

**Я.Д.КРУГЛИЙ**, НТУ «ХПИ»

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ С МАЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

У даній роботі розглядаються вимушені коливання скінчено-елементних систем великого розміру з малою нелінійністю. Розроблено метод розрахунку нелінійних коливань, який враховує частковий контакт у роз'ємних механічних з'єднаннях. Метод дозволяє суттєво зменшити розмір задачі і час розрахунку, а також отримати амплітудно-частотні залежності.

In this work the forced vibrations of largeness finite-element systems with small non-linearity are considered. The method of calculation of nonlinear vibrations, which takes into account a partial contact in sectional mechanical connections, is developed. A method allows substantially to decrease the size of task and checkout, and also get peak frequency dependences.

### **Введение**

В конструкциях современных облопаченных дисков турбин используются различные механические соединения контактного типа, в которых присутствует сухое трение. Так с целью повышения жесткости длинных лопаток турбин используется бандажи, содержащие разъемные соединения. Под действием центробежных сил, а также при колебаниях лопаток, контактная область в этих соединениях изменяется, что может привести к раскрытию межлопаточного бандажного соединения и образованию отдельных пакетов лопаток. Для безотказной работы таких конструкций требуются анализ динамической прочности с учетом контактных соединений еще на стадии проектирования. В силу нелинейного характера контактных соединений, исследования динамических характеристик таких систем являются весьма сложными и требующими больших временных затрат. С появлением метода конечных элементов и программных комплексов, построенных на нем, стали возможны исследования нелинейной динамики конструкций сложной формы [1]. Однако, компьютерные технологии еще не позволяют решать быстро и с наименьшими затратами машинных ресурсов задачи большой размерности с учетом нелинейности, вызванной контактными взаимодействиями в соединениях [2]. Обычно в реальном облопаченном диске контакт наблюдается в малой области и нелинейность малая, хотя сама система при моделировании МКЭ имеет большую размерность [3]. Поэтому часто проблему анализа колебаний в системе с контактным соединением решают с помощью применения жесткостных элементов в соединении [4-5]. Однако достоверность такого подхода не доказана. Поэтому актуальной остается проблема построения достоверных и эффективных математических моделей и методов для расчета вынужденных нелинейных колебаний с учетом контактных соединений.

## Постановка задачи

Необходимо разработать метод определения амплитудно-частотной зависимости в области резонанса при нелинейных колебаниях систем с малой областью нелинейности. При этом метод должен учитывать, что при моделировании колебаний таких систем разрешающие уравнения имеют большую размерность, а нелинейность определяется контактным взаимодействием малого числа степеней свободы системы.

## Метод исследования нелинейных колебаний при контактном взаимодействии в малой области

Уравнение нелинейных вынужденных колебаний при контактном взаимодействии для конечно-элементной системы можно представить в следующем виде:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [D_N]\{\dot{u}\} + [K_N]\{u\} = \{F(t)\}, \quad (1)$$

где  $[M]$  – матрица масс системы,  $\{F(t)\}$  – вектор вынуждающей силы,  $[D_N]$  – нелинейная матрица демпфирования,  $[K_N]$  – нелинейная матрица жесткости.

Считая, что внутренне демпфирование системы мало, а демпфирование в контактном взаимодействии реализуется в малой области, в первом приближении можно пренебречь демпфированием системы.

Уравнение (1) представим в следующем виде:

$$[M]\{\ddot{u}\} + ([K_L] + [K_N] - [K_L])\{u\} = \{F(t)\}, \quad (2)$$

где  $[K_L]$  – линейная матрица жесткости конечно-элементной системы без учета контакта в разъемном соединении.

Преобразуем уравнение (2) к следующему виду:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K_L]\{\ddot{u}\} = \{F(t)\} - ([K_N] - [K_L])\{u\}. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда на систему действует периодическая гармоническая вынуждающая сила:

$$\{F(t)\} = \{F\} \sin \omega t, \quad (4)$$

где  $\omega$  – частота вынуждающей нагрузки.

Таким образом, рассматриваются одночастотные нелинейные колебания под действием периодических гармонических сил в системах с большим количеством степеней свободы. Поведение такой нелинейной системы вблизи резонанса, если нелинейность незначительная, можно исследовать методом малого параметра [6]. При этом подходе решение системы (3) ищется в виде рядов:

$$\{u_z\} = \{\varphi_z\}^{(1)} a \cos(\omega t + \vartheta) + \varepsilon \{q_z\}^{(1)}(a, \omega t, \psi) + \varepsilon^2 \{q_z\}^{(2)}(a, \omega t, \psi) + \dots, \quad (5)$$
$$(z = 1, 2, \dots, H),$$

где  $z$  – номер собственной формы,  $H$  – число собственных форм,  $\{\varphi_z\}$  – вектор  $z$ -й собственной формы,  $\varepsilon$  – малый параметр,  $a$  – амплитуда колебаний,  $\vartheta$  – сдвиг фаз,  $\psi = \omega t + \vartheta$ ,  $\{q\}^{(1)}$ ,  $\{q\}^{(2)}$  – периодические функции по обеим

угловым переменным  $\omega t$  и  $\psi$  с периодом  $2\pi$ .

Так как при контактном взаимодействии в малой области возникает малая нелинейность, то в решении (5) можно пренебречь членами ряда первого порядка малости  $\varepsilon$  и выше. В этом случае решение (5) примет следующий вид:

$$\{u_z\} = \{\varphi_z\}^{(1)} a \cos(\alpha t + \vartheta), \quad (z = 1, 2, \dots, H). \quad (6)$$

Для решения системы (3) с помощью выражения (6) необходимо найти собственную форму для конечно-элементной системы без учета контакта в разъемном соединении.

Для определения собственных форм колебаний линеаризованной конечно-элементной системы предлагается алгоритм, состоящий из двух шагов.

На первом шаге решается задача определения контактной площадки в соединении. Решение задачи контактного взаимодействия системы, состоящей из  $b$  упругих тел (в случае малых по сравнению с размерами тел перемещений) сводится к минимизации энергетического функционала, при этом возможные перемещения на поверхности  $S_b$  должны удовлетворять кинематическим граничным условиям

$$u^b(\rho) = g^b(\rho), \quad \rho \in S_b, \quad (7)$$

где  $g^b(\rho)$  – заданная функция,  $\rho$  – радиус-вектор точек поверхности тела.

Кроме того, на поверхности контакта должны выполняться условия не проникания, которые можно записать в виде

$$R_b(\rho_l) \leq 0, \quad b \neq l, \quad \rho_l \in S_l, \quad (8)$$

где  $R_b$  – уравнение границы области контакта для  $b$ -то тела;  $\rho_l$  – радиус-вектор точек  $l$ -го тела (с учетом деформирования).

При выполнении неравенства (8) в зоне контакта обеспечивается совместность касательных перемещений контактируемых тел, а при обращении его в равенство – возможно взаимное проскальзывание.

В рамках МКЭ возможные области контакта  $S_l$  разбиваются на специальные контактные конечные элементы [7], для которых условия (8) сводится к следующему виду:

$$\mu |F_n| > |F_s|; \quad (9)$$

$$\mu |F_n| = |F_s|, \quad (10)$$

где индексы  $n, s$  – означают нормальное и касательное направление,  $F$  – внутреннее контактное усилие,  $\mu$  – коэффициент сухого трения. Нормальные и касательные силы определяются выражениями:

$$F_n = k_n (u_n^j - u_n^i - \Delta_n), \quad F_s = k_s (u_s^j - u_s^i - \Delta_s), \quad (11)$$

где  $i$  и  $j$  – номера узлов, в которых возникает контакт,  $k$  – контактная жесткость,  $\Delta$  – предварительный зазор. В результате решения статической контактной задачи определяются области контакта в бандажном соединении.

На втором этапе решается задача определения собственных частот и

форм линеаризованной системы, полученной наложением связи на узлы, которые входят в контакт:

$$u_i = u_j, \quad (12)$$

где  $i$  и  $j$  – номера узлов, на которые накладываются условия контакта.

Собственные частоты и формы определяем из решения уравнения свободных колебаний для линеаризованной системы:

$$([K_L] - p_z^2 [M])\{\varphi_z\} = 0. \quad (13)$$

Полученные таким образом собственные формы близки к форме деформации нелинейной системы с учетом контактного взаимодействия. В случае если не накладывать связь на узлы, входящие в контакт, будут получены собственные формы со значительными амплитудами в месте контакта, находящимися в противофазе, что приведет к значительным искажениям результатов нелинейного анализа при использовании метода малого параметра.

Матрицы нелинейной жесткости при малой области контакта можно представить в блочном виде:

$$[K_N] = \begin{bmatrix} K_{mm}^N & K_{mk}^L \\ K_{km}^L & K_{kk}^L \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $m$  – число степеней свободы в области контактного взаимодействия,  $k$  – число степеней свободы в линейной области системы,  $[K_{mm}^N]$  – нелинейный блок матрицы жесткости, соответствующий контактной области, который меняется в зависимости от нагрузки,  $[K_{km}^L]$ ,  $[K_{mk}^L]$ ,  $[K_{kk}^L]$  – линейные блоки матрицы жесткости системы, независимые от нагрузки. При этом  $m \ll k$ ,  $m + k = N$ . Представим линейную матрицу жесткости в блочном виде:

$$[K_L] = \begin{bmatrix} K_{mm}^L & K_{mk}^L \\ K_{km}^L & K_{kk}^L \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Рассмотрим разность между нелинейной жесткости системы (14) с малой областью контактного взаимодействия и линейной матрицей той же системы без учета контакта (15). Она имеет следующий вид:

$$[K_N] - [K_L] = \begin{bmatrix} K_{mm}^{NL} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } [K_{mm}^{NL}] = [K_{mm}^N] - [K_{mm}^L]. \quad (16)$$

Теперь матрицу разности между нелинейной и линейной матрицами жесткости размерностью  $N$  в уравнении (3) можно заменить матрицей  $[K_{mm}^{NL}]$  размерностью  $m$  (16).

Тогда

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K_L]\{u\} = \{F(t)\} - \{F_0(a, \vartheta)\}. \quad (17)$$

Разлагая нелинейный вектор вынуждающей силы  $\{F_0(a, \vartheta)\}$  в ряд по  $z$ -й собственной форме получим:

$$\{F_0(a, \vartheta)\} = \sum_{r=1}^m \varphi_r^z Q_r(a, \vartheta), \quad (18)$$

где  $Q$  – вектор возмущающей обобщенной силы, который определяется

$$\{Q_m(a)\} = \{R_m(a)\} a \cos \psi; \quad (19)$$

$$\{R_m(a)\} = \begin{pmatrix} R_1(a) \\ R_2(a) \\ \vdots \\ R_m(a) \end{pmatrix} = [K_{mm}^{NL}(a)] \{\varphi_m^z\}, \quad (20)$$

где  $\{\varphi_m^z\}$  – подвектор  $z$ -й собственной формы, состоящий из  $m$ -элементов соответствующих степеням свободы матрицы  $[K_{mm}^{NL}]$ .

Согласно методу малого параметра [6] в резонансном случае производные от амплитуды  $a$  и разности фаз  $\vartheta$  по времени представляет собой функции от  $a, \vartheta$ , вектора обобщенной нагрузки и определяются как решение системы дифференциальных уравнений первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{2\pi p_z} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^m \{\varphi_r^z\}^T \{Q_r(a)\} \sin \psi d\psi - \frac{\sum_{r=1}^H \{F_r\}^T \{\varphi_r^z\}}{p_z + \omega} \cos \vartheta \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= p_z - \omega - \frac{1}{2\pi p_z a} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^m \{\varphi_r^z\}^T \{Q_r(a)\} \cos \psi d\psi - \frac{\sum_{r=1}^H \{F_r\}^T \{\varphi_r^z\}}{a(p_z + \omega)} \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где  $p_z$  –  $z$ -я собственная частота линеаризованной системы,  $\varphi^z$  –  $z$ -я собственная форма линеаризованной системы,  $m$  – количество элементов нелинейной матрицы жесткости,  $H$  – число элементов матрицы жесткости всей системы.

Так как для определения обобщенной нагрузки необходимо иметь явную зависимость компонент нелинейной матрицы жесткости (16) на данной частоте вынужденных колебаний от амплитуды  $a$ , а это при контактном взаимодействии невозможно. Предлагается следующий итерационный подход решения системы (21):

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_{i+1}}{dt} &= -\delta_e(a_i) a_{i+1} - \frac{F^*}{p_z + \omega} \cos \vartheta_{i+1}; \\ \frac{d\vartheta_{i+1}}{dt} &= \omega_e(a_i) - \omega + \frac{F^*}{a_{i+1}(p_z + \omega)} \sin \vartheta_{i+1}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где:

$$\delta_e(a_i) = -\frac{1}{2\pi a_i p_z} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^m \{\varphi_r^z\}^T \{Q_{r0}(a_i)\} \sin \psi d\psi ;$$

$$\omega_e(a_i) = p_z - \frac{1}{2\pi p_z a_i} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^m \{\varphi_r^z\}^T \{Q_{r0}(a_i)\} \cos \psi d\psi ; \quad F^* = \sum_{r=1}^H \{F_r\}^T \{\varphi_r^z\}.$$

Параметры  $\delta_e(a_i)$  и  $\omega_e(a_i)$  представляют собой соответственно эквивалентный декремент затухания и полную эквивалентную собственную частоту рассматриваемой системы.

На первой итерации вычисляются эквивалентный декремент затухания и полная эквивалентная собственная частота для начального приближения амплитуды  $\delta_e(a_0)$ ,  $\omega_e(a_0)$ . Компоненты нелинейной матрицы жесткости (19, 20) определяются из решения статической контактной задачи под действием приложенного в узлах статического кинематического нагружения в виде  $\{\varphi_z\} a_0$ , за исключением узлов, находящихся в области контактного взаимодействия. В качестве  $a_0$  предлагается взять среднее арифметическое значение от модального статического решения нелинейной контактной задачи при действии амплитуды вынуждающей нагрузки:

$$a_0 = avr[\{u_{cmax}\} \otimes \{\varphi_z\}^{-1}]. \quad (23)$$

где  $avr[]$  – оператор среднего арифметического,  $\otimes$  – знак покомпонентного произведения векторов (произведение Кронекера).

При стационарных режимах колебаний с постоянными амплитудами и фазами, левые части уравнений первого приближения (22) равны нулю. Для определения стационарных значений амплитуды  $a_{i+1}$  и фазы  $\vartheta$  получаем систему:

$$\left. \begin{aligned} \delta_e(a_i) a_{i+1} + \frac{F^*}{p_z + \omega} \cos \vartheta_{i+1} &= 0; \\ \omega_e(a_i) - \omega + \frac{F^*}{a_{i+1}(p_z + \omega)} \sin \vartheta_{i+1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Из уравнений (24) находим с точностью до величин второго порядка малости зависимость между амплитудой  $a_{i+1}$  и частотой внешних сил  $\omega$ :

$$a_{i+1}^2 \left[ \left( \omega_e^2(a_i) - \omega^2 \right)^2 + 4\delta_e^2(a_i) \omega^2 \right] = \{F^*\}^2. \quad (25)$$

Для нахождения фазы колебаний, из соотношения (24) получаем:

$$\vartheta_{i+1} = \arctg \frac{\omega_e(a_i) - \omega}{2\omega \delta_e(a_i)}. \quad (26)$$

Соотношения (25) позволяют построить зависимость  $a_{i+1}$  от  $\omega$ , из которой определяются значения  $a_{i+1}$  для следующей итерации:

$$a_{i+1} = \max_{\omega_1, \omega_2} (a_{i+1}(\omega)), \quad (27)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – частоты, ограничивающие резонансный диапазон.

Итерационный процесс будет продолжен до тех пор, пока не будет выполняться следующее равенство:

$$\|a_{i+1} - a_i\| \leq \eta, \quad (28)$$

где  $\eta$  – заданная точность.

Из выражения (25) можно построить кривую, характеризующую резонансные колебания, возникающие в нелинейной системе в результате воздействия внешней периодической силы, частота которой близка к одной из собственных частот системы.

### Выводы

- 1 Предложен метод решения задачи о вынужденных нелинейных колебаниях систем большой размерности с малой нелинейностью контактного типа.
- 2 Данный метод позволяет существенно уменьшить размерность задачи.
- 3 Предложенный метод решения задачи нелинейных колебаний позволяет получать амплитудно-частотную зависимость в области резонансной частоты, которая близка к одной из собственных частот линеаризованной системы.

**Список литературы:** 1. Я.Д.Демуз, В.А.Жовдак, А.Ф.Кабанов, А.С.Степченко. Исследование влияния контакта в бандажном соединении на собственные частоты лопаточного аппарата на основе трехмерных моделей // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков. – 2005. – № 21. – С. 67-72. 2. В.О.Жовдак, Я.Д.Демуз, О.С.Степченко. Нелінійні коливання пакетів лопаток з урахуванням технологічних відхилень у роз'ємних з'єднаннях // Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Праці конференції. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2008. – С. 102-103. 3. В.О.Жовдак, О.С.Степченко, Я.Д.Демуз. Нелінійні коливання пакетів лопаток з роз'ємними з'єднаннями // Машинознавство. – 2008. – № 10 (136). – С. 17-21. 4. Ю.С.Воробьев, С.Янецки, Е.В.Тишковец, С.П.Канило. Анализ колебаний турбинного лопаточного аппарата со связями на основе трехмерных моделей // Вибрации в технике и технологиях. – 2001. – № 4 (20). – С. 19-23. 5. Ender Cigeroglu, Ning An, Chia-Hsiang Meng. Forced Response Prediction of Constrained and Unconstrained Structures Coupled Through Frictional Contacts // Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. – Vol. 131. – March 2009/022505. – P. 1-11. 6. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М., Наука, 1974. 7. O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor. The Finite Element Method. – Vol. 2. Butterworth-Heinemann, 2000. – 480 p. 8. В.А.Толок, В.В.Киричевский, С.И.Гоменюк, С.Н.Гребенюк, Д.П.Бувайло. Метод конечных элементов. Теория, алгоритмы, реализация. – К.: Наукова думка, 2003. – 283 с.

Поступила в редколлегию 14.05.2009