МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ЗБІРКА

розрахунково-графічних завдань з вищої математики для студентів технічних спеціальностей прискореної форми навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол №2 від 28.06.2023р.

Харків 2023

Збірка розрахунково-графічних завдань з вищої математики для студентів технічних спеціальностей прискореної форми навчання / авт. Католик І.М., Гайдаш А.М. –Харків.: НТУ «ХПІ», 2023. – 125 с.

Автори: І.М. Католик, А.М. Гайдаш.

Рецензент проф. Г.Я.Тулученко

Кафедра вищої математики

ПЕРЕДМОВА

Останнім часом все більше молоді, що отримала ступінь молодшого спеціаліста, вибирає для продовження своєї освіти прискорену форму навчання. Чисельні українські виші надають їй таку можливість. Не став виключенням і Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». Така форма навчання передбачає отримання ступеню бакалавра за три роки і тому програма курсу вищої математики розрахована лише на один рік і дещо відрізняється від загальноприйнятої. Саме тому виникла необхідність у появі такого навчально-методичного посібника, що враховував би усі особливості програми та рівень вимог до студентів прискореної форми навчання.

Представлена збірка розрахунково-графічних завдань включає завдання п'яти РГЗ, що охоплюють сім розділів курсу вищої математики, а саме: «Елементи лінійної алгебри», «Векторна алгебра та аналітична геометрія», «Похідна та її застосування», «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл», «Диференціальні рівняння» та «Ряди», згідно з навчальною робочою програмою прискореної форми навчання, розробленою на кафедрі вищої математики НТУ «ХПІ». Кожне РГЗ включає 30 варіантів завдань і супроводжується детальною інструкцією для їх розв'язання. Це робить можливим використання цього посібника як збірки звичайних типових задач з курсу вищої математики, а також як самовчителя з розв'язання таких задач для студентів.

Передбачається, що кожний студент навчальної групи виконує свій варіант завдання у відповідності із своїм номером у журналі групи. Завдання виконуються в окремому зошиті, умови їх мають бути записані повністю. Роботи, що виконані не за своїм варіантом, не зараховуються. Для зарахування РГЗ з відповідної теми рекомендується провести співбесіду з кожним студентом для з'ясування наявності необхідних теоретичних знань та навичок розв'язання типових задач .

Збірка продовжує серію методичних видань, що розробляються на кафедрі вищої математики НТУ «ХПІ» впродовж останніх двадцяти років.

Для полегшення самостійної роботи студентів з даним виданням у кінці наводиться список рекомендованої літератури.

Автори.

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри

РГЗ складається з чотирьох завдань, що вміщують 9 задач з лінійної алгебри. Для розв'язання запропонованого РГЗ студенти мають вміти виконувати дії над матрицями та знаходити обернену матрицю, бути знайомими з поняттями матриці, визначника, мінору та алгебраїчного доповнення елементу матриці, рангу матриці та умовою сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), а також володіти методами обчислення визначників та методами розв'язання СЛАР (Крамера та Гауса).

Зразок виконання розрахунково-графічного завдання

Завдання 1. Задана матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Знайти: а) $2A - A^T$; б) A^2; в) $\det A$; г) A^{-1}**.**

Розв'язання. а) Для знаходження матриці $2A - A^T$ треба виконати дії множення матриці на число, транспонування матриці та віднімання матриць:

$$2A - A^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

б) Для того, щоб знайти A^2, виконаємо множення двох однакових матриць за правилом «рядок на стовпчик»:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 8 & 10 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

в) Для знаходження $\det A$ скористаємось методом розкладання визначника за елементами першого рядка:

$$\det A = 1\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix} = (-6-2)+(-2-4) = -8-6 = -14.$$

г) Оскільки $\det A \neq 0$, то у матриці A існує обернена матриця. Знайдемо її за формулою: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$, де A_{ij} – алгебраїчні доповнення відповідних елементів матриці A.

Отже, $A^{-1} = -\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}-8 & -2 & -2\\ 6 & -2 & -2\\ -5 & -3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/7 & 1/7 & 1/7\\ -3/7 & 1/7 & 1/7\\ 5/14 & 3/14 & -2/7\end{pmatrix}.$

Зробимо перевірку. Для цього перемножимо матриці A^{-1} та A:

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}8 & 2 & 2\\ -6 & 2 & 2\\ 5 & 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}14 & 0 & 0\\ 0 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ми отримали одиничну матрицю. Отже, обернена матриця знайдена вірно.

Відповідь: а) $2A - A^T = \begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ 3 & 3 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$; б) $A^2 = \begin{pmatrix}0 & -4 & -2\\ 8 & 10 & 2\\ -1 & -1 & 6\end{pmatrix}$;

в) $\det A = -14$; г) $A^{-1} = \begin{pmatrix}4/7 & 1/7 & 1/7\\ -3/7 & 1/7 & 1/7\\ 5/14 & 3/14 & -2/7\end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв'язати СЛАР методом Крамера $\begin{cases}2x_1 - x_2 + x_3 = 8,\\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1,\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 14.\end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо головний визначник системи, склавши його з коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -2\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=8+6+1-(6+4+2)=15-12=3.$$

Замінимо перший стовпчик цього визначника на стовпчик правих частин, та обчислимо визначник, що утворився:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 8 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -2\\ 14 & -1 & 2\end{vmatrix}=32+28+1-(28+16+2)=61-46=15.$$

Аналогічно побудуємо та обчислимо визначники Δ_2 та Δ_3:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ 3 & 14 & 2\end{vmatrix}=-4-48-14-(-3-56-16)=-66+75=9;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8\\ -1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 14\end{vmatrix}=56+3+8-(48+14+2)=67-64=3.$$

Тепер знайдемо значення невідомих

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{15}{3}=5;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{9}{3}=3;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{3}{3}=1.$$

Зробимо перевірку: $\begin{cases} 2\cdot 5-3+1=8,\\ -5+2\cdot 3-2\cdot 1=-1,\\ 3\cdot 5-3+2\cdot 1=14.\end{cases}$

Отже, СЛАР розв’язана вірно.

Відповідь: $x_1=5;\ x_2=3;\ x_3=1.$

Завдання 3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1\\ -2 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

Розв’язання. За допомогою елементарних перетворень приведемо цю матрицю до виду трапеції. Для цього до другого рядка матриці додамо перший, помножений на 2, а до останнього рядка додамо перший, помножений на (-2), і переставимо місцями другий та четвертий стовпчики:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що мінор отриманої еквівалентної матриці, який складається з перших трьох стовпчиків, відрізняється від нуля, отже ранг її дорівнює трьом, як і ранг шуканої матриці.

Відповідь: 3.

Завдання 4. Дослідити СЛАР на сумісність. Сумісні СЛАР розв'язати методом Гауса:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -4; \end{cases} \text{ б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases} \text{ в) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. а) Складемо розширену матрицю системи та знайдемо ранг розширеної матриці та ранг матриці системи за допомогою елементарних перетворень:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Очевидно, що ранг розширеної матриці співпадає з рангом матриці системи та дорівнює трьом. Це число співпадає з кількістю невідомих в системі. Отже, СЛАР сумісна і має один єдиний розв'язок. Знайдемо його. Для цього за допомогою отриманої еквівалентної матриці складемо еквівалентну СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_3 = 2. \end{cases}.$$

Ця СЛАР розв’язується елементарно:

$x_3 = 2,\ x_2 = -3 + 2x_3 = -3 + 4 = 1, \quad x_1 = 4 + x_2 - 2x_3 = 4 + 1 - 4 = 1.$

Оскільки еквівалентні СЛАР мають однаковий розв’язок, можна вважати задачу завершеною.

Зробимо перевірку: $\begin{cases} 1 - 1 + 2 \cdot 2 = 4, \\ 2 \cdot 1 + 1 - 2 \cdot 2 = -1, \\ 1 - 3 \cdot 1 - 2 = -4. \end{cases}$

Отже, СЛАР розв’язана вірно.

б) Так само складемо розширену матрицю системи та знайдемо ранг розширеної матриці та ранг матриці системи за допомогою елементарних перетворень:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -7 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 10 \\ 3 & 2 & -7 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Очевидно, що ранг розширеної матриці дорівнює трьом, а ранг матриці системи − двом. Оскільки вони не співпадають, то СЛАР є несумісною, тобто не має розв’язку.

в) Складемо розширену матрицю системи та знайдемо ранг розширеної матриці та ранг матриці системи за допомогою елементарних перетворень:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -5 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, що ранг розширеної матриці співпадає з рангом матриці системи та дорівнює двом. Це число менше за кількість невідомих в системі.

Отже, СЛАР сумісна і має безліч розв’язків. Знайдемо їх. Для цього визначимо спочатку базисні та вільні невідомі. Кількість базисних невідомих співпадає з рангом матриці системи і дорівнює 2. Отже, вільних невідомих буде теж 2, нехай це будуть x_3 та x_4. Призначимо їм довільні значення: $x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2$. Тепер виразимо базисні невідомі x_1 та x_2 через вільні. Для цього складемо еквівалентну СЛАР за допомогою еквівалентної матриці:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + C_1 + 2C_2 = 3, \\ 5x_2 - 4C_1 - 5C_2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 - C_1 - 2C_2, \\ 5x_2 = -2 + 4C_1 + 5C_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - C_1 - 2C_2 + 2\left(-0.4 + 0.8C_1 + C_2\right), \\ x_2 = -0.4 + 0.8C_1 + C_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2.2 + 0.6C_1, \\ x_2 = -0.4 + 0.8C_1 + C_2. \end{cases}$$

Отже,загальний розв’язок СЛАР має вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 2.2 + 0.6C_1 \\ -0.4 + 0.8C_1 + C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку:

$$\begin{cases} 3 \cdot \left(2.2 + 0.6C_1\right) - \left(-0.4 + 0.8C_1 + C_2\right) - C_1 + C_2 = 7, \\ 2 \cdot \left(2.2 + 0.6C_1\right) + \left(-0.4 + 0.8C_1 + C_2\right) - 2C_1 - C_2 = 4, \\ \left(2.2 + 0.6C_1\right) - 2 \cdot \left(-0.4 + 0.8C_1 + C_2\right) + C_1 + 2C_2 = 3. \end{cases}.$$

Отримали $\begin{cases} 7 = 7, \\ 4 = 4, \\ 3 = 3. \end{cases}$. Отже, загальний розв’язок СЛАР знайдений вірно.

Відповідь: а) $x_1 = 1, \ x_2 = 1, \ x_3 = 2$; б) СЛАР несумісна;

в) $x_1 = 2.2 + 0.6C_1, \ x_2 = -0.4 + 0.8C_1 + C_2, \ x_3 = C_1, x_4 = C_2$.

Контрольні завдання за темою «Елементи лінійної алгебри»

Завдання 1. Задана матриця A. Знайти: а) $2A - A^T$; б) A^2; в) $\det A$; г) A^{-1}.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

19. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

20. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

21. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. **23.** $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$. **24.** $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 8\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$. **26.** $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 7\end{pmatrix}$. **27.** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ -1 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$. **29.** $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 6 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$. **30.** $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв’язати СЛАР методом Крамера:

1. $\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3=4,\\ -x_1+2x_2-2x_3=-3,\\ 2x_1-x_2+2x_3=3.\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=4,\\ 2x_1+6x_2+x_3=2,\\ 4x_1+8x_2-x_3=0.\end{cases}$ **3.** $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\ x_1+x_2-x_3=0,\\ 4x_1-x_2+5x_3=3.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8,\\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5,\\ 3x_1-4x_2+5x_3=10.\end{cases}$ **5.** $\begin{cases}2x_1+4x_2+x_3=4,\\ 3x_1+6x_2+2x_3=4,\\ 4x_1-x_2-3x_3=1.\end{cases}$ **6.** $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=3,\\ 4x_1+2x_2+5x_3=5,\\ 3x_1+5x_2+2x_3=10.\end{cases}$

7. $\begin{cases}5x_1+8x_2-x_3=7,\\ x_1+2x_2+3x_3=1,\\ 2x_1-3x_2+2x_3=9.\end{cases}$ **8.** $\begin{cases}2x_1-3x_2-x_3=-6,\\ 3x_1+4x_2+3x_3=-5,\\ x_1+x_2+x_3=-2.\end{cases}$ **9.** $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=8,\\ 2x_1-3x_2+x_3=1,\\ 3x_1-x_2+2x_3=13.\end{cases}$

10. $\begin{cases}4x_1+3x_2+2x_3=-5,\\ 3x_1+x_2-x_3=5,\\ 7x_1+4x_2-3x_3=16.\end{cases}$ **11.** $\begin{cases}x_1+x_2-4x_3=0,\\ 2x_1-x_2-x_3=1,\\ x_1-x_2+2x_3=2.\end{cases}$ **12.** $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=-1,\\ x_1-x_2-x_3=6,\\ 2x_1+x_2+x_3=3.\end{cases}$

13. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4,\\ x_1-2x_2+x_3=0,\\ 3x_1-5x_2+2x_3=1.\end{cases}$ **14.** $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=1,\\ -x_1+x_2+3x_3=0,\\ x_1-x_2+2x_3=5.\end{cases}$ **15.** $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=2,\\ x_1-x_2-x_3=-1,\\ 2x_1+x_2+x_3=4.\end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 12, \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 = 26. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -8, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 14. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = -9. \end{cases}$ **21.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 16, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ **23.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 17, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ **27.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 17. \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

Завдання 3. Знайти ранг матриці .

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & 0 & 2 \\ 7 & 7 & 13 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \\ -4 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \\ -5 & -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. **20.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. **21.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ -4 & 1 & -6 & -8 \end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. **26.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. **27.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \\ 5 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **29.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **30.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Дослідити СЛАР на сумісність. Сумісні СЛАР розв’язати методом Гауса:

1.а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

2.а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

3.а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$

4.а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 7; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 7; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

5.а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 = 1; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -2. \end{cases}$

6.а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

7.а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

8.а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

9.а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = 2; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

10.а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -1; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

11.а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

12.а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} -x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

13.а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 1; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$

14.а) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$

15.а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$

16.а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -5. \end{cases}$

17.а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -4; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$

18.а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$

19.а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -7, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 = 3; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

20.а) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4, \\ 2x_1-x_2-x_3=3, \\ 3x_1+x_2+2x_3=8; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1-x_2-x_3=2, \\ 3x_1+x_2+2x_3=2; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 4x_1+3x_2+5x_3+3x_4=8, \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=2, \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4=6. \end{cases}$

21.а) $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=1, \\ -x_1+2x_2-2x_3=3, \\ 2x_1-x_2+2x_3=0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=4, \\ x_1+2x_2-2x_3=3, \\ 2x_1-x_2+2x_3=7; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3x_1-3x_2+4x_3-x_4=6, \\ -x_1+2x_2-2x_3-x_4=-3, \\ 2x_1-x_2+2x_3-2x_4=0. \end{cases}$

22.а) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=4, \\ -x_1+x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+x_2+x_3=5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=3, \\ -x_1+x_2-3x_3=0, \\ 2x_1+x_2+x_3=3; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-x_4=1, \\ -x_1+x_2+3x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3-2x_4=4. \end{cases}$

23.а) $\begin{cases} x_1+x_2-4x_3=5, \\ x_1-x_2+2x_3=1, \\ 2x_1-x_2-x_3=4; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1+x_2-4x_3=0, \\ x_1-x_2+2x_3=2, \\ 3x_1+x_2-6x_3=-2; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=2, \\ 2x_1-x_2-x_3=3. \end{cases}$

24.а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1-x_2+x_3=5, \\ x_1+2x_2+3x_3=-1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1+x_2+3x_3=4; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3-x_4=1, \\ x_1-x_2+x_3-2x_4=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=5. \end{cases}$

25.а) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2, \\ 2x_1-2x_2+x_3=5, \\ 3x_1+x_2-x_3=0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x_1-x_2=3, \\ 2x_1-2x_2+x_3=1, \\ 3x_1+x_2-x_3=0; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+x_4=4, \\ 2x_1-2x_2+x_3-2x_4=1, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=5. \end{cases}$

26.а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ 3x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3=11; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=3, \\ 3x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3=1; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} -x_1+7x_2+3x_3-4x_4=4, \\ 3x_1-x_2+x_3-2x_4=0, \\ x_1+3x_2+2x_3-3x_4=2. \end{cases}$

27.а) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=5, \\ -x_1-x_2+x_3=-1, \\ -2x_1+x_2+x_3=-3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-1, \\ -x_1-x_2+x_3=-4, \\ x_1-5x_2+7x_3=-6; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=-1, \\ -x_1-x_2+x_3+2x_4=-4, \\ 2x_1-x_2+2x_3-3x_4=1. \end{cases}$

28.а) $\begin{cases} 5x_1+8x_2-x_3=3, \\ x_1+2x_2+3x_3=7, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=6; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x_1-x_2+5x_3=10, \\ x_1+2x_2+3x_3=1, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=7; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 4x_1+x_2+8x_3+x_4=3, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=1, \\ 2x_1-3x_2+2x_3-x_4=1. \end{cases}$

29. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$

30. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

Розділ 2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Друга частина РГЗ складається з шести завдань, що містять 18 задач курсу векторної алгебри та аналітичної геометрії. Перші три завдання присвячені темі «Векторна алгебра» та потребують вміння виконувати дії з векторами, розрізняти скалярний, векторний та мішаний добутки векторів, знати їх геометричні застосування, а також умови колінеарності, перпендикулярності та компланарності векторів.

Останні три завдання присвячені аналітичній геометрії та потребують вміння складати рівняння площини, прямої на площині та у просторі, знаходити кути між ними та будувати криві другого порядку. У всіх завданнях координати векторів та точок задаються у декартовій прямокутній системі координат.

Зразок виконання розрахунково-графічного завдання

Завдання 1. Дано вектори $\vec{a} = (3;-1;4), \vec{b} = (2;1;5), \vec{c} = (-2;3;-6)$. Обчислити: а) $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$; б) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) $\vec{a} \times \vec{b}$; г) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Розв'язання. а) Як відомо, вектори складаються та віднімаються, а також множаться на число за тим самим правилом, що і матриці, тобто ці дії слід виконувати покоординатно. Отже,

$$\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (3;-1;4) - (2;1;5) + 2(-2;3;-6) = (5;-2;-1) + (-4;6;-12) = (1;4;-13).$$

б) Скалярний добуток векторів у координатній формі обчислюється за формулою: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$. Тому $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 2-1\cdot 1+4\cdot 5=6-1+20=25$.

в) Векторний добуток векторів у координатній формі обчислюється за формулою: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$.

Тому $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 5\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=(-9;-7;5)$.

г) Мішаний добуток векторів у координатній формі обчислюється за формулою: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

Тому $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 5\\ -2 & 3 & -6\end{vmatrix}=-18+10+24+8-45-12=-33$.

Відповідь: а) $(1;4;-13)$; б) 25; в) $(-9;-7;5)$; г) -33.

Завдання 2: Дано три вектори $\vec{a}=(1;-2;-3), \vec{b}=(3;1;-2), \vec{c}=(-2;4;6)$. Перевірити: а) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ та $\vec{c}$;

б) чи перпендикулярні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

в) чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Розв'язання. а) Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні, тобто $\frac{a_x}{c_x}=\frac{a_y}{c_y}=\frac{a_z}{c_z}$. Оскільки $\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}=\frac{-3}{6}=-0,5$, то вектори колінеарні.

б) Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю. Обчислимо скалярний добуток векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$:

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = 3\cdot(-2)+1\cdot 4-2\cdot 6=-6+4-12=-14\neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{b}$ та $\vec{c}$ не перпендикулярні.

в) Якщо вектори компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю. Знайдемо мішаний добуток векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ за формулою, що наведена вище:

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 14+2\cdot 14-3\cdot 14=0.$ Отже, вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні.

Відповідь: а) колінеарні; б) не перпендикулярні; в) компланарні.

Завдання 3. Дано три вершини трикутника $ABC: A(1;2;4),\ B(7;-1;3),$ $C(-2;1;8)$. Обчислити: а) довжину його сторони AB;

б) внутрішній кут при вершині B;

в) площу трикутника ABC.

Розв'язання. а) Довжина сторони AB дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB}$. Координати вектора знаходимо, віднімаючи від координат кінця вектора координати його початку, і отримуємо $\overrightarrow{AB}=(6;-3;-1)$.

Довжину вектора обчислюємо як корінь квадратний із суми квадратів його координат: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{46}$. Отже, $AB=\sqrt{46}$.

б) Внутрішній кут при вершині B чисельно дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{BA}$ та $\overrightarrow{BC}$. Знайдемо координати цих векторів, їх довжини та скалярний добуток:

$$\overrightarrow{BA}=(-6;3;1),\ \overrightarrow{BC}=(-9;2;5),$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{46},\quad \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-9)^2+2^2+5^2}=\sqrt{110},$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-6\cdot(-9)+3\cdot 2+1\cdot 5=65..$$

Тоді $\angle B = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{65}{\sqrt{110}\sqrt{46}} = \dfrac{65}{2\sqrt{1265}}$.

в) Для обчислення площі трикутника нам знадобляться вектори, що співпадають з двома його сторонами. Нехай це будуть вектори $\overrightarrow{BA}$ та $\overrightarrow{BC}$. Обчислимо векторний добуток векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$ та його довжину :

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} = (13;21;15),$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{13^2+21^2+15^2} = \sqrt{835}.$$

Як відомо, модуль цього векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограму зі сторонами BA і BC, а площа трикутника дорівнює половині площі паралелограму. Отже,

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{835}}{2} = \sqrt{\frac{835}{4}} = \sqrt{208,75}.$$

Відповідь: а) $AB = \sqrt{46}$; б) $\angle B = \dfrac{65}{2\sqrt{1265}}$; в) $S_{ABC} = \sqrt{208,75}.$

Завдання 4. Дано 4 точки : $A(3;1;4)$, $B(-1;2;3)$, $C(0;5;-2)$, $D(5;8;2)$.

Необхідно: а) скласти рівняння площини ABC;

б) знайти відстань від точки D до площини ABC;

в) скласти канонічні рівняння прямої AB;

г) скласти параметричні рівнянняі прямої l, що проходить через точку D перпендикулярно до площини ABC.

Розв'язання. а) Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ та їх векторний добуток:

$$\overrightarrow{AB}=(-4;1;-1),\ \overrightarrow{AC}=(-3;4;-6),\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 1 & -1\\ -3 & 4 & -6\end{vmatrix}=(-2;-21;-13).$$

Останній вектор перпендикулярний векторам $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, а значить і площині ABC. Отже, протилежний йому вектор $\vec{N}=(2;\,21;13)$ може бути вибраний в якості нормального вектору цієї площини.

Як відомо, рівняння площини, що проходить через задану точку (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно вектору $\vec{N}=(N_x;N_y;N_z)$ має вигляд:

$$N_x\cdot(x-x_0)+N_y\cdot(y-y_0)+N_z\cdot(z-z_0)=0.$$

Підставляючи в це рівняння координати точки $A(3;1;4)$ та координати вектора $\vec{N}=(2;\,21;13)$, отримаємо:

$$2(x-3)+21(y-1)+13(z-4)=0,\ 2x+21y+13z-79=0.$$

Це і є рівняння площини ABC.

б) Відстань від точки до площини визначається формулою:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ ,$$

де $Ax+By+Cz+D=0$ – рівняння відповідної площини, а $(x_1;y;z_1)$– координати точки. Підставляємо в формулу відомі нам дані та отримуємо:

$$d=\frac{|2\cdot 5+21\cdot 8+13\cdot 2-79|}{\sqrt{2^2+21^2+13^2}}=\frac{125}{\sqrt{614}}\approx 5.$$

в) Для того, щоб скласти канонічні рівняння прямої у просторі необхідно знати її напрямний вектор $\vec{S}=(m;n;p)$ і будь-яку точку $(x_0;y_0;z_0)$, що їй належить. Тоді канонічні рівняння прямої у просторі будуть мати вигляд :

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

В якості напрямного вектору прямої AB візьмемо вектор $\overrightarrow{AB}=(-4;1;-1)$, а з двох відомих нам точок, що належать цій прямій, виберемо точку $A(3;1;4)$. Запишемо канонічні рівняння прямої AB: $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$.

г) Як і в попередній задачі, щоб скласти параметричні рівняння шуканої прямої (назвемо її l), необхідно знати її напрямний вектор і будь-яку точку, що їй належить. Координати точки $D(5;8;2)$ нам відомі, а в якості напрямного вектору ми можемо взяти нормальний вектор площини ABC (в силу перпендикулярності прямої l цій площині): $\vec{S}=\vec{N}=(2;21;13)$. Параметричні рівняння прямої у просторі мають вигляд: $\begin{cases} x=pt+x_0, \\ y=mt+y_0, \\ z=nt+z_0. \end{cases}$ Отже, пряма l параметрично задається так: $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=21t+8, \\ z=13t+2. \end{cases}$

Відповідь: а) $2x+21y+13z-79=0$; б) $\dfrac{125}{\sqrt{614}}$;

в) $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$, г) $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=21t+8, \\ z=13t+2. \end{cases}$

Завдання 5. Дано три точки на площині: $A(2;-3)$, $B(1;4)$, $C(-2;0)$. Потрібно: а) скласти рівняння прямої AB, визначити її кутовий коефіцієнт;

б) скласти рівняння прямих, що проходять через точку C паралельно та перпендикулярно до прямої AB відповідно;

в) знайти кут між прямими AC та BC.

Розв'язання. а) Як відомо, рівняння прямої на площині, що проходить через дві задані точки, має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Підставимо сюди замість x_1, y_1 координати точки A , а замість x_2, y_2 координати точки B. Отримаємо:

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y+3}{4+3}, \quad \frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{7}, \quad 7(x-2)=-(y+3), \quad y+7x-11=0.$$

Це і є рівняння прямої AB в загальному вигляді.

Для того, щоб визначити кутовий коефіцієнт цієї прямої, слід виразити y через x: $y=-7x+11$. Коефіцієнт, що стоїть при змінній x у цьому виразі і є кутовим коефіцієнтом прямої AB, тобто $k=-7$.

б) Для того, щоб скласти рівняння прямої l_1, паралельної прямій AB, слід врахувати умову паралельності прямих на площині, а саме рівність їх кутових коефіцієнтів. Кутовий коефіцієнт прямої AB був знайдений нами у попередній задачі. Отже, $k_{l_1}=k_{AB}=-7$.

Далі слід скористатися рівнянням прямої на площині з відомим кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку: $y-y_0=k(x-x_0)$.

Підставляючи сюди k_{l_1} та координати точки C, отримаємо:

$$y-0=-7(x+2), \quad y+7x+14=0.$$

Це і є рівняння прямої l_1 в загальному вигляді.

Для того, щоб скласти рівняння прямої l_2, перпендикулярної до прямої AB, слід врахувати умову перпендикулярності прямих на площині, а саме $k_{l_2}\cdot k_{AB}=-1$. Кутовий коефіцієнт прямої AB був знайдений нами раніше $k_{AB}=-7$. Тоді $k_{l_2}=\frac{-1}{k_{AB}}=\frac{-1}{-7}=\frac{1}{7}$.

Знову скористаємося рівнянням прямої на площині з відомим кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку: $y-y_0=k(x-x_0)$.

Підставляючи сюди k_{l_2} та координати точки C, отримаємо:

$$y-0=\frac{1}{7}(x+2),\quad 7y=x+2,\quad 7y-x-2=0.$$

Це і є рівняння прямої l_2 в загальному вигляді.

в) Кут між прямими на площині виражається через їх кутові коефіцієнти наступним чином: $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_1+k_2}{1-k_1\cdot k_2}\right|$. Отже, для розв'язання задачі нам не потрібно знаходити рівняння прямих AC та BC, а достатньо визначити тільки їх кутові коефіцієнти:

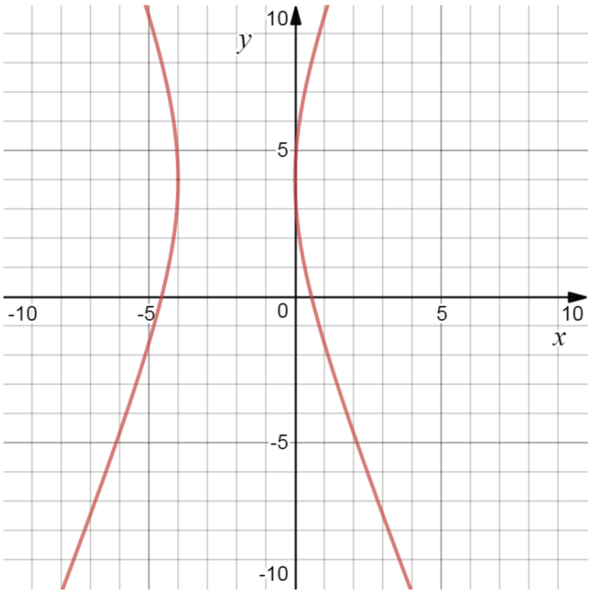
$$k_{AC}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{-3-0}{2-(-2)}=-\frac{3}{4},\quad k_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{4-0}{1-(-2)}=\frac{4}{3}.$$

Тоді $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\left|-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\right|}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{\frac{7}{12}}{2}=\frac{7}{24}$, а сам кут $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{7}{24}$.

Відповідь: а) $y+7x-11=0$, $k=-7$; б) $y+7x+14=0$, $7y-x-2=0$; в) $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{7}{24}$.

Завдання 6. Визначити тип та побудувати графік кривої, що задана рівнянням: а) $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-4)^2}{25}=1$; б) $x^2+y^2-14x=0$; в) $y^2-2x+4y+10=0$.

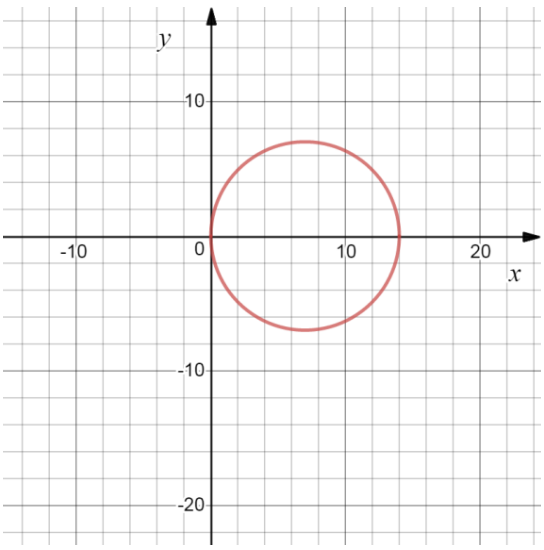
Розв'язання. а) Це рівняння відповідає канонічному рівнянню гіперболи $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. Центр симетрії кривої знаходиться в точці (-2;4). Дійсна напіввісь дорівнює $a=\sqrt{4}=2$ і розташована горизонтально. Уявна напіввісь дорівнює $b=\sqrt{25}=5$ і розташована вертикально. Цих даних достатньо для побудови графіка гіперболи:



б) Це рівняння кола, тому що доданки з x^2 та y^2 увійшли до нього з однаковими коефіцієнтами. Приведемо його до канонічного виду $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2$. Для цього виділимо повний квадрат по координаті x:

$$x^2-14x+49+y^2=49;\ \left(x-7\right)^2+y^2=7^2.$$

Отже, центр кола знаходиться в точці $\left(7;0\right)$, а його радіус $R=7$. Графік цього кола представлений нижче:

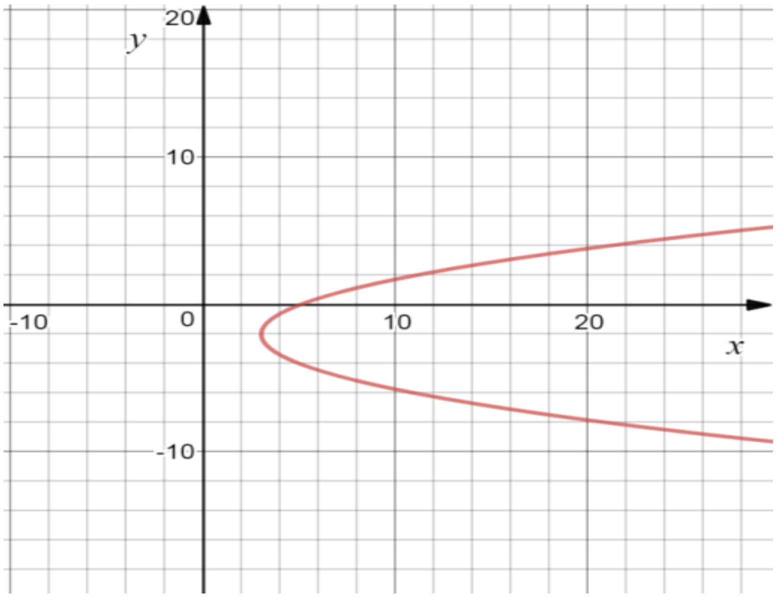


в) Це рівняння параболи, тому що в рівнянні другого порядку немає доданку з x^2. Приведемо його до канонічного виду $\left(y-y_0\right)^2=2p\left(x-x_0\right)$.

Для цього виділимо повний квадрат по координаті y:

$$y^2+4y=2x-10;\ y^2+4y+4=2x-10+4,\ (y+2)^2=2(x-3).$$

Вершина параболи знаходиться у точці $(3;-2)$, вісь симетрії горизонтальна, гілки направлені вправо. Цих даних недостатньо для побудови графіку параболи, тому знайдемо ще координати додаткової точки, розташованої на цій кривій. Нехай $y=0$, тоді $2(x-3)=4,\ x-3=2,\ x=5.$ Отже, точка з координатами $(5;0)$ лежить на параболі. Після цього виконаємо побудову графіка:



Відповідь: а) гіпербола;;б) коло; в) парабола.

Контрольні завдання за темою «Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії»

Завдання 1. Для даних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обчислити: а) $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$, б) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

в) $\vec{a} \times \vec{b}$; г) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

1. $\vec{a} = (1;1;4), \vec{b} = (-2;-3;-2), \overrightarrow{c} = (-1;2;3)$;

2. $\vec{a} = (3;2;6), \vec{b} = (-2;1;-2), \vec{c} = (-1;2;4)$;

3. $\vec{a} = (3;-2;-4), \vec{b} = (1;1;-5), \vec{c} = (-1;2;-2)$;

4. $\vec{a} = (3;-2;3), \overrightarrow{b} = (1;4;-2), \vec{c} = (-1;1;5)$;

5. $\vec{a} = (3;1;-2), \vec{b} = (2;3;2), \vec{c} = (-1;-2;4)$;

6. $\vec{a} = (2;-2;1), \vec{b} = (3;1;-4), \vec{c} = (-1;2;7)$;

7. $\vec{a} = (5;1;2), \vec{b} = (1;3;-2), \vec{c} = (-1;2;-1)$;

8. $\vec{a} = (3;-1;4), \vec{b} = (1;1;5), \vec{c} = (-1;-4;1)$;

9. $\vec{a} = (2;1;5), \vec{b} = (-1;3;-1), \vec{c} = (-1;-2;3)$;

10. $\vec{a} = (1;1;5), \vec{b} = (3;4;-1), \vec{c} = (-1;4;0)$;

11. $\vec{a} = (1;-1;2), \vec{b} = (-2;3;-2), \vec{c} = (4;1;1)$;

12. $\vec{a} = (3;1;-1), \vec{b} = (4;1;0), \vec{c} = (-2;2;5)$;

13. $\vec{a} = (1;1;-2), \vec{b} = (5;-3;2), \vec{c} = (-4;0;3)$;

14. $\vec{a} = (2;-2;6), \vec{b} = (2;3;-2), \vec{c} = (-1;1;3)$;

15. $\vec{a} = (5;1;-4), \vec{b} = (3;2;-3), \vec{c} = (1;-2;6)$;

16. $\vec{a} = (7;1;-1), \vec{b} = (2;4;-2), \vec{c} = (-3;2;1)$;

17. $\vec{a} = (1;-1;4), \vec{b} = (2;3;-2), \vec{c} = (-1;2;8)$;

18. $\vec{a} = (3;2;-1), \vec{b} = (4;1;2), \vec{c} = (-1;3;-2)$;

19. $\vec{a}=(2;2;6), \vec{b}=(-3;1;4), \vec{c}=(7;0;-2)$;

20. $\vec{a}=(2;1;5), \vec{b}=(-1;3;-2), \vec{c}=(-1;0;4)$;

21. $\vec{a}=(3;1;5), \vec{b}=(-2;3;-1), \vec{c}=(-1;2;2)$;

22. $\vec{a}=(5;1;-1), \vec{b}=(2;-3;1), \vec{c}=(-1;2;4)$;

23. $\vec{a}=(1;-1;3), \vec{b}=(2;-3;-2), \vec{c}=(-2;2;6)$;

24. $\vec{a}=(1;1;-4), \vec{b}=(2;-4;-2), \vec{c}=(-1;2;3)$;

25. $\vec{a}=(4;2;-2), \vec{b}=(2;1;-1), \vec{c}=(-1;3;4)$;

26. $\vec{a}=(5;3;-1), \vec{b}=(2;-1;4), \vec{c}=(-1;2;-3)$;

27. $\vec{a}=(5;1;4), \vec{b}=(2;3;2), \vec{c}=(-1;2;-3)$;

28. $\vec{a}=(2;1;7), \vec{b}=(2;-3;1), \vec{c}=(-1;-2;0)$;

29. $\vec{a}=(2;1;-3), \vec{b}=(-1;1;0), \vec{c}=(-1;3;5)$;

30. $\vec{a}=(3;1;3), \vec{b}=(-2;-1;4), \vec{c}=(-1;2;1)$.

Завдання 2. Дані три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Перевірити:

а) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ та $\vec{c}$;

б) чи перпендикулярні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

в) чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

1. $\vec{a}=(1;-1;4), \vec{b}=(2;3;-2), \vec{c}=(-1;2;8)$;

2. $\vec{a}=(3;2;-1), \vec{b}=(4;1;2), \vec{c}=(-1;3;-2)$;

3. $\vec{a}=(2;2;6), \vec{b}=(-3;1;4), \vec{c}=(7;0;-2)$;

4. $\vec{a}=(2;1;5), \vec{b}=(-1;3;-2), \vec{c}=(-1;0;4)$;

5. $\vec{a}=(3;1;5), \vec{b}=(-2;3;-1), \vec{c}=(-1;2;2)$;

6. $\vec{a}=(5;1;-1), \vec{b}=(2;-3;1), \vec{c}=(-1;2;4);$

7. $\vec{a}=(1;-1;3), \vec{b}=(2;-3;-2), \vec{c}=(-2;2;6);$

8. $\vec{a}=(1;1;-4), \vec{b}=(2;-4;-2), \vec{c}=(-1;2;3);$

9. $\vec{a}=(4;2;-2), \vec{b}=(2;1;-1), \vec{c}=(-1;3;4);$

10. $\vec{a}=(5;3;-1), \vec{b}=(2;-1;4), \vec{c}=(-1;2;-3);$

11. $\vec{a}=(5;1;4), \vec{b}=(2;3;2), \vec{c}=(-1;2;-3);$

12. $\vec{a}=(2;1;7), \vec{b}=(2;-3;1), \vec{c}=(-1;-2;0);$

13. $\vec{a}=(2;1;-3), \vec{b}=(-1;1;0), \vec{c}=(-1;3;5);$

14. $\vec{a}=(3;1;3), \vec{b}=(-2;-1;4), \vec{c}=(-1;2;1);$

15. $\vec{a}=(1;1;4), \vec{b}=(-2;-3;-2), \vec{c}=(-1;2;3);$

16. $\vec{a}=(3;2;6), \vec{b}=(-2;1;-2), \vec{c}=(-1;2;4);$

17. $\vec{a}=(3;-2;-4), \vec{b}=(1;1;-5), \vec{c}=(-1;2;-2);$

18. $\vec{a}=(3;-2;3), \vec{b}=(1;4;-2), \vec{c}=(-1;1;5);$

19. $\vec{a}=(3;1;-2), \vec{b}=(2;3;2), \vec{c}=(-1;-2;4);$

20. $\vec{a}=(2;-2;1), \vec{b}=(3;1;-4), \vec{c}=(-1;2;7);$

21. $\vec{a}=(5;1;2), \vec{b}=(1;3;-2), \vec{c}=(-1;2;-1);$

22. $\vec{a}=(3;-1;4), \vec{b}=(1;1;5), \vec{c}=(-1;-4;1);$

23. $\vec{a}=(2;1;5), \vec{b}=(-1;3;-1), \vec{c}=(-1;-2;3);$

24. $\vec{a}=(1;1;5), \vec{b}=(3;4;-1), \vec{c}=(-1;4;0);$

25. $\vec{a}=(1;-1;2), \vec{b}=(-2;3;-2), \vec{c}=(4;1;1);$

26. $\vec{a}=(3;1;-1), \vec{b}=(4;1;0), \vec{c}=(-2;2;5);$

27. $\vec{a}=(1;1;-2), \vec{b}=(5;-3;2), \vec{c}=(-4;0;3)$;

28. $\vec{a}=(2;-2;6), \vec{b}=(2;3;-2), \vec{c}=(-1;1;3)$;

29. $\vec{a}=(5;1;-4), \vec{b}=(3;2;-3), \vec{c}=(1;-2;6)$;

30. $\vec{a}=(7;1;-1), \vec{b}=(2;4;-2), \vec{c}=(-3;2;1)$.

Завдання 3. Дані три вершини трикутника ABD. Обчислити:

а) довжину його сторони AB;

б) внутрішній кут при вершині B;

в) площу трикутника ABD.

1. $A(5;2;-1),\ B(2;2;4),\ D(4;0;-2)$;

2. $A(-2;-2;1),\ B(1;5;4),\ D(-2;3;-1)$;

3. $A(7;-3;2),\ B(2;-1;-1),\ D(3;4;2)$;

4. $A(6;1;-4),\ B(2;-1;5),\ D(-3;0;2)$;

5. $A(-4;1;-5),\ B(-2;2;-1),\ D(0;4;1)$;

6. $A(5;1;-2),\ B(-3;1;4),\ D(2;0;-1)$;

7. $A(2;-1;-3),\ B(3;1;-2),\ D(-2;1;-4)$;

8. $A(-4;-1;2),\ B(5;1;3),\ D(0;2;1)$;

9. $A(-1;0;4),\ B(1;-1;6),\ D(3;2;0)$;

10. $A(-4;0;6),\ B(-3;-3;2),\ D(1;0;3)$;

11. $A(1;-1;4),\ B(3;1;8),\ D(2;2;5)$;

12. $A(3;1;4),\ B(2;-1;0),\ D(5;3;8)$;

13. $A(2;1;5),\ B(-2;3;7),\ D(0;-1;3)$;

14. $A(-1;4;1),\ B(0;1;1),\ D(1;-2;4)$;

15. $A(4;1;2),\ B(-3;1;-4),\ D(5;2;1)$;

16. $A(3;2;-1), B(2;2;-4), D(4;0;9)$;

17. $A(2;2;1),\ B(1;7;8),\ D(3;1;-1)$;

18. $A(0;-3;1),\ B(2;-1;-2),\ D(3;1;2)$;

19. $A(7;1;4),\ B(2;-1;8),\ D(1;1;0)$;

20. $A(-2;1;5),\ B(2;2;-1),\ D(3;4;1)$;

21. $A(1;1;4)$, $B(-3;1;8)$, $D(2;-2;5)$;

22. $A(2;-1;3)$, $B(3;0;-2)$, $D(5;2;5)$;

23. $A(4;-1;2)$, $B(5;1;-3)$, $D(0;2;0)$;

24. $A(-1;0;5)$, $B(1;1;6)$, $D(3;2;-5)$;

25. $A(1;2;5)$, $B(3;-3;2)$, $D(-2;2;1)$;

26. $A(3;-1;6)$, $B(3;1;2)$, $D(1;1;5)$;

27. $A(-3;1;4), B(-2;-1;0), D(-2;0;0)$;

28. $A(2;-1;5), B(2;-3;-1), D(0;-1;4)$;

29. $A(1;-4;-1), B(0;-1;1), D(1;-2;0)$;

30. $A(0;1;4)$, $B(-3;1;4)$, $D(5;-2;1)$.

Завдання 4. Дані три точки на площині . Потрібно:

а) скласти рівняння прямих AB, AC , BC та визначити їх кутові коефіцієнти;
б) скласти рівняння прямих l_1 та l_2 , що проходять через точку C паралельно та перпендикулярно до прямої AB відповідно;

в) знайти кут між прямими AC та BC .

1. $A(2;3), B(1;4), C(-1;5)$;

2. $A(2;2), B(1;3), C(-1;4)$;

3. $A(3;3), B(2;4), C(1;5)$;

4. $A(-2;3), B(1;-4), C(1;6)$;

5. $A(2;-3), B(-1;4), C(1;-2)$;

6. $A(-2;-3), B(2;4), C(-1;1)$;

7. $A(0;3), B(1;-4), C(-1;-5)$;

8. $A(2;0), B(-1;4), C(1;5)$;

9. $A(2;3), B(1;0), C(-2;1)$;

10. $A(1;3), B(-1;-4), C(1;2)$;

11. $A(2;4), B(1;-1), C(-1;3)$;

12. $A(2;5), B(3;4), C(-1;2)$;

13. $A(-2;0), B(1;4), C(2;-5)$;

14. $A(3;3), B(1;-1), C(2;-3)$;

15. $A(1;-3), B(2;4), C(-1;1)$;

16. $A(-2;1), B(1;4), C(-2;6)$;

17. $A(1;2), B(3;4), C(-3;5)$;

18. $A(0;-3), B(1;-4), C(4;5)$;

19. $A(-2;0), B(1;-2), C(-3;4)$;

20. $A(2;3), B(1;0), C(-1;-2)$;

21. $A(2;-2), B(1;0), C(-1;4)$;

22. $A(2;2), B(0;3), C(-2;1)$;

23. $A(0;2), B(1;3), C(-1;0)$;

24. $A(2;4), B(-1;-3),\ C(1;-2)$;

25. $A(2;0), B(4;3), C(-5;4)$;

26. $A(6;2), B(1;-3), C(2;4)$;

27. $A(2;2), B(-2;3), C(0;4)$;

28. $A(3;3), B(1;4), C(-1;6)$;

29. $A(-1;5), B(2;2), C(1;4)$;

30. $A(4;5), B(-2;2), C(2;0)$.

Завдання 5. Дані чотири точки A, В, С, D. Необхідно:

а) скласти рівняння площини ABC;

б) знайти відстань від точки D до площини ABC;

в) скласти канонічні рівняння прямої AB;

г) скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через точку D перпендикулярно до площини ABC.

1. $A(1;-1;4), B(3;1;8), C(-2;0;3), D(2;2;5)$;

2. $A(3;1;4), B(2;-1;0), C(5;3;8), D(-2;2;6)$;

3. $A(2;1;5),\ B(-2;3;7), C(1;1;4), D(0;-1;3)$;

4. $A(-1;4;1), B(0;1;1), C(-2;3;0), D(1;-2;4)$;

5. $A(4;1;2), B(-3;1;-4), C(2;3;3), D(5;2;1)$;

6. $A(3;2;-1), B(2;2;-4), C(-1;0;5), D(4;0;9)$;

7. $A(2;2;1), B(1;7;8), C(-2;3;-4), D(3;1;-1)$;

8. $A(0;-3;1), B(2;-1;-2), C(-1;3;3), D(3;1;2)$;

9. $A(7;1;4), B(2;-1;8), C(-3;0;3), D(1;1;0)$;

10. $A(-2;1;5), B(2;2;-1), C(2;0;3), D(3;4;1)$;

11. $A(1;1;4), B(-3;1;8), C(2;0;-3), D(2;-2;5)$;

12. $A(2;-1;3), B(3;0;-2), C(-2;1;4), D(5;2;5)$;

13. $A(4;-1;2), B(5;1;-3), C(-4;1;1), D(0;2;0)$;

14. $A(-1;0;5), B(1;1;6), C(-2;1;3), D(3;2;-5);$

15. $A(1;2;5), B(3;-3;2), C(-1;0;-3), D(-2;2;1);$

16. $A(3;-1;6), B(3;1;2), C(2;0;4), D(1;1;5);$

17. $A(-3;1;4), B(-2;-1;0), C(5;-3;8), D(-2;0;0);$

18. $A(2;-1;5), B(2;-3;-1), C(1;1;3), D(0;-1;4);$

19. $A(1;-4;-1), B(0;-1;1), C(2;3;1), D(1;-2;0);$

20. $A(0;1;4), B(-3;1;4), C(2;-3;3), D(5;-2;1);$

21. $A(5;2;-1), B(2;2;4), C(-1;0;5), D(4;0;-2);$

22. $A(-2;-2;1), B(1;5;4), C(-2;3;-1), D(3;1;3);$

23. $A(7;-3;2), B(2;-1;-1), C(-1;3;-3), D(3;4;2);$

24. $A(6;1;-4), B(2;-1;5), C(-3;0;2), D(5;3;0);$

25. $A(-4;1;-5), B(-2;2;-1), C(2;0;4), D(0;4;1);$

26. $A(5;1;-2), B(-3;1;4), C(2;0;-1), D(2;-2;1);$

27. $A(2;-1;-3), B(3;1;-2), C(-2;1;-4), D(5;0;5);$

28. $A(-4;-1;2), B(5;1;3), C(-4;1;-1), D(0;2;1);$

29. $A(-1;0;4), B(1;-1;6), C(-2;1;-3), D(3;2;0);$

30. $A(-4;0;6), B(-3;-3;2), C(1;0;3), D(-2;0;1).$

Завдання 6. Визначити тип та побудувати графік кривої, що задана рівнянням:

1. а) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1,$

б) $y^2-2x+2y+3=0;$

2. а) $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1,$

б) $x^2+y^2+4x=0;$

3. а) $\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{4}=1,$

б) $y^2+x-2y+5=0;$

4. а) $\frac{(x-4)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1,$

б) $x^2+y^2+2y=0;$

5. а) $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1,$

б) $y^2+x+4y=0;$

6. а) $\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x+2)^2}{9}=1,$

б) $x^2+y^2-4y=0;$

7. а) $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16}=1,$

б) $y^2-3x-4y+1=0;$

8. а) $\frac{(x-1)^2}{1}-\frac{(y+2)^2}{9}=1,$

б) $x^2+y^2-2y=0;$

9. а) $x^2+y^2-2x=0,$

б) $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{1}=1;$

10. а) $x^2+6x-3y=0,$

б) $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1;$

11. а) $x^2+y^2-6x=0,$

б) $\frac{(x+2)^2}{1}-\frac{(y+2)^2}{4}=1;$

12. а) $x^2-4x+y+1=0,$

б) $\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{(y+1)^2}{4}=1;$

13. а) $x^2+y^2+6y=0,$

б) $\frac{(x-3)^2}{1}-\frac{(y+3)^2}{9}=1;$

14. а) $x^2+4x+4y=0,$

б) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1;$

15. а) $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{1}=1,$

б) $y^2+2x-2y+3=0;$

16. а) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1,$

б) $x^2+y^2-4x=0;$

17. а) $\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+2)^2}{4}=1,$

б) $y^2+x+2y+5=0;$

18. а) $\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1,$

б) $x^2+y^2+4y=0;$

19. а) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1,$

б) $y^2+x-4y+2=0;$

20. а) $\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{9}=1,$

б) $x^2+y^2-6y=0;$

21. а) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{16}=1,$

б) $y^2-3x+4y-2=0;$

22. а) $\frac{(x-3)^2}{1}-\frac{(y+1)^2}{9}=1,$

б) $x^2+y^2-8y=0;$

23. а) $x^2+y^2+2x=0,$

б) $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1;$

24. а) $x^2-6x-3y+3=0,$

б) $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1;$

25. а) $x^2+y^2+6x=0,$

б) $\frac{(y+1)^2}{9}-\frac{(x-4)^2}{1}=1;$

26. а) $x^2+4x+y-1=0$

б) $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16}=1;$

27. а) $x^2+y^2+8y=0,$

б) $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x+2)^2}{16}=1;$

28. а) $x^2+4x+2y-4=0,$

б) $\frac{(y+1)^2}{9}+\frac{(x-4)^2}{25}=1;$

29. а) $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{16}=1,$

б) $y^2-2x+4y+2=0;$

30. а) $\frac{(x+1)^2}{1}-\frac{(y-4)^2}{9}=1,$

б) $x^2+y^2-8x=0.$

Розділ 3. Диференціальне числення функції однієї змінної

РГЗ з цієї теми включає 7 завдань, що охоплюють як задачі з находження похідної, так і з її застосування. Для виконання роботи студенти мають володіти технікою диференціювання явно заданих функцій, розуміти геометричний зміст похідної , досліджувати поведінку функції за допомогою першої та другої похідної, бути знайомими з правилом Лопіталя обчислення границь та з методологією знаходження асимптот графіків функцій.

Зразок виконання розрахунково-графічного завдання

Завдання 1. Знайти похідні а) $y=8x^2+6x+10$; б) $y=x^3\operatorname{tg}x$;

в) $y=\frac{x^2+1}{x^2+5}$; г) $y=\sin^5\left(x^2+4\right)$.

Розв'язання. а) За правилом диференціювання суми $(U+V)'=U'+V'$,

де $U=U(x)$, $V=V(x)$. Отже $y'=\left(8x^2\right)'+(6x)'+(10)'=16x+6$.

б) За правилом диференціювання добутку $y=U\cdot V$: $y'=U'V+UV'$

Тому $y'=\left(x^3\right)'\operatorname{tg}x+x^3(\operatorname{tg}x)'=3x^2\operatorname{tg}x+x^3\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

в) За правилом диференціювання частки $y=\dfrac{U}{V}$: $y'=\dfrac{U'V-UV'}{V^2}$.

Тому $y'=\dfrac{\left(x^2+1\right)'\left(x^2+5\right)-\left(x^2+1\right)\left(x^2+5\right)'}{\left(x^2+5\right)^2}=\dfrac{2x\cdot\left(x^2+5\right)-\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+5\right)^2}=$

$=\dfrac{2x^3+10x-3x^3-2x}{\left(x^2+5\right)^2}=\dfrac{8x}{\left(x^2+5\right)^2}$.

г) Позначимо $V=x^2+4$, $U=\sin V$, тоді $y=U^5$ і за правилом диференціювання складеної функції $y'=5U^4\cdot U'$, $U'=\cos V\cdot V'$. Оскільки $V'=2x$, а $U'=\cos\left(x^2+4\right)\cdot 2x$, то $y'=5\sin^4\left(x^2+4\right)\cdot\cos\left(x^2+4\right)\cdot 2x$

Відповідь: а) $y'=16x+6$; б) $y'=3x^2\operatorname{tg}x+x^3\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$; в) $y'=\dfrac{8x}{\left(x^2+5\right)^2}$;

г) $y'=5\sin^4\left(x^2+4\right)\cdot\cos\left(x^2+4\right)\cdot 2x$.

Завдання 2. Скласти рівняння дотичної і нормалі в точці $x_0=2$ до кривої $y=5x^2-2x+3$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці x_0 має вигляд: $y=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)$.

Рівняння нормалі до цього ж графіка у точці x_0 виглядає так: $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ (за умови, що $f'(x_0) \neq 0$).

Знайдемо похідну функції $y = 5x^2 - 2x + 3$ в точці $x_0 = 2$:

$$f'(x) = 10x - 2,\ f'(2) = 20 - 2 = 18.$$

Значення функції в точці $x_0 = 2$: $f(2) = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 3 = 19$.

Рівняння дотичної: $y = 19 + 18(x - 2)$ або $y = 18x - 17$.

Рівняння нормалі: $y = 19 - \frac{1}{18}(x - 2)$ або $y = -\frac{1}{18}x + 19\frac{1}{9}$

Відповідь: Рівняння дотичної: $y = 18x - 17$; рівняння нормалі: $y = -\frac{1}{18}x + 19\frac{1}{9}$.

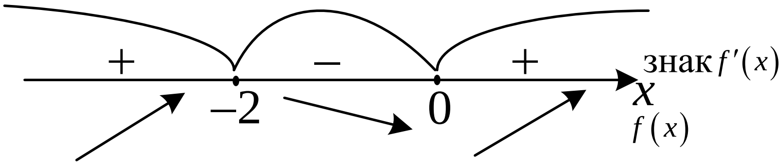
Завдання 3. Знайти інтервали монотонності і точки екстремуму для функції $y = 2x^3 + 6x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції: $f'(x) = 6x^2 + 12x$.

Далі знайдемо критичні точки функції, розв'язавши рівняння $f'(x) = 0$:

$6x^2 + 12x = 0$, $6x(x + 2) = 0$, $x_1 = 0$ та $x_2 = -2$ – критичні точки (тобто внутрішні точки області визначення, у яких $f'(x) = 0$ або не існує)

Позначимо критичні точки на числовій осі і визначимо знак $f'(x)$ у кожному з отриманих проміжків:



Робимо висновки: функція зростає на проміжках $\left(-\infty,-2\right]$ і $\left[0,+\infty\right)$, тому що там $f'(x)>0$, і спадає на проміжку $\left[-2,0\right]$, тому що там $f'(x)<0$. У точці $x=-2$ похідна змінює знак з «$+$» на «$-$», отже, це точка максимуму; а в точці $x=0$ похідна змінює знак з «$-$» на «$+$», отже, це точка мінімуму.

*Відповідь:*Функція зростає на інтервалах $\left(-\infty,-2\right]$, $\left[0,+\infty\right)$; функція спадає на інтервалі $\left[-2,0\right]$; точки екстремуму: $x_{\max}=-2$, $x_{\min}=0$.

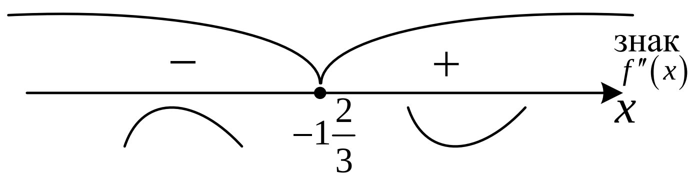
Завдання 4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції: $y=x^3+5x^2+x$.

Розв'язання. Для розв'язання задачі знайдемо другу похідну функції:

$$f'(x)=3x^2+10x+1;\ f''(x)=6x+10.$$

Далі розв'яжемо рівняння $f''(x)=0$: $6x+10=0$, $x=-\dfrac{5}{3}=-1\dfrac{2}{3}$.

Позначимо знайдену критичну точку на числовій осі та визначимо знак другої похідної у кожному з інтервалів, що утворилися:



Робимо висновок: там, де $f''(x)>0$, графік функції увігнутий, там, де $f''(x)<0$, графік функції опуклий.

Відповідь: На інтервалі $\left(-1\dfrac{2}{3},+\infty\right)$ графік функції увігнутий, а на інтервалі $\left(-\infty,-1\dfrac{2}{3}\right)$ графік функції опуклий.

Завдання 5. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3-$ $-27x+10$ на відрізку $\left[1,4\right]$.

Розв'язання. Знайдемо похідну $f'(x)=3x^2-27$ та критичні точки функції: $f'(x)=0$, $3x^2-27=0$, $x^2=9$, $x_1=3$, $x_2=-3$.

Заданому відрізку $[1,4]$ належить лише точка $x_1=3$. Обчислимо значення функції на кінцях відрізка і в точці $x_1=3$:

$f(1)=1-27+10=-16$; $f(3)=27-81+10=-44$; $f(4)=64-108+10=-34$.

Порівняємо ці значення між собою та зробимо висновок: найбільше значення функції на заданому інтервалі $\max\limits_{[1,4]} f(x)=f(1)=-16$, а найменше – $\min\limits_{[1,4]} f(x)=f(3)=-44$.

Відповідь: $\max\limits_{[1,4]} f(x)=-16$; $\min\limits_{[1,4]} f(x)=-44$.

Завдання 6. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x^2-1}$ за правилом Лопіталя .

Розв'язання. Правило Лопіталя має вигляд :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\|\frac{0}{0}\right\| \text{або} \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Отже: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x^2-1}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(e^x-e\right)'}{\left(x^2-1\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x}{2x}=\dfrac{e}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{e}{2}$.

Завдання 7. Знайти асимптоти графіка функції: $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Розв'язання. З'ясуємо спочатку, чи є у графіка похилі асимптоти. Рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$, де $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Обчислимо: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1;$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=2.$$

Отже, похила асимптота – $y=x+2$.

Тепер з'ясуємо, чи є у графіка вертикальні асимптоти. Функція неперервна на всій числовій осі, окрім точки $x=2$, де знаменник дробу обертається на нуль. Обчислимо однобічні границі функції в околі цієї точки:

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2}{x-2}=+\infty;\quad \lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2}{x-2}=-\infty.$$

Отже, в цій точці графік функції має вертикальну асимптоту, рівняння якої $x=2$.

Відповідь: похила асимптота $y=x+2$, вертикальна асимптота $x=2$.

Контрольні завдання за темою «Диференціальне числення функції однієї змінної»

Варіант 1

1. Знайти похідні: **а)** $y=5x^2+3x+4$; **б)** $y=x^2\cdot\sin x$; **в)** $y=\dfrac{\mathrm{tg}x}{x-1}$; **г)** $y=\ln^2\sqrt{x}$.

2. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y=x\ln x$ в точці $x_0=1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y=3x^2+6x+1$.

4. Знайти точки перегину графіка функції $y=2-4x^2+2x^3$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\dfrac{x-4}{x+2}$ на інтервалі $[-1,1]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y=x+\mathrm{arctg}|x|$.

Варіант 2

1. Знайти похідні: **а)** $y = 3x^2 + 2x + 1$; **б)** $y = x^3 \cdot \cos x$; **в)** $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 1}$; **г)** $y = 5^{\sin\sqrt{x}}$.

2. Скласти рівняння нормалі до графіка функції $y = x^3 + 2x^2 - 7$ в точці $x_0 = -1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = 2\sqrt{x} - 3x$.

4. Знайти точки перегину графіка функції $y = 5x^3 - 2x^2 + 4x$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$ на інтервалі $[-1,1]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{1 - \cos 2x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = x - 2\operatorname{arctg}|x|$.

Варіант 3

1. Знайти похідні: **а)** $y = \sqrt{x} + 3x^2 + 4$; **б)** $y = e^x \cdot x^3$; **в)** $y = \dfrac{\ln x}{x}$; **г)** $y = \operatorname{tg}^3 x$.

2. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3 - 2x + 6$ в точці $x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = 5x^2 + 4x - 2$.

4. Знайти точки перегину графіка функції $y = 3x^3 - 2x^2 + 4x$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{x + 2}{x - 2}$ на інтервалі $[-1,1]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{\sin x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = 3 + x + \dfrac{1}{x - 5}$.

Варіант 4

1. Знайти похідні: **а)** $y = 6x^3 + 3x^4 - 2$; **б)** $y = x^2 \cdot 5^x$; **в)** $y = \dfrac{\sin x}{x^2 + 1}$; **г)** $y = \arccos^3 x$

2. Скласти рівняння нормалі до графіка функції $y = x^3 + x^2 - 1$ в точці $x_0 = -1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = 7x^2 - 7x + 2$.

4. Знайти точки перегину графіка функції $y = 2x - 4x^2 + 3x^3$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$ на інтервалі $[-1,1]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - e^x - e^{-x}}{1 - \cos x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = 2 - x + \dfrac{3}{x + 1}$.

Варіант 5

1. Знайти похідні: **а)** $y = 5x^4 + 2x^3 - 1$ **б)** $y = (x + 1) \cdot e^x$; **в)** $y = \dfrac{3^x}{x^2 - 1}$; **г)** $y = \arcsin^5 x$.

2. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = \dfrac{x^2 - 4}{1 + x^2}$ в точці $x_0 = 0$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = \dfrac{x^2}{x - 3}$.

4. Знайти точки перегину графіка функції $y = 5x - 3x^2 + 4x^3$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^2 - x + 8$ на інтервалі $[-1,1]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{\sin x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = 2x - \operatorname{arcctg}|x|$.

Варіант 6

1. Знайти похідні: **а)** $y = 4 - 2x + x^3$; **б)** $y = x^5 \cdot \cos x$; **в)** $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$; **г)** $y = tg(x^2 + 1)$.

2. Скласти рівняння нормалі до графіка функції $y = x \ln x$ в точці $x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

4. Знайти точки перегину графіка функції $y = 6x^3 + 5x^2 + 3x + 1$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ на інтервалі $[-1,1]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = x - 4\operatorname{arctg}|x|$.

Варіант 7

1. Знайти похідні: **а)** $y = 10 - 3x + x^4$; **б)** $y = x^7 \cdot \operatorname{tg}x$; **в)** $y = \dfrac{\operatorname{arctg}x}{1 + x^3}$; **г)** $y = e^{\sqrt{\sin x}}$.

2. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = 4 - x - x^3$ в точці $x_0 = -1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = 7x^2 - 2x + 4$.

4. Знайти точки перегину графіка функції $y = 3x^3 + 2x^2 + 4x$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ на інтервалі $[-1,1]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 6^x}{\sin x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = 1 + 3x - \dfrac{2}{x-4}$.

Варіант 8

1. Знайти похідні: **а)** $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2+4$; **б)** $y=x^2\cdot\mathrm{tg}x$; **в)** $y=\frac{\sin x}{x^2+4}$; **г)** $y=\cos\sqrt{x}$

2. Скласти рівняння нормалі до графіка функції $y=3-x^3+2x^2$ в точці $x_0=1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y=6x^2+3x+1$.

4. Знайти точки перегину графіка функції $y=5-3x^2+8x^3$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\frac{x^3+1}{x^2}$ на інтервалі $\left[\frac{1}{2},3\right]$.

6. Обчислити границі за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2^x}{\cos x-1}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y=\frac{\sin x}{x}$.

Варіант 9

1. Знайти похідні: **а)** $y=\frac{1}{4}x^4+3x^2+2$; **б)** $y=x^3\cdot\cos x$; **в)** $y=\frac{\cos x}{x-x^2}$; **г)** $y=\ln^5 x$

2. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y=x^3+4x-2$ в точці $x_0=-1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y=3x^2+6x-2$.

4. Знайти точки перегину графіка функції $y=10x^3+5x^2+2x$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\frac{x^3-2}{x}$ на інтервалі $\left[-3,-\frac{1}{2}\right]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y=\frac{\cos x}{x}$.

Варіант 10

1. Знайти похідні:**а)** $y = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 6$; **б)** $y = (x^2 + 4) \cdot \sin x$; **в)** $y = \frac{\cos x}{x - 1}$;

г) $y = \sqrt{\cos(x^2 + 1)}$.

2. Записати рівняння нормалі до графіка функції в точці: $y = 3x^2 + 5x,\ x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = 5x^2 - 3x + 4$.

4. Знайти точки перегину графіка функції $y = 2x^3 + x^2 - 5$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 - 3x + 1$ на інтервалі $[-2, 0]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{5x} - e^{-5x}}{\sin x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = 4 + x - \frac{1}{x + 2}$.

Варіант 11

1. Знайти похідні:**а)** $y = 7 - 2x^2 + x^3$;**б)** $y = (x^2 + 1) \cdot e^x$; **в)** $y = \frac{\cos x}{x^5 + 1}$; **г)** $y = \ln^2 \sqrt{x}$.

2. Записати рівняння дотичної до графіка функції в точці: $y = x^3 - 2x,\ x_0 = 2$.

3. Знайти точки екстремуму функції $y = \frac{x^2}{x - 1}$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = 2 - 4x^2 + 2x^3$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^4 - x^3 + 2$ на інтервалі $[-1, 1]$.

6. Знайти значення границі за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{\operatorname{tg} 2x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.

Варіант 12

1. Знайти похідні: **а)** $y=\frac{1}{2}x^3+3x^2-2$; **б)** $y=(x^3-4)\cdot\ln x$; **в)** $y=\frac{\sin x}{x-1}$;

г) $y=\sqrt{\arcsin x}$.

2. Записати рівняння нормалі до графіка функції в точці: $y=\ln x+x,\ x_0=1$.

3. Знайти точки екстремуму функції $y=2\sqrt{x}-3x$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y=5x^3-2x^2+4x$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x^3+x^2-4$ на інтервалі $[-1,1]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y=\frac{x^2}{x+1}$.

Варіант 13

1.Знайти похідні: **а)** $y=3+8x^3-4x^2$; ; **б)** $y=x^4\cdot\mathrm{arctg}x$; **в)** $y=\frac{\sin x}{x^3-2}$;

г) $y=\cos^3(x+1)$.

2. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y=\frac{x+1}{x-3}$ в точці $x_0=1$.

3. Знайти точки екстремуму функції $y=\frac{x^2}{x+1}$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y=6x-3x^2+2x^3$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x-4\sqrt{x}+5$ на інтервалі $[1,9]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{\arcsin x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y=2-4x+\frac{1}{7-x}$.

Варіант 14

1. Знайти похідні: **а)** $y = 2 - 3x^2 + 2x^3$; **б)** $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$; **в)** $y = \dfrac{\ln x}{x+1}$;

г) $y = \operatorname{ctg}^2(\sqrt{x} - 1)$.

2. Записати рівняння нормалі до графіка функції в точці: $y = 3x^3 - 4x,\ x_0 = -1$.

3. Знайти точки екстремуму функції $y = \dfrac{x-1}{x^2}$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = 4x - 5x^2 - 3x^3$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 2x - 4\sqrt{x} + 1$на інтервалі $[0,4]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\operatorname{tg} x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{-3x}{x+1}$.

Варіант 15

1. Знайти похідні: **а)** $y = 1 - 4x^3 + 5x^2$; **б)** $y = (x^2 - 1) \cdot \operatorname{tg} x$; **в)** $y = \dfrac{\cos x}{x^2 + x}$;

г) $y = 3^{\sin x}$.

2. Записати рівняння дотичної до графіка функції в точці: $y = 2x^3 - 8x^2,\ x_0 = 1$.

3. Знайти точки екстремуму функції $y = 4\sqrt{x} - 6x$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = 2x^3 + 3x^2 - 10x$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}$на інтервалі $[1,4]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-4x)}{2\operatorname{arctg} x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Варіант 16

1. Знайти похідні: **а)** $y=5-4x^3+x$; **б)** $y=\arcsin x\cdot\sqrt{x}$; **в)** $y=\dfrac{e^x}{x^2-4}$;

г) $y=\operatorname{arctg}^2 x$.

2. Записати рівняння нормалі до графіка функції в точці: $y=x^4+2x^2,\ x_0=1$.

3. Знайти точки екстремуму функції $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y=x^3-2x^2+4x$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=2x-2\sqrt{x}+3$ на інтервалі $[0,1]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+8x)}{\sin 4x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{4x}{x+2}$.

Варіант 17

1. Знайти похідні: **а)** $y=4-5x^3+2x$; **б)** $y=\cos x\cdot\sqrt{x}$; **в)** $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{x^3-2}$;

г) $y=\sqrt[3]{\arcsin x}$.

2. Записати рівняння дотичної до графіка функції в точці: $y=x^2-2x^4,\ x_0=1$.

3. Знайти точки екстремуму функції $y=\dfrac{x}{x-3}$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y=5x-2x^2+4x^3$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=2\sqrt{x-1}-x+3$ на інтервалі $[1,5]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{3x}{x-2}$.

Варіант 18

1. Знайти похідні: **а)** $y=7x^2+x^4-1$; **б)** $y=3^x\cdot x^3$; **в)** $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$; **г)** $y=\sin^2 x^3$.

2. Записати рівняння нормалі до графіка функції в точці: $y=3x^3+x^2,\ x_0=1$.

3. Знайти точки екстремуму функції $y=\dfrac{x-4}{x^2}$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y=4x^3+3x^2-1$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x+2\sqrt{x}+1$ на інтервалі $[0,4]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+8}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{-x}{2x+3}$

Варіант 19

1. Знайти похідні: **а)** $y=3x^2-5x+8$; **б)** $y=2^x\cdot x^2$; **в)** $y=\dfrac{\mathrm{tg}x}{x+1}$; **г)** $y=\arccos x^3$.

2. Записати рівняння дотичної до графіка функції в точці: $y=5x^2+2x,\ x_0=1$.

3. Знайти точки екстремуму функції $y=\dfrac{x-2}{x^2}$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y=x^2-2x^3+5$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x+\dfrac{1}{x}+2$ на інтервалі $[0{,}5\,,2]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{x^2}{x+4}$.

Варіант 20

1.Знайти похідні: **а)** $y = 5x^7 + 7x^5 - 1$; **б)** $y = \sin x \cdot (x^2 + 4)$; **в)** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$;

г) $y = \sqrt{\arcsin x}$.

2. Записати рівняння нормалі до графіка функції в точці: $y = 2x^3 + 3x^2,\ x_0 = 1$.

3. Знайти точки екстремуму функції $y = \dfrac{x^2}{x-3}$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = 4x - 5x^2 + 2x^3$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 8x + \dfrac{4}{x^2} - 3$ на інтервалі $[0{,}5\,,2]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 9}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x}{x+1}$.

Варіант 21

1. Знайти похідні: **а)** $y = 8x^3 - 3x + 2$; **б)** $y = x^3 \cdot \cos x$; **в)** $y = \dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x^2}$;

г) $y = \mathrm{ctg}\sqrt{x+1}$.

2. Записати рівняння дотичної до графіка функції в точці: $y = 3x^3 + 2x;\ x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = 3x^2 + 5x - 1$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = 5x - 6x^2 + x^3$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$ на інтервалі $[1{,}3]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 1}{\sin 2x}$

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x}{x-1}$.

Варіант 22

1. Знайти похідні: **а)** $y = 3x^2 + 2x - 1$; **б)** $y = e^x \cdot \sin x$; **в)** $y = \dfrac{x+1}{\ln x}$; **г)** $y = \arcsin x^5$.

2. Записати рівняння нормалі до графіка функції в точці: $y = \ln x + x$; $x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = \ln x - x$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = 2x^3 + 4x^2 + 3x - 1$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 4 - x + 4\sqrt{x}$ на інтервалі $[1, 4]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x - e}{\sin(x-1)}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^2+3}{x-4}$.

Варіант 23

1. Знайти похідні: **а)** $y = 6x^2 - 3x + 1$; **б)** $y = (x+7) \cdot 5^x$; **в)** $y = \dfrac{\mathrm{ctg} x}{x^2 - 2}$;

г) $y = \arcsin e^x$.

2. Записати рівняння дотичної до графіка функції в точці: $y = 3x^2 + 5x$; $x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = \dfrac{x}{x-3}$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = 6 - 4x^2 + 5x^3$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x - 3\sqrt[3]{x} + 4$ на інтервалі $[0, 8]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{\arcsin x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = 3x + \dfrac{1}{x^3}$.

Варіант 24

1. Знайти похідні: **а)** $y = 6 - 3x^2 + 8x$; **б)** $y = \mathrm{tg}x \cdot 2^x$; **в)** $y = \dfrac{x-2}{x^3+4}$;

г) $y = \mathrm{arctg}\sqrt{e^x}$.

2. Записати рівняння нормалі до графіка функції в точці: $y = 3x^2 + 4x$; $x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = -x^3 + 2x^2 - 4$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = xe^{-x}$ на інтервалі $[-1,3]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4^x - 4}{x^2 - 1}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = 2x - \dfrac{1}{x^2}$.

Варіант 25

1. Знайти похідні: **а)** $y = 4 - 5x^2 + 9x$; **б)** $y = 3^x \cdot \cos x$; **в)** $y = \dfrac{\mathrm{ctg}x}{x^2+25}$; **г)** $y = 7^{\sin\sqrt{x}}$.

2. Записати рівняння дотичної до графіка функції в точці: $y = 2x^3 - 8x^2$; $x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = x \cdot e^x$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = -2x^3 + 3x^2 + 7$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{8}{x} - \dfrac{x^2}{2} + 5$ на інтервалі $[-4,-1]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{\mathrm{arctg}\, x}$

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{1+4x^2}{x+2}$.

Варіант 26

1. Знайти похідні: **а)** $y = 5 - 2x^2 + 3x^3$; **б)** $y = x^2 \cdot \sin x$; **в)** $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 1}$;

г) $y = \arcsin(x^3 - 1)$.

2. Записати рівняння нормалі до графіка функції в точці: $y = x^4 + 2x^2$; $x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = x \cdot e^{3x}$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = 3x^3 + 4x^2 - 5x$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{x^2}{x-3}$ на інтервалі $[-1, 2]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5^x - 5}{\ln x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = 4x - \dfrac{1}{x} + 8$.

Варіант 27

1. Знайти похідні: **а)** $y = 2 + 4x^2 - 2x^3$; **б)** $y = x^5 \cdot \mathrm{tg} x$; **в)** $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

г) $y = \sqrt{\sin \ln x}$.

2. Записати рівняння дотичної до графіка функції в точці: $y = x^2 - 2x^4$; $x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = x^3 + 3x^2 + 2$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = 4x^3 + 2x^2 + 4x - 1$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{x^2}{x+2}$ на інтервалі $[-5, -1]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ln x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = 2x + \dfrac{5}{x-3} + 1$.

Варіант 28

1. Знайти похідні: **а)** $y = 5x^2 + 6x - 4$; **б)** $y = x \cdot \sin x$; **в)** $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$; **г)** $y = \sin^3 x^3$.

2. Записати рівняння нормалі до графіка функції в точці: $y = 3x^3 + x^2$; $x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = 4x^3 + 12x^2$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = x^3 + 5x^2 + x$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{x^2}{2x - 5}$ на інтервалі $[-1, 2]$

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^3}{(1 + x)^2}$.

Варіант 29

1. Знайти похідні: **а)** $y = 3x - 2x^2 + 6$; **б)** $y = x \cdot \cos x$; **в)** $y = \dfrac{e^x}{1 - x}$; **г)** $y = \ln \sqrt{\sin x}$

2. Записати рівняння дотичної до графіка функції в точці: $y = 5x^2 + 2x$; $x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = x^2 \cdot e^x$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = 2 - 3x + 4x^2 - 8x^3$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \sqrt{4 - x^2}$ на інтервалі $[-1, 2]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

Варіант 30

1. Знайти похідні: **а)** $y = x^5 + 3x^2 - 6$; **б)** $y = 2^x \cdot x^2$; **в)** $y = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$;

г) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x+1}$.

2. Записати рівняння нормалі до графіка функції в точці: $y = 2x^3 + 3x^2$; $x_0 = 1$.

3. Знайти інтервали монотонності функції $y = \dfrac{x+1}{x}$.

4. Знайти інтервали увігнутості та опуклості графіка функції $y = 5x^3 - 2x^2$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ на інтервалі $[-1, 2]$.

6. Обчислити границю за допомогою правила Лопіталя: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$.

7. Знайти асимптоти графіка функції $y = x + 1 - \dfrac{1}{x-1}$.

Розділ 4. «Невизначений інтеграл»

РГЗ з цієї теми включає 12 завдань на обчислення типових невизначених інтегралів. Для виконання роботи студенти мають знати таблицю інтегралів, їх основні властивості та бути знайомими з методом інтегрування частинами.

Зразок виконання прикладів розрахунково-графічного завдання

Приклад 1. Знайти $\int \left(x^5 + 3x^2\right) dx$.

Розв'язання. Скористаємося правилами

$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$; $\int C \cdot f(x)dx = C \int f(x)dx$, де C – стала, та табличним інтегралом $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$:

$$\int\left(x^5+3x^2\right)dx=\frac{x^6}{6}+\frac{3x^3}{3}+C=\frac{1}{6}x^6+x^3+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{6}x^6+x^3+C$.

Приклад 2. Знайти $\int\sin\frac{x}{8}dx$.

Розв'язання. Відомо, що $\int f\left(ax\right)dx=\frac{1}{a}F\left(ax\right)+C$ і $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$. Тоді $\int\sin\frac{x}{8}dx=-8\cos\frac{x}{8}+C$.

Відповідь: $-8\cos\frac{x}{8}+C$.

Приклад 3. Знайти $\int\frac{dx}{x^2-81}$.

Розв'язання. Скористаємося табличним інтегралом
$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$: $\int\frac{dx}{x^2-81}=\int\frac{dx}{x^2-9^2}=\frac{1}{18}\ln\left|\frac{x-9}{x+9}\right|+C$.

Відповідь: $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{x-9}{x+9}\right|+C$.

Приклад 4. Знайти $\int\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)dx$.

Розв'язання. $\int f\left(ax+b\right)dx=\frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C$ і $\int\cos x\,dx=\sin x+C$, отже:

$$\int\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{1}{5}\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{5}\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)+C$.

Приклад 5. Знайти $\int e^{8x+2}dx$.

Розв'язання. $\int f\left(ax+b\right)dx=\frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C$ і $\int e^x dx=e^x+C$, отже:

$$\int e^{8x+2}dx=\frac{1}{8}e^{8x+2}+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{8}e^{8x+2}+C$.

Приклад 6. Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+17}}$.

Розв'язання. Скористаємося табличним інтегралом: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+17}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+17}\right|+C$.

Відповідь: $\ln\left|x+\sqrt{x^2+17}\right|+C$.

Приклад 7. Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$.

Розв'язання. При інтегруванні функцій, що містять квадратний тричлен, спочатку виділяють повний квадрат з квадратного тричлена.

$$x^2+6x+5=(x+3)^2-9+5=(x+3)^2-4.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-4}}=\arcsin\frac{x+3}{4}+C.$$

Відповідь: $\arcsin\frac{x+3}{4}+C$.

Приклад 8, 9, 10. Знайти: а) $\int\frac{\ln^{10}x}{x}dx$; б) $\int\sin^5 x\cos x\,dx$.

Розв'язання. Використаємо метод заміни змінної, що дає змогу звести інтеграл до табличного.

а) $\int\frac{\ln^{10}x}{x}dx=\left\|\begin{matrix}t=\ln x\\ dt=\frac{dx}{x}\end{matrix}\right\|=\int t^{10}dt=\frac{t^{11}}{11}+C=\frac{1}{11}\ln^{11}x+C$.

Відповідь: $\frac{1}{11}\ln^{11}x+C$.

б) $\int \sin^5 x \cos x\,dx = \left\| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix} \right\| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{6}\sin^6 x + C$.

Відповідь: $\frac{1}{6}\sin^6 x + C$.

Приклад 11, 12. Знайти: а) $\int x^2 \cdot \ln x\,dx$; б) $\int x \cdot \sin 2x\,dx$.

Розв'язання. Скористаємося методом інтегрування частинами. Якщо $U = U(x)$ і $V = V(x)$ – функції, що мають неперервні похідні, то $\int UdV = U \cdot V - \int VdU$. В інтегралах $\int P_w(x) \cdot e^{2x} dx$, $\int P_w(x) \cdot a^{\alpha x} dx$, $\int P_w(x) \cdot \cos \alpha x\,dx$, $\int P_w(x) \cdot \sin \alpha x\,dx$ $U = P_w(x)$, а в інтегралах, що містять під знаком інтеграла $arc -$функцію або логарифмічну функцію, через U позначають саме їх. Отже:

а) $\int x^2 \cdot \ln x\,dx = \left\| \begin{matrix} U = \ln x; & dU = \frac{1}{x}dx \\ dV = x^2 dx; & V = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right\| = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$.

Відповідь: $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$.

б) $\int x \cdot \sin 2x\,dx = \left\| \begin{matrix} U = x; & dU = dx \\ V = \sin 2x\,dx; & V = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right\| = -\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

Контрольні завдання за темою «Невизначений інтеграл»

Обчислити інтеграли:

Варіант 1

1. $\int\left(x^3+6x^5\right)dx$.

2. $\int\sin\frac{x}{5}dx$.

3. $\int\frac{dx}{x^2+36}$.

4. $\int\cos\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

5. $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{49-x^2}}$.

7. $\int\frac{dx}{x^2+10x+21}$.

8. $\int\frac{\operatorname{arctg}^8 x}{1+x^2}dx$.

9. $\int\frac{6x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$.

10. $\int\frac{5^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$.

11. $\int\ln x dx$.

12. $\int x\cos 3x dx$.

Варіант 2

1. $\int\left(x^4+2x^3\right)dx$.

2. $\int\cos\frac{x}{8}dx$.

3. $\int\frac{dx}{x^2-64}$.

4. $\int\sin\left(7x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

5. $\int e^{15x+1}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+17}}$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+21}}$

8. $\int\frac{\ln^5 x}{x}dx$.

9. $\int\frac{10x}{5x^2+1}dx$.

10. $\int\cos^{10}x\cdot\sin x dx$.

11. $\int x\ln x dx$.

12. $\int x\sin 3x dx$.

Варіант 3

1. $\int \left(x + x^3\right)dx$.

2. $\int e^{\frac{x}{3}}dx$.

3. $\int \frac{dx}{x^2+7}$.

4. $\int \cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 20x}$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$.

7. $\int \frac{dx}{x^2+12x+40}$

8. $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}$.

9. $\int \frac{8x}{\sqrt{4x^2+2}}dx$.

10. $\int \frac{\cos x}{\sin^8 x}dx$.

11. $\int \arcsin x dx$.

12. $\int x\cos 2x dx$.

Варіант 4

1. $\int \left(3-\frac{x^2}{2}\right)dx$.

2. $\int \frac{dx}{x^4}$.

3. $\int \frac{dx}{x^2-3}$.

4. $\int \sin\left(8x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

5. $\int e^{18x+1}dx$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+20}}$.

7. $\int \frac{dx}{x^2+12x+32}$

8. $\int \sin^7 x\cos x dx$.

9. $\int \frac{x^4}{3x^5+1}dx$.

10. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$.

11. $\int \arccos x dx$.

12. $\int x\sin 2x dx$.

Варіант 5

1. $\int\left(x^3 - x^2\right)dx$.

2. $\int \frac{dx}{\sin^2 7x}$.

3. $\int \frac{dx}{x^2 + 64}$.

4. $\int \cos\left(8x + \frac{\pi}{4}\right)dx$.

5. $\int e^{25x-1}dx$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{81 - x^2}}$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{24 - 2x - x^2}}$

8. $\int \sin^3 x \cos x dx$.

9. $\int \frac{12x}{6x^2 + 25}dx$.

10. $\int 2x \cdot e^{x^2}dx$.

11. $\int \operatorname{arctg} x dx$.

12. $\int x \cos 4x dx$.

Варіант 6

1. $\int\left(5x^2 + 3x\right)dx$.

2. $\int e^{3x}dx$.

3. $\int \frac{dx}{x^2 + 1}$.

4. $\int \sin\left(7x + \frac{\pi}{3}\right)dx$.

5. $\int (x - 5)^{10} dx$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 21}}$.

7. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 17}$

8. $\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x}dx$.

9. $\int 2x \cdot \sin x^2 dx$.

10. $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1 + x^2}dx$.

11. $\int \operatorname{arcctg} x dx$.

12. $\int x \sin 4x dx$.

Варіант 7

1. $\int \left(4x^2 + 2x^3\right) dx$.

2. $\int \sin\frac{x}{3} dx$.

3. $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$.

4. $\int \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) dx$.

5. $\int e^{7x+8} dx$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 22}}$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 6x + 16}}$

8. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 - 1}} dx$.

9. $\int \frac{e^{\mathrm{tg} x}}{\cos^2 x} dx$.

10. $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

11. $\int x^2 \ln x dx$.

12. $\int x e^x dx$.

Варіант 8

1. $\int \left(6x^5 + x\right) dx$.

2. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.

3. $\int \frac{dx}{x^2 + 2}$.

4. $\int \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) dx$.

5. $\int e^{10x+3} dx$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 23}}$.

7. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$

8. $\int \frac{5x^4}{x^5 + 1} dx$.

9. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

10. $\int x \cdot \sin x^2 dx$.

11. $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

12. $\int x \cdot 3^x dx$.

Варіант 9

1. $\int\left(x^7+x+1\right)dx$.

2. $\int\cos\frac{x}{12}dx$.

3. $\int\frac{dx}{x^2-2}$.

4. $\int\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)dx$.

5. $\int(x-4)^{12}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+24}}$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{12+4x-x^2}}$

8. $\int\frac{4x^3}{\sqrt{x^4-2}}dx$.

9. $\int e^{\sin x}\cdot\cos x dx$.

10. $\int\frac{5^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$.

11. $\int\arcsin 2x dx$.

12. $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$.

Варіант 10

1. $\int\left(10x^6+x-1\right)dx$.

2. $\int\frac{dx}{\cos^2 8x}$.

3. $\int\frac{dx}{x^2+3}$.

4. $\int\sin\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)dx$.

5. $\int e^{5x-6}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+18}}$.

7. $\int\frac{dx}{x^2-10x+29}$

8. $\int\frac{7x^6}{x^7-12}dx$.

9. $\int\sin^7 x\cdot\cos x dx$.

10. $\int 2x\left(x^2+4\right)^{10}dx$.

11. $\int\arccos 2x dx$.

12. $\int\frac{x}{\sin^2 x}dx$.

Варіант 11

1. $\int\left(x^2+3x+1\right)dx$.

2. $\int\sin 15x dx$.

3. $\int\frac{dx}{x^2-3}$.

4. $\int\cos\left(\frac{\pi}{4}-7x\right)dx$.

5. $\int e^{17x+6}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-26}}$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+10x-16}}$

8. $\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

9. $\int\cos^5 x\cdot\sin x dx$.

10. $\int 3x^2\cdot e^{x^3}dx$.

11. $\int\operatorname{arctg}2x dx$.

12. $\int xe^{-x}dx$.

Варіант 12

1. $\int\left(3x^4+x^2\right)dx$.

2. $\int e^{13x}dx$.

3. $\int\frac{dx}{x^2+5}$.

4. $\int\sin\left(\frac{\pi}{8}-2x\right)dx$.

5. $\int(x+12)^{15}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+27}}$.

7. $\int\frac{dx}{x^2-8x+25}$

8. $\int\frac{2x}{\sqrt{5+x^2}}dx$.

9. $\int\frac{2x}{\cos^2 x^2}dx$.

10. $\int\cos^{10}x\cdot\sin x dx$.

11. $\int\operatorname{arcctg}2x dx$.

12. $\int x\cdot 2^x dx$.

Варіант 13

1. $\int\left(3x+5x^2\right)dx$.

2. $\int\sin 10x dx$.

3. $\int\frac{dx}{x^2-5}$.

4. $\int\cos\left(\frac{\pi}{9}+7x\right)dx$.

5. $\int e^{18x+7}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-28}}$.

7. $\int\frac{dx}{x^2-12x+40}$

8. $\int\frac{4x}{2x^2-1}dx$.

9. $\int x^3\cdot\cos x^4 dx$.

10. $\int\frac{\arcsin^7 x}{1+x^2}dx$.

11. $\int x^3\ln x dx$.

12. $\int(x+2)\cos x dx$.

Варіант 14

1. $\int\left(7x+3x^4\right)dx$.

2. $\int 5^{16x}dx$.

3. $\int\frac{dx}{x^2+6}$.

4. $\int\sin\left(\frac{\pi}{12}-9x\right)dx$.

5. $\int(x-4)^{20}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+29}}$.

7. $\int\frac{dx}{x^2-14x+53}$

8. $\int\frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

9. $\int 2x\cdot e^{x^2+1}dx$.

10. $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$.

11. $\int\sqrt{x^3}\ln x dx$.

12. $\int(2x-1)\cos x dx$.

Варіант 15

1. $\int\left(5x^2+2x+1\right)dx$.

2. $\int\sin\frac{x}{12}dx$.

3. $\int\frac{dx}{x^2-6}$.

4. $\int\cos\left(\frac{\pi}{12}+8x\right)dx$.

5. $\int e^{15x-4}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-30}}$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2+4x}}$

8. $\int\frac{6x^5}{x^6+2}dx$.

9. $\int\sin^{13}x\cdot\cos x dx$.

10. $\int 2x\cdot 5^{x^2}dx$.

11. $\int(2x+1)\ln x dx$.

12. $\int(x-5)\sin x dx$.

Варіант 16

1. $\int\left(3x^2+2x\right)dx$.

2. $\int\sin\frac{x}{4}dx$.

3. $\int\frac{dx}{x^2-4}$.

4. $\int e^{5x-2}dx$.

5. $\int\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$.

7. $\int\frac{dx}{x^2-2x+5}$

8. $\int\sin^3 x\cos x dx$.

9. $\int\frac{e^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$.

10. $\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}dx$.

11. $\int\ln\left(x^2+4\right)dx$.

12. $\int(3x+1)\sin x dx$.

Варіант 17

1. $\int\left(x^2+x\right)dx$.

2. $\int \cos 4x dx$.

3. $\int \frac{dx}{x^2+4}$.

4. $\int 5^{3x+4} dx$.

5. $\int \sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

7. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

8. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$.

9. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx$.

10. $\int \frac{\mathrm{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$.

11. $\int x \,\mathrm{arctg}\, x dx$.

12. $\int x \cdot 3^{-x} dx$.

Варіант 18

1. $\int\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)dx$.

2. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$.

3. $\int \frac{dx}{x^2-9}$.

4. $\int e^{2x+3} dx$.

5. $\int \sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)dx$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$

8. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$.

9. $\int \frac{1-5x^4}{x-x^5} dx$.

10. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

11. $\int x \,\mathrm{arcctg}\, x dx$.

12. $\int x \cdot 2^{-x} dx$.

Варіант 19

1. $\int \left(x^4 + x^2 \right) dx$.

2. $\int e^{7x} dx$.

3. $\int \frac{dx}{x^2 - 25}$.

4. $\int \sin\left(6x - \frac{\pi}{4} \right) dx$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}}$.

7. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$

8. $\int \sin^{10} x \cos x dx$.

9. $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

10. $\int \frac{3^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$.

11. $\int \arcsin 3x dx$.

12. $\int \frac{x+2}{\cos^2 x} dx$.

Варіант 20

1. $\int \left(x + x^2 \right) dx$.

2. $\int \sin 7x dx$.

3. $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$.

4. $\int \sin\left(x + \frac{\pi}{3} \right) dx$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 20}}$

8. $\int \frac{2x+3}{x^2 + 3x + 1} dx$.

9. $\int \cos^5 x \sin x dx$.

10. $\int 2x \cdot 5^{x^2} dx$.

11. $\int \arccos 3x dx$.

12. $\int \frac{x-4}{\sin^2 x} dx$.

Варіант 21

1. $\int\left(2+x^3\right)dx$.

2. $\int\sin\frac{x}{5}dx$.

3. $\int\frac{dx}{x^2-16}$.

4. $\int\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

5. $\int e^{3x+4}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

7. $\int\frac{dx}{x^2-6x-7}$

8. $\int 2x\cdot e^{x^2}dx$.

9. $\int\frac{2xdx}{\sqrt{x^2+5}}$.

10. $\int\frac{\sin x}{\cos^6 x}dx$.

11. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$.

12. $\int x\cos 5xdx$.

Варіант 22

1. $\int\left(x^7+2x\right)dx$.

2. $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$.

3. $\int\frac{dx}{x^2+81}$.

4. $\int\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

5. $\int\frac{dx}{\sin^2 7x}$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{15-2x-x^2}}$.

8. $\int\frac{3x^2}{x^3-4}dx$.

9. $\int\frac{2xdx}{\sqrt{x^2-3}}$.

10. $\int\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx$.

11. $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$.

12. $\int x\sin 5xdx$.

Варіант 23

1. $\int\left(3x^2+5\right)dx$.

2. $\int\frac{dx}{\sin^2 5x}$.

3. $\int\frac{dx}{x^2-100}$.

4. $\int\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx$.

5. $\int e^{7x+4}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

7. $\int\frac{dx}{x^2+2x+26}$

8. $\int x^3\sin\left(x^4+1\right)dx$.

9. $\int\frac{x}{x^2+4}dx$.

10. $\int\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$.

11. $\int\ln\left(x+1\right)dx$.

12. $\int\left(4-x\right)\cos xdx$.

Варіант 24

1. $\int\left(3x^2+x^5\right)dx$.

2. $\int 3^x dx$.

3. $\int\frac{dx}{x^2+16}$.

4. $\int\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

5. $\int\frac{dx}{\sin^2 2x}$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

7. $\int\frac{dx}{x^2+2x-15}$

8. $\int 2x\left(x^2+1\right)^{10}dx$.

9. $\int\frac{\arcsin^5 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

10. $\int\sin x\cos^4 xdx$.

11. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

12. $\int\left(3-2x\right)\sin xdx$.

Варіант 25

1. $\int \left(x^8 + x\right) dx$.

2. $\int 7^{20x} dx$.

3. $\int \frac{dx}{x^2 - 36}$.

4. $\int \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) dx$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 8x}$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}}$

8. $\int \frac{2x}{x^2 - 5} dx$.

9. $\int 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$.

10. $\int \cos^8 x \sin x dx$.

11. $\int \ln(x - 1) dx$.

12. $\int x \cdot \leq 5^x dx$.

Варіант 26

1. $\int \left(x + x^5\right) dx$.

2. $\int e^{8x} dx$.

3. $\int \frac{dx}{x^2 + 100}$.

4. $\int \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) dx$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 10x}$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}}$.

7. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$

8. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}} dx$.

9. $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1 + x^2} dx$.

10. $\int \frac{2x}{x^4 + 9} dx$.

11. $\int \ln\left(x^2 + 1\right) dx$.

12. $\int (x + 1) \cos 2x dx$.

Варіант 27

1. $\int\left(6+x+x^2\right)dx$.

2. $\int\frac{dx}{x}$.

3. $\int\frac{dx}{x^2+25}$.

4. $\int\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)dx$.

5. $\int e^{10x-4}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

7. $\int\frac{dx}{x^2+4x-12}$

8. $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$.

9. $\int\frac{3x^2}{\sqrt{x^3-5}}dx$.

10. $\int e^{\sin x}\cdot\cos x dx$.

11. $\int\operatorname{arctg}3x dx$.

12. $\int\frac{x}{\cos^2 2x}dx$.

Варіант 28

1. $\int\left(x^3+5x^4\right)dx$.

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

3. $\int\frac{dx}{x^2-49}$.

4. $\int\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

5. $\int\frac{dx}{\cos^2 15x}$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-16}}$

8. $\int\frac{4x^3}{x^4-1}dx$.

9. $\int 2x\sin\left(x^2-1\right)dx$.

10. $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$.

11. $\int\operatorname{arcctg}3x dx$.

12. $\int\frac{x}{\sin^2 2x}dx$.

Варіант 29

1. $\int\left(x^2+x^7\right)dx$.

2. $\int\frac{dx}{x^2}$.

3. $\int\frac{dx}{x^2+2}$.

4. $\int\cos\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)dx$.

5. $\int\frac{dx}{\sin^2 10x}$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-8x-7}}$

8. $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$.

9. $\int\frac{4x}{\sqrt{2x^2-1}}dx$.

10. $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$.

11. $\int x^4\ln x dx$.

12. $\int xe^{2x}dx$.

Варіант 30

1. $\int(2x-5)dx$.

2. $\int\frac{5}{x^3}dx$.

3. $\int\frac{dx}{x^2-5}$.

4. $\int\sin\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

5. $\int e^{12x+1}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$.

7. $\int\frac{dx}{x^2+10x+29}$

8. $\int\frac{\arcsin^7 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

9. $\int\frac{x}{5x^2-1}dx$.

10. $\int\sin^{15} x\cos x dx$.

11. $\int\frac{\ln x}{x^4}dx$.

12. $\int xe^{5x}dx$.

Розділ 5. «Визначений інтеграл»

РГЗ з цієї теми складається з 4 завдань на обчислення та застосування визначеного інтеграла. Для виконання роботи студенти повинні вміти інтегрувати, знати формулу Ньютона-Лейбниця, основні геометричні застосування визначеного інтеграла, а саме - обчислення площ криволінійних трапецій та об'ємів тіл обертання в декартовій системі координат за його допомогою , а також бути знайомими з поняттям невласного інтеграла I роду та методикою його обчислення. Завдання на геометричні застосування мають супроводжуватись малюнками.

Зразок розв'язання прикладів розрахунково-графічного завдання.

Завдання 1. Обчислити $\int\limits_1^2 \left(5x-3x^2\right)dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу Ньютона – Лейбніца: $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = F\left(x\right)\Big|_a^b = F\left(b\right)-F\left(a\right)$:

$$\int\limits_1^2 \left(5x-3x^2\right)dx = \left(\frac{5x^2}{2}-\frac{3x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \left(10-8\right)-\left(\frac{5}{2}-1\right)=1{,}5.$$

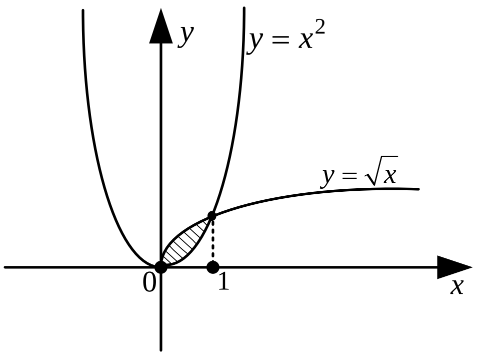
Відповідь: $1{,}5$.

Завдання 2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y=x^2$ та $y=\sqrt{x}$.

Розв'язання. Зобразимо задані лінії та знайдемо абсциси точок їх перетину:

$$x^2=\sqrt{x};\quad x^4=x;\quad x^4-x=0;\quad x\left(x^3-1\right)=0;$$

$$x=0 \text{ або } x^3-1=0;\quad x^3=1;\quad x=1.$$



Шукана фігура знаходиться між графіками двох функцій, зверху вона обмежена графіком $f_2(x) = \sqrt{x}$, знизу – $f_1(x) = x^2$. Проекцією цієї фігури на вісь OX є відрізок $[0,1]$. Площу плоскої фігури можна обчислити за формулою:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$

$$\text{Отже: } S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2 \right) dx = \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$ кв. од.

Завдання 3. Обчислити довжину дуги лінії а) $y = 5 - \frac{1}{3}\sqrt{x^3}$, $0 \le x \le 12$;

б) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t; \\ y = 3\sin^2 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

*Розв'язання.*_а) Якщо плоска крива задана рівнянням $y = y(x)$, а $y(x)$ та $y'(x)$ неперервні на інтервалі $[a, b]$, то довжина дуги кривої обчислюється за формулою: $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x) \right)^2} dx$. Отже:

$$y'(x) = \left(5 - \frac{1}{3}\sqrt{x^3} \right)' = \left(5 - \frac{1}{3} x^{3/2} \right)' = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} = -\frac{1}{2} x^{1/2}; \quad \sqrt{1 + \left(y'(x) \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} x};$$

$$\ell = \int_0^{12} \sqrt{1 + \frac{1}{4} x}\, dx = 4 \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{4} x \right)^{3/2} \Bigg|_0^{12} = \frac{8}{3} \left(4^{3/2} - 1 \right) = \frac{8}{3} \cdot 7 = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $18\frac{2}{3}$.

б) Якщо лінія задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ де $x(t), y(t)$ та $x'(t), y'(t)$ мають неперервні похідні на $[\alpha, \beta]$, то довжина її дуги на цьому інтервалі обчислюється за формулою: $\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)^2 + \left(y'(t)\right)^2\right)}\, dt$.

Для заданої функції:

$$x_t' = 3 \cdot 2\cos t \cdot (-\sin t) = -6\cos t \sin t; \quad y_t' = 3 \cdot 2\sin t \cdot \cos t = 6\sin t \cdot \cos t.$$

$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = \sqrt{36\cos^2 t \cdot \sin^2 t + 36\sin^2 t \cdot \cos^2 t} = \sqrt{72\cos^2 t \cdot \sin^2 t} =$$

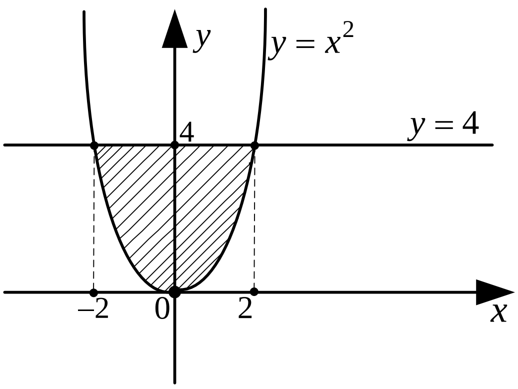
$$= 6\sqrt{2}\cos t \cdot \sin t = 3\sqrt{2}\sin 2t.$$

Тоді, $\ell = \int\limits_{0}^{\pi/2} 3\sqrt{2}\sin 2t\, dt = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-1) = 3\sqrt{2}$.

Відповідь: $3\sqrt{2}$.

Завдання 4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні фігури, що обмежена лініями $y = x^2$, $y = 4$: а) навколо осі OX, б) навколо осі OY.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, яка обмежена заданими лініями.



а) Об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі OX фігури, що обмежена заданими лініями, знайдемо за формулою: $V_{OX} = V_1 - V_2$, де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX криволінійної трапеції, що обмежена прямою $y = 4$, а V_2 – параболою $y = x^2$. Об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі OX обчислюється за формулою:

$$V_{OX}=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx$$

Знайдемо границі інтегрування: $y=x^2$; $y=4$; $x^2=4$; $x=\pm 2$.

$$V_{OX}=V_1-V_2=\pi\int_{-2}^{2}\left(4^2-\left(x^2\right)^2\right)dx==2\pi\int_0^2\left(16-x^4\right)dx=$$

$$=2\pi\left(16x-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=2\pi\left(32-\frac{32}{5}\right)=50\frac{4}{5}\pi$$

Відповідь: $50\frac{4}{5}\pi$ куб. од.

б) При обертанні цієї ж фігури навколо осі OY, утворюється параболоїд, об'єм якого можна знайти за формулою: $V_{OY}=\pi\int_c^d\left(\varphi(y)\right)^2dy$. Якщо $y=x^2$, то $x=\sqrt{y}$. Отже: $V_{OY}=\pi\int_0^4\left(\sqrt{y}\right)^2dy=\pi\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^4=8\pi$.

Відповідь: 8π куб. од.

Завдання 5. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність $\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+6x+18}$.

Розв'язання. Користуючись означенням: $\int_a^\infty f(x)dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx$, маємо:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+6x+18}=\int_0^\infty\frac{dx}{(x+3)^2+9}=\lim_{A\to+\infty}\int_0^\infty\frac{dx}{(x+3)^2+3^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{A\to+\infty}\text{arctg}\frac{x+3}{3}\Bigg|_0^A=\frac{1}{3}\left(\lim_{A\to+\infty}\frac{A+3}{3}-\text{arctg}1\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{12}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{12}$.

Контрольні завдання за темою «Визначений інтеграл»

Варіант 1

1. Обчисліть інтеграли: а) $\int_0^1 \left(2x^3 - 4x\right)dx;$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx.$

2. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:
а) $y = x^5, x = 1, \; y = 0;$ б) $y = 3x, y = -x, \; x = 2.$
3. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями:
а) $y = 0, y = 3\sqrt{x}, \; x = 1$ навколо осі OX; б) $y = \frac{3}{x}, \; y = 1, y = 3$ навколо осі OY.

4. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}.$

Варіант 2

1. Обчисліть інтеграли: а) $\int_1^3 \left(4x^2 + 8\right)dx;$ б) $\int_0^1 e^{2x} dx.$
2. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:
а) $y = x^2 - 4, \; y = 0;$ б) $y = -x^3, x = 2, \; y = 0.$

3. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями:
а) $y = \sqrt{x}, x = 4, \; y = 0$ навколо осі OX; б) $y = \sqrt{x}, y = x$ навколо осі OY.

4. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 9}.$

Варіант 3

1. Обчисліть інтеграли: а) $\int_2^3 \left(x^2 + 2x\right)dx;$ б) $\int_1^2 \frac{1}{2x} dx.$
2. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y = 9 - x^2, \; y = 0;$ б) $y = \frac{6}{x}, x = 1, \; x = 2, y = 0.$

3. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями:
а) $y = 3x^2, x = 1, \; y = 0$ навколо осі OX; б) $y = x^2, \; y = 4$ навколо осі OY.

4. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}.$

Варіант 4

1. Обчисліть інтеграли: а) $\int_{-1}^{1}\left(6x^2+3x\right)dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}dx.$

2. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=x^2-1,\ y=0$; б) $y=\frac{4}{x},\ x=1,\ x=2,\ y=0.$

3. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями:

а) $y=2^x,\ x=1,\ x=0,\ y=0$ навколо осі OX; б) $y=2x^2,\ y=2$ навколо осі OY.

4. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}.$

Варіант 5

1. Обчисліть інтеграли: а) $\int_{-1}^{2}\left(x^2+4\right)dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{10}}\cos 5x dx.$

2. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=x^2-3,\ y=1$; б) $y=e^x,\ x=0,\ x=3,\ y=0.$

3. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями:

а) $y=\sqrt{x+1},\ x=3,\ y=0$ навколо осі OX; б) $y=\frac{x^2}{2},\ y=2$ навколо осі OY.

4. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int_{3}^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+4}.$

Варіант 6

1. Обчисліть інтеграли: а) $\int_{-2}^{1}\left(x^3-4x\right)dx$; б) $\int_{1}^{4}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$

2. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=2-2x^2,\ y=0$; б) $y=x,\ y=-3x,\ x=3.$

3. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями:

а) $y=\sqrt{x},\ y=x$ навколо осі OX; б) $y=5-x^2,\ y=1$ навколо осі OY.

4. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}.$

Варіант 7

1. Обчисліть інтеграли: а) $\int\limits_{0}^{1}\left(5x+x^3\right)dx;$ б) $\int\limits_{-4}^{2}\frac{1}{x+5}dx.$

2. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=x^2,\ y=\sqrt{x};$ б) $y=2x, y=-x,\ x=4.$

3. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями:

а) $y=x^2, y=x$ навколо осі OX; б) $y=\frac{2}{x},\ y=1,\ y=2,\ x=0$ навколо осі OY.

4. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+1}.$

Варіант 8

1. Обчисліть інтеграли: а) $\int\limits_{0}^{2}\left(7-3x^2\right)dx;$ б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{x^2+4}dx.$

2. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=2x^2,\ y=3-x^2;$ б) $y=1-2x,\ y=x+1,\ x=2.$

3. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями:

а) $y=\frac{x^2}{3},\ x=3,\ y=0$ навколо осі OX; б) $y=\frac{5}{x},\ y=1,\ y=5$ навколо осі OY.

4. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(x-1)^3}.$

Варіант 9

1. Обчисліть інтеграли: а) $\int\limits_{-1}^{1}\left(3x^2+4x\right)dx;$ б) $\int\limits_{1}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}}dx.$

2. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=x^2, x=1,\ y=0;$ б) $y=4x,\ y=-2x,\ x=1.$

3. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями:

а) $y=2\sqrt{x},\ x=4, y=0$ навколо осі OX; б) $y=\frac{3}{x},\ y=1,\ y=3$ навколо осі OY.

4. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2x+10}.$

Варіант 10

1. Обчисліть інтеграли: а) $\int_{-1}^{2}\left(6x^2+5\right)dx$; б) $\int_{0}^{1}e^{3x}dx$.

2. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=x^2-5,\ y=-1$; б) $y=x^3,\ x=-1,\ y=0$.

3. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями:

а) $y=\sqrt{x},\ x=9,\ y=0$ навколо осі OX ; б) $y=2\sqrt{x},\ y=x$ навколо осі OY .

4. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+8x+16}$.

Варіант 11

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_{0}^{2}\left(2x^2-3x\right)dx$; б) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\cos 2x dx$.

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=8-x^2; y=1$; б) $y=\frac{5}{x}; x=1; x=5; y=0$.

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX ; б) навколо осі OY .

а) $y=\frac{x^2}{2}; x=2; y=0$; б) $y=x^2-1; y=3$.

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2x+5}$.

Варіант 12

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_{0}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$; б) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{1}{\cos^2 x}dx$.

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=2x^2-3; y=-1$; б) $y=\frac{4}{x}; x=2; x=4; y=0$.

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX ; б) навколо осі OY .

а) $y=e^x; x=1; x=0; y=0$; б) $y=1-\frac{x^2}{2}; y=-1$.

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+8}$.

Варіант 13

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_0^2 \left(6x^2-2\right)dx;$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{10}} \sin 5x dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=x^2+1; y=5;$ б) $y=e^{2x}; x=0; x=2; y=0.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=\sqrt{2x}; x=2; y=0;$ б) $y=\frac{x^2}{3}; y=3.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+8}.$$

Варіант 14

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_0^2 \left(4x^3-8x\right)dx;$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=3-3x^2; y=0;$ б) $y=2x; y=-1{,}5x; x=2.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=\sqrt{2x}; y=x;$ б) $y=4-2x^2; y=0.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+3}.$$

Варіант 15

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_0^2 \left(5x-2x^3\right)dx;$ б) $\int_{-\pi/4}^{0} \cos 4x dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=x^2; y=\sqrt{8x};$ б) $y=4x; y=-x; x=2.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=\sqrt{x^3}; y=x;$ б) $y=\frac{3}{x}; y=1; y=6; x=0.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int_{-5}^{-1} \frac{dx}{x^2+2x+1}.$

Варіант 16

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int\limits_{-1}^{2}\left(4-9x^2\right)dx;$ б) $\int\limits_{-\pi/8}^{0}\frac{1}{\cos^2 2x}dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=3x^2; y=4-x^2;$ б) $y=2-x; y=2x+2; x=1.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=\frac{x^2}{4}; x=4; y=0;$ б) $y=\frac{3}{x}; y=\frac{1}{2}; y=3.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\ln x}.$

Варіант 17

1. Обчисліть інтеграли: а) $\int\limits_{1}^{2}\left(2x-\frac{4}{x}\right)dx;$ б) $\int\limits_{0}^{\pi/12}\sin 6x dx.$

2. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=x^4; x=1; y=0;$ б) $y=x; y=-3x; x=2.$

3. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=-\sqrt{x}; y=2\sqrt{x}; x=1;$ б) $y=\frac{2}{x}; y=1; y=4.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Варіант 18

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int\limits_{1}^{3}\left(x^2-\frac{8}{x}\right)dx;$ б) $\int\limits_{0}^{1}e^{-2x}dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=\left(x-4\right)^2; y=0; x=0;$ б) $y=\frac{7}{x}; x=1; x=3,5; y=0.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=\sqrt{3x}; x=3; y=0;$ б) $y=\sqrt{x}; y=4; x=0.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+10}.$$

Варіант 19

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{2}{x} \right) dx;$ б) $\int_{-1}^2 \frac{1}{2x+3} dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y = 9 - 2x^2;\ y = 1;$ б) $y = -2x^3; x = 1;\ y = 0;$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $x = 2y^2; x = 2;\ y = 0;$ б) $y = \frac{2}{x};\ y = 1; y = 4.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}.$$

Варіант 20

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_1^2 \left(4x + \frac{3}{x} \right) dx;$ б) $\int_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{1}{\sin^2 3x} dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y = x^2 - 1;\ y = 3;$ б) $y = \frac{8}{x}; x = 2;\ x = 4; y = 0.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y = e^{-x}; x = -1; x = 1; y = 0;$ б) $y = 2x^2 - 2; y = 0.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}.$$

Варіант 21

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx;$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y = x^2;\ y = 2 - x^2;$ б) $y = e^{-x}; x = -1;\ x = 0; y = 0.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y = \frac{\sqrt{x}}{2}; x = 4;\ y = 0;$ б) $y = \sqrt{3x}; y = 3.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int_3^\infty \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}.$

Варіант 22

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_0^1 \left(\sqrt{x}-4x\right)dx;$ б) $\int_{-4}^4 \frac{1}{\sqrt{x+5}}dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=2-3x^2;\ y=-1;$ б) $y=1{,}5x; y=-2x;\ x=2.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=x^3; y=0; x=2;$ б) $y=3-x^2; y=-1.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+10x+9}.$$

Варіант 23

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_0^1 \left(5x+\sqrt{x^3}\right)dx;$ б) $\int_{-1}^0 e^{4x}dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=x^2;\ y=2x;$ б) $y=\sqrt{x}; y=-x;\ x=4.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=\frac{4}{x}; x=1;\ x=2; y=0$ б) $y=8-2x^2;\ y=0.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int_{-0{,}5}^{0} \frac{dx}{2x+1}.$$

Варіант 24

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_1^2 \left(x-\frac{2}{x}\right)^2 dx;$ б) $\int_{-\pi}^0 \frac{1}{\cos^2 0{,}5x}dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=2x^2;\ y=-x; x=1$ б) $y=x^2; y=3x-2.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=\frac{5}{x};\ x=1; x=\frac{5}{2}; y=0;$ б) $y=\frac{x^2}{3}; y=3.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3}}.$

Варіант 25

1.Обчисліть інтеграли: a) $\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+7x\right)dx;$ б) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/2}\sin 2x dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=2x^3; x=-1; y=0;$ б) $y=3x; y=x; x=-2.$

3. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=0; y=2\sqrt{x}; x=4;$ б) $y=\frac{2}{x}; y=2; y=0,5.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int\limits_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x^2+2x+1}.$$

Варіант 26

1.Обчисліть інтеграли: a) $\int\limits_{1}^{2}\left(x-x^2+8\right)dx;$ б) $\int\limits_{-1}^{1}e^{-2x}dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=2-x^2; y=-2;$ б) $y=-x; y=-2x; x=2;$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=\sqrt{2x}; x=2; y=0;$ б) $y=\sqrt{x}; y=0,5x.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int\limits_{-\infty}^{-4}\frac{dx}{x^2+6x+9}.$$

Варіант 27

1.Обчисліть інтеграли: a) $\int\limits_{2}^{3}\left(3x^2-2x\right)dx;$ б) $\int\limits_{1}^{4}\frac{1}{4x}dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=7-x^2; y=3;$ б) $y=\frac{-5}{x}; x=2; x=5; y=0.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=-3x^2; x=2; y=0;$ б) $y=5-2x^2; y=3.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2-2x+2}.$

Варіант 28

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_{-1}^{1}\left(-x^2+\frac{3}{2}x\right)dx;$ б) $\int_{\pi/8}^{\pi/4}\frac{-1}{\sin^2 2x}dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=2x^2-1;\ y=7;$ б) $y=\frac{-4}{x};\ x=4;\ x=2;\ y=0.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=3^x;\ x=-1;\ x=1;\ y=0;$ б) $y=\frac{x^2}{2};\ y=2.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int_{-\infty}^{3}\frac{dx}{x^2-6x+10}.$$

Варіант 29

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_{-1}^{1}\left(x^2-3x+4\right)dx;$ б) $\int_{0}^{2\pi}\cos\frac{x}{4}dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=-x^2-3;\ y=-4;$ б) $y=e^{-x};\ x=0;\ x=2;\ y=0.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=\sqrt{x-1};\ x=5;\ y=0;$ б) $y=\frac{x^2}{3};\ y=3.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2-4x+4}.$$

Варіант 30

1.Обчисліть інтеграли: а) $\int_{-1}^{1}\left(x^4-x\right)dx;$ б) $\int_{0}^{3}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx.$

2.Обчисліть площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

а) $y=1-2x^2;\ y=-1;$ б) $y=-x;\ y=-2x;\ x=3.$

3.Обчислити об'єм тіла обертання фігури, що обмежена заданими лініями а) навколо осі OX; б) навколо осі OY.

а) $y=\sqrt{x};\ y=x^2;$ б) $y=5-2x^2;\ y=3.$

4.Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

Розділ 6. Диференціальні рівняння .

Перша частина РГЗ складається з 5 завдань присвячених темі «Диференціальні рівняння», в яких необхідно розв'язати:

1) диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними;
2) лінійні диференціальні рівняння першого порядку в канонічному та неканонічному вигляді;
3) лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та задачу Коші із ним;
4) лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду;
5) однорідну систему лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Зразок розв'язання розрахунково-графічного завдання:

Приклад 1. Розв'язати рівняння а) $y'\sin^2 2x = \dfrac{y}{\sqrt{\ln y}}$;

б) $\left(x^3+1\right)ydy+\left(y^2-1\right)x^2dx=0$.

Розв'язання. а) Дане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Запишемо y' як $\dfrac{dy}{dx}$: $\dfrac{dy}{dx}\sin^2 2x = \dfrac{y}{\sqrt{\ln y}}$. Помножимо обидві частини рівності на множник $\dfrac{dx\sqrt{\ln y}}{y\sin^2 2x}$. Отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$\dfrac{dy}{y}\sqrt{\ln y} = \dfrac{dx}{\sin^2 2x}$. Проінтегруємо його за допомогою таблиці інтегралів:

$$\int \frac{dy}{y}\sqrt{\ln y} = \int \frac{dx}{\sin^2 2x}\ ;\ \int \ln^{\frac{1}{2}} y \cdot d\left(\ln y\right) = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(2x\right)}{\sin^2 2x}\ ;\ \frac{2\sqrt{\ln^3 y}}{3} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x + C\ .$$

Таким чином, ми отримали загальний інтеграл заданого рівняння.

Відповідь: $\dfrac{2\sqrt{\ln^3 y}}{3} = -\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x + C$.

б) Це рівняння з відокремлюваними змінними в диференціалах. Перенесемо один з доданків в іншу частину рівності, а потім відокремимо змінні:

$$\left(x^3+1\right)ydy=-\left(y^2-1\right)x^2dx\,;\ \frac{ydy}{y^2-1}=-\frac{x^2dx}{x^3+1}.$$

Тепер візьмемо інтеграли від обох частин рівності: $\int\frac{ydy}{y^2-1}=-\int\frac{x^2dx}{x^3+1}$;

$$\frac{1}{2}\int\frac{2ydy}{y^2-1}=-\frac{1}{3}\int\frac{3x^2dx}{x^3+1}\ ;\ \frac{1}{2}\int\frac{d\left(y^2-1\right)}{y^2-1}=-\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3+1\right)}{x^3+1};$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=-\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+C.$$

Таким чином, ми отримали загальний інтеграл і для цього диференціального рівняння.

Відповідь: $\ln\left|y^2-1\right|=-\frac{2}{3}\ln\left|x^3+1\right|+C$.

Приклад 2. Розв’язати рівняння а) $y'+\frac{y}{x-1}=x^2$; б) $\sin xy'-2+y\cos x=0$.

Розв’язання. а) Дане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку у канонічному вигляді. Будемо шукати його розв’язок у вигляді добутку двох функцій: $y=u\cdot v$. Для їх знаходження розв’яжемо систему диференціальних рівнянь: $\begin{cases} v'+\frac{v}{x-1}=0 \\ u'v=x^2 \end{cases}$.

Розв’язання почнемо з першого рівняння системи, що є рівнянням з відокремлюваними змінними.

$$v'=-\frac{v}{x-1};\quad \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x-1},\quad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x-1};\quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x-1};\quad \ln|v|=-\ln|x-1|;$$

$$\ln|v|=\ln|x-1|^{-1};\quad v=\frac{1}{x-1}.$$

Тепер підставимо знайдену функцію в друге рівняння системи і розв'яжемо його: $u'v = x^2$; $u'\dfrac{1}{x-1} = x^2$; $u' = x^2(x-1)$; $u' = x^3 - x^2$;

$u = \int (x^3 - x^2)dx$; $u = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + C$.

Отже, загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд:

$$y = u \cdot v = \frac{1}{x-1}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C\right).$$

Відповідь: $y = \dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + C\right)$.

б) Дане рівняння, на відміну від попереднього, не має канонічного вигляду $y' + p(x)y = g(x)$. Тому спочатку приведемо його до цього вигляду. Для цього поділимо все рівняння на $\sin x$: $y' - \dfrac{2}{\sin x} + \dfrac{y\cos x}{\sin x} = 0$ та перенесемо другий доданок в іншу частину рівності: $y' + \dfrac{y\cos x}{\sin x} = \dfrac{2}{\sin x}$.

Далі будемо розв'язувати рівняння аналогічно попередньому у вигляді $y = u \cdot v$.

Запишемо систему рівнянь для пошуку відповідних множників: $\begin{cases} v' + \dfrac{v\cos x}{\sin x} = 0 \\ u'v = \dfrac{2}{\sin x} \end{cases}$.

Перше рівняння розв'язується так: $\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{v\cos x}{\sin x} = 0$; $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v\cos x}{\sin x}$; $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{\cos x dx}{\sin x}$;

$\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{d(\sin x)}{\sin x}$; $\int \dfrac{dv}{v} = -\int \dfrac{d(\sin x)}{\sin x}$; $\ln|v| = -\ln|\sin x|$; $\ln|v| = \ln|\sin x|^{-1}$; $v = \dfrac{1}{\sin x}$.

Підставимо знайдену функцію в друге рівняння системи і розв'яжемо його:

$u'v = \dfrac{2}{\sin x}$; $u'\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{2}{\sin x}$; $u' = 2$; $u = 2x + C$.

Отже, загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд:

$$y = u \cdot v = \frac{1}{\sin x}(2x + C).$$

Відповідь: $y = \dfrac{2x + C}{\sin x}$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння а) $y'' - 6y' + 25y = 0$;

б) $y'' + 12y' + 36y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -3.$

Розв’язання. а) Дане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його розв’язок за допомогою відповідного характеристичного рівняння: $k^2 - 6k + 25 = 0$.

Це квадратне рівняння, що має від’ємний дискримінант:
$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 36 - 100 = -64$. У цьому випадку рівняння має комплексно-спряжені корені: $k_{1,2} = \dfrac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$.

Тоді розв’язок диференціального рівняння має вигляд:
$y = C_1 e^{3x} \sin 4x + C_2 e^{3x} \cos 4x$.

Відповідь: $y = C_1 e^{3x} \sin 4x + C_2 e^{3x} \cos 4x$.

б) Це задача Коші, в якій треба знайти частинний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Знайдемо спочатку загальний розв’язок цього рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 12k + 36 = 0$.

Його дискримінант $D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 144 - 144 = 0$. Це означає, що квадратне рівняння має два однакових корені $k_{1,2} = \dfrac{-12}{2} = -6$, а відповідне диференціальне рівняння має такий загальний розв’язок: $y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{-6x} x$.

Для того, щоб знайти його частинний розв’язок, підставимо в знайдену функцію початкові умови. $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 e^{-6 \cdot 0} + C_2 e^{-6 \cdot 0} \cdot 0 = C_1$.

Отже, один з довільних коефіцієнтів знайдено. Для того, щоб знайти другий, необхідно взяти похідну від функції y:

$$y' = \left(C_1 e^{-6x}\right)' + \left(C_2 e^{-6x} x\right)' = -6C_1 e^{-6x} + C_2\left(-6e^{-6x} x + e^{-6x}\right) = e^{-6x}\left(-6C_1 - 6C_2 x + C_2\right)$$

Підставимо в цю похідну другу початкову умову:
$y'(0) = -3 \Rightarrow -3 = e^{-6 \cdot 0}\left(-6C_1 - 6C_2 \cdot 0 + C_2\right)$; $-3 = -6 \cdot 1 + C_2$; $C_2 = -3 + 6 = 3$. Другий довільний коефіцієнт знайдено.

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд: $y = 1 \cdot e^{-6x} + 3 \cdot e^{-6x} x$.

Відповідь: $y = e^{-6x} + 3e^{-6x} x$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння а) $y'' - 6y' = e^{-3x}$; б) $y'' + 9y = 2\sin x$.

Розв'язання. а) Дане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду. Будемо шукати його розв'язок у вигляді $y = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$, де $y_{з.о.}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y_{ч.н.}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Отже, для знаходження першого доданку розв'яжемо характеристичне рівняння: $k^2 - 6k = 0$. Його корені $k_1 = 0, k_2 = 6$. Тоді розв'язок однорідного диференціального рівняння $y'' - 6y' = 0$ має вигляд: $y = C_1 + C_2 e^{6x}$.

Загальний вигляд другого доданку побудуємо, виходячи з вигляду правої частини неоднорідного рівняння: $y_{ч.н.} = Ae^{-3x}$. Невідомий коефіцієнт A знайдемо, підставивши цю функцію у початкове рівняння. $y_{ч.н.}' = -3Ae^{-3x}$;
$y_{ч.н.}'' = 9Ae^{-3x}$; $y_{ч.н.}'' - 6y_{ч.н.}' = 9Ae^{-3x} - 6\left(-3Ae^{-3x}\right) = 27Ae^{-3x} = e^{-3x}$;
$27A = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{27}$.

Таким чином, $y_{ч.н.} = \dfrac{1}{27} e^{-3x}$, а $y = C_1 + C_2 e^{6x} + \dfrac{1}{27} e^{-3x}$.

Відповідь: $y = C_1 + C_2 e^{6x} + \dfrac{1}{27} e^{-3x}$.

б) Це рівняння будемо розв'язувати аналогічно попередньому. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння: $y'' + 9y = 0$. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 9 = 0$. Його корені $k_{1,2} = \pm 3i$. Отже, $y_{з.о.} = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$.

Для того, щоб знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння, побудуємо його загальний вигляд, виходячи з вигляду правої частини та підставимо в початкове рівняння: $y_{ч.н.} = A\sin x + B\cos x$; $y_{ч.н.}' = A\cos x - B\sin x$

$y_{ч.н.}{}'' = -A\sin x - B\cos x$;

$y_{ч.н.}{}'' + 9y_{ч.н.} = -A\sin x - B\cos x + 9\left(A\sin x + B\cos x\right) = 8A\sin x + 8B\cos x = 2\sin x.$

Тепер прирівняємо коефіцієнти при однакових функціях в обох частинах рівності: $8A = 2,\ 8B = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = 0$. Таким чином, $y_{ч.н.} = \frac{1}{4}\sin x$, а

$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + \frac{1}{4}\sin x$.

Відповідь: $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + \frac{1}{4}\sin x$.

Приклад 5. Розв'язати систему: $\begin{cases} y' = y - 4x \\ x' = x - y \end{cases}$.

Розв'язання. Це однорідна система диференціальних рівнянь першого порядку,в якій невідомими є незалежні функції $x = x(t)$ та $y = y(t)$. Розв'язання такої системи може бути зведене до розв'язання однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Для цього виразимо y через x у другому рівнянні: $y = x - x',\ y' = x' - x''$.

Підставимо ці вирази в перше рівняння системи:
$x' - x'' = x - x' - 4x,\ x'' - 2x' - 3x = 0$. Отримане однорідне рівняння розв'яжемо за допомогою характеристичного рівняння $k^2 - 2k - 3 = 0$. Його дискримінант $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$, $\sqrt{D} = 4$. Це означає, що квадратне рівняння має корені $k_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2}, k_1 = 3, k_2 = -1$, а відповідне диференціальне рівняння має такий загальний розв'язок: $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-1t}$.

Далі підставимо знайдену функцію у вираз $y = x - x'$:

$y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-1t} - \left(C_1 e^{3t} + C_2 e^{-1t}\right)' = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-1t} - 3C_1 e^{3t} + C_2 e^{-1t} =$
$-2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-1t}.$

Відповідь: $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-1t}$, $y = 2C_2 e^{-t} - 2C_1 e^{3t}$.

Контрольні завдання за темою «Диференціальні рівняння»

Розв’язати диференціальні рівняння:

Варіант 1

1. а) $y'\cos^2 x = y\ln y$; б) $\left(x^2+1\right)dy+\left(y^2-1\right)dx=0$.
2. а) $y'+y\operatorname{tg}x=\sin 2x$; б) $x^3y'+12-x^2y=0$.
3. а) $y''-4y'+8y=0$; б) $y''+10y'+25y=0,\ y(0)=1, y'(0)=0$.
4. а) $y''-y=2x+1$; б) $y''+2y'+5y=-\cos x$.
5. $\begin{cases} y'=2y-3x \\ x'=3y+2x \end{cases}$.

Варіант 2

1. а) $y'\sqrt{x}=\sqrt{4-y^2}$; б) $\operatorname{ctg}x\operatorname{tg}y\,dy+2dx=0$.
2. а) $y'-\dfrac{y}{x}=x\sin x$; б) $x^3y'-1+x^2y=0$.
3. а) $y''+2y'+2y=0$; б) $y''-y'-2y=0,\ y(0)=0, y'(0)=3$.
4. а) $y''+9y=15$; б) $y''-2y'+y=16e^{-x}$.
5. $\begin{cases} y'=y-2x \\ x'=y+x \end{cases}$.

Варіант 3

1. а) $y'\left(y^2+1\right)=\sin x$; б) $xydy-\sqrt{y^2+1}dx=0$.
2. а) $y'-\dfrac{y}{x}=x\cos x$; б) $x^2e^x-xy'+y=0$.
3. а) $y''-2y'+5y=0$; б) $y''+y'-2y=0,\ y(0)=0, y'(0)=-2$.
4. а) $y''-4y=8$; б) $y''-6y'+9y=x-1$.
5. $\begin{cases} y'=-y-4x \\ x'=y+x \end{cases}$.

Варіант 4

1. $y' = y\sin x$; б) $x^2dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$;

2. а) $y' - \dfrac{y}{x} = 1$; б) $x^2 + xy' + y = 0$;

3. а) $y'' + 4y' + 5y = 0$; б) $y'' - 9y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 3$;

4. а) $y'' - 4y' + 3y = x$; б) $y'' + 6y' + 9y = e^x$;

5. $\begin{cases} y' = 2y - x \\ x' = x - y \end{cases}.$

Варіант 5

1. а) $y' = \dfrac{x}{y\left(x^2+4\right)}$; б) $\cos^2 x \operatorname{ctg} y dy + \operatorname{tg} x \sin^2 y dx = 0$;

2. а) $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$; б) $(2x+1)y' - 4x = -2y$;

3. а) $y'' + 6y' + 18y = 0$; б) $y'' - 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = -1$;

4. а) $y'' - 9y = 3$; б) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{-x}$;

5. $\begin{cases} y' = -2y - x \\ x' = x - y \end{cases}.$

Варіант 6

1. а) $y' = y\cos x$; б) $\left(x^2+4\right)dy - \dfrac{dx}{y-5} = 0$;

2. а) $y' - y/x = x/\left(x^2+1\right)$; б) $xy' - x^3 + y = 0$;

3. а) $y'' + 2y' + 10y = 0$; б) $y'' + 2y' + y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -1$;

4. а) $y'' + y = x^2 - 2$; б) $y'' - 4y' = e^{2x}$;

5. $\begin{cases} y' = y - x \\ x' = x + y \end{cases}.$

Варіант 7

1. а) $y' = y + yx^2$; б) $\cos^2 xdy + \frac{dx}{\sin y} = 0$;

2. а) $y' - y/x = x^2/\left(x^2 - 1\right)$; б) $xy' - \sqrt{x^3} + y = 0$;

3. а) $y'' - 2y' + 5y = 0$; б) $y'' - 5y' + 4y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1$;

4. а) $y'' + y' = 3x + 2$; б) $y'' - 4y = 2e^x$;

5. $\begin{cases} y' = y \\ x' = x + y \end{cases}$.

Варіант 8

1. а) $y' = y^2 + y^2 x$; б) $\sin^2 xdy - 2\frac{dx}{\cos y} = 0$;

2. а) $y' - y/x = 3x/\left(x - 1\right)$; б) $xy' - \sqrt[3]{x} + y = 0$;

3. а) $y'' + 6y' + 10y = 0$; б) $y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -2$;

4. а) $y'' + 9y = x$; б) $y'' - 2y' = e^{-2x}$;

5. $\begin{cases} y' = x + 2y \\ x' = 4x - y \end{cases}$.

Варіант 9

1. а) $\left(x^2 - 1\right)y' = 2xy^3$; б) $\operatorname{tg} xdy - \operatorname{ctg} ydx = 0$;

2. а) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$; б) $xy' - \sqrt{x} - y = 0$;

3. а) $y'' - 4y' + 13y = 0$; б) $y'' + 4y' - 12y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = -3$;

4. а) $y'' + y = 12x + 6$; б) $y'' + y' - 6y = e^{2x}$;

5. $\begin{cases} y' = -4x - 4y \\ x' = 4x + 5y \end{cases}$.

Варіант 10

1. а) $\left(1-x^2\right)y' = 2xy\ln y$; б) $\sqrt{x^2-1}dy - xe^{-2y}dx = 0$;
2. а) $y' - 3y = 2xe^{3x}$; б) $xy' + \sqrt{x^5} + y = 0$;
3. а) $y'' - 6y' + 9y = 0$; б) $y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$;
4. а) $y'' - 2y' + 5y = 10e^{2x}$; б) $y'' - y' - 2y = 2\sin 2x$;
5. $\begin{cases} y' = x + 2y \\ x' = 4x - y \end{cases}$.

Варіант 11

1. а) $\left(1+e^x\right)yy' = e^x$; б) $(\cos x + 1)dy - \sin x\sqrt{y}dx = 0$;
2. а) $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x$; б) $xy' - x^3 + 2y = 0$;
3. а) $y'' + 2y' + 5y = 0$; б) $y'' - 8y' + 15y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 0$;
4. а) $y'' - 10y' + 25y = 10e^{-x}$; б) $y'' + 6y' + 9y = 3x - 1$;
5. $\begin{cases} y' = 8x + y \\ x' = 3x + y \end{cases}$.

Варіант 12

1. а) $xyy' = 1 - x^2$; б) $\sin y \sin^2 x dy - \cos x \cos^2 y dx = 0$;
2. а) $y' - \dfrac{y}{x} = x^3 + 2$; б) $\left(1+x^2\right)y' - x^3 + 2xy = 0$;
3. а) $y'' + 8y' + 17y = 0$; б) $y'' - 4y' - 5y = 0,\ y(0) = -1, y'(0) = 0$;
4. а) $y'' - 3y' + 2y = -4e^x$; б) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$;
5. $\begin{cases} y' = 3x + 4y \\ x' = -x - 2y \end{cases}$.

Варіант 13

1. а) $yy' = \sqrt{xy}$; б) $\cos^2 3xdy - \sin^2 2ydx = 0$;

2. а) $y' + \dfrac{2xy}{1-x^2} = 1 - x$; б) $xy' - x^4 + 2y = 0$;

3. а) $y'' + y' + y = 0$; б) $y'' - 3y' - 4y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 2$;

4. а) $y'' - 6y' + 9y = 10e^{-3x}$; б) $y'' + 4y = \sin x$;

5. $\begin{cases} y' = -2x - 2y \\ x' = x - y \end{cases}.$

Варіант 14

1. а) $xy' = \ln x \cdot y^2$; б) $ydy + e^{x-y^2}dx = 0$;

2. а) $y' + \dfrac{y}{x} = \cos x$; б) $xy' - e^{x^2} + y = 0$;

3. а) $y'' - 6y' + 18y = 0$; б) $y'' - 6y' + 8y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 6$;

4. а) $y'' + 6y' + 9y = 2e^x$; б) $y'' + 4y' = x + 1$;

5. $\begin{cases} y' = 4x + 2y \\ x' = 4x + 6y \end{cases}.$

Варіант 15

1. а) $xy' = x^3 \cdot y^2$; б) $\sin^2 3xdy + \cos^2 ydx = 0$;

2. а) $y' + \dfrac{2xy}{x^2+1} = \ln x$; б) $\cos xy' - \cos^2 x - y\sin x = 0$;

3. а) $y'' - 8y' + 25y = 0$; б) $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$;

4. а) $y'' + 4y' - 12y = 8e^x$; б) $y'' + 3y' = x$;

5. $\begin{cases} y' = 2y - x \\ x' = 2x + y \end{cases}.$

Варіант 16

1. а) $y'\sin^2 x = \dfrac{y}{\ln y}$;   б) $\left(y^2+1\right)dx - \left(x^2-1\right)dy = 0$;

2. а) $y' - y\operatorname{ctg} x = \sin 2x$;   б) $x^3 y' - 6 + x^2 y = 0$;

3. а) $y'' + 4y' + 8y = 0$;   б) $y'' - 10y' + 25y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 0$;

4. а) $y'' - y = x^2$;   б) $y'' + 2y' + 5y = \sin x$;

5. $\begin{cases} y' = 4y + 3x \\ x' = y + 2x \end{cases}$.

Варіант 17

1. а) $y'\sqrt{x+1} = \sqrt{1-y^2}$;   б) $\operatorname{tg} y \operatorname{tg} x dy - 4dx = 0$;

2. а) $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x^2$;   б) $x^3 y' + 4 - x^2 y = 0$;

3. а) $y'' - 2y' + 2y = 0$;   б) $y'' + y' - 2y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 3$;

4. а) $y'' - 9y = 5$;   б) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$;

5. $\begin{cases} y' = 5y - x \\ x' = 3y + x \end{cases}$.

Варіант 18

1. а) $y'\left(y^2-1\right) = \cos x$;   б) $xydy + \left(y^2+1\right)dx = 0$;

2. а) $y' + \dfrac{y}{x} = \cos x^2$;   б) $x^2 e^{2x} + xy' - y = 0$;

3. а) $y'' + 2y' + 5y = 0$;   б) $y'' - y' - 2y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = -2$;

4. а) $y'' + 4y = 8$;   б) $y'' - 6y' + 9y = x + 3$;

5. $\begin{cases} y' = 4y + x \\ x' = 3y + 2x \end{cases}$.

Варіант 19

1. а) $y' = y^2 \sin 3x$; б) $xdy - \left(1 - y^2\right)dx = 0$;

2. а) $y' - \dfrac{y}{x} = 10x$; б) $x^3 - xy' - y = 0$;

3. а) $y'' - 4y' + 5y = 0$; б) $y'' - 9y' = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 9$;

4. а) $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$; б) $y'' + 6y' + 9y = 5$;

5. $\begin{cases} y' = 7y + 4x \\ x' = 3x - 2y \end{cases}$.

Варіант 20

1. а) $y' = \dfrac{x^2 - 5}{yx}$; б) $3\cos^2 x \operatorname{ctg} y dy - 2 \operatorname{tg} x \sin^2 y dx = 0$;

2. а) $y' + y \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sin x}$; б) $(x+1)y' - 6x + y = 0$;

3. а) $y'' - 6y' + 18y = 0$; б) $y'' + 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = -1$;

4. а) $y'' + 9y' = 3x$; б) $y'' + 4y' + 4y = e^x$;

5. $\begin{cases} y' = -y + x \\ x' = x - 2y \end{cases}$.

Варіант 21

1. а) $y' = y^2 \sin x$; б) $\left(x^2 + 9\right)dy - \dfrac{dx}{y+3} = 0$;

2. а) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{x\left(x^2 - 1\right)}$; б) $xy' + x^5 + y = 0$;

3. а) $y'' - 2y' + 10y = 0$; б) $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -1$;

4. а) $y'' - y = x^2$; б) $y'' + 4y = e^{2x}$;

5. $\begin{cases} y' = 3y + 2x \\ x' = 5x + 4y \end{cases}$.

Варіант 22

1. а) $y' = 4y - yx$; б) $\sin^2 x dy + \frac{dx}{\cos y} = 0$;

2. а) $y' + \frac{y}{x} = \frac{3}{x^2+1}$; б) $xy' - \sqrt[4]{x} - y = 0$;

3. а) $y'' - 2y' + 17y = 0$; б) $y'' + 5y' + 4y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$;

4. а) $y'' + y' = 2x - 3$; б) $y'' - y = 5e^{2x}$;

5. $\begin{cases} y' = 4y + x \\ x' = 2x + 8y \end{cases}$.

Варіант 23

1. а) $y' = y^2 - y^2x^2$; б) $\sin^2 2x dy + 2\frac{dx}{\cos 3y} = 0$;

2. а) $y' + y/x = 4/\left(x^2 - x\right)$; б) $xy' - 2\sqrt[3]{x^4} - y = 0$;

3. а) $y'' - 6y' + 10y = 0$; б) $y'' + 5y' - 6y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$;

4. а) $y'' - 9y = 2x$; б) $y'' + 2y' = 3e^x$;

5. $\begin{cases} y' = 4x + 5y \\ x' = x - y \end{cases}$.

Варіант 24

1. а) $\left(x^2 + 4\right)y' = 2xy^2$; б) $\operatorname{tg} 2x dy + 2\operatorname{ctg} y dx = 0$;

2. а) $y' - y\operatorname{ctg} x = \sin^2 x$; б) $xy' - 2\sqrt{x^3} - y = 0$;

3. а) $y'' + 4y' + 13y = 0$; б) $y'' - 4y' - 12y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 3$;

4. а) $y'' + y = 3x$; б) $y'' - y' - 6y = e^{4x}$;

5. $\begin{cases} y' = 3x + y \\ x' = x - 3y \end{cases}$.

Варіант 25

1. а) $\left(1+x^2\right)y' = 2xy\sqrt{\ln y}$; б) $\sqrt{4-x^2}dy - e^{-y}dx = 0$;

2. а) $y' - 2y = x^2e^{2x}$; б) $xy' + 3\sqrt{x^7} - y = 0$;

3. а) $y'' + 6y' + 9y = 0$; б) $y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = -5$;

4. а) $y'' - 3y' - 10y = 8e^{2x}$; б) $y'' + y' - 2y = x^2$;

5. $\begin{cases} y' = y - x \\ x' = -2x + 2y \end{cases}$.

Варіант 26

1. а) $\left(1+e^{2x}\right)y' = ye^x$; б) $(\cos x - 2)dy + \sin x\sqrt{y^3}dx = 0$;

2. а) $y' - \dfrac{y}{x+1} = 2x^2 + 2x$; б) $xy' - x^4 - 2y = 0$;

3. а) $y'' + 5y' + 6y = 0$; б) $y'' + 8y' + 15y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = -8$;

4. а) $y'' + 10y' + 25y = e^{-x}$; б) $y'' - 6y' + 9y = x + 2$;

5. $\begin{cases} y' = -x - 3y \\ x' = x + 5y \end{cases}$.

Варіант 27

1. а) $x^2yy' = 1 + x^3$; б) $\sin y \sin x dy + \cos x \cos y dx = 0$;

2. а) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 - 2$; б) $(1+x)y' - x + 2y = 0$;

3. а) $y'' - 8y' + 17y = 0$; б) $y'' + 4y' - 5y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = -5$;

4. а) $y'' + 3y' + 2y = e^{2x}$; б) $y'' - y' - 2y = x$;

5. $\begin{cases} y' = -x - 3y \\ x' = y - x \end{cases}$.

Варіант 28

1. а) $yy' = \sqrt{\frac{x}{y}}$; б) $\cos^2 2x dy + \sin^2 3y dx = 0$;

2. а) $y' - \frac{2xy}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$; б) $xy' - 3x^2 + 2y = 0$;

3. а) $y'' - y' + y = 0$; б) $y'' + 3y' - 4y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = -5$;

4. а) $y'' + 6y' + 9y = 2e^{3x}$; б) $y'' + 4y = \cos x$;

5. $\begin{cases} y' = 2x + 3y \\ x' = 4x + 6y \end{cases}$.

Варіант 29

1. а) $xy' = \ln^2 x \cdot y$; б) $4dy - e^{x^2 - y} x dx = 0$;

2. а) $y' + \frac{y}{x} = \cos x^2$; б) $xy' + e^x + y = 0$;

3. а) $y'' + 6y' + 18y = 0$; б) $y'' + 6y' + 8y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 2$;

4. а) $y'' - 6y' + 9y = 3e^x$; б) $y'' - 4y' = 2x - 1$;

5. $\begin{cases} y' = x - 6y \\ x' = -5x + 2y \end{cases}$.

Варіант 30

1. а) $xy' = x^2 \cdot y^5$; б) $\sin^2 x dy - \cos^2 4y dx = 0$;

2. а) $y' + \frac{2xy}{x^2+1} = x$; б) $\cos x y' - 5 - y \sin x = 0$;

3. а) $y'' + 8y' + 25y = 0$; б) $y'' + 2y' + y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = -2$;

4. а) $y'' - 4y' - 12y = e^{2x}$; б) $y'' - 3y' = 5x$;

5. $\begin{cases} y' = y + x \\ x' = 5x - 3y \end{cases}$.

Розділ 7. Ряди .

П'ять завдань другої частини РГЗ присвячені темі «Ряди» та включають 9 задач на дослідження збіжності числових рядів (1-3) та на роботу зі степеневими рядами (4-5).

Зразок виконання розрахунково-графічного завдання.

Завдання 1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання достатньої ознаки збіжності:

$$\frac{\sqrt{3}}{1}-\frac{2}{2}+\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}+\ldots$$

Розв'язання. Даний числовий ряд є знакопереміжним, отже в побудові його загального члену буде приймати участь множник $(-1)^n$. Всі члени цього ряду представляють собою дроби, тому розглянемо окремо їх чисельники та знаменники. Якщо чисельник другого члену ряду представити як $\sqrt{4}$, то стане очевидним, що всі чисельники є коренями послідовних натуральних чисел. Якщо відкинути одиницю з усіх знаменників цього числового ряду, то ми отримаємо послідовність чисел: $0, 1, 4, 9, \ldots$, що є послідовністю квадратів натуральних чисел, починаючи з числа 0. Отже, загальний член цього ряду можна записати, як $a_n=(-1)^n\frac{\sqrt{n+3}}{n^2+1}$, а сам ряд відповідно, як: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+3}}{n^2+1}$.

Перевіримо, чи виконується для цього ряду необхідна ознака збіжності

($\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$): $\quad \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1,5}}=0$.

Отже, необхідна ознака збіжності виконується і цей ряд може збігатися.

Відповідь: $a_n=(-1)^n\frac{\sqrt{n+3}}{n^2+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Завдання 2. Дослідити ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{9^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{n^2+8}\right)^{2n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^5+2}}$.

Розв'язання. Всі запропоновані числові ряди є знакододатніми , а тому питання про їх збіжність з'ясовується за допомогою однієї з п'яти відомих достатніх ознак збіжності.

а) Скористаємось ознакою Даламбера :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+6}{9^{n+1}}}{\frac{n+5}{9^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9^n(n+6)}{9^{n+1}(n+5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+6}{9n+45}=\frac{1}{9}.$$

Отримане число виявилось меншим за одиницю, отже ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{9^n}$ збігається.

б) Скористаємось радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\pi n}{n^2+8}\right)^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi n}{n^2+8}\right)^{\frac{2n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2=0.$$

Отримане число виявилось меншим за одиницю, отже ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{n^2+8}\right)^{2n+1}$ збігається.

в) Для третього ряду використаємо ознаку порівняння в граничній формі. Для порівняння візьмемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, що, як відомо, розбігається $\left(\alpha=\frac{1}{2}<1\right)$.

Знайдемо $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{n^2+1}{\sqrt{n^5+2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5+2}}{\sqrt{n}\left(n^2+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2,5}}{n^{2,5}}=1.$

В результаті ми отримали константу, що відрізняється від нуля, отже, обидва ряди ведуть себе однаково, тобто обидва розбігаються.

Відповідь: а) ряд збігається; б) ряд збігається; в) ряд розбігається.

Завдання 3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{3n+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

Розв'язання. Всі наведені числові ряди є знакопереміжними , а тому питання про їх збіжність з'ясовується за допомогою теореми Лейбниця. Вона стверджує, що для збіжності знакопереміжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ достатньо, щоб його члени спадали і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. У випадку, якщо ряд збігається, для встановлення характеру збіжності необхідно дослідити збіжність відповідного знакододатнього ряду.

а) Перевіримо виконання умов теореми Лейбниця.

$1 > \frac{1}{2^{0.4}} > \frac{1}{3^{0.4}} > \dots$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^2}} = 0$. Отже, ряд збігається. Але відповідний йому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^2}}$ розбігається ($\alpha = \frac{2}{5} < 1$), тому мова йде про умовну збіжність.

б) Перевіримо виконання умов теореми Лейбниця. $\frac{2}{7} < \frac{4}{10} < \frac{6}{13} < \dots$ Уже перша умова теореми Лейбниця не виконується для даного ряду, отже ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{3n+4}$ розбігається.

в) Перевіримо виконання умов теореми Лейбниця. $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{6} > \frac{1}{24} > \frac{1}{120} \dots$,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0$. Отже, ряд збігається. Для дослідження відповідного знакосталого ряду скористаємось ознакою Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$. Отримане число менше за одиницю, отже ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ теж збігається і знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ збігається абсолютно.

Відповідь: а) ряд збігається умовно; б) ряд розбігається; в) ряд збігається абсолютно.

Завдання 4. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо радіус збіжності цього степеневого ряду за формулою $R=\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{C_{n+1}}$, враховуючи, що коефіцієнти цього ряду

$$C_n=\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}: \qquad R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2n+3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2n+3}}{\sqrt[3]{2n+1}}=1.$$

Далі знайдемо інтервал збіжності даного ряду з умови $|x-x_0|<R$:
$|x+8|<1,\ -1<x+8<1,\ -9<x<-7$.

Тепер перевіримо, чи входять кінці цього інтервалу до області збіжності ряду. Для цього підставимо їх по черзі у заданий степеневий ряд.

$$x=-9, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}.$$

Знакопереміжний ряд, що утворився, збігається за теоремою Лейбниця (члени ряду спадають та $\lim_{n\to\infty}a_n=0$).

$$x=-7, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}.$$

Знакосталий ряд, що утворився, веде себе так само, як і відомий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, тобто розбігається.

Отже, область визначення заданого степеневого ряду – це інтервал $[-9,-7)$.

Відповідь: $x\in[-9,-7)$.

Завдання 5. Розкласти функцію $y=x^2\operatorname{arctg}2x$ в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

Розв'язання. Скористаємось відомим розкладанням в ряд Макларена функції $\operatorname{arctg}t=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}-\ldots$

Тоді $\quad \operatorname{arctg} 2x = 2x - \dfrac{(2x)^3}{3} + \dfrac{(2x)^5}{5} - \dfrac{(2x)^7}{7} + \dfrac{(2x)^9}{9} - ...$

Помножимо обидві частини рівності на x^2:

$$x^2 \operatorname{arctg} 2x = x^2 (2x - \frac{(2x)^3}{3} + \frac{(2x)^5}{5} - \frac{(2x)^7}{7} + ...) = 2x^3 - \frac{2^3 x^5}{3} + \frac{2^5 x^7}{5} - \frac{2^7 x^9}{7} + ... =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+3}}{2n+1}.$$

Знайдемо область збіжності цього числового ряду за алгоритмом, що описаний в попередньому прикладі.

$$C_n = \frac{2^{2n+1}}{2n+1},\ R^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{C_{n+1}} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{2n+1}}{2n+1}}{\dfrac{2^{2n+3}}{2n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}(2n+3)}{2^{2n+3}(2n+1)} = \frac{1}{4},\ R = \frac{1}{2},$$

$$|x| < \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Перевіримо, чи входять до області збіжності кінці інтервалу:

$$x = -\frac{1}{2}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+3}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+3}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4(2n+1)}.$$

Цей знакопереміжний ряд збігається за теоремою Лейбниця (члени ряду спадають та $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$).

$$x = \frac{1}{2}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+3}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+3}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4(2n+1)}.$$

Очевидно, що ми отримали ряд з протилежних по знаку доданків і він також збігається. Отже, область визначення отриманого степеневого ряду – це інтервал $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Відповідь: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+3}}{2n+1}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$

Контрольні завдання за темою «Ряди»

Варіант 1

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{3}{2}+\frac{4}{5}+\frac{5}{10}+\frac{6}{17}+...$

2. Дослідити ряди на збіжність:а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^n$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^5-1}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+15}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{3^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n\sqrt{n}}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y=x^2e^{2x}$.

Варіант 2

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{1}{2}-\frac{4}{4}+\frac{9}{8}-\frac{16}{16}+...$

2. Дослідити ряди на збіжність:а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arccos\frac{1}{n}\right)^n$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3-1}}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{5n^2+7}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\ln n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-10)^n n}{5^n}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y=x^2\sin x$.

Варіант 3

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{2}{1}+\frac{4}{2}+\frac{6}{6}+\frac{8}{24}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^5+1}}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+4}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n|\sin n|}{n^2}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n n^2}{3^n}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=\frac{x}{1+x^2}.$$

Варіант 4

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $1-\frac{3}{4}+\frac{4}{6}-\frac{5}{8}+\frac{6}{10}-\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n+2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+11}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^7}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n+5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg} n$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}5^n(x-1)^n$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=\frac{1}{1+x^3}.$$

Варіант 5

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{3}{27}-\frac{4}{81}+...$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4+8}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{5n^2+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=\frac{x^2}{1-x^3}.$$

Варіант 6

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{3}{1}-\frac{5}{4}+\frac{7}{16}-\frac{9}{64}+...$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n^2+3\right)^2}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n^2+5}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\ln n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^2+3}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=\frac{x}{1+x^5}.$$

Варіант 7

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{2}{1}+\frac{4}{3}+\frac{6}{9}+\frac{8}{27}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність:а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\left(n^3+2\right)^2}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n^3+1}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\ln n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2-2}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y = x\cos x^2$.

Варіант 8

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{2}{4}+\frac{4}{9}+\frac{8}{16}+\frac{16}{25}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{n^2+4}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n^7+2}}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{n^4+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^3-1}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y = x^2\cos x$.

Варіант 9

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{2}{1}-\frac{4}{2}+\frac{6}{6}-\frac{8}{24}+\frac{10}{120}-...$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{6^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{n+5}{n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+8}}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n^4+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{0.5^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^4+9}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=x^2\ln(1-x).$$

Варіант 10

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{17}}-\frac{4}{\sqrt{26}}+...$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{n}{n^2+7}\right)^n$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{10n+3}{n^4-1}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3n+4}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=x\ln\left(1+x^2\right).$$

Варіант 11

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{2}{3\cdot 9}+\frac{3}{4\cdot 27}-\frac{4}{5\cdot 81}+...$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+8}{6^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{\sqrt{n^4+1}}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^7}{2n^9+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{n+4}}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=x^3\ln(1+2x).$$

Варіант 12

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5n+4}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{n^2+6}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^7}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{4n^6+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^3}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=xe^{3x}.$$

Варіант 13

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{2}{1}+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\frac{17}{64}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{9^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+16}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2n^2+10}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{2^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{n(n+1)}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y=x^2e^{-x}$.

Варіант 14

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{3}{1}-\frac{5}{4}+\frac{7}{9}-\frac{9}{16}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{7^n}$; б) $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{n-3}{3n+2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+6}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{-2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2n^3+7}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2(n+1)}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y=x^3\ln(1-3x)$.

Варіант 15

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 6}+\frac{5}{6\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 10}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^3}$; б) $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^4+8}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+3)^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+7)^n\sqrt{n}}{n!}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=\frac{x^4}{1-x^2}.$$

Варіант 16

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{3}{2}-\frac{5}{5}+\frac{7}{10}-\frac{9}{17}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^n$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^4+1}{n^5-2}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+10}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{2^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3^n\sqrt{n}}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=xe^{x^2}.$$

Варіант 17

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+\frac{9}{7}-\frac{16}{9}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5-1}}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{13}}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{2n^3+7}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3\ln n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+10)^n n}{4^n}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y = x\sin x^2$.

Варіант 18

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{4}{1}-\frac{6}{2}+\frac{8}{6}-\frac{10}{24}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{4}{n}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^6+2}}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{15}}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+5}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n|\sin n|}{n^4}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n n^2}{5^n}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y=\frac{x^2}{1+x}$.

Варіант 19

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5^n}{(n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n+3}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^5+6}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{17}}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5n-3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg}\sqrt{n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(x+1)^n$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=\frac{x}{1-x^3}.$$

Варіант 20

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{1}{3}-\frac{3}{9}+\frac{5}{27}-\frac{7}{81}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n+3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5n+3}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^5+8}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{12}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{4n^2-3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{\ln n}}{n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n+1}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=\frac{x^3}{1-x^2}.$$

Варіант 21

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{2}{1}+\frac{3}{4}+\frac{4}{16}+\frac{5}{64}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^3+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}}{n^2+8}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{13}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n^2+7}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{5n-3}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^3+2}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=\frac{x^5}{1+x}.$$

Варіант 22

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{3}{1}-\frac{5}{3}+\frac{7}{9}-\frac{9}{27}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{n^2+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n^3+2}}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{14}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n^2+9}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4\ln n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+2)^2}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y=x^2\cos x^2.$$

Варіант 23

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{2}{5}-\frac{4}{10}+\frac{8}{17}-\frac{16}{26}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність:а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{5^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n^2-1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^7+1}}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^4+8}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^4+1}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y = x^3\cos 2x.$$

Варіант 24

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{5}{1}-\frac{7}{2}+\frac{9}{6}-\frac{11}{24}+\frac{13}{120}-\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{n+2}{n+4}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^7+5}}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1.5^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2n+9}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$$y = x\ln\left(1-x^3\right).$$

Варіант 25

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{11}}+\frac{3}{\sqrt{18}}+\frac{4}{\sqrt{27}}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{4^{2n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{2n^2}{n^4+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{n^3+8}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n+11}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9^{n-1}}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+4}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y=x^3\ln(1+x)$.

Варіант 26

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 4}+\frac{5}{3\cdot 8}+\frac{6}{4\cdot 16}+\ldots$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{8^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+7}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{\sqrt{n^6+1}}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^6}{n^9+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{0.3^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{2n-3}}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y=x^2\ln\left(1-x^2\right)$.

Варіант 27

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{6}{3\cdot 4}-\frac{8}{4\cdot 5}+...$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{5n+2}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}}{n^4+5}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^8}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{4n^5-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^n}{n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2(n+1)^3}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y=x^3e^{-x}$.

Варіант 28

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{0}{1}-\frac{3}{8}+\frac{8}{27}-\frac{15}{64}+...$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+3}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{3n+2}\right)^{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^6+10}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{15}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{12^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+6)^n}{n(n+3)}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y=xe^{-x^3}$.

Варіант 29

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{3}{1}+\frac{5}{16}+\frac{7}{81}+\frac{9}{256}+...$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{11^n}$; б) $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{3n+5}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{\left(n^2+6\right)^3}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{-4}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{\sqrt{n^3+7}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2(2n-1)}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y=x^2\sin x^3$.

Варіант 30

1. Для даного числового ряду скласти загальний член ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності: $\frac{3}{2\cdot 4}-\frac{5}{4\cdot 6}+\frac{7}{6\cdot 8}-\frac{9}{8\cdot 10}+...$

2. Дослідити ряди на збіжність: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^4}$; б) $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{n^2+2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^8+4}$.

3. Дослідити ряди на абсолютну або умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^7}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+2)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^{n-2}}$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n\sqrt{n^3}}{(n+1)!}$.

5. Розкласти функцію в ряд Макларена та вказати область його збіжності:

$y=x^3\sin 2x$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Высшая математика в примерах и задачах: учеб. пособие в 2 т. Т.1/ под ред.Ю.Л. Геворкяна. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2005.

2. Высшая математика в примерах и задачах: учеб. пособие в 2 т. Т.2/ под ред.Ю.Л. Геворкяна . – Харьков: НТУ «ХПИ», 2005.

3. Высшая математика. Программа, методические указания и контрольне задания для студентов всех специальностей заочного обучения: учеб. пособие в 2 ч. Ч.1 / под ред. Ю.Л. Геворкяна. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2002.

4. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики: у 2 ч. Ч.1/Н.О.Чікіна, І.В.Антонова, Л.О.Балака [та ін..] :за ред.. Н.О.Чікіної. – Харків: Підручник НТУ»ХПІ», 2012.-224с.

5. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч – Ч.2/Н.О.Чікіна, І.В.Антонова, Л.О.Балака [та ін..] :за ред.. Н.О.Чікіної. – Харків: Підручник НТУ»ХПІ», 2013. – 216с.

ЗМІСТ

УДК 517.9(075.8)

К 29

Рецензенти:

Г.Я. Тулученко, д-р фіз.-мат. наук, професор,

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»;

О.П. Нечуйвітер, д-р фіз.-мат. наук, професор,

Українська інженерно-педагогічна академія (м. Харків)

Католик І.М., Гайдаш А.М.

Збірка розрахунково-графічних завдань з вищої математики для студентів технічних спеціальностей прискореної форми навчання / І.М.Католик, А.М.Гайдаш. – Харків, 2023. -132 с.

У збірці представлені розрахунково-графічні завдання з вищої математики, що охоплюють сім її розділів, а саме: «Елементи лінійної алгебри», «Векторна алгебра та аналітична геометрія», «Диференціальне числення функції однієї змінної», «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл», «Диференціальні рівняння» та «Ряди». Кожне РГЗ включає 30 варіантів завдань і супроводжується детальною інструкцією для їх розв'язання.

Посібник призначений для викладачів математики та студентів прискореної форми навчання.

Іл. 7. Бібліогр. 6 назв.

SBN

УДК 517.9(075.8)