

УДК 621.372.852:612.014

Е.Б. Ахиезер, А.Е. Пиротти, Е.Л. Пиротти

Национальный технический университет "ХПИ", Харьков

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С НЕКОТОРЫМИ БИОЛОГИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ

*Работа посвящена моделированию внутренних электромагнитных полей в различных элементах биологических объектов. Благодаря решению дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами получено распределение этих полей в объектах цилиндрической и сферической формы в зависимости от радиуса и их электрофизических характеристик на разных частотах.*

**Ключевые слова:** математическая модель, биологические структуры, дифференциальные уравнения, цилиндрические и сферические функции, электрофизические свойства.

### Введение

**Постановка задачи.** В последние годы все более актуальной проблемой становится исследование воздействия электромагнитных излучений (ЭМИ) на растения, животных и человека. При этом следует иметь в виду, что данные воздействия могут быть как стимулирующими, так и угнетающими. Сегодня сложно найти участок на поверхности Земли, который бы не был буквально нашпигован различными устройствами, излучающими электромагнитную энергию в самом широком диапазоне частот и с самыми различными характеристиками.

Биологические структуры, как растений, так и животных, не могут не реагировать на это внешнее воздействие физических полей, поскольку большинство процессов, происходящих в них, в той или иной степени сопровождаются своими собственными электромагнитными взаимодействиями. Следовательно, внешние электромагнитные поля различных интенсивностей, частот, поляризации, накладываясь на собственные слабые электромагнитные поля биологической структуры, либо усиливают, либо ослабляют результат их влияния на живой организм. Живая клетка не имеет никаких защитных механизмов от искусственно созданного ЭМИ, что является одним из главных факторов, могущих вызвать либо сокращение жизни, ухудшение ее качества, снижение экономической эффективности современного сельскохозяйственного производства, либо наоборот оказать на указанные параметры благотворное стимулирующее влияние.

Необходимо отметить, что низкоинтенсивные (так называемые информационные) электромагнитные поля при правильном выборе их биотропных параметров могут оказывать лечебное терапевтическое воздействие на организм. Развитие научно-технического прогресса привело к созданию целой серии медицинских приборов и систем, основанных

на применении принципиально новых технологий. Особое место здесь занимают приборы, воздействующие на организм человека с помощью сверхвысокочастотных (СВЧ) электромагнитных полей.

Из сказанного выше вытекает актуальность рассмотрения задачи, посвященной исследованию воздействия низкоэнергетических электромагнитных полей СВЧ диапазона на различные биологические структуры. Вместе с тем, понимание и описание процессов, происходящих внутри живого организма под воздействием названных полей невозможно без знания того, как они распределяются внутри различных биологических структур в зависимости от их строения, электрофизических характеристик, частотного диапазона рассматриваемых полей, типа модуляции и т.п.

Таким образом, целью данной работы является определение внутренних электромагнитных полей внутри некоторых органов человека или животных.

### Основной материал

Поскольку диапазон объектов, интересующих исследователей, достаточно широк, конкретными задачами является построение математической модели для описания зависимости распределения электромагнитных полей различных частотных диапазонов внутри различных участков биологических объектов цилиндрической и сферической формы с переменными электрофизическими характеристиками.

Для получения исходных выражений, позволяющих решить поставленную задачу, вначале рассмотрено рассеяние плоской электромагнитной волны на цилиндрическом биологическом объекте, имеющем слоистую структуру с переменной диэлектрической постоянной  $\epsilon(r)$ , являющейся функцией координат (рука, нога и т.п.). В частности, рассмотрены биологические объекты, у которых  $\epsilon(r)$  меняется только по радиусу, так как на практике

другие случаи неоднородности встречаются гораздо реже. Считается, что длина цилиндра значительно больше его диаметра. Это позволяет не принимать в расчет краевые эффекты на его торцах. Решение показано для E-поляризации, когда вектор электрической составляющей падающего поля параллелен оси цилиндра, а волновой вектор нормален ей. Внешнее по отношению к рассеивателю пространство предполагается однородным. Оно характеризуется постоянными электромагнитными проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$ . Если окружающая среда воздух, то  $\epsilon_1 \approx \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$  Ф/м. Поскольку рассматриваются биологические объекты, то везде в дальнейшем  $\mu = \mu_1 \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гц/м.

Далее будем считать, что в общем случае модулированных каким-то способом падающих электромагнитных полей применяемые обозначения имеют следующий смысл:  $\vec{E}_0(t)$ ,  $\vec{H}_0(t)$  – их амплитуды;  $\omega(t)$  – их круговые частоты;  $\vec{k}$  – волновой вектор;  $\vec{r}$  – радиус-вектор рассматриваемой точки;  $\vec{E}_0(t)$  и  $\vec{H}_0(t)$  связаны между собой посредством сопротивления окружающей тело среды.

Произвольный случай поляризации падающей волны может быть получен с помощью суперпозиции E- и H-поляризаций.

В случае E-поляризации, поля падающей, рассеянной и прошедшей внутрь цилиндра волн удобно разложить по цилиндрическим функциям и применить к ним граничные условия на поверхности биологического объекта цилиндрической формы [1, 2]. В результате получены дифференциальные уравнения второго порядка для электрической и магнитной составляющих внутреннего поля:

$$\frac{d^2 E_{zn}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d E_{zn}}{dr} + \left( k(r)^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) E_{zn} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d^2 H_{zn}}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} - \frac{d\epsilon(r)}{dr} \frac{1}{\epsilon(r)} \right) \frac{d H_{zn}}{dr} + \left( k(r)^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) H_{zn} = 0, \quad (2)$$

где  $k(r) = \omega \sqrt{\epsilon(r)\mu}$ .

Для получения соответствующего результата в случае H-поляризации необходимо везде в полученных формулах E поменять на H, H поменять на -E,  $\epsilon(r)$  поменять на  $\mu$ , а  $\mu$  поменять на  $\epsilon(r)$ .

Решение дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (1), (2) производится численным методом. Поскольку  $\epsilon(r)$  меняется в широких пределах, представим эту

функцию в виде ряда Фурье. Продольные составляющие поля в области  $0 \leq r \leq R$ , где R – радиус цилиндра, равны:

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n E_{zn};$$

$$H_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n H_{zn}.$$

Здесь  $a_n$  и  $b_n$  – коэффициенты прохождения внутрь биологического объекта для электрической и магнитной составляющих поля, соответственно.

Решение дифференциальных уравнений (1) и (2) с учетом граничных условий на поверхности объекта дает следующие значения для коэффициентов прохождения:

$$a_n = i^n E_0 k_1 \left[ J_n(k_1 R) H_n^{(2)'}(k_1 R) - J_n'(k_1 R) H_n^{(2)}(k_1 R) \right] / \left[ k_1 E_{zn} H_n^{(2)'}(k_1 R) - k E_{zn}' H_n^{(2)}(k_1 R) \right]; \quad (3)$$

$$b_n = 0,$$

где  $E_0$  – амплитуда электрической составляющей падающего поля;  $J_n(*)$  – функция Бесселя 1-го рода;  $H_n^{(2)}(*)$  – функция Ханкеля 2-го рода;  $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ ;  $E_{zn}$  является решением дифференциального уравнения (1).

Из уравнений Максвелла окончательно получаем составляющие внутреннего поля:

$$E_z = \sum_n a_n J_n(kr);$$

$$H_\rho = -\sum_n \frac{n a_n J_n(kr)}{\omega \mu r}; \quad (4)$$

$$H_\phi = -\sum_n \frac{i k a_n J_n'(kr)}{\omega \mu}.$$

Однако, для выяснения энергетических характеристик прошедшего внутрь биологического объекта поля, а также для определения основных электромагнитных характеристик взаимодействия поля с объектом нет необходимости брать большое число гармоник в выражениях (4). Достаточно взять нулевую гармонику. Положив  $n = 0$ , получаем формулы, пригодные для практических расчетов внутренних полей в биообъектах цилиндрической формы:

$$\begin{cases} E_z = a_0 J_0(kr); \\ H_\phi = i \frac{a_0 k^2 J_1(kr)}{\omega \mu}. \end{cases}$$

Итак, для определения полей внутри биологического рассеивателя, имеющего цилиндрическую форму, с неоднородностью диэлектрической проницае-

мости по  $r$ , т.  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ , необходимо для заданной функции  $\varepsilon(r)$  численно проинтегрировать уравнения (1), (2), а полученные значения  $E_{zn}$  и  $E'_{zn}$  подставить в (3).

В случае Н-поляризации производятся указанные выше замены.

Выше было рассмотрено рассеяние электромагнитных волн на неоднородных биологических объектах, имеющих цилиндрическую или близкую к ней форму. Вторая большая группа биообъектов может быть рассмотрена как неоднородная сфера (голова, глаз и т.п.). Поэтому выясним, как зависит внутреннее поле в таких объектах от их размеров и частоты падающей плоской волны. Следует при этом иметь в виду, что данная задача является значительно более сложной, по сравнению с цилиндрическими объектами.

Для решения задачи необходимо разложить падающее, отраженное и внутреннее электромагнитное поле по векторным сферическим волновым функциям  $\vec{M}_n$  и  $\vec{N}_n$  [1]. Решение будет получено с использованием сферической системы координат  $(r, \varphi, \theta)$ . Используя граничные условия на поверхности сферы, получаем дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, которые позволяют вычислить электрическую и магнитную составляющие внутреннего поля в неоднородной сфере:

$$\varepsilon(r) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\varepsilon(r)} \frac{dh_c}{dr} \right) + \left( k(r)^2 - \frac{n^2(n+1)^2}{r^2} \right) h_c = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d^2 e_c}{dr^2} + \left( k(r)^2 - \frac{n^2(n+1)^2}{r^2} \right) e_c = 0. \quad (6)$$

Поскольку в данном случае, так же как и выше, диэлектрическая проницаемость является функцией радиуса, решение уравнений проводится численными методами, что позволяет определить составляющие внутреннего поля в неоднородной биологической сфере.

Учитывая значительную сложность полученных соотношений, рассмотрим выражения, которые описывают только первую гармонику внутреннего поля. Компоненты первой гармоники имеют следующий вид:

$$E_r = \frac{e_{11}}{2r} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \sin \theta \cos \varphi;$$

$$E_\varphi = -\frac{e_{g1}}{2r} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta \cos \varphi;$$

$$E_\theta = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (e_{g1} \cos \theta \cos \varphi - e_{c1} \sin \varphi);$$

$$H_r = \frac{h_{11}}{2r} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \sin \theta \sin \varphi;$$

$$H_\varphi = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (h_{g1} \cos \varphi - h_{c1} \cos \theta \sin \varphi);$$

$$H_\theta = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (h_{g1} \cos \theta \sin \varphi + h_{c1} \cos \varphi), \quad (7)$$

где  $e_{11}$ ,  $e_{g1}$ ,  $e_{c1}$ ,  $h_{11}$ ,  $h_{g1}$ ,  $h_{c1}$  – некоторые функции, вычисляемые на основе решения уравнений (5), (6) и векторных функций  $\vec{M}_n$  и  $\vec{N}_n$ .

На основе полученных выражений были выполнены численные расчеты. Электрофизические характеристики различных тканей (действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости) взяты из таблиц, приведенных в [3].

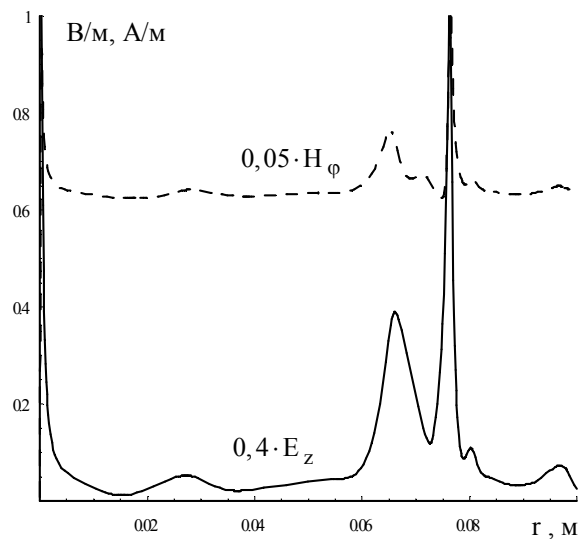


Рис. 1. Структура электромагнитного поля в сечении туловища человека на уровне двенадцатого позвонка в сторону спины

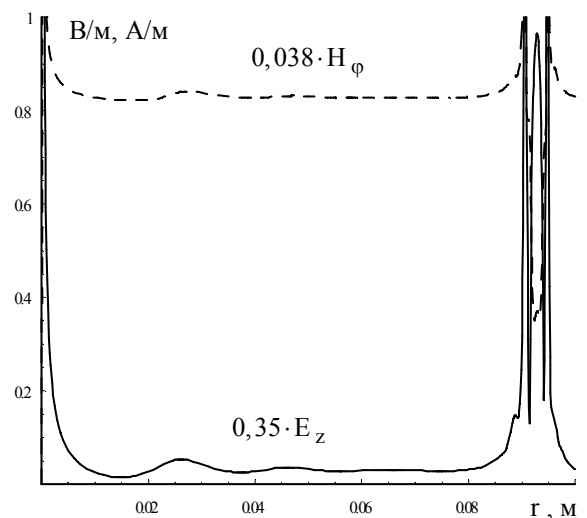


Рис. 2. Структура электромагнитного поля в сечении туловища человека на уровне двенадцатого позвонка в сторону живота

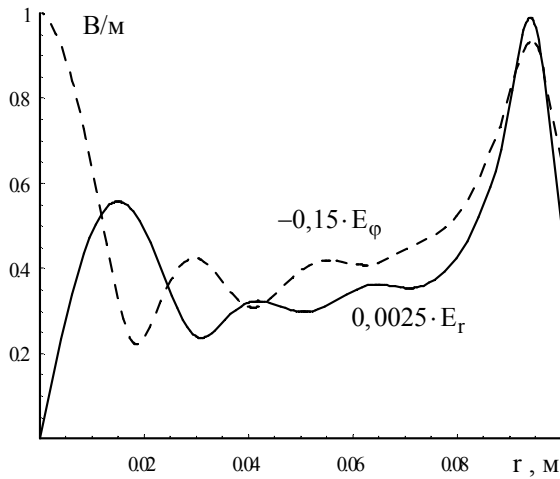


Рис. 3. Структура електромагнітного поля в поперечному сеченні голови людини

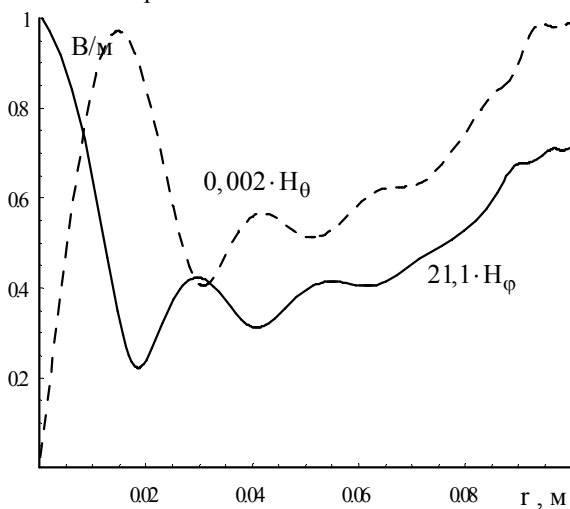


Рис. 4. Структура електромагнітного поля в поперечному сеченні голови людини

Размеры и строение соответствующих органов взяты из анатомического атласа человека, все расчеты проведены для частоты падающего поля равной 1 ГГц. Амплитуда электрической составляющей падающего поля бралась равной единице с целью простоты пересчетов для любого конкретного случая, поправочные коэффициенты позволяют кривые приводить на одном графике.

#### МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВЗАЄМОДІЇ НИЗЬКОЕНЕРГЕТИЧНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ З ДЕЯКИМИ БІОЛОГІЧНИМИ СТРУКТУРАМИ

О.Б. Ахизер, О.Е. Піротті, Є.Л. Піротті

*Розглядається розподіл низькоенергетичних електромагнітних полів у деяких біологічних об'єктах циліндричної та сферичної форми з радіальною неоднорідністю.*

**Ключові слова:** математична модель, біологічні структури, диференціальні рівняння, циліндрові і сферичні функції, електрофізичні властивості.

#### MATHEMATICAL MODELS OF CO-OPERATION OF THE LOW-ENERGY ELECTROMAGNETIC FIELDS WITH SOME BIOLOGICAL STRUCTURES

O.B. Ahiezer, O.E. Pirotti, E.L. Pirotti

*Is considered the distributing of the low-energy electromagnetic fields in some biological objects of cylindrical and spherical form with radial heterogeneity.*

**Keywords:** mathematical model, biological structures, differential equalizations, cylindrical and spherical functions, electrophysics properties.

#### Выводы

В результате проведенных исследований можно сделать следующие **выводы**.

Итак, построенные математические модели для неоднородных по радиусу биологических объектов цилиндрической и сферической формы дали возможность не только получить картину распределения внутренних электромагнитных полей внутри некоторых конкретных органов человека, но и оценить степень их влияния на различные участки организма. Аналогичные результаты можно получить как для разных частот, так и для разных структур животных и растений, имеющих рассмотренную форму.

Поскольку исследование предложенных математических моделей проводилось для случаев биологических тканей с низким и высоким содержанием воды, то это дает возможность использовать данные модели для выяснения характера внутренних электромагнитных полей в широком круге элементов биологических объектов как растительного, так и животного происхождения.

Результаты расчетов показали не только возможность возникновения резонансных явлений в биологических объектах, но также позволили провести исследования особенностей проявления резонансных явлений в объектах, отличающихся по своей структуре, форме и по процентному содержанию воды.

#### Список литературы

1. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Наука, 1989. – 543 с.
2. Стрэттон Д.А. Теория электромагнетизма / Д.А. Стрэттон. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 860 с.
3. Березовский В.А. Биофизические характеристики тканей человека / В.А. Березовский, Н.Н. Колотилев. – К.: Наук. думка, 1990. – 224 с.

Поступила в редколлегию 6.05.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. А.Д. Черенков, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко, Харьков.