [1]. В этой работе решается задача построения областей динамической неустойчивости для пластин и оболочек канонической формы, также в работе указано на допустимость определения границ ОДН исходя из линеаризованных уравнений движения.

Предложенный в данной работе метод основан на использовании теории R-функций [5], что позволяет исследовать пластины сложной геометрии с различными типами краевых условий.

Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластину постоянной толщины h , нагруженную равномерно распределенной продольной нагрузкой $P = P_0 + P_t \cos \theta t$. Система дифференциальных уравнений движения [1], в безразмерной форме может быть представлена следующим образом:

$$A\bar{U} = \bar{N}I(w), \quad (1)$$

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)} \nabla^4 w = NL_1(u, v, w) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$\text{где } \bar{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix};$$

$$\bar{N}I(w) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (w_{,x}^2 + \mu w_{,y}^2)_{,x} + \frac{1-\mu}{2} (w_{,x} w_{,y})_{,y} \\ \frac{1-\mu}{2} (w_{,x} w_{,y})_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,y}^2 + \mu w_{,x}^2)_{,y} \end{pmatrix},$$

$$NL_1(u, v, w) = w_{,xx} N_x(u, v, w) + 2w_{,xy} N_{xy}(u, v, w) + w_{,yy} N_y(u, v, w),$$

μ – коэффициент Пуассона, N_x, N_y, N_{xy} – усилия в срединной плоскости.

Связь между размерными и безразмерными параметрами имеет следующий вид

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; \quad y = \frac{\bar{y}}{a}; \quad w = \frac{\bar{w}}{h}; \quad u = \frac{\bar{u}a}{h^2}; \quad v = \frac{\bar{v}a}{h^2}; \quad N_x = \frac{\bar{N}_x a^2}{Eh^3};$$

$$N_y = \frac{\bar{N}_y a^2}{Eh^3}; \quad N_{xy} = \frac{\bar{N}_{xy} a^2}{Eh^3}; \quad t = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t; \quad P = \frac{\bar{P} a^2}{Eh^3},$$

где ρ – плотность пластины, E – модуль Юнга.

Метод решения. Для удобства изложения метода введем некоторые обозначения:

1. Представим нормальное и касательное усилия в виде суммы линейной составляющей и нелинейной добавки

$$N_n = N_n^L + N_n^D; \quad S_n = S_n^L + S_n^D,$$

где

$$N_n^L = \frac{1}{(1-\mu^2)} [u_{,n} l + v_{,n} m + \mu(v_{,\tau} l - u_{,\tau} m)]; \quad N_n^D = \frac{1}{2(1-\mu^2)} [w_{,n}^2 + \mu w_{,\tau}^2];$$

$$S_n^L = \frac{1}{2(1+\mu)} [-u_{,n} m + v_{,n} l + u_{,\tau} l + v_{,\tau} m]; \quad S_n^D = \frac{1}{2(1+\mu)} w_{,n} w_{,\tau}.$$

Здесь n, τ – нормаль и касательная к границе области $\partial\Omega$, l, m – направляющие косинусы нормали.

2. Через $NL_2(u, v, w)$ обозначим следующее выражение

$$NL_2(u, v, w) = w_{,xx} N_x^L(u, v) + 2w_{,xy} N_{xy}^L(u, v) + w_{,yy} N_y^L(u, v),$$

где

$$N_x^L = \frac{1}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad N_y^L = \frac{1}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad N_{xy}^L = \frac{1}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

Решение системы (1-2) представим в виде

$$w(x, y, t) = y(t) w_1(x, y),$$

$$u(x, y, t) = u_0(x, y) + u_{0t}(x, y) \cdot \cos \theta t + y^2(t) u_1(x, y),$$

$$v(x, y, t) = v_0(x, y) + v_{0t}(x, y) \cdot \cos \theta t + y^2(t) v_1(x, y),$$

где вектор $\bar{U}_0 = (u_0, v_0)^T$ — решение плоской задачи теории упругости

$$A\bar{U}_0 = 0$$

с граничными условиями для нагруженного участка

$$N_n^L(u_0, v_0) = -P_0; \quad S_n^L(u_0, v_0) = 0$$

и для остальной части

$$N_n^L(u_0, v_0) = 0; \quad S_n^L(u_0, v_0) = 0;$$

вектор $\bar{U}_{0t} = (u_{0t}, v_{0t})^T$ – решение плоской задачи теории упругости

$$A\bar{U}_{0t} = 0$$

с граничными условиями для нагруженного участка

$$N_n^L(u_{0t}, v_{0t}) = -P_t; \quad S_n^L(u_{0t}, v_{0t}) = 0$$

и для остальной части

$$N_n^L(u_{0t}, v_{0t}) = 0; \quad S_n^L(u_{0t}, v_{0t}) = 0;$$

w_1 – основная форма линейных колебаний сжимаемой пластины, удовлетворяющая заданным граничным условиям для прогиба; вектор $\bar{U}_1 = (u_1, v_1)^T$ – решение плоской задачи теории упругости

$$A\bar{U}_1 = \bar{N}L(w_1),$$

с граничными условиями

$$N_n^L(u_1, v_1) = -N_n^D(w_1); \quad S_n^L(u_1, v_1) = -S_n^D(w_1).$$

Подставляя выражения для u, v, w – в уравнение (2) получаем дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами

$$y_t''(t) + \omega_L^2 (1 - \alpha - \beta \cdot \cos \theta t) y(t) + \gamma y^3(t) = 0, \quad (3)$$

где ω_L – основная частота линейных колебаний пластины, коэффициенты α, β и γ определяются как

$$\alpha = \frac{1}{\omega_L^2 \|w_1\|^2} \iint_{\Omega} NL_2(u_0, v_0, w_1) w_1 d\Omega;$$

$$\beta = \frac{1}{\omega_L^2 \|w_1\|^2} \iint_{\Omega} NL_2(u_{0t}, v_{0t}, w_1) w_1 d\Omega;$$

$$\gamma = -\frac{1}{\|w_1\|^2} \iint_{\Omega} NL_1(u_1, v_1, w_1) w_1 d\Omega.$$

Векторы $\bar{U}_0, \bar{U}_{0t}, \bar{U}_1$, функция w_1 и частота ω_L определяются средствами теории R-функций в сочетании с методом Ритца.

Полагая в (3) $\gamma = 0$, получаем уравнение

$$y_t''(t) + \omega_L^2 (1 - \alpha - \beta \cdot \cos \theta t) y(t) = 0.$$

Преобразуем его к виду

$$y_t''(t) + \Omega^2 (1 - 2k \cdot \sin(\theta t)) y(t) = 0, \quad (4)$$

где

$$\Omega^2 = \omega_L^2 (1 - \alpha)$$

– частота собственных колебаний пластины, нагруженной постоянной составляющей продольной нагрузки,

$$k = \frac{\beta}{2(1-\alpha)}$$

– коэффициент возбуждения.

Свойства уравнения (4) (уравнение Матье) хорошо изучены. При некоторых сочетаниях параметров Ω и k , уравнение имеет неограниченно возрастающие решения. Области устойчивых и неустойчивых решений заключены между кривыми, подробное описание построения которых можно найти, например, в [1].

В данной работе мы исследуем главную область динамической неустойчивости, лежащую вблизи $\theta = 2\Omega$. Границы главной ОДН

$$\theta = 2\Omega\sqrt{1-k}, \quad \theta = 2\Omega\sqrt{1+k}. \quad (5)$$

Как видно из формул (5), границы области динамической неустойчивости определяются постоянной составляющей нагрузки P_0 .

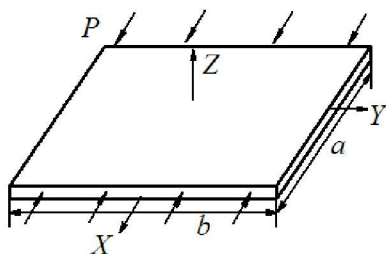


Рисунок 1

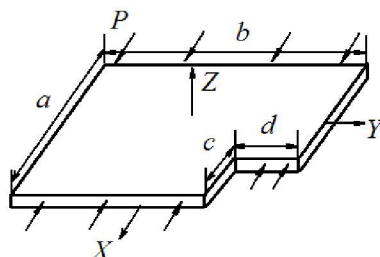


Рисунок 2

Численные результаты. Для иллюстрации предложенного алгоритма рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим прямоугольную пластину, сжимаемую периодической нагрузкой $P = P_0 + P_t \cos \theta t$ вдоль сторон параллельных оси OY (рис. 1). Граничные условия для рассматриваемой задачи положим следующие: на сторонах $y = b/2$; $y = -b/2 - v = 0$; $S_n = 0$, на сторонах $x = a/2$; $x = -a/2 - N_n = -P$;

$S_n = 0$, для прогиба вдоль всего контура выполняются условия $w = 0$; $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$.

Для рассматриваемой задачи, были получены следующие значения коэффициентов.

Для сравнения результатов, в табл. 1 приведены значения частоты и коэффициента возмущения, полученные в работе [1].

Рассчитав по формулам (5), получаем критические частоты для главной ОДН.

Пример 2. Рассмотрим пластину сложной геометрии, сжимаемую периодическими усилиями (рис. 2). Краевые усилия для данной задачи рассмотрим следующие: на сторонах $y = b/2$; $y = -b/2 - v = 0$; $S_n = 0$, на участках контура параллельных оси $OY - N_n = -P$, $S_n = 0$, на остальной части контура $N_n = 0$,

$S_n = 0$. Для w выполняются условия $w = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$.

Таблица 1

P_0		0,5	1	1
P_t		0,5	0,5	1
α		0,18	0,36	0,36
β		0,18	0,18	0,36
γ		20,59	20,59	20,59
Ω	RFM	5,40	4,78	4,78
	[1]	5,41	4,78	478
k	RFM	0,11	0,14	0,28
	[1]	0,11	0,14	0,28

Таблица 2

P_0	0,5	1	1
P_t	0,5	0,5	1
θ_1	10,21	8,87	8,11
θ_2	11,40	10,21	10,82

В случае рассматриваемых краевых условий для решения плоских задач теории упругости была построена структура решения, удовлетворяющая главным граничным условиям в виде

$$u_i = P_i; \quad v_i = \omega_1 P_{i+2}; \quad i = 0, 1; \quad u_{0t} = P_4; \quad v_{0t} = \omega_1 P_5.$$

Для функции прогиба w_1 , структура выбрана в виде

$$w_1 = \omega P_5.$$

В формулах P_i $i = 1 \dots 6$ – неопределенные компоненты структуры решения, представляющие собой разложение по некоторой полной системе функций; $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение всей границы области, то есть функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= 0; & (x, y) \in \partial\Omega; \\ \omega(x, y) &> 0; & (x, y) \in \Omega; \\ \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n} &= 1; & (x, y) \in \partial\Omega; \end{aligned}$$

$\omega_1(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение вертикальной полосы. Построение функции $\omega(x, y) = 0$ выполнено средствами теории R-функций:

$$\omega(x, y) = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4), \quad (6)$$

где

$$f_1 = \frac{1}{a} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right); \quad f_2 = \frac{1}{b} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right); \quad f_3 = y - d; \quad f_4 = x - c.$$

В формуле (6) используются R-операции, которые определяются как [5]

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}; \quad x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Численные исследования проводились при различных значениях геометрических параметров c и d , с целью анализа влияния выреза на ОДН. В табл. 3 приведены значения частоты Ω полученные для пластины нагруженной статической нагрузкой $P_0 = 1$.

На рис. 3 представлены ОДН (заштрихованная область) для различных значений геометрических параметров c и d . Не сложно заметить, что с уменьшением выреза пластины область динамической неустойчивости смещается по оси ординат вниз (рис. 3).

Таблица 3

	I	II	III	IV
c/a	0,4	0,3	0,2	0,1
d/a	0,4	0,3	0,2	0,1
$P_0 = 1$				
Ω	10,22	7,60	5,99	5,06

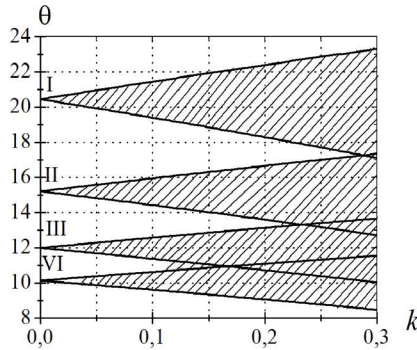


Рисунок 3

В табл. 4 представлены значения коэффициента возбуждения k , критических частот θ_1, θ_2 , для $P_t = 0,5; 1$.

Рассмотрим задачу о параметрических колебаниях в нелинейной постановке. Как отмечалось ранее, решение этой задачи сводится к исследованию нелинейного дифференциального уравнения (3). В табл. 5 представлены значения коэффициента γ , полученного для различной величины выреза. На рис. 4 построены амплитудно-частотные характеристики A/θ ($A = w_{\max}/h$) для случая $c/a = d/a = 0,3$. По оси ординат отложено максимальное значение амплитуды колебаний ($t \in [0, 200]$, $w_0 = 0,0001$) для каждой фиксированной частоты. Для каждого из случаев рассматриваются интервалы частот покрывающие ОДН.

Анализируя полученные результаты, замечаем, что в пределах ОДН амплитуда возрастает, за пределами ОДН амплитуда параметрических колебаний такого же

