УДК 621.391: 517. 518:510.52

В.М. УДОВИЧЕНКО, канд. техн. наук, НТУ "ХПІ"

ДВОВИМІРНІ ОПЕРАТОРИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ НА ПРЯМОКУТНІЙ СІТЦІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ФАЙЛОНА ТА *B*-СПЛАЙНУ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ

Побудовано двовимірні фінітні дискретно-неперервні та дискретні оператори перетворень Фур'є та Хартлі на основі методу Файлона (Filon) та *B*-сплайну п'ятого степеня. Наведені теореми та тестовий приклад.

In this paper the operators of calculation of two-dimensional finite discretely-continual and discretely Fourier Transform and the Hartley Transform on the basis Filon's metod and of B-spline of the fifth degree are researched. The example and the theorems are given.

Проблема, яку ми розв'язуємо в даній статті, полягає в побудові інструментарію інформаційних технологій [1, 2] – двовимірних фінітних операторів перетворень Фур'є та Хартлі (скорочено: оператори $F\&H$) на прямокутній сітці на основі методу Файлона (Filon) [3] та двовимірного *B*-сплайну [4] п'ятого степеня для дійсних або комплексних функцій двох дійсних змінних на основі фіксованої кількості відліків наближуваної функції $f(x,y)$, які б мали більш якісні характеристики точності, ніж "класичні" двовимірні оператори $F\&H$. Тому проблема є актуальною.

В літературі, присвяченій перетворенням $F\&H$, основними напрямками досліджень є різноманітні варіанти реалізації швидких алгоритмів дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) [5 – 7], порівняння швидких алгоритмів ДПФ та швидких алгоритмів дискретного перетворення Хартлі (ДПХ) [8], створення багатовимірних варіантів ДПФ та ДПХ [9]. Двовимірні перетворення $F\&H$ [9]:

$$Z^{F\backslash H}(u,v)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\left\{\exp\left[-j2\pi(ux+vy)\right]\backslash cas\left[2\pi(ux+vy)\right]\right\}dx\,dy\ ;$$

$$f(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z^{F\backslash H}(u,v)\left\{\exp\left[j2\pi(ux+vy)\right]\backslash cas\left[2\pi(ux+vy)\right]\right\}du\,dv\,,$$

(де $cas(t)=\cos(t)+\sin(t)$, $F\backslash H$ – скорочено: Фур'є або Хартлі), в прикладних задачах, орієнтованих на комп'ютерні технології, використовують у вигляді "класичних" прямого та оберненого ДПФ та ДПХ [9]:

$$Z^{F\backslash H}[v_1,v_2]=(N_1N_2)^{-1}\sum_{\tau_1=0}^{N_1-1}\sum_{\tau_2=0}^{N_2-1} f[\tau_1,\tau_2]\times$$

$$\times\left[\exp\left(-j2\pi\sum_{s=1}^{2}\frac{v_s\tau_s}{N_s}\right)\backslash cas\left(2\pi\sum_{s=1}^{2}\frac{v_s\tau_s}{N_s}\right)\right],\ v_s=\overline{0,\ N_s-1},\ s=1,\ 2\ ; \qquad (1)$$

$$f[\tau_1,\tau_2]=\sum_{\nu_1=0}^{N_1-1}\sum_{\nu_2=0}^{N_2-1} Z^{F\backslash H}[\nu_1,\nu_2]\times$$

$$\times\left[\exp\left(j2\pi\sum_{s=1}^{2}\frac{\nu_s\tau_s}{N_s}\right)\backslash cas\left(2\pi\sum_{s=1}^{2}\frac{\nu_s\tau_s}{N_s}\right)\right],\ \tau_s=\overline{0,\ N_s-1},\ s=1,\ 2\,. \qquad (2)$$

Двовимірне "класичне" дискретне перетворення Фур'є (1), (2) з точки зору характеристик точності має недоліки, які розглянуто в [10].

Метою роботи є побудова двовимірних операторів фінітних дискретно-неперервних та дискретних перетворень $F\&H$ на основі методу Файлона та *B*-сплайну п'ятого степеня по кожній змінній, з $\prod_{s=1}^{2}(2Mp_s+1)$ вузлами прямокутної сітки $S(x_{p_1},y_{p_2})$, $x_{p_s}=p_s\Delta_s$, $\Delta_s=\dfrac{2\pi}{2Mp_s+1}$, $p_s=\overline{-Mp_s,Mp_s}$, $s=1,2$, в квадратній області $D=(-\pi,\pi)^2$, які мали б нову властивість (порівнянно з "класичними" дискретно-неперервними та дискретними двовимірними операторами $F\&H$) – можливість забезпечувати більш високі характеристики точності (при однаковій кількості вузлів). Ціною за ці переваги є деяке збільшення обчислювальної трудомісткості.

Побудуємо двовимірні фінітні оператори дискретно-неперервних та дискретних перетворень $F\&H$ на основі методу Файлона та *B*-сплайну п'ятого степеня по кожній змінній. Під фінітними операторами $F\&H$ ми розуміємо операторами $F\&H$ від фінітної функції. Не зменшуючи загальності ми вважаємо, що носій цих функції $\operatorname{supp} f(x,y)=C^r(D)$, $D=\left[-\pi,\pi\right]^2$ та $\operatorname{supp} Z^{F\backslash H}(u,v)=C^r(D)$, $D=\left[-\pi,\pi\right]^2$. Хай $f(x,y)\in C^r(D)\bigcap L_p(D)$, $r=1,2,3,\ldots$, $p=1,2$ задовольняє вимогам двовимірної теореми Найквіста [11]. (Умова 1). Областю визначення дискретизованої функції $f(x_{p_1},y_{p_2})$ є вузли прямокутної сітки

$$S(x_{p_1},y_{p_2}),\ x_{p_1}=p_1\Delta_1,\ y_{p_2}=p_2\Delta_2,\ \Delta_s=\frac{2\pi}{2Mp_s+1},\ p_s=\overline{-Mp_s,Mp_s},\ s=1,\ 2,$$

в області $D=(-\pi,\pi)^2$. (Умова 2). Для подальшого застосування умови 1 та 2 позначимо як умову "V".

Для наближеного обчислення коефіцієнтів двовимірних фінітних дискретно-неперервних та дискретних перетворень $F\&H$ комплексної функції дійсного аргумента $f(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x,y) + j\,\mathrm{Im}\, f(x,y)$, $f(x,y) \in \mathrm{L}_2(D)$, $D = \left[-\pi, \pi\right]^2$, для якої виконується умова "V":

$$a_{N,\,k_1,\,k_2}^{F\backslash H,\,2d}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \begin{Bmatrix} \exp\left[-j(k_1 x + k_2 y)\right] \\ cas(k_1 x + k_2 y) \end{Bmatrix} dx\,dy\,, \qquad (3)$$

$$N = \left\{N_s\right\},\; k_s = \overline{-N_s, N_s}\,,\; s = 1, 2\,,$$

в двовимірних сумах $F\&H$:

$$S_N^{F\backslash H}(u,v) = \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} a_{N,\,k_1,\,k_2}^{F\backslash H,\,2d}(f) \begin{Bmatrix} \exp\left[\,j(k_1 u + k_2 v)\right] \\ cas(k_1 u + k_2 v) \end{Bmatrix},$$

послідовно до кожної змінної $f(x,y)$ застосовуємо підхід Файлона, сформульований в [3] і модифікований в [12]. При цьому ми замінюємо в (3) $f(x,y)$ двовимірним *B*-сплайном п'ятого степеня. Внаслідок цього отримуємо наближення $a_{N,k_1,k_2}^{F\backslash H,\,2d}(f)$ функціоналом [13]:

$$a_{N,k_1,k_2}^{F\backslash H,\,2d,Sp5}(f) \approx b2_{M,\,N,k_1,k_2}^{F\backslash H,\,2d,Sp5}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1} \int_{(p_1-3)\Delta_1}^{(p_1+3)\Delta_1} h5(x, p_1, \Delta_1) \times$$
$$\times \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1,p_2}^{Sp5}(f) \int_{(p_2-3)\Delta_2}^{(p_2+3)\Delta_2} h5(y, p_2, \Delta_2) \begin{Bmatrix} \exp\left[-j(k_1 x + k_2 y)\right] \\ cas(k_1 x + k_2 y) \end{Bmatrix} dx\,dy\,, \qquad (4)$$

де [4]:

$$h5(x,p,\Delta) = \frac{1}{120} \begin{cases} 0, \;\; x \le x_{p-3}\,, \\ t^5, \;\; x_{p-3} < x \le x_{p-2}\,,\; t = (x - x_{p-3})/\Delta, \\ 1 + 5t + 10t^2 + 10t^3 + 5t^4 - 5t^5\,,\;\; x_{p-2} < x \le x_{p-1}\,,\; t = (x - x_{p-2})/\Delta, \\ 26 + 50t + 20t^2 - 20t^3 - 20t^4 + 10t^5\,,\; x_{p-1} < x \le x_p\,,\; t = (x - x_{p-1})/\Delta, \\ 66 - 60t^2 + 30t^4 - 10t^5\,,\; x_p < x \le x_{p+1}\,,\; t = (x - x_p)/\Delta, \\ 26 - 50t + 20t^2 + 20t^3 - 20t^4 + 5t^5, x_{p+1} < x \le x_{p+2}, t = (x - x_{p+1})/\Delta, \\ (1-t)^5,\; x_{p+2} < x < x_{p+3}\,,\;\; t = (x - x_{p+2})/\Delta, \\ 0, \;\; x \ge x_{p+3}\,, \end{cases}$$

$$R_{p_1,p_2}^{Sp5}(f) = C_1^{2d,Sp5} f(x_{n_1}, y_{n_2}) + C_2^{2d,Sp5}\Big[\, f(x_{n_1}, y_{n_2-1}) +$$
$$+ f(x_{n_1}, y_{n_2+1}) + f(x_{n_1-1}, y_{n_2}) + f(x_{n_1+1}, y_{n_2})\Big] + C_3^{2d,Sp5}\Big[\, f(x_{n_1}, y_{n_2-2}) +$$

$$+f(x_{n_1},y_{n_2+2})+f(x_{n_1-2},y_{n_2})+f(x_{n_1+2},y_{n_2})\Big]+$$

$$+C_4^{2d,Sp5}\Big[f(x_{n_1-1},y_{n_2-1})+f(x_{n_1-1},y_{n_2+1})+f(x_{n_1+1},y_{n_2-1})+$$

$$+f(x_{n_1-1},y_{n_2+1})\Big]+C_5^{2d,Sp5}\Big[f(x_{n_1-1},y_{n_2-2})+f(x_{n_1-1},y_{n_2+2})+$$

$$+f(x_{n_1+1},y_{n_2-2})+f(x_{n_1+1},y_{n_2+2})+f(x_{n_1-2},y_{n_2-1})+$$

$$+f(x_{n_1-2},y_{n_2+1})+f(x_{n_1+2},y_{n_2-1})+f(x_{n_1+2},y_{n_2+1})\Big]+$$

$$+C_6^{2d,Sp5}\Big[f(x_{n_1-2},y_{n_2-2})+f(x_{n_1-2},y_{n_2+2})+f(x_{n_1+2},y_{n_2-2})+$$

$$+f(x_{n_1+2},y_{n_2+2})\Big],\ C_1^{2d,Sp5}=\frac{47961}{14400},\ C_2^{2d,Sp5}=-\frac{1533}{1800},\ C_3^{2d,Sp5}=\frac{2847}{28800},$$

$$C_4^{2d,Sp5}=\frac{49}{225},\ C_5^{2d,Sp5}=-\frac{91}{3600},\ C_6^{2d,Sp5}=\frac{169}{57600}.$$

Обчисливши функціонал (4), отримаємо [13]:

$$b_2{}^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,\,N,\,k_1,\,k_2}(f,\,Mp_1,\,Mp_2)=\left[B_1{}^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,\,N,\,k_1,\,k_2}(f),(k_1\neq 0)\wedge(k_2\neq 0)\right]\vee$$

$$\vee\left[B_2{}^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,\,N,\,k_1,\,0}(f),(k_1\neq 0)\wedge(k_2=0)\right]\vee\left[B_3{}^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,\,N,\,0,\,k_2}(f),(k_1=0)\wedge(k_2\neq 0)\right]\vee$$

$$\vee\left[B_4{}^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,\,N,\,0,\,0}(f),(k_1=0)\wedge(k_2=0)\right],\qquad(5)$$

$$B_1{}^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,\,N,\,k_1,\,k_2}(f)=Q_5(1)\,Q_5(2)\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\ \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}R^{Sp5}_{p_1,p_2}(f)\begin{bmatrix}\exp\left(-j\sum_{s=1}^{2}p_sk_s\Delta_s\right)\\ cas\left(\sum_{s=1}^{2}p_s\,k_s\,\Delta_s\right)\end{bmatrix},$$

$$B_2{}^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,\,N,\,k_1,\,0}(f)=Q_5(1)\,e_2\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\ \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}R^{Sp5}_{p_1,p_2}(f)\begin{bmatrix}\exp(-j\,p_1\,k_1\,\Delta_1)\\ cas(p_1\,k_1\,\Delta_1)\end{bmatrix},$$

$$B_3{}^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,\,N,\,0,\,k_2}(f)=e_1\,Q_5(2)\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\ \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}R^{Sp5}_{p_1,p_2}(f)\begin{bmatrix}\exp(-j\,p_2\,k_2\,\Delta_2)\\ cas(p_2\,k_2\,\Delta_2)\end{bmatrix},$$

$$B_4{}^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,\,N,\,0,\,0}(f)=e_1\,e_2\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\ \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}R^{Sp5}_{p_1,p_2}(f),$$

$$Q_5(s)=\frac{10-\cos\,(3k_s\,\Delta_s)+6\cos\,(2k_s\,\Delta_s)-15\cos(k_s\,\Delta_s\,)}{\pi\,(\Delta_s)^5\,(k_s)^6},\ \Delta_s=2\pi\,e_s\,,$$

$$e_s=\frac{1}{2Mp_s+1},\ N_s\le Mp_s,\ k_s=\overline{-N_s,N_s},\ s=1,\,2\,.$$

Значення функції $f\,(x_{p_1},y_{p_2})$ за межами прямокутної сітки, $S(x_{p_1},y_{p_2})$,

$$x_{p_1}=p_1\,\Delta_1,\ y_{p_2}=p_2\Delta_2\,,\ \Delta_s=\frac{2\pi}{2Mp_s+1},\ p_s=\overline{-Mp_s,Mp_s},\ s=1,\,2\,,$$

отримуємо, користуючись властивістю періодичності частотних характеристик перетворень $F\&H$.

Оператори двовимірних фінітних дискретно-неперервних перетворень $F\&H$ на прямокутній сітці на основі методу Файлона та *B*-сплайну п’ятого степеня:

$$L_{M,\,N}^{F\backslash H,2d,Sp5}(f)=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2}b_{M,\,N,\,k_1,\,k_2}^{F\backslash H,2d,\mathrm{Sp}5}(f)\begin{Bmatrix}\exp\left[j\,(k_1\,x+k_2\,y)\right]\\ cas\,(k_1\,x+k_2\,y)\end{Bmatrix},\quad(6)$$

$$N_s\le Mp_s\,,\ s=1,\,2,\ (x,y)\in D\,,$$

дозволяють обчислювати неперервне наближення функції $f(x,y)\in C^r(D);\ r=1,\,2,\,3,...$ по її дискретних відліках $f\,(x_{p_1},y_{p_2})$, $(x_{p_1},y_{p_2})\in(-\pi,\pi)^2$. При застосуванні (6) враховуємо вимоги двовимірної теореми дискретизації [11] для вибору необхідних Mp_1,Mp_2 для даної функції $f\,(x,y)$.

Оператори двовимірних фінітних дискретних перетворень $F\&H$ на прямокутній сітці на основі методу Файлона та *B*-сплайну п’ятого степеня отримуємо з (6) замінивши неперервні x,y на їх відповідні дискретні значення:

$$L_{M,\,N}^{F\backslash H,2d,Sp5}\left[f(x_{p_1},y_{p_2})\right]=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2}b_{M,\,N,\,k_1,\,k_2}^{F\backslash H,2d,\mathrm{Sp}5}(f)\left[\exp\left(j\sum_{s=1}^{2}k_s p_s\Delta_s\right)\backslash\right.$$

$$\left.\backslash cas\left(\sum_{s=1}^{2}k_s\,p_s\,\Delta_s\right)\right],\ N_s\le Mp_s\,,\ p_s=\overline{-Mp_s,Mp_s}\,,\ s=1,\,2\,.\qquad(7)$$

При застосуванні (7) враховуємо вимоги двовимірної теореми дискретизації [11] для вибору необхідних Mp_1,Mp_2 для даної функції $f\,(x,y)$.

Теорема 1. Оператори двовимірних дискретно-неперервних перетворень *F&H*, побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та *B*-сплайну п'ятого степеня, які задовольняють умову "V", мають властивості:

$$L_{M,\,N}^{F,2d,Sp5}(f)=L_{M,\,N}^{H,2d,Sp5}(f)\,. \tag{8}$$

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Теорема 2. Оператори двовимірних дискретно-неперервних перетворень *F&H*, побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та *B*-сплайну п'ятого степеня, в яких $f(x,y)$ задовольняють умову "V":

$$U_{Mp,\,Mp}^{F\backslash H,2d,Sp5}(f)=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2} g_{M,\,N,\,k_1,\,k_2}^{F\backslash H,2d,\mathrm{Sp}5}(f)\Big\{\exp\big[\,j(k_1x+k_2y)\big]\backslash$$

$$\backslash cas(k_1x+k_2y)\Big\},\; N_s=Mp_s\,,\; s=1,2,\; x,y\in\Re\,, \tag{9}$$

де $$g_{M,\,N,k_1,k_2}^{F\backslash H,2d,\mathrm{Sp}5}(f)=\Big[G_1{}_{M,N,k_1,k_2}^{F\backslash H,2d,\,Sp5}(f),(k_1\neq 0)\wedge(k_2\neq 0)\Big]\vee$$

$$\vee\Big[G_2{}_{M,N,k_1,0}^{F\backslash H,2d,Sp5}(f),(k_1\neq 0)\wedge(k_2=0)\Big]\vee\Big[G_3{}_{M,N,0,k_2}^{F\backslash H,2d,Sp5}(f),(k_1=0)\wedge(k_2\neq 0)\Big]\vee$$

$$\vee\Big[G_4{}_{M,N,0,0}^{F\backslash H,2d,Sp5}(f),(k_1=0)\wedge(k_2=0)\Big]; \tag{10}$$

$$G_1{}_{M,N,k_1,k_2}^{F\backslash H,2d,Sp5}(f)=\overline{Q_5(1)}\,\overline{Q_5(2)}\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}R_{p_1,p_2}^{Sp5}(f)\begin{bmatrix}\exp\left(-j\sum\limits_{s=1}^{2}p_sk_s\Delta_s\right)\\ cas\left(\sum\limits_{s=1}^{2}p_s\,k_s\,\Delta_s\right)\end{bmatrix};$$

$$G_2{}_{M,N,k_1,0}^{F\backslash H,2d,Sp5}(f)=\overline{Q_5(1)}\,e_2\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}R_{p_1,p_2}^{Sp5}(f)\begin{bmatrix}\exp(-j\,p_1\,k_1\,\Delta_1)\\ cas(\,p_1\,k_1\,\Delta_1)\end{bmatrix};$$

$$G_3{}_{M,N,0,k_2}^{F\backslash H,2d,\,Sp5}(f)=e_1\overline{Q_5(2)}\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}R_{p_1,p_2}^{Sp5}(f)\begin{bmatrix}\exp(-j\,p_2\,k_2\,\Delta_2)\\ cas(\,p_2\,k_2\,\Delta_2)\end{bmatrix};$$

$$G_4{}_{M,N,0,0}^{F\backslash H,2d,\;Sp5}(f)=e_1\,e_2\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}R_{p_1,p_2}^{Sp5}(f);$$

$$\overline{Q_5(s)}=\frac{120}{(2Mp_s+1)(219-112\cos(k_s,\Delta_s)+13\cos(2k_s,\Delta_s))},\; Mp_s=M_s+2;$$

$$N_s \le Mp_s\,,\ \Delta_s = 2\pi\, e_s\,,\ e_s = \frac{1}{2Mp_s + 1},\ k_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}\,,\ s = 1,\,2\,,$$

отримані як результат обчислення функціоналу [13]:

$$g^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,N,\,k_1,\,k_2}(f) = \frac{b_2{}^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,N,\,k_1,\,k_2}(f)}{b_2{}^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,N,\,k_1,\,k_2}\left\{\exp\left[\,j(k_1 x + k_2 y)\right]\backslash cas(k_1 x + k_2 y)\right\}},$$

$k_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}\,,\ s = 1,\,2;$ мають властивості:

$$U^{F,2d,Sp5}_{M,\,N}(f) = U^{H,2d,Sp5}_{M,\,N}(f)\,, \tag{11}$$

де функціонал $b_2{}^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{M,N,\,k_1,\,k_2}(f)$, $k_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}$, $s = 1,\,2;$ визначається (5).

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Теорема 3. Оператори $U^{F\backslash H,2d,Sp5}_{M,\,N}(f)$ двовимірних дискретно-неперервних перетворень $F\&H$, побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та *B*-сплайну п'ятого степеня, якщо $f(x,\,y)$ задовольняють умову "V", а також $f(x,\,y) \in T_N$, $N = \{N_s\}$, $s = 1,\,2$, де T_N є множина тригонометричних поліномів степеня N, при $N = Mp$ мають властивості:

$$U^{F\backslash H,2d,Sp5}_{Mp,\,Mp}(f) = f\,, \tag{12}$$

тобто є точні на тригонометричних поліномах заданого степеня в області $D = (-\pi\,,\,\pi)^2$. Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Оператори двовимірних фінітних дискретних перетворень $F\&H$ побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона та *B*-сплайну п'ятого степеня, в яких $f(x,y)$ задовольняють умову "V", отримуємо з (11), замінивши неперервні x, y на їх відповідні дискретні значення:

$$\begin{aligned} U^{F\backslash H,2d,Sp5}_{Mp,\,Mp}\left[f(x_{p_1}, x_{p_2})\right] &= \sum_{k_1=-Mp_1}^{Mp_1}\ \sum_{k_2=-Mp_2}^{Mp_2} g^{F\backslash H,2d,Sp5}_{Mp,\,Mp,\,k_1,\,k_2}(f)\times \\ &\times\left[\exp\left(j\sum_{s=1}^{2} k_s p_s \Delta_s\right)\backslash cas\left(\sum_{s=1}^{2} k_s p_s \Delta_s\right)\right],\ p_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}\,,\ s = 1,\,2\,. \end{aligned} \tag{13}$$

При застосуванні (13) враховуємо вимоги двовимірної теореми дискретизації [10, с. 13], для вибору необхідних Mp_1, Mp_2 для даної функції $f(x,y)$.

Теорема 4. Оператори двовимірних фінітних дискретних перетворень $F\&H$ побудовані на прямокутній сітці, на основі методу Файлона та B-сплайну п’ятого степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня, мають властивості:

$$U_{M,\,N}^{F\backslash H,2d,Sp5}\left[f(x_{p_1},y_{p_2}) \right] = f(x_{p_1},y_{p_2}),\ p_s = \overline{-Mp_s,Mp_s},\ s=1,\,2, \quad (14)$$

якщо $f(x,\,y)$ задовольняє умову "V" в області $D=(-\pi\,,\,\pi)^2$.

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Для наступного застосування скористаємося теоремами 3, 4 [14, с. 185], з урахуванням яких маємо наступні теореми:

Теорема 5. Для двовимірних операторів перетворень $F\&H$, побудованих на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну п’ятого степеня, для функцій $f(x,y)$, які задовольняють умову "V" в області $D=(-\pi\,,\,\pi)^2$, виконується наступне:

$$u^{F,\,2d,\,Sp5}_{Mp,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Omega(n)\\ \Psi(n)\end{smallmatrix}\right]}(f)=\left(\frac{1\mp j}{2}\right)u^{H,\,2d,\,Sp5}_{Mp,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Omega(n)\\ \Psi(n)\end{smallmatrix}\right]}(f)+\left(\frac{1\pm j}{2}\right)u^{H,\,2d,\,Sp5}_{Mp,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Psi(n)\\ \Omega(n)\end{smallmatrix}\right]}(f), \quad (15)$$

де $\Omega(n)=\left\{(-k_1,0)_0\,,(0,-k_2)_1\,,(-k_1,-k_2)_2\,,(-k_1,+k_2)_3\right\},\ n=\overline{0,\,3}$;

$\Psi(n)=\left\{(+k_1,0)_0\,,(0,+k_2)_1\,,(+k_1,+k_2)_2\,,(+k_1,-k_2)_3\right\},\ n=\overline{0,\,3}$;

$u^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{Mp,Mp,(\circ),(\circ)}(f)=\left\{ b^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{Mp,Mp,(\circ),(\circ)}(f),\ g^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{Mp,Mp,(\circ),(\circ)}(f) \right\},k_s=\overline{1,\,Mp_s},s=1,\,2.$

Доведення отримуємо при застосуванні до $u^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f)$ теореми 3 [14, С. 185].

Теорема 6. Для двовимірних операторів перетворень $F\&H$, побудованих на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну п’ятого степеня, для функцій $f(x,\,y)$, які задовольняють умову "V", в області $D=(-\pi\,,\,\pi)^2$ виконується наступне:

$$u^{H,\,2d,\,Sp5}_{Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Omega(n)\\ \Psi(n)\end{smallmatrix}\right]}(f)=\left(\frac{1\pm j}{2}\right)u^{F,\,2d,\,Sp5}_{Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Omega(n)\\ \Psi(n)\end{smallmatrix}\right]}(f)+\left(\frac{1\mp j}{2}\right)u^{F,\,2d,\,Sp5}_{Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Psi(n)\\ \Omega(n)\end{smallmatrix}\right]}(f),$$

$$u^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f)=\left\{ b^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f),\ g^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f) \right\}, \quad (16)$$

$$k_s=\overline{1,\,Mp_s},\ s=1,\,2,\ n=\overline{0,\,3}.$$

$\Omega(n)$ та $\Psi(n)$ визначаються в (15). Доведення отримуємо при застосуванні до $u^{F\backslash H,\,2d,\,Sp5}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f)$ теореми 4 [14, с. 185].

Тестовий приклад. В табл. наведені результати обчислення оцінки приведених похибок наближення модуля функції $f(x, y)$, де: $f(x, y)=\left[\cos(0,3x)\sin(1,7y)+j\cos(1,3x)\sin(2,7y)\right]\exp\left[-(|x|+|y|)\right]$ за допомогою розглянутих операторів.

Таблиця

Mp_1, Mp_2	$\max\_E2$	$\max\_e2$	$\max\_E3$	$\max\_e3$
14 , 14	2,51 E–2	2,91 E–2	3,0 E–15	3,46 E-2
24 , 24	1,58 E–2	1,71 E–2	2,8 E–15	2,22 E-2
34 , 34	1,54 E–2	1,54 E–2	4,9 E–15	1,90 E-2

В табл. використанні наступні позначення:

$$\max\_e2=\max_{\substack{-R_1\le r\le R_1\\ -R_2\le s\le R_2}}\left|\mu(x_r, y_s)\right|/\Theta;\ \max\_E2=\max_{\substack{-Mp_1\le r\le Mp_1\\ -Mp_2\le s\le Mp_2}}\left|\mu(x_r, y_s)\right|/\Theta;$$

$$\mu(x_r, y_s)=f(x_r, y_s)-L^{F\backslash H\,2d,\,Sp5}_{Mp_1,\,Mp_2,\,\Psi}f(x_r, y_s);$$

$$\max\_e3=\max_{\substack{-R_1\le r\le R_1\\ -R_2\le s\le R_2}}\left|\lambda(x_r, y_s)\right|/\Theta;\ \max\_E3=\max_{\substack{-Mp_1\le r\le Mp_1\\ -Mp_2\le s\le Mp_2}}\left|\lambda(x_r, y_s)\right|/\Theta;$$

$$\Theta=\max_{\substack{-R_1\le r\le R_1\\ -R_2\le s\le R_2}}\left|f(x_r, y_s)\right|,\ \lambda(x_r, y_s)=f(x_r, y_s)-U^{F\backslash H\,2d,\,Sp5}_{Mp_1,\,Mp_2,\,\Psi}f(x_r, y_s);$$

$Mp=\left\{Mp_s\right\}$, $R=\left\{R_s\right\}$, $R_s=k\,Mp_s$, $s=1, 2$, де $k=5$ – кількість інтервалів інтерполяції.

Висновки. 1. Побудовано оператори двовимірних, фінітних, дискретно-неперервних та оператори двовимірних, фінітних, дискретних перетворень $F\&H$ на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та *B*-сплайну п'ятого степеня (5), (6), (7). Визначено їх властивості (8). 2. Побудовано оператори двовимірних, фінітних, дискретно-неперервних та оператори двовимірних, фінітних, дискретних перетворень $F\&H$ на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та *B*-сплайну п'ятого степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня (9), (10), (13).

Визначено їх властивості (11), (12), (14). 3. Наведено теореми, які визначають зв'язок між операторами $b_{Mp,N,\Omega}^{F,2d,Sp5}(f)$ – $b_{Mp,N,\Omega}^{H,2d,Sp5}(f)$, та $g_{Mp,N,\Omega}^{F,2d,Sp5}(f)$ – $g_{Mp,N,\Omega}^{H,2d,Sp5}(f)$ – (15), (16). 4. Наведено тестовий приклад, який підтверджує отримані теоретичні твердження. 5. Отримані оператори доповнюють існуючий інструментарій інформаційних технологій в базисах *F&H*. 6. Побудовані оператори $F\&H$ є подальшим розвитком методу Файлона [3] обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій.

Перспективи досліджень у даному напрямку автор вбачає у створені швидких алгоритмів обчислення запропонованих операторів $F\&H$ та їх застосуванні при вирішені деяких задач інформаційних технологій, наприклад, в системах автоматичного управління та регулювання, які застосовують сигнальні методи; у задачах математичного моделювання та комп'ютерної діагностики, у відомих непараметричних та параметричних методах спектрального оцінювання сигналів у цифровій обробці сигналів, у вимірювальній техніці при побудові комп'ютерних вимірювальних засобів, при побудові різноманітних систем кріптографії тощо.

Список літератури: 1. *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Інструментарій інформаційних технологій в базисі Хартлі // Вестник Национального технического университета "ХПІ". Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Приборы и методы неразрушающего контроля". – 2006. – № 38. – С. 69–74. **2.** *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Інструментарій інформаційних технологій в базисі Фур'є // Вестник Национального технического университета "ХПІ". Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Автоматика и приборостроение". – 2007. – № 10. – С. 119–127. **3.** *Filon L.N.G.* On a quadrature formula for trigonometric integrals // Proc. Roy.Soc. Edinburgh. – 1928. – P. 38–47. **4**. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 541 с. **5**. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978.– 848 с. **6**. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 684 с. **7**. *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли. – М.: Мир, 1990. – 175 с. **8.** *Болд Э.Дж.* Сравнение времени вычисления БПХ и БПФ // ТИИЭР. – 1985. – № 12. – С. 184–185. **9.** *Даджион Д., Мерсеро Р.* Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988. **10.** *Удовиченко В.Н.* Точностные характеристики прямоугольного двумерного дискретного преобразования Фурье. / Методы и микроэлектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов, SIAP-89. – Рига, 1989. – С. 204–206. **11.** *Отнес Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. – М.: Мир, 1982. – 428 с. **12.** *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Оператори обчислення одновимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Хартлі на основі *B*-сплайнів третього степеня // Вестник Национального технического университета "ХПІ". Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Інформатика и моделирование". – 2003. – № 19. – С. 95–100. **13.** *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 383 с. **14.** *Удовиченко В.М.* Оператори Фур'є та Хартлі, побудовані на основі методу Файлона та кубічних *B*-сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня // Вестник Национального технического университета "ХПІ". Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Інформатика и моделирование". – 2007. – № 19. – С. 182–190.

Поступила в редакцію 03. 09. 2007