

УДК 519.6; 532.5

Д. И. ЧЕРНИЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

Рассмотрены вычислительные технологии для разрешения проблемы (метода дискретных вихрей), связанной с аппроксимацией непрерывных границ упорядоченной системой дискретных вихрей в задачах моделирования плоских нестационарных течений. Метод и алгоритм предназначены для вычисления непрерывных характеристик (определяемых через неоднозначные функции) в области их определения вплоть до ее границ, являющихся естественными линиями разрыва непрерывных характеристик. Предлагаемый метод и алгоритм преобразования системы дискретных особенностей универсальны для границ произвольной геометрии («ветвистые» контура, замкнутые контура). Результаты преобразований позволяют вычислять кинематические и динамические характеристики для отрывных течений, с учетом возникновения новых элементов границ в точках отрыва.

Ключевые слова: метод дискретных вихрей, метод дискретных особенностей, вычислительные технологии.

Введение. При рассмотрении процесса отрывного обтекания потоком тела сложной формы предполагается, что возникающие вихревые структуры состоят из складок вихревых поверхностей конечной толщины, которые, в свою очередь, состоят из *вихревых трубок* конечной толщины. Приближение вихревой трубки бесконечно тонкой *вихревой нитью* (линей) предполагает замену вихревой поверхности конечной толщины бесконечно тонкой вихревой поверхностью – *вихревой пеленой*, состоящей из бесконечно тонких вихревых нитей (линий). В силу сделанных допущений, начально-краевая задача для процесса обтекания с тонкими вихревыми слоями может быть сведена к системе совместных задач – краевой задаче для уравнения Лапласа в деформирующейся области (с условиями Неймана на одной части границ и с условием Дирихле на другой ее части) и задаче Коши (для определения измененной границ области).

Для решения вышеназванных задач используется *метод дискретных вихрей* (МДВ), который основывается на аппроксимации непрерывной вихревой пелены набором упорядоченных дискретных вихревых систем, состоящих из бесконечно тонких вихревых нитей (линий). Следует отметить, что, математическая модель течения, построенная на основе метода дискретных вихрей, только аппроксимирует вихревое течение циркуляционным течением. Кроме того, использование МДВ для математического моделирования плоского нестационарного течения в области с произвольной криволинейной и деформирующейся границей, осложняется проблемой невозможности прямого вычисления (даже по уже определенным параметрам системы дискретных вихрей, аппроксимирующих границу) искомых непрерывных характеристик (таких как потенциал течения, производная по времени от потенциала, нестационарное поле давления) во всей области течения, вплоть до ее границ. Для вычисления же вышеназванных характеристик требовалось решение дополнительных задач (с использованием уже определенных параметров системы дискретных вихрей), что связано со значительными трудностями и неудобствами [1 – 8].

Ниже, для плоского случая, представлены вычислительные технологии (методы и алгоритмы для моделей МДВ), основанные на преобразованиях дискретно-вихревых систем в системы дискретных особенностей, порожденных однозначными функциями [10, 11].

Анализ проблемы. При решении ряда задач удобно использовать аппарат теории функций комплексного переменного, с аналитическими по z функциями и интегральными представлениями, определенными на ограниченном (в общем случае незамкнутом) контуре L_{ab} . Предполагается, что заданным разбиением контур может быть представлен в виде суммы дуг

$$L_{ab} = \sum_{j=1}^M L_j = \sum_{j=1}^M L_{\omega_{j-1}\omega_j}.$$

В силу чего для интегрального представления с логарифмическим ядром справедливо равенство:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \ln(z - \omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right) d\omega. \quad (1)$$

При заданном разбиении для всех точек z , отстоящих от контура L_{ab} на расстояние больше чем ρ_0 , выполняется условие

$$\left| \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}} \right| \leq \frac{\Delta}{\rho_0} = \varepsilon < 1,$$

где $\Delta = \max_j |L_{\omega_{j-1}\omega_j}|$ и справедлива оценка:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left[\ln^2\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right) + \left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2)$$

В силу чего [9] получаем равенство:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) + O\left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right), \quad (3)$$

где

$$\Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega, \text{ так, что } \Gamma_0 = \int_{\sum_j L_j} f(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^M \Gamma_j. \quad (4)$$

Следует обратить внимание на интегральное представление с логарифмическим ядром в левой части (3), где подинтегральное выражение является многозначной функцией с точкой ветвления $\omega \in L_{ab}$. В правой части равенства представлена сумма комплексных логарифмов (погрешностью пренебрегаем). Равенство для любой точки z считается вполне определенным и имеет место при условии, что для многозначных функций $\ln(z - \omega)$ выбрана ее ветвь и задан разрез, проходящий вдоль контура L_{ab} . Для выделения выбранной ветви форма разреза безразлична, но для выделения непрерывного (в области) значения функции удобно, чтобы разрез проходил вдоль моделируемого контура.

Однако, если для левой части равенства об этом можно условиться и считать разрыв проходящим вдоль контура L_{ab} (рис. 1, а), то для правой части система разрезов будет проходить по лучам (рис. 1, б), соединяющим точки $\omega_{0j} \in L_{ab}$ с бесконечно удаленной точкой ∞ .

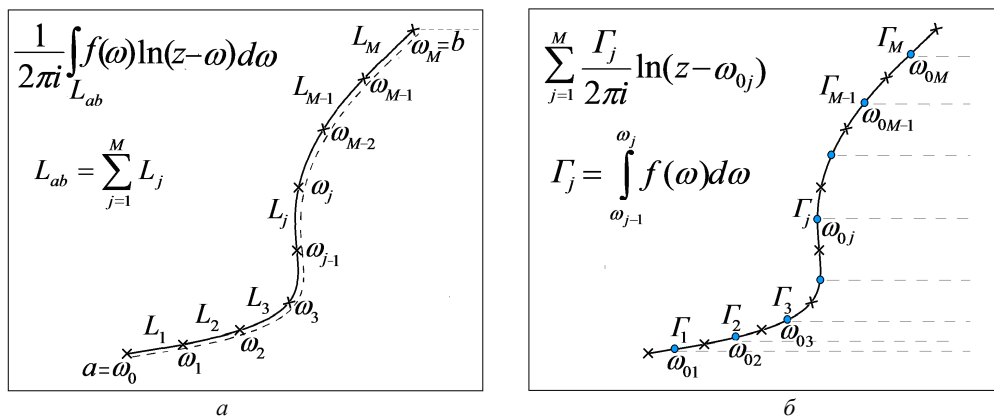


Рис. 1 – Линия (линии) разреза, выделяющие область однозначности для выражения (3): а – вдоль контура, для интегрального представления; б – по лучам, для дискретного представления.

На рис. 1 продемонстрирована основная проблемой метода дискретных вихрей – принципиальная невозможность построения непрерывной вне моделируемого (системой дискретных вихрей) контура характеристической функции, оставаясь, при этом, в терминологии метода дискретных вихрей (*вихреисточников*). Сохранить непрерывной в области выбранную ветвь многозначной функции возможно лишь (исключив обход вокруг точки ветвления) проведением разрезов плоскости вдоль контура (рис. 1, а), что невозможно в случае МДВ (рис. 1, б).

Метод решения проблемы. Если для интегрального представления (1) (имеющего смысл потенциала – характеристической функции) и можно условиться, что разрез в области совпадает с контуром, то при вычислении потенциала – характеристической функции в аддитивном представлении МДВ (3), рис. 1, б, направления разрезов уже единообразно (система лучей) для всей системы дискретных вихрей. В результате возникает система разрезов значений функции вне контура, которую невозможно устранить изменением числа дискретных вихрей. Однако, проблему разрывности значений функции вне контура можно разрешить. Для этого необходимо построение преобразования, позволяющего определять однозначную ветвь и положение единственного разреза в области, для многозначной функции, определенной на произвольном криволинейном контуре [5, 7].

Преобразование для определения однозначной ветви и положения разреза многозначной функции (заданной на простом контуре). Для упорядоченной системы дискретных вихрей (аппроксимирующих) интегральное представление (3) допустимо преобразование вида (5) – переход к представлению в виде системы вихревых пар [5, 7] и суммарного вихря:

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi i} (\ln(z - \omega_{0j}) - \ln(z - \omega_{0j+1})) + \frac{\sum_{j=1}^M \Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M}). \quad (5)$$

Считается (условно), что линия разреза (совпадающая с линией контура), выделяющая область однозначности для функции, порожденной системой вихревых пар (рис. 2, а), формируется из системы разрезов между вихревыми парами. Обеспечить выполнение данного условия возможно преобразованием [10, 11] (при использовании *теоремы Лагранжа о конечном приращении* [12]) системы вихревых пар и суммарного вихря:

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{(\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi i} \left(\frac{\ln(z - \omega_{0j+1} + \omega_{0j+1} - \omega_{0j}) - \ln(z - \omega_{0j+1})}{\omega_{0j+1} - \omega_{0j}} \right) + \frac{\sum_{j=1}^M \Gamma_j}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}) \quad (6)$$

к системе диполей и суммарного вихря

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{(\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi i(z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}), \quad (7)$$

или, иначе

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{D_j}{2\pi i(z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}), \quad (8)$$

где

$$\omega_j = 0.5(\omega_{0j+1} + \omega_{0j}), \quad \Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j, \quad D_j = (\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k. \quad (9)$$

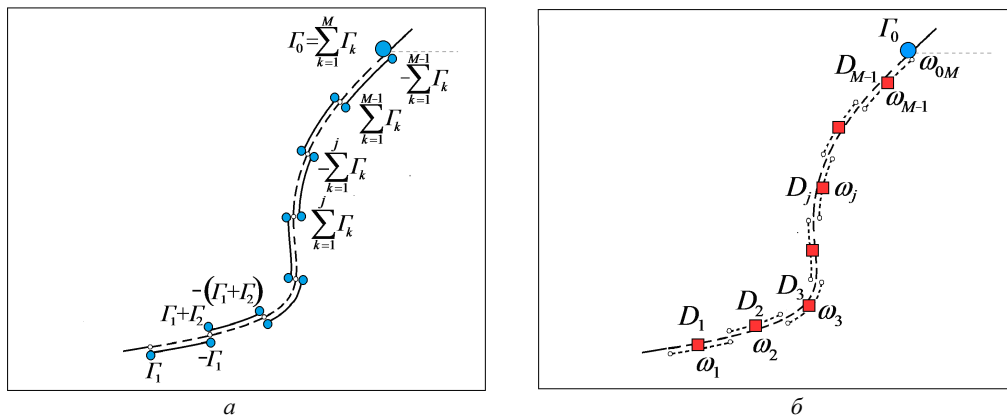


Рис. 2 – Линия разреза, выделяющая область однозначности для выражения (5), (6): а – для системы вихревых пар и суммарного вихря; б – для системы диполей и суммарного вихря.

Для аддитивного представления в виде суммы дискретных вихрей

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (10)$$

действительная часть имеет вид суммы многозначных функций с точками ветвления $(x_{0j}, y_{0j}), j = \overline{1, M}$

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}}, \quad (11)$$

мнимая часть имеет вид суммы однозначных функций с логарифмическими особенностями в точках $(x_{0j}, y_{0j}), j = \overline{1, M}$ (или логарифмической функцией от произведения с особенностями в тех же точках)

$$\psi(x, y) = \operatorname{Im} \Phi(z) = - \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi} \ln \left((x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 \right)^{0.5} = \ln \left(\prod_{j=1}^M \left((x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 \right)^{\frac{\Gamma_j}{4\pi}} \right). \quad (12)$$

Для той же функции, с аддитивным представлением в виде суммы диполей и логарифма

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{D_j}{2\pi i(z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (13)$$

действительная часть имеет вид суммы однозначных функций с особенностями (полусы) и одним многозначным арктангенсом, с точкой ветвления (x_{0M}, y_{0M}) :

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi} \left(\frac{(y_{0j+1} - y_{0j})(x - x_j) - (x_{0j+1} - x_{0j})(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right) + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_{0M}}{x - x_{0M}}; \quad (14)$$

$$\psi(x, y) = \text{Im } \Phi(z) = - \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \left(\frac{(x_{0j+1} - x_{0j})(x - x_j) + (y_{0j+1} - y_{0j})(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln \left((x - x_{0M})^2 + (y - y_{0M})^2 \right)^{0.5}. \quad (15)$$

Преобразование для определения однозначной ветви и разреза многозначной функции (заданной на произвольном контуре). Случай произвольного контура может быть сведен к системе связанных ветвистых контуров. Ветвистый контур отличается от предыдущего случая (простого контура) перенумерацией дискретных вихрей на контуре, в зависимости от индекса ветви.

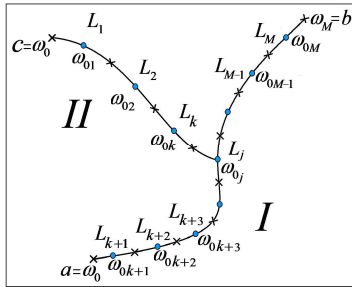


Рис. 3 – Разбиение ветвистого контура.

Ветви на ветвистом контуре, показанном на рис. 3, разделяются по уровням: I – первичный (основной) и II – вторичный. Изначально заданная нумерация вихрей на ветвистом контуре должна быть изменена в зависимости от индекса ветви, таким образом, чтоб вихрь в точке ветвления входил в число вихрей, как на основном, так и на вторичном контуре,

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}). \quad (16)$$

Перенумерация вихрей на ветвистом контуре (рис. 4) выполнена таким образом, чтоб узловой вихрь (в точке ветвления) входил в число вихрей на вторичном контуре. Число вихрей на каждой ветви определяется числами $M_j, j = 1, 2$. Причем, общее число вихрей

$$M = M_1 + M_2 - 1$$

(поскольку узловой вихрь считается дважды),

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^2). \quad (17)$$

В соответствии с рис. 5, преобразование от вихрей к вихревым парам на вторичной ветви ветвистого контура имеет вид:

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\Gamma_k^2}{2\pi i} \left(\ln(z - \omega_{0j}^2) - \ln(z - \omega_{0j+1}^2) \right) + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_2}^2). \quad (18)$$

Далее, на рис. 6 проиллюстрировано преобразование от вихревых пар к диполям на вторичной ветви ветвистого контура:

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i} \left(\frac{\ln(z - \omega_{0j+1}^2 + \omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) - \ln(z - \omega_{0j+1}^2)}{\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2} \right) + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_2}^2). \quad (19)$$

Или, иначе

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i (z - \omega_{0j}^2)} + \frac{\Gamma_0^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_2}^2). \quad (20)$$

Причем, в силу того, что

$$\omega_j^2 = 0.5(\omega_{0j+1}^2 + \omega_{0j}^2), \quad \omega_{0p}^1 = \omega_{0M_2}^2 \quad \text{и} \quad \Gamma_p^1 = \Gamma_0^2 = \sum_{j=1}^{M_2} \Gamma_j^2, \quad (21)$$

суммарный вихрь попадает в первое слагаемое правой части (22):

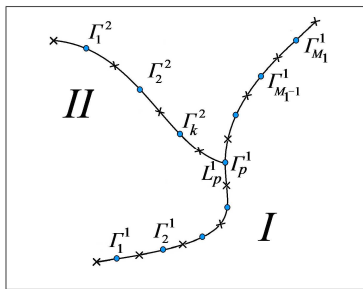


Рис. 4 – Перенумерация вихрей на ветвистом контуре.

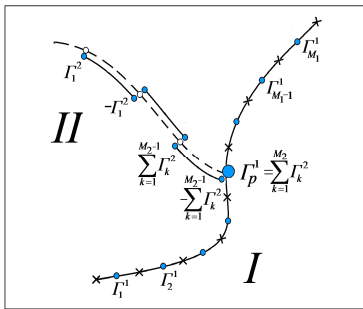


Рис. 5 – Преобразование от вихрей к вихревым парам на вторичной ветви контура.

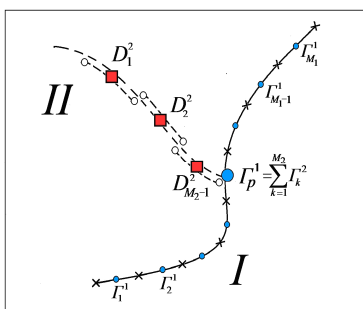


Рис. 6 – Преобразование от вихревых пар к диполям на вторичной ветви.

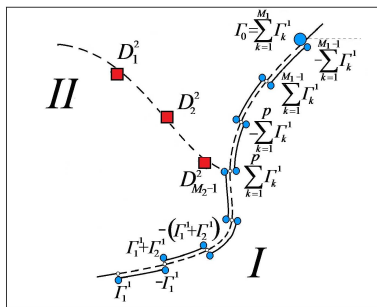


Рис. 7 – Преобразование от вихрей к вихревым парам на основной ветви.

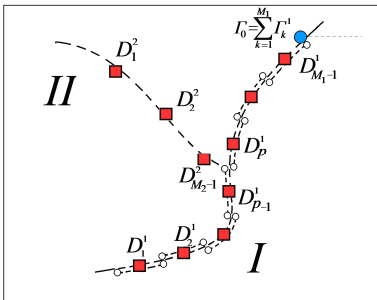


Рис. 8 – Преобразование от вихревых пар к диполям основной ветви.

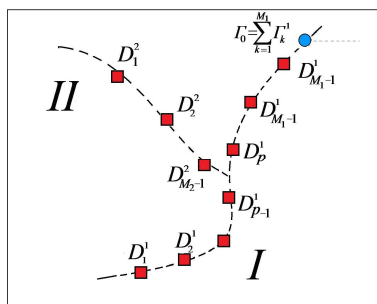


Рис. 9 – Распределение диполей и суммарного вихря.

вихря на ветвистом контуре (рис. 9) принимает вид:

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{D_j^1}{2\pi i(z-\omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z-\omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{D_j^2}{2\pi i(z-\omega_j^2)}, \quad (27)$$

где

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j = \Gamma_0^1 = \sum_{j=1}^{M_1} \Gamma_j^1, \quad D_j^p = (\omega_{0j+1}^p - \omega_{0j}^p) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^p, \quad p=1,2, \quad (28)$$

а общее число диполей будет равно $M_1 + M_2 - 2$.

Для аддитивного представления (27) в форме суммы диполей и логарифма

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{D_j^1}{2\pi i(z-\omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z-\omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{D_j^2}{2\pi i(z-\omega_j^2)} \quad (29)$$

действительная часть может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \text{Re } \Phi(z) = & \sum_{j=1}^{M_1-1} \sum_{k=1}^j \frac{\Gamma_k^1}{2\pi} \left(\frac{(y_{0j+1}^1 - y_{0j}^1)(x - x_j^1) - (x_{0j+1}^1 - x_{0j}^1)(y - y_j^1)}{(x - x_j^1)^2 + (y - y_j^1)^2} \right) + \\ & + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \text{arctg} \frac{y - y_{0M_1}^1}{x - x_{0M_1}^1} + \sum_{j=1}^{M_2-1} \sum_{k=1}^j \frac{\Gamma_k^2}{2\pi} \left(\frac{(y_{0j+1}^2 - y_{0j}^2)(x - x_j^2) - (x_{0j+1}^2 - x_{0j}^2)(y - y_j^2)}{(x - x_j^2)^2 + (y - y_j^2)^2} \right), \quad (30) \end{aligned}$$

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}. \quad (22)$$

Далее выполняются преобразования от вихрей к вихревым парам на основной ветви ветвистого контура (рис. 7):

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{j=1}^{M_1-1} \sum_{k=1}^{M_1} \frac{\Gamma_k^1}{2\pi i} (\ln(z - \omega_{0j}^1) - \ln(z - \omega_{0j+1}^1)) + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \\ & + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}. \quad (23) \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования от вихревых пар к диполям основной ветви ветвистого контура проиллюстрированы на рис. 8:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{(\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) \sum_{k=1}^{M_1} \Gamma_k^1}{2\pi i} \left(\frac{\ln(z - \omega_{0j+1}^1 + \omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) - \ln(z - \omega_{0j+1}^1)}{\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1} \right) + \\ & + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}, \quad (24) \end{aligned}$$

они приводят к выражению для $\Phi(z)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{(\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^1}{2\pi i(z - \omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \\ & + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}, \quad (25) \end{aligned}$$

где

$$\omega_j^1 = 0.5(\omega_{0j+1}^1 + \omega_{0j}^1), \quad \omega_{0p}^1 = \omega_{0M_2}^2 \quad \text{и} \quad \Gamma_0^1 = \sum_{j=1}^{M_1} \Gamma_j^1. \quad (26)$$

Окончательно, представление в форме суммы диполей и суммарного

а мнимая часть – в виде:

$$\psi(x, y) = \text{Im } \Phi(z) = - \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{\Gamma_k^1}{2\pi} \left(\frac{(x_{0j+1}^1 - x_{0j}^1)(x - x_j^1) + (y_{0j+1}^1 - y_{0j}^1)(y - y_j^1)}{(x - x_j^1)^2 + (y - y_j^1)^2} \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln \left((x - x_{0M_1}^1)^2 + (y - y_{0M_1}^1)^2 \right)^{0.5} - \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi} \left(\frac{(x_{0j+1}^2 - x_{0j}^2)(x - x_j^2) + (y_{0j+1}^2 - y_{0j}^2)(y - y_j^2)}{(x - x_j^2)^2 + (y - y_j^2)^2} \right). \quad (31)$$

Разделение ветвей контура на основную и вторичную условно. Оно может быть выполнено и любым иным способом. Произвол в выборе ветвей на контуре, выборе начала и направления обхода контуров влияют только на численные значения распределенных диполей и положение суммарного вихря (от которого выполняется разрез). Замкнутость контура также не влияет на алгоритм преобразования системы дискретных вихрей в систему диполей и суммарный вихрь, но выбор начала и конца контуров определяет положение линии разреза в области.

Результаты использования построенных преобразований. Для циркуляционного обтекания цилиндра известно [6] точное аналитическое решение, причём как для комплексного потенциала

$$\Phi(z) = \bar{V}_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \quad (32)$$

так и для комплексно сопряженной скорости

$$\bar{V}(z) = \frac{d\Phi(z)}{dz} = \bar{V}_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi z i}. \quad (33)$$

Из графического представления полей потенциала (32) и скорости (33) видно (рис. 10, а, б, в), что поле скорости непрерывно, а поле потенциала, из-за логарифмического слагаемого, имеет линию разрыва при ненулевой циркуляции Γ . Линия разрыва соединяет бесконечно удаленную точку и центр цилиндра.

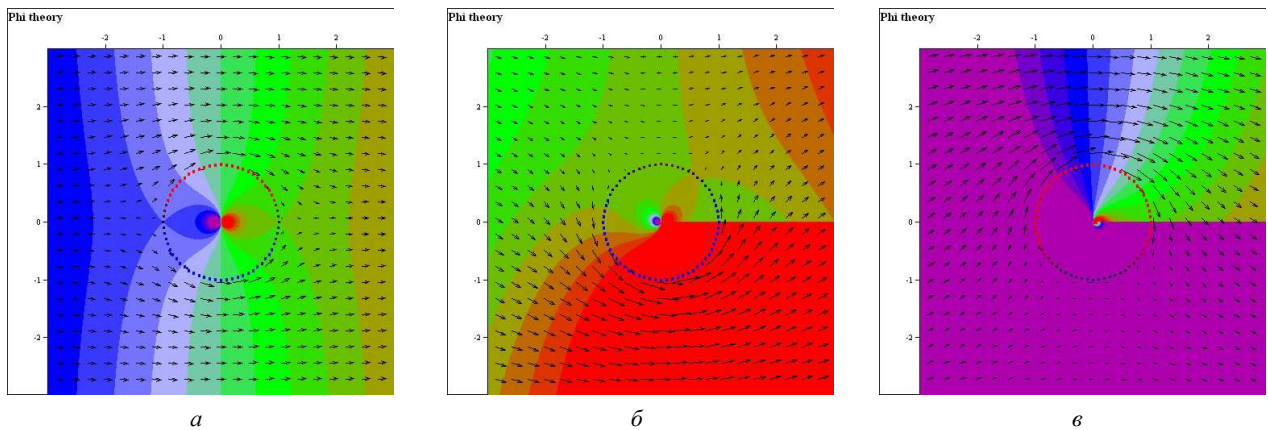


Рис. 10 – Изопотенциальные линии и поле скоростей для циркуляционного обтекания цилиндра по зависимостям (32), (33): а – $\Gamma = 0$; б – $\Gamma > 0$; в – $\Gamma < 0$.

Для описания циркуляционного обтекания цилиндра с помощью метода дискретных вихрей используются аддитивные представления для потенциала и скорости:

$$\Phi(z) = \bar{V}_\infty z + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_j); \quad (34)$$

$$\bar{V}(z) = \frac{d\Phi(z)}{dz} = \bar{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i(z - \omega_j)}, \quad (35)$$

на основании которых поле скоростей корректно определяется (с точностью, зависящей от количества вихрей). Однако, при вычислении потенциала по (34) видно (рис. 11, а, б, в), что в правой части цилиндра появляется зона «тени» – полоса (разрывов функции) с шириной, равной диаметру цилиндра. Видно, что выражение (34) не обеспечивает корректного вычисления значений потенциала во всей области (вне границ), при любых значениях интенсивностей Γ_j .

Примечательно, что вышеназванная особенность не позволяет однозначно вычислять и поле давлений для нестационарного отрывного обтекания произвольных контуров [10]. Проблема возникает именно с вычислением неоднозначной логарифмической функции под знаком интеграла в точном аналитическом интегральном представлении

$$\Phi(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega. \quad (36)$$

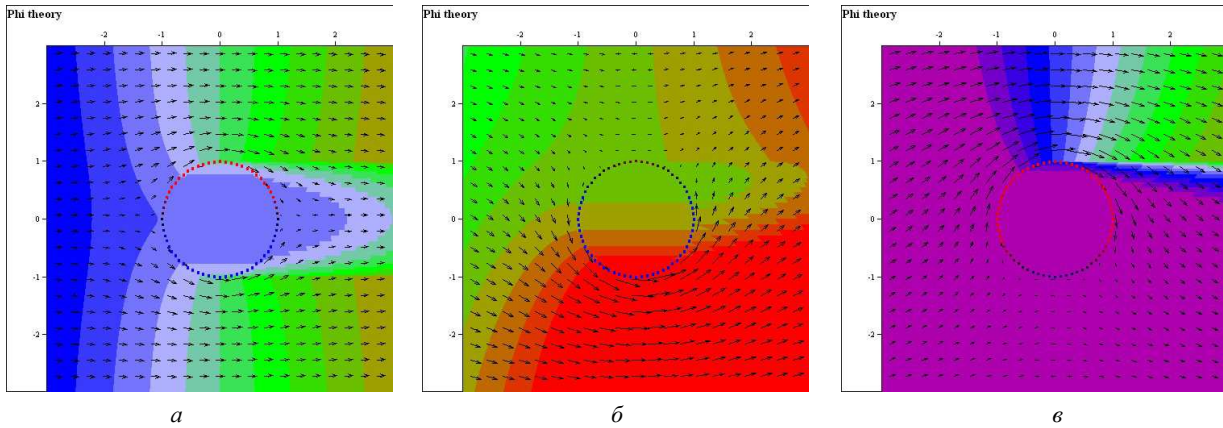


Рис. 11 – Циркуляционное обтекание цилиндра для вихревого представления (34), (35):

$$a - \sum_{j=1}^M \Gamma_j = 0; \quad б - \sum_{j=1}^M \Gamma_j > 0; \quad в - \sum_{j=1}^M \Gamma_j < 0.$$

Вышеозначенная проблема разрешается интегрированием по частям второго слагаемого в выражении (32). После интегрирования (36) по частям получаем аналог формулы (36), но не с логарифмическим ядром, а с ядром *типа Коши* под знаком интеграла:

$$\Phi(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\left(\int_a^\omega f(\xi) d\xi \right)}{z - \omega} d\omega + \frac{\int_a^b f(\omega) d\omega}{2\pi i} \text{Ln}(z - b) \tag{37}$$

или, иначе

$$\Phi(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\Gamma(\omega, a)}{z - \omega} d\omega + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \text{Ln}(z - b), \tag{38}$$

где

$$\Gamma(\omega, a) = F(\omega) - F(a) = \int_a^\omega f(\xi) d\xi, \tag{39}$$

$$\Gamma_0 = \Gamma(b, a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(\xi) d\xi. \tag{40}$$

Здесь логарифмическое слагаемое связано только с одной точкой b , от которой и проводится разрез до бесконечно удаленной точки.

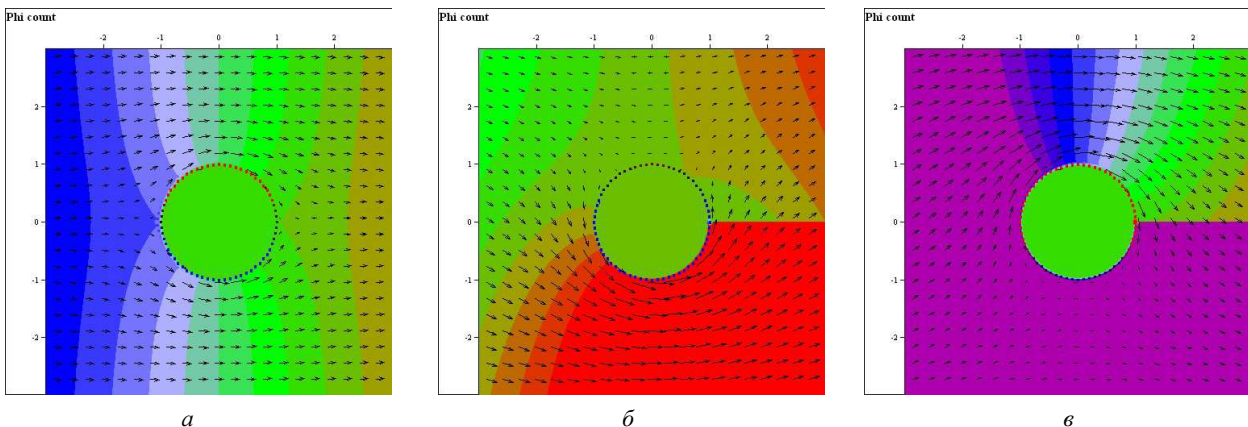


Рис. 12 – Циркуляционное обтекание цилиндра для дипольного представления (41) и вихревого представления (35):

$$a - \sum_{j=1}^M \Gamma_j = 0; \quad б - \sum_{j=1}^M \Gamma_j > 0; \quad в - \sum_{j=1}^M \Gamma_j < 0.$$

В силу выше изложенного, вместо (34), с учетом (37) и (13), целесообразно использовать дискретное представление

$$\Phi(z) = \bar{V}_\infty z + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{D_j}{2\pi i(z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \text{Ln}(z - \omega_{0M}), \quad (41)$$

где

$$\omega_j = 0.5(\omega_{0j+1} + \omega_{0j}), \quad \Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j, \quad D_j = (\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k. \quad (42)$$

Выражение (41) позволяет вычислять значения действительной части комплексного потенциала с единственной линией разрыва для любых замкнутых и разомкнутых контуров. Выбор начала и конца контура определяется только положением начальной точки a интегрирования по контуру L_{ab} . Линия разрыва соединяет точку конца контура с бесконечно удаленной точкой.

Из рис. 12 видно, что изолинии потенциала внутри области течения (вне цилиндра) совпадают с изолиниями на рис. 10.

Выводы. В работе представлен метод и алгоритм преобразования системы дискретных вихрей в систему дискретных особенностей и суммарный вихрь. Полученные выражения позволяют вычислять непрерывные кинематические и динамические характеристики (изначально определяемые через неоднозначные функции, в терминах МДВ) в области течения вплоть до обтекаемых границ области, являющихся естественными линиями разрыва непрерывных характеристик.

Список литературы: 1. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Нисит М. И., Федоров Р. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. – М.: Наука, 1988. – 232 с. 2. Белоцерковский С. М., Нисит М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М.: Наука, 1978. – 351 с. 3. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, 2000. – 90 с. 4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с. 5. Довгий С. О., Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений. Теория та застосування. – Київ: Наукова думка, 2004. – 510 с. 6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие для ун-тов. – М.: Наука, 1987. – 688 с. 7. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с. 8. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Из-во физ.-мат. лит-ры, 1962. – 599 с. 9. Черний Д. И. Аппроксимация решения начально-краевой задачи с подвижными границами // Обчислювальна та прикладна математика. – Київ: Київський університет. – 1997. – Вип. 2 (82). – С. 112 – 123. 10. Черний Д. И. О проблемах определения локальных и интегральных характеристик при решении начально-краевых задач с подвижными границами // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007, Харьков-Херсон – 2007. – С. 315 – 318. 11. Черний Д. И. Метод и алгоритм вычисления поля давления при использовании МДО // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007, Харьков-Херсон – 2007. – С. 319 – 322. 12. Фиктэнгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 606 с.

References: 1. Belotserkovskiy, S. M., Kotovskiy, V. N., Nisht, M. I. and Fedorov, R. M. *Matematicheskoe modelirovanie ploskoparallelnogo otrivnogo obtekaniya tel* [Mathematical modeling of plane-parallel separated flow around bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 232 p. 2. Belotserkovskiy, S. M. and Nisht, M. I. *Otrivnoye i bezotrivnoye obtekaniye tonkikh kryl'ev ideal'noy zhidkost'yu* [Separated and non-separated ideal fluid flow around thin wings]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 351 p. 3. Gandel', Y. V. *Vvedeniye v metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov* [Introduction to the methods of calculation of singular and hypersingular integrals]. Kharkov, Kharkov natsional'nyy universitet im. V. N. Karazina Publ., 2000. 90 p. 4. Gakhov, F. D. *Krayevyye zadachi* [Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. 5. Dovgiy, S. O. and Lifanov, I. K. *Metod syngulyarnykh integral'nykh rinvnyan'. Teoriya ta zastosuvannya* [Method of singular integral equations. Theory and applications]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 2004. 510 p. 6. Lavrent'ev, M. A. and Shabat, B. V. *Metody teorii funktsiyi kompleksnogo peremennogo: ucheb. posobiye dlya un-tov* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 688 p. 7. Lifanov, I. K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniiy i chislennyiy eksperiment* [Method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow, Janus LLP Publ., 1995. 520 p. 8. Muskhelishvili, N. I. *Singulyarnyye integral'nyye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Izd-vo fiz.-mat. lit-ry Publ., 1962. 599 p. 9. Cherniy, D. I. *Approksimatsiya resheniya nachal'no-kreyevoy zadachi s podvizhnymi granitsami* [Approximation of Solution of Initial-Boundary Problem with Moving Boundary]. *Obchyslyuval'na ta prykladna matematyka* [Journal of Computational and Applied Mathematics]. 1997, no. 2 (82), pp. 112–123. 10. Cherniy, D. I. *O problemakh opredeleniya lokal'nykh i integral'nykh kharakteristik pri reshenii nachal'no-krayevykh zadach s podvizhnymi granitsami* [On the problems of the definition of local and integral characteristics for solving initial value problems with moving boundaries]. *Trudy XIII Mezhdunarodnogo simpoziuma MDOZMF-2007* [Proceedings of the XIII International Symposium MDOZMF 2007]. Kharkov – Kherson Publ., 2007, pp. 315–318. 11. Cherniy, D. I. *Metod i algoritm vychisleniya polya davleniya pri ispol'zovanii MDO* [Method and algorithm for calculating pressure field using MDO]. *Trudy XIII Mezhdunarodnogo simpoziuma MDOZMF-2007* [Proceedings of the XIII International Symposium MDOZMF-2007]. Kharkov – Kherson Publ., 2007, pp. 319–322. 12. Fiktengol'ts, G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya T. 1* [Differential and integral calculus. Vol. 1]. Moscow, GIFML Publ., 1962. 606 p.

Поступила (received) 07.04.2016

Відомості про автора / Сведения об авторе / Information about author

Черний Дмитро Іванович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет кібернетики, кафедра обчислювальної математики, м. Київ; тел.: (095) 830-72-87; e-mail: D_Cherniy@ukr.net.

Черний Дмитрій Іванович – кандидат физико-математических наук, доцент, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, кафедра вычислительной математики, г. Киев; тел.: (095) 830-72-87; e-mail: D_Cherniy@ukr.net.

Cherniy Dmytro Ivanovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Computational Mathematics, Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, tel.: (095) 830-72-87; e-mail: D_Cherniy@ukr.net.