

**Список литературы:** 1. *Тесленко А.А.* / Заводская лаборатория 2. – 1998. – Т.64, №8. – С. 42-44. 2. *Гаврилюк В.П., Гринев Б.В., Каплан М.С., Тесленко А.А., Тихонова Е.В.* / Функциональные материалы 2. – 1995. – №4. – С. 543. 3. *Тесленко А.А.* Развитие метода фотоупругости и его применение к исследованию остаточных напряжений в монокристаллах. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Харьков. 1991. – 22 с. 4. *Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л. и др.* / Заводская лаборатория. – 1993. – Т. 59, № 2. – С. 64-66. 5. *Тесленко А.А.* Методы конечных элементов и фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 22. – С. 143-148. 6. *Тесленко А.А.* Некоторые подробности применения метода конечных элементов в фотоупругости. // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 21. – С. 183-186. 7. *Тесленко А.А.* Автоматизация пьезооптических измерений. // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 153-156. 8. *Тесленко А.А.* Фильтрация пьезооптических измерений в методе фотоупругости. // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2007. – № 32. – С.169-171. 9. *Еременко С.Ю.* / В кн.: Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – С. 9. 10. <http://www.photoelasticity.land.ru/>.

*Поступила в редколлегию 15.11.2010*

УДК 539.3

**В.В.ТКАЧЕНКО**, асп., НТУ «ХПИ»

## **КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

У статті запропоновано метод дослідження статичної стійкості багат шарових пластин симетричної структури під дією стискаючих зусиль в серединній площині пластини. В основу методу покладено використання теорії R-функцій та варіаційного методу Рітца. Математична постановка виконана в рамках класичної та уточненої теорії першого порядку. Запропонований метод враховує неоднорідний докритичний стан пластини. Метод проілюстровано на конкретних задачах. З метою аналізу вірогідності та точності розробленого підходу виконано порівняння отриманих результатів з відомими в літературі. Також були одержані нові результати для деяких багат шарових пластин симетричної структури зі складною формою плану.

The problem of stability analysis of the symmetric laminated plates with complex shape is considered. The method is based on the application of the R-functions theory and variation Ritz's method. The proposed method takes into account heterogeneous subcritical state of plates. Mathematical problem statement is carried by using the classic theory and the refined first order plate theory like theory by Timoshenko. Some numerical results of the concrete problems are presented and compared with those existing in order to demonstrate the correctness and the accuracy of the present method. New results are obtained for some cross-ply laminated plates with complex shape.

Многослойные пластины широко используются для моделирования ком-  
позитных элементов многих современных конструкций. Поэтому их исследо-  
вание на прочность и устойчивость является актуальной проблемой [1, 2, 11].  
В настоящей работе предложен метод решения этой проблемы для много-

слойных пластин симметричного строения с произвольной формой плана, находящихся под действием статической нагрузки в срединной плоскости. Подобные задачи для прямоугольных пластин при однородном докритическом состоянии были решены ранее [1-2]. Число публикаций, в которых учитывается неоднородное докритическое состояние весьма ограничено.

Предлагаемый ниже метод позволяет находить собственные частоты и критическую нагрузку при неоднородном докритическом состоянии. Метод разработан для исследования математических моделей, полученных как в рамках классической теории, так и уточненной теории первого порядка. Благодаря применению теории  $R$  – функций [3] и вариационных методов [6] предлагаемый подход позволяет исследовать многослойные пластины различной геометрической формы и вида граничных условий. Ранее данный подход применялся для однослойных изотропных и ортотропных пластин [7-10].

**1 Математическая постановка.** В современной инженерной практике для исследования многослойных пластин часто используется классическая теория, так как с ее помощью удастся получить удовлетворительные результаты, обеспечивающие необходимую практическую точность. Постановка задачи в рамках классической теории основывается на следующих гипотезах:

- 1) пластина нагружена в своей плоскости контурными усилиями, поперечные нагрузки отсутствуют;
- 2) докритическое напряженное состояние описывается соотношениями линейной теории упругости, при этом изменением размеров пластины до потери устойчивости пренебрегаем;
- 3) изгиб пластины моделируется с помощью гипотез Кирхгофа-Лява;
- 4) все внешние нагрузки изменяются пропорционально некоторому параметру  $P_1^0$ .

Однако, для пластин средней толщины использование классической теории является недостаточным, так как в этом случае необходимо также учитывать сдвиговые деформации. Одной из более распространенных теорий является уточненная теория первого порядка, которая основывается на гипотезе прямой линии. Суть этой гипотезы в том, что изначально нормальный к координатной поверхности элемент после деформирования остается прямолинейным, но не обязательно перпендикулярным к деформированной поверхности.

В соответствии с выше указанными гипотезами, перемещения произвольной точки  $u$ ,  $v$ ,  $w$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \Delta \cdot z \cdot \psi_x; \\ v &= v_0 + \Delta \cdot z \cdot \psi_y; \\ w &= w_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  – перемещения точек координатной поверхности в направлениях  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно;  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  – углы поворота прямолинейного элемента.

Выражения для углов поворота имеют вид:

$$\psi_x = \beta_x - w_{,x}; \quad \psi_y = \beta_y - w_{,y},$$

где  $\beta_x, \beta_y$  – «интегральные» углы поворота отрезка нормали.

Здесь и далее параметр  $\Delta$  принимает значение 1 для уточненной теории и 0 – для классической.

Компоненты деформаций могут быть представлены как [11]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z\kappa_x; & \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z\kappa_y; & \varepsilon_z &= 0; \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 + z\kappa_{xy}; & \varepsilon_{xz} &= \Delta \cdot (w_{0,x} + \psi_x); & \varepsilon_{yz} &= \Delta \cdot (w_{0,x} + \psi_y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= u_{0,x} + w_{0,x}^2 / 2; & \varepsilon_y^0 &= u_{0,y} + w_{0,y}^2 / 2; & \varepsilon_{xy}^0 &= u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x}w_{0,y}; \\ \kappa_x &= \Delta\psi_{x,x} - (1-\Delta)w_{0,xx}; & \kappa_y &= \Delta\psi_{y,y} - (1-\Delta)w_{0,yy}; \\ \kappa_{xy} &= \Delta(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) - 2(1-\Delta)w_{0,xy}. \end{aligned}$$

Зависимости усилий и моментов от перемещений и углов поворота определяются следующими выражениями:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}; \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{yz} \\ \mathbf{e}_{xz} \end{Bmatrix},$$

здесь  $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_{xy})^T$ ;  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_{xy})^T$ ;

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix}; & \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^0 &= (\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0)^T; & \boldsymbol{\kappa} &= (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})^T. \end{aligned}$$

где  $N_x, N_y, N_{xy}$  – нормальные и касательные усилия в срединной плоскости;  $M_x, M_y, M_{xy}$  – изгибающие и крутящий моменты.

Приведенные жесткостные характеристики  $C_{ij}, D_{ij}$  ( $ij = 11, 22, 12, 16, 26, 66$ ) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (C_{ij}, D_{ij}) &= \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s(1, z^2) dz; & ij &= 1, 2, 6, \\ C_{ij} &= K_{ij}^2 \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s dz; & ij &= 4, 5, \end{aligned}$$

где  $K_{ij}^2$  – корректирующий сдвиговой множитель, величину которого чаще всего принимают равной 5/6. В общем случае, когда оси анизотропии не совпадают с направлениями осей  $Ox$  и  $Oy$  упругие константы  $s$ -того слоя  $B_{ij}^{(s)}(i, j = 1, 2, 6)$  выражаются через упругие постоянные исходной системы

$\tilde{B}_{ij}^{(s)}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) по известным формулам [5].

Будем предполагать, что все слои работают совместно. Условия равновесия пластины в рамках классической теории [4, 5], выражаются в виде системы уравнений:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \quad (5)$$

$$= \lambda \left( N_x^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.$$

В рамках уточненной теории первого порядка уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0,$$

где  $m_1 = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_s dz$  и  $m_2 = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_s z^2 dz$ ;  $\rho_s$  – плотность материала.

**2 Метод решения.** Для решения задачи о колебаниях пластины, сжимаемой контурными силами, действующими в срединной плоскости, представим функцию прогиба следующим образом:

$$w(x, y, t) = w(x, y) \cdot (a \cos \Lambda t + b \sin \Lambda t), \quad (6)$$

здесь  $\Lambda$  – частота собственных колебаний пластины.

Для решения данной задачи вначале определяются усилия  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$ , распределенные внутри пластины. Заметим, что эта задача соответствует плоской задаче теории упругости, решение которой будем отыскивать с помощью метода R-функций (RFM). С этой целью сформулируем вариационную постановку задачи. Согласно принципу Лагранжа она сводится к нахождению минимума функционала:

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} P_1^0 u_n ds, \quad (7)$$

где  $u_n = ul + vm$ ,  $P_1^0$  – интенсивность внешнего сжимающего усилия,  $\partial\Omega_1$  – часть границы области, на которую действуют внешние усилия.

Минимум функционала будем отыскивать на множестве функций, удовлетворяющих главным (кинематическим) граничным условиям.

$$N_n = P, \quad S_n = 0.$$

Последовательность координатных функций в случае областей произвольной формы строится с помощью теории R-функций.

Заметим, что иногда докритическое состояние является однородным и тогда этап решения задачи теории упругости можно исключить. В остальных случаях задача теории упругости решается для  $P_1^0 = 1$  в силу линейности.

Изменение значений параметра  $P_1^0$  приводит к изменению интенсивности приложенной контурной нагрузки. Для каждого  $P_1^0$  вычисляются соответствующие значения собственных частот сжатой многослойной пластины.

Частота колебаний пластины может быть найдена с помощью метода Ритца [7] в результате минимизации следующего функционала:

$$I = \Pi_{\max} - T_{\max}, \quad (8)$$

где  $T_{\max}$  – кинетическая энергия пластины:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [m_1(u^2 + v^2 + w^2) + \Delta \cdot m_2(\psi_x^2 + \psi_y^2)] d\Omega,$$

а  $\Pi_{\max}$  – полная потенциальная энергия пластины, которая в рамках классической теории определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [(M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) + \\ & + P_1^0 (N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y})] dx dy. \end{aligned}$$

а в рамках уточненной теории первого порядка соответственно:

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \left( M_x \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + M_{xy} \cdot \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right) + \right. \\ & \left. + Q_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + Q_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) \right] + \\ & + P_1^0 \left( N_x^0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Решая динамическую задачу, одновременно с частотами можно найти также и критическую нагрузку. Этот подход к нахождению критической нагрузки назван динамическим [4]. В этом случае  $P_1^0$  будет варьируемым параметром. Изменяя значения этого параметра, получим совокупность собственных частот, соответствующих различным сжимающим нагрузкам. До тех пор, пока все частоты получаются вещественными, пластина колеблется около положения равновесия, то есть состояние равновесия устойчиво. С увеличением

$P_1^0$  могут быть получены нулевые или мнимые значения собственной частоты. В таком случае, положение равновесия является неустойчивым. Значение параметра  $P_1^0$ , соответствующее наименьшему неотрицательному значению собственной частоты, и будет критическим.

**3 Численные результаты.** Механические свойства материала для всех рассматриваемых ниже задач приняты следующими:

$$G/E_2 = 0,5; \quad \nu_1 = 0,25.$$

При этом будем рассматривать различную степень ортотропии материала, то есть

$$E_1/E_2 = 3; 10; 20; 30; 40.$$

Основные геометрические параметры пластины приняты следующими:

$$a/b = 1; \quad h/2b = 0,1,$$

где  $h$  – это общая толщина пластинки при равных толщинах всех слоев, а  $2b$  – характерный размер пластинки.

Критическая нагрузка определяется как

$$P_{кр} = \lambda_{кр} \cdot \frac{E_2 h^3}{4b^2},$$

где  $\lambda_{кр}$  – безразмерный параметр.

Решение задач выполняется с помощью двух описанных выше методов (энергетического и динамического).

**Задача 1.** Для тестирования предложенного метода рассмотрим квадратную ортогонально армированную многослойную пластину симметричного строения (рис. 1). Предполагается, что пластина свободно оперта и сжимается усилиями направленными параллельно оси  $Ox$ .

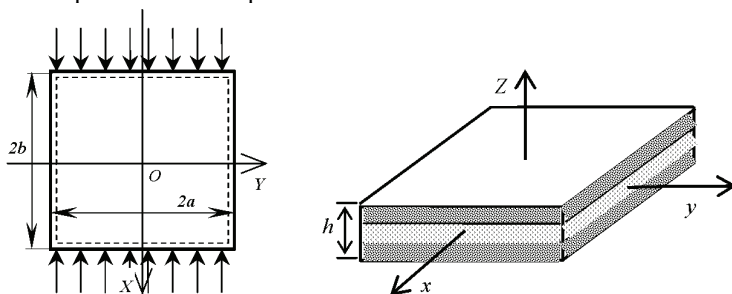


Рисунок 1

В табл. 1 представлены значения безразмерного частотного параметра для трехслойной, пятислойной и девятислойной пластинки, полученные в рамках классической и уточненной теорий при изменении степени ортотропии материала.

Как следует из таблицы, отклонения полученных результатов в рамках клас-

сической теории от результатов, представленных в работе [1] не превышает 0,13 %. Однако, при этом значение критической нагрузки является одинаковым для разного количества слоев. Нахождение решения в рамках классической теории может быть получено с определенной допустимой точностью.

Таблица 1

Кол-во слоев		Метод решения	$\lambda_{кр}$				
			$\frac{E_1}{E_2} = 3$	$\frac{E_1}{E_2} = 10$	$\frac{E_1}{E_2} = 20$	$\frac{E_1}{E_2} = 30$	$\frac{E_1}{E_2} = 40$
3	Классическая теория	RFM	5,72	11,49	19,72	27,94	36,17
		[1]	5,75	11,49	19,71	27,94	36,16
	Уточненная теория	RFM	5,39	9,87	14,98	19,02	22,31
		[1]	5,40	9,96	15,35	19,76	23,45
		[2]	5,30	9,76	15,02	19,30	22,88
5	Классическая теория	RFM	5,72	11,49	19,72	27,94	36,17
		[1]	5,75	11,49	19,71	27,94	36,16
	Уточненная теория	RFM	5,41	10,07	15,73	20,48	24,54
		[1]	5,41	10,14	15,96	20,91	25,19
		[2]	5,32	9,96	15,65	20,47	24,59
9	Классическая теория	RFM	5,72	11,49	19,72	27,94	36,17
		[1]	5,75	11,49	19,71	27,94	36,16
	Уточненная теория	RFM	5,41	10,07	16,06	21,11	25,49
		[1]	5,42	10,19	16,15	21,26	25,71
		[2]	5,34	10,04	15,92	20,96	25,34

Результаты исследований в рамках уточненной теории сравнивались с результатами работ [1] и [2]. Значение критической нагрузки, полученное с помощью RFM, практически всегда находится между значениями, представленными в работах [1] и [2]. Отличие полученных результатов от результатов, приведенных в статье [2] не превышает 1,1 %.

Как общую тенденцию поведения критической нагрузки, следует отметить ее рост в зависимости от роста степени ортотропии материала.

**Задача 2.** Рассмотрим трехслойную прямоугольную ортотропную свободно опертую пластину симметричного строения с формой укладки слоев  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  (рис. 2), изготовленную из материала с такими же жесткостными свойствами, как и в тестовом примере. Геометрические характеристики приняты следующими:  $a/b = 1$ . Толщина всей пластины  $h/2b = 0,1$ .

Пластина сжимается усилиями параллельно оси  $Ox$  и действующими вдоль сторон  $BC$  и  $GF$ . Граничные условия на  $\partial\Omega$  имеют вид вдоль  $BC$  и  $GF$ :

$$\begin{aligned} N_n &= P; & S_n &= 0; \\ w &= 0; & M_n &= 0. \end{aligned}$$

А вдоль остального контура ( $CDEF \cup GHAB$ ):

$$\begin{aligned} N_n &= 0; & S_n &= 0; \\ w &= 0; & M_n &= 0. \end{aligned}$$

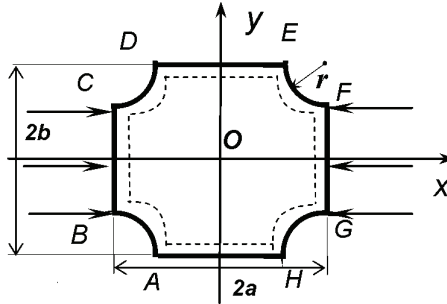


Рисунок 2

В рамках уточненной теории первого порядка на всей границе  $\partial\Omega$  добавляется условие  $Q_n = 0$ . Структура решения [3], соответствующая данной комбинации граничных условий и удовлетворяется главным граничным условиям имеет вид:

$$u = P_1; \quad v = P_2; \quad w = \omega P_3, \quad \text{— в рамках классической теории;}$$

$$u = P_1; \quad v = P_2; \quad w = \omega P_3; \quad \varphi_x = P_4; \quad \varphi_e = P_5 \quad \text{— в рамках уточненной теории.}$$

Используя теорию R-функций, построим уравнение границы области рассматриваемой пластины:

$$\omega = (F_1 \wedge_0 F_2) \wedge_0 \overline{(F_3 \vee_0 F_4 \vee_0 F_5 \vee_0 F_6)},$$

где

$$F_1 = \left( \sigma_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \geq 0 \right) \quad \text{— вертикальная полоса между прямыми } x = \pm a;$$

$$F_2 = \left( \sigma_2 = \frac{1}{2b}(b^2 - y^2) \geq 0 \right) \quad \text{— горизонтальная полоса между прямыми } y = \pm b;$$

$$F_3 = \left( \sigma_3 = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2}{2R} \geq 0 \right) \quad \text{— область, которая расположена внутри окружности радиуса } R \text{ с центром в точке } (a; b);$$

$$F_4 = \left( \sigma_4 = \frac{(x-a)^2 + (y+b)^2 - R^2}{2R} \geq 0 \right) \quad \text{— область, которая расположена внутри окружности радиуса } R \text{ с центром в точке } (a; -b);$$

$$F_5 = \left( \sigma_5 = \frac{(x+a)^2 + (y-b)^2 - R^2}{2R} \geq 0 \right) \quad \text{— область, которая расположена внутри окружности радиуса } R \text{ с центром в точке } (-a; b);$$



$$F_6 = \left( \sigma_6 = \frac{(x+a)^2 + (y+b)^2 - R^2}{2R} \geq 0 \right) - \text{область, которая расположена внутри}$$

окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $(-a; -b)$ .

В табл. 2 приведены результаты исследования влияния глубины вреза на величину безразмерного параметра критической нагрузки  $\lambda_{кр}$  в рамках уточненной теории.

Таблица 2

$\lambda_{кр}$					
$R/2b$	$\frac{E_1}{E_2} = 3$	$\frac{E_1}{E_2} = 10$	$\frac{E_1}{E_2} = 20$	$\frac{E_1}{E_2} = 30$	$\frac{E_1}{E_2} = 40$
0,05	5,55	10,10	15,26	19,33	22,63
0,075	5,74	10,31	15,50	19,58	22,88
0,1	5,83	10,41	15,68	19,80	23,13
0,125	6,14	10,89	16,23	20,41	23,78
0,15	6,38	11,31	16,68	21,08	24,53

Заметим, что если  $R \rightarrow 0$ , то форма плана рассматриваемой пластины стремится к квадратной. Поэтому полученные значения должны стремиться к соответствующим значениям квадратной пластины. Этот факт использован для контроля достоверности полученных результатов.

При увеличении размеров врезов пластинки наблюдается тенденция к росту безразмерного параметра критической нагрузки  $\lambda_{кр}$ . Однако, скорость роста  $\lambda_{кр}$  для пластинки, изготовленной из материала с большей степенью ортотропии, меньше, чем для пластинки, изготовленной из материала с меньшей степенью ортотропии. Так, при изменении  $R/2b$  от 0,05 до 0,15, в случае, когда степень ортотропии материала  $E_1/E_2 = 3$ , критическая нагрузка увеличилась на 15,5 %, а в случае, когда  $E_1/E_2 = 40$ ,  $\lambda_{кр}$  увеличилось на 8,4 %.

**Выводы.** В работе предложены подходы для исследования устойчивости многослойных пластин симметричного строения с произвольной формой плана для разного вида краевых условий. Метод базируется на теории R-функций и вариационных методах, и разработан для уравнений движения, полученных в рамках классической и уточненной теории первого порядка. Алгоритм реализован в рамках системы POLE-RL. При помощи созданного программного обеспечения проведено тестирование и решены новые задачи устойчивости и колебаний многослойных пластин сложной формы при разных способах закрепления.

**Список литературы:** 1. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Second edition / J.N.Reddy // USA: CRC PRESS. – 2004. – P. 834. 2. Noor A.K. Stability of multilayered composite plates / Fiber Science and Technology. – 1975. – 8. – PP. 81-89. 3. Курна Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек / Л.В.Курна // Харьков, НТУ «ХПИ». – 2009. – 408 с. 4. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехниц-

кий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464с. **5.** Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1967. – 266с. **6.** Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике» / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с. **7.** Курпа Л.В. Параметричні коливання пластин складної форми плану / Л.В. Курпа, О.С. Мазур // Машинознавство. – 2008. – №3 (33). – С. 9-15. **8.** Awrejcewicz J. Research of Stability and Nonlinear vibration of plates by R-Functions Method / J. Awrejcewicz, L. Kurpa, O. Mazur // Modelling Simulation and control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems. – UK, Springer, 2009. – P. 179-189. **9.** Курпа Л. В. Применение теории R-функций к задаче устойчивости зубчатого диска пилы / Курпа Л.В., Линник А.Б. // Вестник НТУ «ХПИ». – 2002. – № 8. – С. 104-108. **10.** Курпа Л. В. Исследование колебаний пластин переменной толщины, нагруженных в срединной плоскости / Курпа Л. В, Линник А. Б. // Прикладная механика. – 2005. – 41. – С. 85-93. **11.** Abe A. Non-linear vibration characteristics of clamped Shallow Shells / A. Abe, Y. Koayashi, G Yamada // Journal of sound and vibration. – 2000. – 234 (3). – PP. 405-426.

*Поступила в редколлегию 15 .11.2010*

УДК 534.1:539.3

**С.В.УГРИМОВ**, канд. техн. наук, ИПМаш НАН Украины, Харьков;  
**А.Н.ШУПИКОВ**, д-р техн. наук, ИПМаш НАН Украины, Харьков

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ НИЗКОСКОРОСТНОГО УДАРА ПО СЛОИСТЫМ ОРТОТРОПНЫМ ПЛАСТИНАМ. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ**

У роботі запропонована узагальнена теорія еластодинаміки ортотропних шаруватих пластин. На її основі розроблено аналітико-чисельний метод розв'язання задачі про низькошвидкісний удар по шаруватим ортотропним пластинам. Можливості та вірогідність запропонованого методу ілюструються на тестових прикладах. Обговорюються питання щодо застосування різних двовимірних теорій для аналізу напружено-деформованого стану шаруватих пластин при ударі.

The generalized theory of elastodynamics orthotropic laminated plates is proposed in paper. On its basis the analytical-numerical method for solving the problem of low-velocity impact on orthotropic laminated plates by ball are developed. Capabilities and reliability of the proposed method are illustrated by test examples. The applicability of different two-dimensional theories for analysis of stress-strain state of laminated plates under impact are discussed.

**Введение.** Композиты достаточно часто эксплуатируются в условиях действия нестационарных нагрузок. Такие же нагрузки возникают при некоторых аварийных ситуациях, характеризующихся кратковременным воздействием интенсивных импульсных и ударных нагрузок. Особую опасность для композитов представляет поперечный удар твердым телом, который может привести к разрушению его матрицы и расслаиванию. Для оценки прочности композита и влияния различных факторов (структуры композита, геометрических размеров, характеристик нагружения) на напряженно-деформированное состояние (НДС) необходимо наличие высокоэффективных методов их расчета. Поэтому, разработка методов анализа НДС композитов при импульсном и ударном нагружениях является актуальной задачей.