УДК 629.78.517

Ю.Т. Костенко, Л.М. Любчик, М.Н. Малько

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ДЕСТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО ВЛИЯНИЯ ОСТАТОЧНЫХ МОД.

Проблема синтеза регуляторов для упругих систем с распределенными параметрами возникает при решении различных задач управления космическими конструкциями [1,2], летательными аппаратами и транспортными средствами, электроприводами и технологическим оборудованием [3]. Большинство известных подходов к решению задач синтеза основано на использовании математической модели упругой системы в виде бесконечного набора обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменных состояния системы временных мод. Построение моделей с учетом заданного пространственного распределения датчиков и исполнительных приводов осуществляется известными методами с использованием, например, конечных интегральных преобразований [2]. На практике обычно используются усеченные модели, учитывающие конечное число сохраняемых мод, выбор которых диктуется требованиями к точности решения. Естественные требования упрощения алгоритмов управления и технической реализации регуляторов приводи к необходимости использования моделей пониженного порядка, описывающих динамику сравнительно небольшого числа управляемых мод, при этом влиянием остальных (высших) мод обычно пренебрегают. Подобный подход, вполне оправданный при решении задач анализа и оптимального программного управления распределенными системами, когда пренебрежение остаточными модами приводит лишь к некоторому снижению точности получаемого решения без качественного изменения его характера, становится неприемлемым при решении задач синтеза замкнутых распределенных систем. В последнем случае управляющее воздействия, формируемые на основе статических или динамических преобразованиях реальных измерений состояния распределенной системы, фактически оказываются зависящими не только от управляемых, но и от остаточных мод, входящих в вектор измеряемых переменных. Вследствие этого в составе замкнутого контура управления распределенной системой обязательно присутствует динамическая подсистема неучитываемых мод, влияние которой на свойства замкнутой системы может быть весьма существенным. В ряде работ показано, что влияние "избыточных" по отношению к принятой модели объекта переменных может приводить к срыву устойчивости замкнутой системы. Указанное явление носит название эффекта спилловера (spillover) [4,5]. Наиболее ярко эффект спилловера проявляется при попытке достичь высокого быстродействия замкнутой подсистемы управляемых мод. При использовании методики модального синтеза указанное требование приводит к необходимости повышения коэффициентов усиления регуляторов и наблюдателей пониженного порядка, что, в свою очередь, усиление влияния "избыточных" переменных.

Таким образом, учет и компенсация влияния остаточных мод является необходимым этапом синтеза регуляторов пониженного порядка для распределенных систем. В настоящей работе предлагается методика анализа влияния остаточных мод на устойчивость замкнутой распределенной системы с динамическим наблюдателем в контуре управления с целью построения областей допустимых значений настраиваемых переменных.

Рассмотрим усеченную модель распределенной управляемой упругой системы, содержащую n_1 управляемых и n_2 остаточных мод в виде совокупности двух динамических подсистем

$$
\begin{aligned}
S_1: \quad & \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t), \\
S_2: \quad & \dot{x}_1(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u(t), \qquad (1)\\
& y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t),
\end{aligned}
$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$ – вектора состояния соответствующих подсистем, компонентами которых являются амплитуды и скорости изменения временных мод, $\dim x_1 = 2n_1$, $\dim x_2 = 2n_2$, $u(t)$ – вектор управляющих воздействий, $\dim u = m$, $y(t)$ – вектор измерений, $\dim u = p$.

Матрицы модели (1) задаются известными выражениями [5], например,

$$
\begin{aligned}
& A_1 = \text{block diag}\,(\Omega_1, \ldots, \Omega_{n_1}), \quad A_2 = \text{block diag}\,(\Omega_{n_1+1}, \ldots, \Omega_{n_1+n_2}), \\
& \Omega_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_k{}^2 & -2\xi_k \omega_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n_1 + n_2, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

где ω_k – частоты собственных колебаний, ξ_k – коэффициенты демпфирования.

Пусть система (1) замкнута линейным модальным регулятором с динамическим наблюдателем управляемых мод, формирующим их оценку $\hat{x}_1(t)$

$$
\begin{aligned}
& u(t) = -K\hat{x}_1(t), \\
& \dot{\hat{x}}_1(t) = A_1\hat{x}_1(t) + B_1 u(t) + L\big(y(t) - C_1\hat{x}_1(t)\big), \qquad (3)
\end{aligned}
$$

где K, L – матричные коэффициенты усиления, выбираемые на этапе синтеза. В рамках традиционного подхода указанные матрицы выбираются на основе известных методов модального синтеза и принципа разделимости в предположении отсутствия влияния остаточных мод (т.е. $C_2 = 0$).

С целью анализа влияния остаточных мод выпишем уравнения замкнутой системы (1), (3). Выводя вектор ошибки оценивания $x_3(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$, получим

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 K & 0 & B_1 K \\ -B_2 K & A_2 & B_2 K \\ 0 & -LC_2 & A_1 - LC_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}. \qquad (4)
$$

Представим модель замкнутой системы (4) в декомпозированной форме

$$
\dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} x_i(t) + \sum_{j \neq i} A_{ij} x_j(t), \quad i = \overline{1,3}, \qquad (5)
$$

где матрицы динамики подсистем A_{ii} и матрицы взаимодействия A_{ij} определяются из (4) очевидным образом. Так, в частности, $A_{11} = A_1 - B_1 K$, $A_{22} = A_2$, $A_{33} = A_1 - LC_1$.

Введем в рассмотрение векторную функцию Ляпунова в форме Шилака [6]:

$$v^{\mathrm{T}}(t) = \left(v_1(t), v_2(t), v_3(t)\right), \quad v_i(t) = \left(x_i^{\mathrm{T}}(t) V_i x_i(t)\right)^{1/2}, \quad i = \overline{1,3}, \tag{6}$$

где Т – знак транспонирования, V_i – положительно определенные симметрические матрицы, определяемые как решения матричных уравнений Ляпунова

$$A_{ii}^{\mathrm{T}} V_i + V_i A_{ii} = -W_i, \quad W_i > 0, \quad i = \overline{1,3}. \tag{7}$$

Заметим, что в (6) используется положительное значение квадратного корня из квадратичной формы.

Введем линейную векторную модель сравнения, покомпонентно мажорирующую $v_i(t) \le \bar{v}_i(t),\, i = \overline{1,3}$ вектор-функцию Ляпунова (6) [6]:

$$\begin{aligned} &\dot{\bar{v}}(t) = \Lambda \bar{v}(t), \quad \Lambda = \left\|\lambda_{ij}\right\|, \\ &\lambda_{ii} = -\frac{\lambda_m(W_i)}{2\lambda_M(V_i)}, \quad \lambda_{ij} = \frac{\lambda_M(V_i)}{\lambda_m^{1/2}(V_i)\lambda_m^{1/2}(V_i)} \sigma_M(A_{ij}), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\lambda_m(?)$, $\lambda_M(?)$ – соответственно минимальное и максимальное собственные числа симметрической матрицы, $\sigma_M(?)$ – максимальное сингулярное число, т.е. $\sigma_M(A) = \lambda_M^{1/2}\left(A^{\mathrm{T}} A\right)$.

Зафиксируем некоторые значения K и L, при которых матрицы $A_{11}(K)$ и $A_{33}(L)$ будут устойчивы.

Выберем матрицы W_i таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\frac{1}{2} \lambda_M^{-1/2}(V_i) \lambda_m(W_i) = \eta_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{9}$$

где $\eta_i = \eta\left(A_{ij}\right)$ – степени устойчивости подсистем A_{ij}, т.е. $\eta_i = -\operatorname{Re} \lambda_M\left(A_{ij}\right)$. Тогда матрица сравнения Λ приобретает вид:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\eta_1 & 0 & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & -\eta_2 & \lambda_{23} \\ 0 & \lambda_{32} & -\eta_3 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Условия устойчивости системы сравнения (8) и, следовательно, исходной системы (4), определяются условиями гурвицевости агрегатной матрицы Λ. Как следует из (10) матрица Λ обладает отрицательными диагональными и положительными внедиагональными элементами, т.е. принадлежит классу так называемых метцлеровых (М-матриц). Согласно теореме Севостьянова-Котелянского [6] агрегатная матрица сравнения Λ будет устойчива, если выполняются условия

$$(-1)^i \Delta_i(\Lambda) > 0, \quad i = \overline{1,3}, \tag{11}$$

где $\Delta_i(\Lambda)$ – последовательность ее главных диагональных миноров.

Тогда для матрицы сравнения (10) условия устойчивости имеют вид:

$$\eta_1 > 0, \quad \eta_1\eta_2 > 0, \eta_1(\eta_2\eta_3 - \lambda_{32}\lambda_{23}) - \lambda_{13}\lambda_{21}\lambda_{32} > 0. \tag{12}$$

Первые два неравенства в (12) заведомо выполняются, а последнее неравенство, фактически, определяет область устойчивости замкнутой системы (4) в пространстве варьируемых параметров K и L. Заметим, что в общем случае эта область может не совпадать с областью допустимых значений коэффициентов усиления, обеспечивающих устойчивость матриц $A_{11}(K)$ и $A_{33}(L)$, что является проявлением упомянутого выше эффекта спилловера.

Предложенный подход позволяет получить условия устойчивости замкнутой распределенной системы с учетом влияния остаточных мод в явном виде. Проиллюстрируем это на простом примере. Пусть матричные коэффициенты усиления параметризованы следующим образом:

$$K = kB_1^{\mathrm{T}}, \quad L = lC_1^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

где k и l – скалярные настроечные параметры.

Выполним замену базиса в пространстве состояний исходной системы (1) таким образом, чтобы в новом базисе

$$\widetilde{\Omega}_k = \begin{pmatrix} -\eta_k & -\psi_k \\ -\psi_k & -\eta_k \end{pmatrix}, \quad \eta_k = -\xi_k\omega_k, \quad \psi_k = \omega_k\sqrt{1-\xi_k}, \tag{14}$$

при этом $\widetilde{A}_{11} = \widetilde{A}_1 - k\widetilde{B}_1\widetilde{B}_1^{\mathrm{T}}$, $\widetilde{A}_{33} = \widetilde{A}_1 - l\widetilde{C}_1\widetilde{C}_1^{\mathrm{T}}$.

Тогда очевидно, что матрицы $V_i = I$, $W_i = -\left(\widetilde{A}_{ii}^{\mathrm{T}} + \widetilde{A}_{ii}\right)$ заведомо удовлетворяют уравнениям Ляпунова (7) в новом базисе и $\lambda_m(W_i) = 2\eta_i = -2\,\mathrm{Re}\,\lambda_M\left(\widetilde{A}_{ii}\right)$. При этом $\lambda_{13} = k\beta_1$, $\lambda_{21} = \lambda_{23} = k\beta_2$, $\lambda_{32} = l\sigma$, где $\beta_i = \lambda_M^{1/2}\left(\widetilde{B}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{B}_i\right)$, $\sigma = \lambda_M^{1/2}\left(\widetilde{C}_2^{\mathrm{T}}\widetilde{C}_2\right)$. Пользуясь методом корневых годографов нетрудно показать, что степени устойчивости $\eta_1(k)$ и $\eta_3(l)$ являются непрерывными монотонно убывающими функциями настроечных параметров, причем

$$\begin{aligned} &\eta_1(k=0) = \eta_1^0, \quad \eta_1(k = k_{\text{гр}}) = 0, \\ &\eta_3(l=0) = \eta_3^0 = \eta_1^0, \quad \eta_3(l = l_{\text{гр}}) = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где $k_{гр}$, $l_{гр}$ – граничные значения настроечных параметров, соответствующие выходу изолированных подсистем на границу устойчивости, $\eta_1^0 = \eta_3^0 = \eta(A_1)$, $\eta_2^0 = \eta(A_2)$. При этом третье неравенство в условиях (12) приобретает вид:

$$\eta_1(k)\eta_2^0\eta_3(l) - \eta_1(k)kl\beta_2\sigma - k^2 l\beta_1\beta_2\sigma > 0. \qquad (16)$$

Очевидно, что при $k = k_{гр}$ либо $l = l_{гр}$ неравенство (15) не выполняются. Таким образом, замкнутая система (4) выходит на границу устойчивости при значениях настроечных параметров, меньших их критических значений, определяемых свойствами изолированных подсистем, что является следствием влияния остаточных мод. Задаваясь какой-либо аппроксимацией зависимостей $\eta_1(k)$, $\eta_3(l)$, с помощью (15), нетрудно получить описание областей допустимых значений настроечных параметров.

Основываясь на изложенном подходе можно предложить следующую процедуру синтеза регуляторов пониженного порядка для распределенной системы с учетом влияния остаточных мод.

1. Задаемся желаемыми значениями степеней устойчивости изолированной подсистемы управляемых мод η_1^* и динамического наблюдателя η_3^*.

2. Находим требуемые значения матричных коэффициентов усиления, обеспечивающих заданную степень устойчивости. В соответствии с методикой [7] можно принять $K^* = B_1^{\mathrm{T}} P^{-1}$, где матрица P есть решение уравнения Ляпунова. Аналогично находится и матрица L^* по заданной степени устойчивости η_3^*.

$$P\left(A_1 + \eta_1^* I_n\right) + \left(A_1 + \eta_1^* I_n\right)P = B_1 B_1^{\mathrm{T}}. \qquad (17)$$

3. Находим решения $\left\{V_i^*, W_i^*\right\}$ уравнений Ляпунова (7), удовлетворяющие условию (9), что обеспечивает получение системы сравнения с заданной степенью устойчивости.

4. Находим матрицу сравнения (10) по формулам (8) и проверяем выполнение условия устойчивости системы сравнения (12). Если условие выполняется, процедуру синтеза можно считать оконченной, в противном случае необходимо скорректировать (уменьшить) численные значения желаемых степеней устойчивости и повторить процедуру.

Таким образом, предложенный подход позволяет согласовать требования к быстродействию замкнутой распределенной системы с возможными реализациями этих требований, ограниченными дестабилизирующим действием остаточных мод. Если же достигаемые показатели оказываются неудовлетворительными, то необходимо использование более сложных структур динамических регуляторов, обеспечивающих компенсацию влияния "избыточных" переменных.

ЛИТЕРАТУРА. 1. Згуровский М.З., Бидюк П.И. Анализ и управление большими космическими конструкциями. – К.: Наукова Думка, 1997. – 451с. 2. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. – М.: Машиностроение, 1986. – 216с. 3. Параметрическая оптимизация многоканальных систем автоматического управления / Е.Е Александров и др. –

Х.: Основа, 1995. – 272с. 4. Balas M.J. Feedback control of flexible systems. // IEEE Trans. Autom. Control. – 1978. – AC-23, N4. – p.673-679. 5. Bolas M.J. Active control of flexible systems. // J. Optim. Theory and Appl. – 1978. –25, N3. – p.415-436. 6. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. – М.: Наука, 1985. – 352с. 7. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизации. – М.: Наука, 1977. – 247с.

Ю.Т. Костенко, Л.М. Любчик, М.М. Малько

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРІВ ЗНИЖЕНОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ ДЕСТАБІЛІЗУЮЧОГО ВПЛИВУ ЗАЛИШКОВИХ МОД.

Запропоновано методику синтезу скінченномірних регуляторів для розподілення систем в умовах параметричних збурень, обумовлених впливом залишкових мод. За допомогою векторних функцій Ляпунова отримані умови стійкості замкненої системи з спостерігачем у контурі управління.

Yu.T. Kostenko, L.M. Lyubchik, M.N. Malko

REDUCED-ORDER CONTROLLER DESIGN FOR DISTRIBUTED SYSTEMS CONSIDERING THE RESIDUAL MODELS DESTABILIZATION EFFECT.

The method of finite dimension controllers design for distributed systems is proposed tacking into account the parametric disturbances caused by the residual modes. By means of the Lyapunov vector functions method the stability conditions is obtained for closed-loop system with observer in the feedback.