

С.М. ВЕРЕЩАКА, д-р техн. наук, профессор, СумДУ, Сумы;
А.В.ДЕЙНЕКА, аспирант, СумДУ, Сумы

ТЕРМОУПРУГОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ТРУБЫ С ЗАЩИТНЫМ СЛОЕМ ИЗ ДЮРАЛЮМИНИЯ И УГЛЕПЛАСТИКА

На основе классической теории упругости анизотропного тела сравнивается напряженно-деформированное состояние многослойного толстостенного цилиндра конечной длины при действии внутреннего давления и температуры. Защитный слой цилиндра выполнен из дюралюминия или углепластика. Кинематические и статические условия контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев считаются идеальными. Решение задачи получено в осесимметричной постановке. При этом внутреннее давление и температурная нагрузка изменяются по синусоидальному закону по длине цилиндра. Отмечается, что замена дюралюминиевого защитного слоя композитной трубы на углепластик, оказывает существенное влияние на ее напряженное состояние. При сравнении напряженно-деформированного состояния рассматриваемых конструктивных вариантов цилиндров более эффективным оказался вариант защитного слоя из углепластика.

Ключевые слова: толстостенный цилиндр; температура; стеклопластик; углепластик.

Введение. Композиты многослойной структуры широко используются в различных областях современной техники. Известно, что элементы из композитов значительно выигрывают по удельной прочности при сравнении с их изотропными аналогами. Так, например, замена стальных труб стеклопластиковыми трубами увеличивает срок службы трубопроводов примерно в 4 раза и в 3 раза снижает его массу, а также исключает применение антикоррозионных защитных средств и дорогостоящих сварочных работ.

Однако для практической реализации этих преимуществ необходимо и дальше накапливать опыт проектирования такого рода конструкций. При изготовлении и эксплуатации многослойных конструкций из композиционных материалов на межслойных границах контакта жестких армированных слоев происходит образование тонкого мягкого клеевого слоя, а также различного рода структурных несовершенств, например, участков непрочности или отслоений. Традиционно используемое в расчетных моделях предположение о непрерывности перемещений и напряжений при переходе через границу контакта жестких армированных слоев оказывается существенно нарушенным.

В этой связи изучение напряженного состояния армированных оболочек при действии как статической, так и тепловой нагрузки на основе дискретно-структурной теории многослойных оболочек, когда учитываются реальные

условия взаимодействия слоев и величина изменения контактных напряжений на межслойных границах, представляется актуальной задачей. Подробный анализ последних результатов и направлений развития дискретно-структурной теории слоистых пластин и оболочек можно найти в обзорах работ [1 – 2].

1. Основные уравнения. Пусть круговой полый цилиндр нагружен по цилиндрическим поверхностям $r = r_a$ и $r = r_b$ стационарными температурными нагрузками $t_a(z)$ и $t_b(z)$ и равномерно распределенными по окружной координате усилиями $q_a(z)$ и $q_b(z)$. Направление осей цилиндрической системы координат указано на рис. 1, а. Напряжения, которые возникают в точке цилиндра при действии внешней нагрузки, показаны на рис. 1, б. Считается, что температурная нагрузка и заданное по лицевым цилиндрическим поверхностям давление осесимметричны относительно продольной оси цилиндра. Но при этом их величина изменяется вдоль меридиана и зависит от координаты z . Кроме этого, цилиндр имеет конечную длину l , а на его торцах выполняются условия свободного опирания. Также при решении задачи может учитываться эффект проскальзывания слоев цилиндра друг относительно друга в продольном направлении.

На основе классической теории анизотропного упругого тела [3] для решения поставленной задачи были составлены уравнения равновесия, физические и геометрические соотношения.

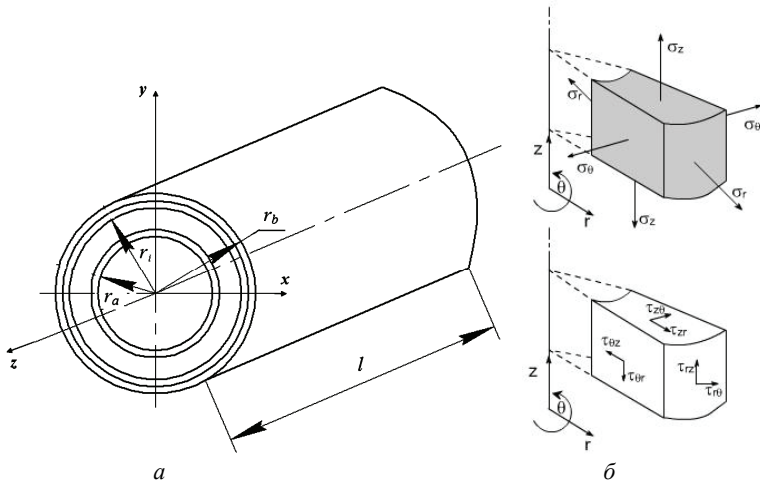


Рисунок 1 – Многослойный круговой полый цилиндр конечной длины а – направление осей координат; б – направление действия напряжений

1.1. Физические соотношения. Приняв цилиндрическую систему координат r, θ, z и задав направление оси x , от которой отсчитывается угол θ (рис.

1, а), физические соотношения для i -го ортотропного слоя с цилиндрической анизотропией запишутся в виде

$$\{\sigma_r^i\} = [B_r^i] \{\varepsilon_r^i\} + \{\alpha_r^i \Delta t\} \quad (i=1,2,\dots,N), \quad (1)$$

где

$$\{\sigma_r^i\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r^i \\ \sigma_\theta^i \\ \sigma_z^i \\ \tau_{r\theta}^i \\ \tau_{rz}^i \\ \tau_{r\theta}^i \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_r^i\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^i \\ \varepsilon_\theta^i \\ \varepsilon_z^i \\ \gamma_{\theta z}^i \\ \gamma_{rz}^i \\ \gamma_{r\theta}^i \end{Bmatrix}, \quad \{\alpha_r^i \Delta t\} = \begin{Bmatrix} \alpha_r^i \Delta t \\ \alpha_\theta^i \Delta t \\ \alpha_z^i \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$[B_r^i] = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & b_{13}^i & 0 & 0 & 0 \\ & b_{22}^i & b_{23}^i & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{33}^i & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & b_{44}^i & 0 & 0 \\ & & & & b_{55}^i & 0 \\ & & & & & b_{66}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_r^i} & -\frac{\nu_{\theta r}^i}{E_\theta^i} & -\frac{\nu_{zr}^i}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{r\theta}^i}{E_r^i} & \frac{1}{E_\theta^i} & -\frac{\nu_{z\theta}^i}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{rz}^i}{E_r^i} & -\frac{\nu_{\theta z}^i}{E_\theta^i} & \frac{1}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\theta z}^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rz}^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}^i} \end{bmatrix} -$$

матрицы-столбцы напряженно-деформированного состояния и температурных деформаций, а также матрица коэффициентов податливости $[B_r^i]$ соответственно. Здесь E_r^i, E_θ^i, E_z^i – модули упругости соответственно в радиальном, круговом и продольном направлениях; $G_{\theta z}^i, G_{rz}^i, G_{r\theta}^i$ – модули сдвига в плоскостях $\theta 0z, r0z, r0\theta$ соответственно; ν_{kj}^i ($k, j = r, \theta, z$) – коэффициенты Пуассона; α_j^i ($j = r, \theta, z$) – температурный коэффициент линейного расширения в направлениях осей цилиндрической системы; Δt – изменение температуры на лицевых поверхностях цилиндра; N – количество слоев цилиндра. Решая систему уравнений (1) относительно напряжений, несложно найти следующие физические соотношения

$$\{\sigma_r^i\} = [A_r^i] \{\varepsilon_r^i\} - \{\alpha_r^i \Delta t\}, \quad (2)$$

где

$$[A_r^i] = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22}^i & a_{23}^i & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33}^i & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & a_{44}^i & 0 & 0 \\ & & & & a_{55}^i & 0 \\ & & & & & a_{66}^i \end{bmatrix}; \quad \{\alpha_r^i \Delta t\} = \begin{bmatrix} (a_{11}^i + a_{12}^i + a_{13}^i) \alpha_r^i \Delta t \\ (a_{12}^i + a_{22}^i + a_{23}^i) \alpha_\theta^i \Delta t \\ (a_{13}^i + a_{23}^i + a_{33}^i) \alpha_z^i \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь коэффициенты матрицы жесткости $[A_r^i]$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} a_{11}^i &= [b_{22}^i b_{33}^i - (b_{23}^i)^2] \Delta^{-1}; & a_{22}^i &= [b_{11}^i b_{33}^i - (b_{13}^i)^2] \Delta^{-1}; \\ a_{33}^i &= [b_{11}^i b_{22}^i - (b_{12}^i)^2] \Delta^{-1}; & a_{12}^i &= [b_{13}^i b_{23}^i - b_{12}^i b_{33}^i] \Delta^{-1}; \\ a_{13}^i &= [b_{12}^i b_{23}^i - b_{22}^i b_{13}^i] \Delta^{-1}; & a_{23}^i &= [b_{12}^i b_{13}^i - b_{11}^i b_{23}^i] \Delta^{-1}; \\ \Delta &= b_{11}^i b_{22}^i b_{33}^i + b_{12}^i b_{23}^i b_{31}^i + b_{21}^i b_{32}^i b_{13}^i - \\ &- b_{13}^i b_{22}^i b_{31}^i - b_{21}^i b_{12}^i b_{33}^i - b_{11}^i b_{32}^i b_{23}^i; \\ a_{44}^i &= \frac{1}{b_{44}^i}; & a_{55}^i &= \frac{1}{b_{55}^i}; & a_{66}^i &= \frac{1}{\sigma_{66}^i}. \end{aligned}$$

1.2. Геометрические соотношения.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; & \varepsilon_\theta^i &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{u_r^i}{r}; & \varepsilon_z^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; & \gamma_{\theta z}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}; \\ \gamma_{rz}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; & \gamma_{r\theta}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{u_\theta^i}{r} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (3)$$

где u_r^i , u_θ^i , u_z^i – перемещения в радиальном, окружном и продольном направлениях i -го ортотропного слоя цилиндра ($r_i < r < r_{i+1}$) соответственно.

В связи с тем, что рассматриваемая задача в осесимметричной постановке относительно оси z , перемещение u_θ^i не изменяется в окружном направлении. Поэтому выражения (3) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; & \varepsilon_\theta^i &= \frac{u_r^i}{r}; & \varepsilon_z^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; & \gamma_{\theta z}^i &= 0; \\ \gamma_{rz}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; & \gamma_{r\theta}^i &= -\frac{u_\theta^i}{r} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (4)$$

1.3. Уравнения равновесия. При осесимметричной двумерной постановке задачи уравнения равновесия классической анизотропной теории упругости [3] принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma_r^i}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} + \frac{\sigma_r^i - \sigma_\theta^i}{r} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z^i}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}^i}{r} = 0. \quad (5)$$

Система из двух уравнений равновесия дополняется третьим уравнением теплопроводности

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) t^i = 0. \quad (6)$$

Для решения поставленной задачи, составленную систему из трех дифференциальных уравнений в частных производных (5) – (6), необходимо задать граничные условия на торцах и лицевых поверхностях цилиндра, а также условия контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев.

1.4. Граничные условия:

– на торцах и лицевых поверхностях цилиндра

$$\begin{aligned} u_r^i(r, 0) &= 0; & \sigma_z^i(r, 0) &= \tau_{rz}^i(r, 0) = 0; \\ u_r^i(r, l) &= 0; & \sigma_z^i(r, l) &= \tau_{rz}^i(r, l) = 0; \\ \sigma_r^1(r_a, z) &= q_a(z); & \tau_{rz}^1(r_a, z) &= 0; \\ \sigma_r^N(r_b, z) &= q_b(z); & \tau_{rz}^N(r_b, z) &= 0; \\ t^i(r, 0) &= t^i(r, l) = 0 & (i = 1, 2, \dots, N), \\ t^1(r_a, z) &= t_a(z); & t^N(r_b, z) &= t_b(z). \end{aligned} \quad (7)$$

– по сопряженным поверхностям соседних слоев

$$\begin{aligned} \sigma_r^{i-1}(r_i, z) &= \sigma_r^i(r_i, z); & \tau_{rz}^{i-1}(r_i, z) &= \tau_{rz}^i(r_i, z); \\ u_r^{i-1}(r_i, z) &= u_r^i(r_i, z); & u_z^{i-1}(r_i, z) - u_z^i(r_i, z) &= K \cdot \tau_{rz}^i(r_i, z); \\ t^{i-1}(r_i, z) &= t^i(r_i, z); & \lambda^{i-1} \frac{\partial t^{i-1}(r_i, z)}{\partial r} &= \lambda^i \frac{\partial t^i(r_i, z)}{\partial r} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (8)$$

В последнем условии (8) параметр λ^i соответствует коэффициенту теплопроводности i -го слоя.

В качестве предельных из уравнения (8) имеет место два варианта: при $1/K^{(i)} = 0$ – имеет место упругое проскальзывание соседних слоев друг относительно друга по сопряженным поверхностям, при $K^{(i)} = 0$ – идеальный контакт.

1.5. Безразмерные параметры. Для упрощения ввода исходных данных и обобщения полученных численных результатов, следуя работе [4], вводятся

следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{r}{r_b}; & R_a &= \frac{r_a}{r_b}; & R_b &= \frac{r_b}{r_b} = 1; & Z &= \frac{z}{r_b}; \\
 L &= \frac{l}{r_b}; & A_{kl}^i &= \frac{a_{kl}^i}{E_0}; & \Gamma_k^i &= \frac{\gamma_k^i}{\alpha_0 E_0}; \\
 T^i &= \frac{t^i}{t_0}; & \Lambda^i &= \frac{\lambda^i}{\lambda_0}; & U_r^i &= \frac{u_r^i}{\alpha_0 E_0 r_b}; & U_z^i &= \frac{u_z^i}{\alpha_0 E_0 r_b}; \\
 S_r^i &= \frac{\sigma_r^i}{\alpha_0 E_0 t_0}; & S_z^i &= \frac{\sigma_z^i}{\alpha_0 E_0 t_0}; & S_\theta^i &= \frac{\sigma_\theta^i}{\alpha_0 E_0 t_0}; \\
 TU_{rz}^i &= \frac{\tau_{rz}^i}{\alpha_0 E_0 t_0}; & Q_a(z) &= \frac{q_a(z)}{\alpha_0 E_0 t_0}; & Q_b(z) &= \frac{q_b(z)}{\alpha_0 E_0 t_0}; \\
 T_a(z) &= \frac{t_a(z)}{t_0}; & T_b(z) &= \frac{t_b(z)}{t_0},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где E_0 , λ_0 , и α_0 – значения модуля Юнга, теплопроводности и коэффициента теплового линейного расширения эталонного материала; t_0 – эталонная температура цилиндра.

1.6. Постановка краевой задачи. Подставляя геометрические соотношения (4) в уравнения (5), а также с учетом безразмерных параметров введенных выше, можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 & \left[A_{11}^i \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) - \frac{A_{22}^i}{R^2} + A_{55}^i \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right] U_r^i + \\
 & + \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \frac{\partial^2}{\partial R \partial Z} + (A_{13}^i - A_{23}^i) \frac{\partial}{\partial Z} \right] U_z^i = \Gamma_r^i \frac{\partial T^i}{\partial R}; \\
 & \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \frac{\partial^2}{\partial R \partial Z} + (A_{23}^i + A_{55}^i) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial Z} \right] U_r^i + \\
 & \left[A_{55}^i \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + A_{33}^i \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right] U_z^i = \Gamma_z^i \frac{\partial T^i}{\partial Z}; \\
 & \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) T^i + \frac{\partial^2 T^i}{\partial Z^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Граничные условия (7), (8), записанные при помощи безразмерных параметров (9), принимают вид:

– на торцах и лицевых поверхностях цилиндра

$$\begin{aligned}
U_r^i(R,0) &= 0; & S_z^i(R,0) &= TU_{rz}^i(R,0) = 0; \\
U_r^i(R,l) &= 0; & S_z^i(R,l) &= TU_{rz}^i(R,l) = 0; \\
S_r^1(R_a,z) &= Q_a(z); & TU_{rz}^1(R_a,z) &= 0; \\
S_r^N(R_b,z) &= Q_b(z); & TU_{rz}^N(R_b,z) &= 0; \\
T^i(R,0) &= T^i(R,l) = 0 & (i = 1,2,\dots,N), \\
T^1(R_a,z) &= T_a(z); & T^N(R_b,z) &= T_b(z).
\end{aligned} \tag{11}$$

– по сопряженным поверхностям соседних слоев

$$\begin{aligned}
S_r^{i-1}(R_i,z) &= S_r^i(R_i,z); & TU_{rz}^{i-1}(R_i,z) &= TU_{rz}^i(R_i,z); \\
U_r^{i-1}(R_i,z) &= U_r^i(R_i,z); & U_z^{i-1}(R_i,z) - U_z^i(R_i,z) &= K \cdot TU_{rz}^i(R_i,z); \\
T^{i-1}(R_i,z) &= T^i(R_i,z); & \Lambda^{i-1} \frac{\partial T^{i-1}(R_i,z)}{\partial R} &= \Lambda^i \frac{\partial T^i(R_i,z)}{\partial R} \quad (i = 1,2,\dots,N).
\end{aligned} \tag{12}$$

2. Алгоритм решения краевой задачи. Решение краевой задачи (10) – (12) в направлении продольной оси цилиндра ищется в виде тригонометрических рядов

$$\begin{aligned}
U_r^i(R,Z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^i(R) \sin(\beta Z); & U_z^i(R,Z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^i(R) \cos(\beta Z); \\
T_r^i(R,Z) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n^i(R) \sin(\beta Z).
\end{aligned} \tag{13}$$

где $\beta = \frac{n\pi \chi_b}{L}$. Принятые выражения (13) удовлетворяют условиям свободного опирания на торцах цилиндра.

Подставляя (13) в систему уравнений (10), несложно получить ее в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \left[A_{11}^i \left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) - \frac{A_{22}^i}{R^2} + A_{55}^i \beta^2 \right] \Phi_n^i(R) + \\
& \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \beta \frac{d}{dR} + (A_{13}^i - A_{23}^i) \frac{\beta}{R} \right] \Psi_n^i(R) = \Gamma_r \frac{dF_n^i(R)}{dR}; \\
& \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \beta \frac{d}{dR} + (A_{23}^i + A_{55}^i) \frac{\beta}{R} \right] \Phi_n^i(R) + \\
& \left[A_{55}^i \left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) + A_{33}^i \beta^2 \right] \Psi_n^i(R) = \Gamma_r F_n^i(R);
\end{aligned}$$

$$\left[\left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) - \beta^2 \right] F_n^i(R) = 0. \quad (14)$$

По аналогичной схеме преобразовываются и граничные условия (11), (12):

– на торцах и лицевых поверхностях цилиндра

$$\begin{aligned} A_{11}^1 \frac{d\Phi_n^1(R_a)}{dR} + A_{12}^1 \frac{\Phi_n^1(R_a)}{R} - \beta A_{13}^1 \Psi_n^1(R_a) &= Q_{an}, \\ \beta \Phi_n^1(R_a) + \frac{d\Psi_n^1(R_a)}{dR} &= 0, \\ A_{11}^N \frac{d\Phi_n^N(R_b)}{dR} + A_{12}^N \frac{\Phi_n^N(R_b)}{R} - \beta A_{13}^N \Psi_n^N(R_b) &= Q_{bn}, \\ \beta \Phi_n^N(R_b) + \frac{d\Psi_n^N(R_b)}{dR} &= 0, \\ F_n^1(R_a) = T_{an}, F_n^N(R_b) = T_{bn}. \end{aligned} \quad (15)$$

– по сопряженным поверхностям соседних слоев

$$\begin{aligned} A_{11}^{i-1} \frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR} + A_{12}^{i-1} \frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R} - \beta A_{13}^{i-1} \Psi_n^{i-1}(R^i) &= \\ = A_{11}^i \frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR} + A_{12}^i \frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R} - \beta A_{13}^i \Psi_n^i(R^i); \\ \beta \Phi_n^{i-1}(R^i) + \frac{d\Psi_n^{i-1}(R^i)}{dR} &= \beta \Phi_n^i(R^i) + \frac{d\Psi_n^i(R^i)}{dR}; \quad \Phi_n^{i-1}(R^i) = \Phi_n^{i-1}(R^i); \\ \Psi_n^{i-1}(R^i) - \Psi_n^i(R^i) &= K \left(\beta \Phi_n^i(R^i) + \frac{d\Psi_n^i(R^i)}{dR} \right); \quad F_n^{i-1}(R^i) = F_n^{i-1}(R^i); \\ A^{i-1} \frac{dF_n^{i-1}(R^i)}{dR} &= A^i \frac{dF_n^i(R^i)}{dR}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_{an} &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} Q_a(Z) \sin(\beta Z) dZ; & Q_{bn} &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} Q_b(Z) \sin(\beta Z) dZ; \\ T_{an} &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} T_a(Z) \sin(\beta Z) dZ; & T_{bn} &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} T_b(Z) \sin(\beta Z) dZ. \end{aligned}$$

Считается, что в радиальном направлении функции $\Phi_n^i(R^i)$, $\Psi_n^i(R^i)$, $F_n^i(R^i)$ непрерывны по толщине i -го слоя, тогда при помощи рядов Тейлора их можно будет записать в виде:

$$\Phi_n^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^i (R-1)^k; \quad \Psi_n^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^i (R-1)^k;$$

$$F_n^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k^i (R-1)^k. \quad (17)$$

Подставив (17) в уравнения (15) и приравняв коэффициенты при $(R-1)^k$ к нулю, несложно получить следующие рекуррентные соотношения

$$C_{k+2}^i = \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[\begin{array}{l} -(k+1)C_{k+1}^i + \frac{A_{22}^i + \beta^2 A_{55}^i}{A_{41}^i} C_k^i - \\ (k+1)\beta \frac{A_{13}^i + A_{55}^i}{A_{41}^i} B_{k+1}^i - \beta \frac{A_{13}^i - A_{23}^i}{A_{41}^i} B_k^i + \frac{\Gamma_r^i(k+1)}{A_{41}^i} D_{k+1}^i \end{array} \right];$$

$$B_{k+2}^i = \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[\begin{array}{l} -(k+1)B_{k+1}^i + \frac{\beta^2 A_{33}^i}{A_{55}^i} B_k^i - \\ (k+1)\beta \frac{A_{13}^i + A_{55}^i}{A_{55}^i} C_{k+1}^i - \beta \frac{A_{55}^i + A_{23}^i}{A_{55}^i} C_k^i + \frac{\Gamma_z^i}{A_{55}^i} D_k^i \end{array} \right];$$

$$D_{k+2}^i = \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[-(k+1)D_{k+1}^i + \beta^2 B_k^i \right]. \quad (18)$$

Из рекуррентных соотношений (18) следует, что все коэффициенты C_k^i , B_k^i и D_k^i могут быть выражены через C_0^i , C_1^i , B_0^i , B_1^i , D_0^i , D_1^i , когда $k > 1$. Тогда решения системы уравнений (15) могут быть записаны в компактной форме

$$\Phi_n^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{array}{l} g_c^i(k,1)C_0^i + g_c^i(k,2)C_1^i + g_c^i(k,3)B_0^i \\ + g_c^i(k,4)B_1^i + g_c^i(k,5)D_0^i + g_c^i(k,6)D_1^i \end{array} \right] (R-1)^k;$$

$$\Psi_n^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{array}{l} g_b^i(k,1)C_0^i + g_b^i(k,2)C_1^i + g_b^i(k,3)B_0^i \\ + g_b^i(k,4)B_1^i + g_b^i(k,5)D_0^i + g_b^i(k,6)D_1^i \end{array} \right] (R-1)^k;$$

$$F_n^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{array}{l} g_d^i(k,1)C_0^i + g_d^i(k,2)C_1^i + g_d^i(k,3)B_0^i \\ + g_d^i(k,4)B_1^i + g_d^i(k,5)D_0^i + g_d^i(k,6)D_1^i \end{array} \right] (R-1)^k, \quad (19)$$

где $g_b^i(k, o)$, $g_c^i(k, j)$, $g_d^i(k, j)$ константы, определяемые при помощи рекуррентных соотношений (19). Неизвестные константы C_0^i , C_1^i , B_0^i , B_1^i , D_0^i , D_1^i , число которых определяется количеством дискретных слов цилиндра N , находятся путем подстановки выражений (19) в граничные условия (15), (16). Полученная при этом линейная алгебраическая система уравнений включает $6N$ неизвестных констант.

Определив значение выражений (19) и подставив их в заданные решения (13), несложно при помощи геометрических и физических соотношений,

представленных выше, получить решение рассматриваемой термоупругой краевой задачи.

3. Пример расчета. Геометрические параметры многослойного кругового полого цилиндра $r_a = 0,156$ м, $r_b = 0,188$ м и $l = 2,163$ м. Эталонные значения температуры, модуль Юнга, и коэффициент теплового расширения равны: $T_0 = 50$ К, $E_0 = 40$ ГПа, а $\alpha_0 = 7,0 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹. Температурные нагрузки на внутренней и наружной поверхности, а также внутреннее и внешнее давление, заданы в следующем виде:

$$T_a(z) = 0, T_b(z) = \Delta T \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad q_a(z) = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), q_b(z) = 0,$$

где $q_0 = 20$ МПа, $\Delta T = 80$ К.

Цилиндр состоит из 4 слоев: 1) твердый полиэтилен высокого давления ($h = 4$ мм) – $E = 260$ МПа; $\nu = 0,4$; $\lambda = 0,44$ Вт/м·К; $\alpha = 20 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹; 2) стеклопластик ($h = 20$ мм) – $\lambda = 0,4$ Вт/м·К; $\alpha_z = \alpha_\theta = 5 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹; $\alpha_r = 7 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹; 3) пеновинилпласт ($h = 4$ мм) – $E = 83$ МПа; $\nu = 0,33$; $\lambda = 0,4$ Вт/м·К; $\alpha = 15 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹; 4) дюралюминий ($h = 4$ мм) – $E = 71$ ГПа; $\nu = 0,31$; $\lambda = 160$ Вт/м·К; $\alpha = 2,3 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹; углепластик – $\lambda = 0,4$ Вт/м·К, $\alpha_z = -5,7 \cdot 10^{-7}$ К⁻¹, $\alpha_\theta = 3,0 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹, $\alpha_r = 7 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹.

Для первого, третьего и четвертого слоев, изготовленных из упругого изотропного материала, справедливы следующие соотношения:

$$E_z = E_\theta = E_r = E; \quad G_{\theta z} = G_{r\theta} = G_{rz} = G;$$

$$\nu_{z\theta} = \nu_{zr} = \nu_{\theta r} = \nu_{\theta z} = \nu_{rz} = \nu_{r\theta} = \nu_z; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Упругие характеристики стеклопластика определялись по методике, предложенной в работе [1]. Модули упругости E_θ , сдвига G_θ и коэффициент Пуассона ν_θ наматываемых лент, набранных из алюмоборосиликатных нитей, соответственно равны $E_\theta = 55000$ МПа, $G_\theta = 22000$ МПа и $\nu_\theta = 0,25$. В качестве матрицы стеклопластика использовался эпоксидный полимер со следующими параметрами упругости: $E_m = 3550$ МПа, $G_m = 1270$ МПа и $\nu_m = 0,4$. В каждом монослое толщиной 0,25 мм объем, занимаемый лентами, составляет 70 % общего объема.

Углепластик. Согласно паспортным данным модули упругости E_θ , сдвига G_θ и коэффициент Пуассона ν_θ углеродного волокна ЛУ-03 соответственно равны 235000 МПа, 90400 МПа и 0,3. Механические характеристики связующего углепластика (сополимер эпокситрифенольной и анилиноформальдегидной смол) – $E_m = 3500$ МПа, $G_m = 1320$ МПа и $\nu_m = 0,32$. В каждом монослое толщиной 0,171 мм объем, занимаемый волокнами, составляет 55 % общего объема.

Технические постоянные рассматриваемых многослойного стеклопластика и углепластика сведены в табл. 1.

На рис. 2 – 4 показаны графики распределения перемещений и напряже-

ний в толстостенном цилиндре.

Анализ теоретических результатов, показанных на рис. 2, позволяет отметить следующее. Осевые напряжения в несущем стеклопластиковом слое цилиндра уменьшаются примерно в 3,5 раза, когда дюралюминиевый защитный слой заменяется защитным слоем из углепластика.

Из рис. 3 видно, что в результате замены дюралюминиевого внешнего защитного слоя цилиндра углепластиковым слоем величина окружных напряжений в несущем стеклопластиковом слое уменьшается в 1,4 раза при совместном действии температурной нагрузки и внутреннего давления.

Таблица 1 – Упругие характеристики угле и стеклопластиков

Материал	E_{ii} , МПа	G_{ij} , МПа	ν_{ij}	ν_{ii}
Углепластик	$E_\theta = 84457$	$G_{\theta z} = 12410$	$\nu_{\theta z} = 0,21$	$\nu_{\theta z} = 0,11$
	$E_z = 42026$	$G_{r\theta} = 4287$	$\nu_{r\theta} = 0,28$	$\nu_{r\theta} = 0,049$
	$E_r = 14703$	$G_{rz} = 3677$	$\nu_{rz} = 0,3$	$\nu_{rz} = 0,1$
Стеклопластик	$E_z = 23800$	$G_{\theta z} = 7490$	$\nu_{z\theta} = 0,077$	$\nu_{\theta z} = 0,11$
	$E_\theta = 33500$	$G_{rz} = 5014$	$\nu_{zr} = 0,397$	$\nu_{rz} = 0,4$
	$E_r = 23870$	$G_{r\theta} = 6620$	$\nu_{\theta r} = 0,405$	$\nu_{r\theta} = 0,284$

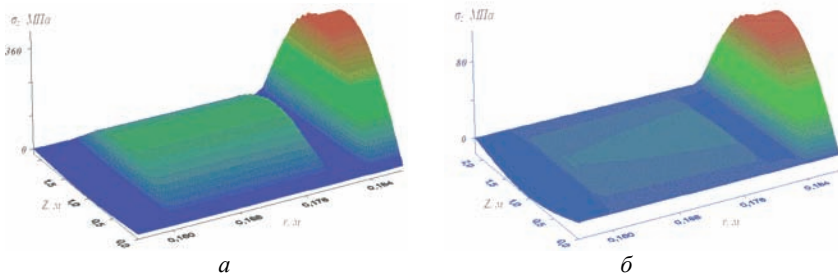


Рисунок 2 – Распределение осевых напряжений в цилиндре ($q_0 = 20$ МПа, $\Delta T = 80$ К) защитный слой: а – дюралюминий; б – углепластик

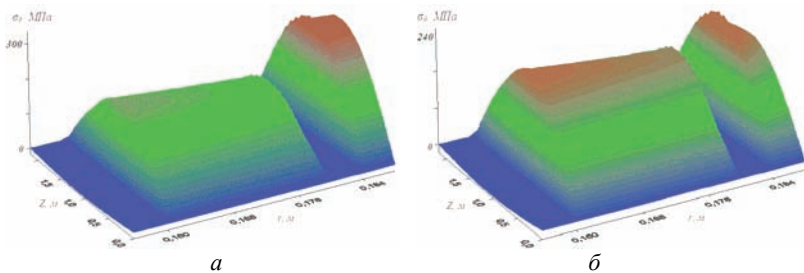


Рисунок 3 – Распределение окружных напряжений в цилиндре ($q_0 = 20$ МПа, $\Delta T = 80$ К) защитный слой: а – дюралюминий; б – углепластик

Заметно изменяется картина распределения осевых напряжений в защитном слое многослойного цилиндра ($q_0 = 20$ МПа, $\Delta T = 80$ К). Максимальные напряжения σ_z в дюралюминиевом слое в 3 раза больше максимальных напряжений в углепластиковом слое. Изменяется картина распределения напряжений поперечного сдвига (рис. 4) в полем неоднородном толстостенном цилиндре при использовании углепластика вместо дюралюминия для конструкции защитного слоя.

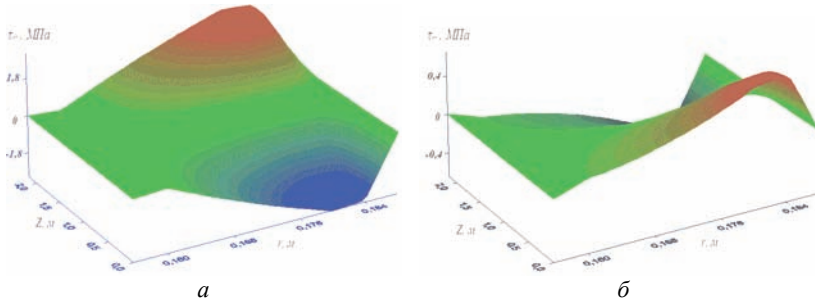


Рисунок 4 – Распределение напряжений поперечного сдвига в цилиндре ($q_0 = 20$ МПа, $\Delta T = 80$ К) защитный слой: а) дюралюминий; б) углепластик

Выводы. На основе дискретно-структурной теории проведены исследования напряженно-деформированного состояния многослойных оболочек при действии как статической, так и температурной нагрузки. Предложенный алгоритм решения, рассмотренного класса задач, позволяет получать расчетные данные для оценки влияния физико-механических характеристик отдельных слоев на термоупругое деформированное состояние неоднородного по толщине цилиндра. При сравнение напряженно-деформированного состояния цилиндров с внешними защитными слоями из углепластика и дюралюминия, более эффективным оказался углепластик.

Список литературы: 1. *Верещака С.М.* Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры / *С.М. Верещака*. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. – 286 с. 2. *Пискунов В.Г.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек / *В.Г.Пискунов, А.О.Рассказов* // Прикладная механика. – 2002. – Т 38. № 2. – С. 22-56. 3. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / *С.Г. Лехницкий*. – М.: Наука, 1977. – 416 с. 4. *Shao Z. S.* Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length / *Z. S. Shao* // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2005. – Vol. 82. – P. 155-163.

Bibliography (transliterated): 1. *Vereschaka S.M.* Nelinejnoe deformirovanie i ustojchivost' mnogoslojnyh elementov konstrukcij s defektami struktury. *S.M. Vereschaka*. Sumy: Izd-vo SumGU, 2009. 286 Print. 2. *Piskunov V.G.* Razvitie teorii slojstyh plastin i obolochek. *V.G.Piskunov, A.O.Rasskazov*. *Prikladnaya mehanika*. 2002. T 38. № 2. 22-56 Print. 3. *Lehnickij S.G.* Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. *S.G. Lehnickij*. Moscow: Nauka, 1977. 416 Print. 4. *Shao Z. S.* Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length. *Z. S. Shao*. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2005. Vol. 82. 155-163 Print.

Поступила (received) 25.03.2014

Термопружний напружений стан багат шарової труби із захисним шаром дюралюмінію та склопластику / Верещака С.М., Дейнека А. В. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57 (1099). – С. 19-30. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-9130.

На основі класичної теорії пружності анізотропного тіла порівнюється напружено-деформований стан багат шарового товстостінного циліндра кінцевої довжини при дії внутрішнього тиску і температури. Захисний шар циліндра виконаний з дюралюмінію та вуглепластика. Кінематичні і статичні умови контакту по сполучених поверхнях сусідніх шарів вважаються ідеальними. Рішення задачі отримане у вісесиметричній постановці. При цьому внутрішній тиск і температурне навантаження змінюються за синусоїдальним законом по довжині циліндра. Відзначається, що заміна дюралюмінієвого захисного шару композитної труби на вуглепластик, суттєво впливає на її напружений стан. Під час порівняння напружено-деформованого стану розглянутих конструктивних варіантів циліндрів більш ефективним виявився варіант захисного шару з вуглепластика.

Ключові слова: товстостінний циліндр; температура; склопластик; вуглепластик.

Термоупругое напряженное состояние многослойной трубы с защитным слоем из дюралюминия и углепластика / Верещака С.М., Дейнека А. В. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57 (1099). – С. 19-30. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-9130.

На основе классической теории упругости анизотропного тела сравнивается напряженно-деформированное состояние многослойного толстостенного цилиндра конечной длины при действии внутреннего давления и температуры. Защитный слой цилиндра выполнен из дюралюминия или углепластика. Кинематические и статические условия контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев считаются идеальными. Решение задачи получено в осесимметричной постановке. При этом внутреннее давление и температурная нагрузка изменяются по синусоидальному закону по длине цилиндра. Отмечается, что замена дюралюминиевого защитного слоя композитной трубы на углепластик, оказывает существенное влияние на ее напряженное состояние. При сравнении напряженно-деформированного состояния рассматриваемых конструктивных вариантов цилиндров более эффективным оказался вариант защитного слоя из углепластика.

Ключевые слова: толстостенный цилиндр; температура; стеклопластик; углепластик.

Comparison of thermal stress for multilayer pipes with a protective layer of duralumin or carbon fiber / S.M. Vereshchaka, A.V. Deineka // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 19-30. – Bibliogr.: 4. – ISSN 2078-9130.

On the basis of the classical theory of elasticity of an anisotropic body compared stress-strain state of multilayer thick-walled cylinder of finite length under the action of internal pressure and temperature. The protective layer of the cylinder is made of aluminium and carbon fiber.

Kinematic and static contact conditions on the surfaces of adjacent layers are considered ideal. The solution of the problem was obtained in axisymmetric setting. The internal pressure and temperature load change sinusoidal the length of the cylinder. It is noted that the replacement of the dural protective layer composite pipes in carbon, significantly affects its stress state. Protective layer of carbon fiber was more effective version when comparing the stress-strain state of the considered design options cylinders.

Keywords: hollow cylinder, temperature; fiberglass; carbon fiber.